

« بردارها و کمیت‌های برداری »

کمیت‌های فیزیکی ۱ نوع اند

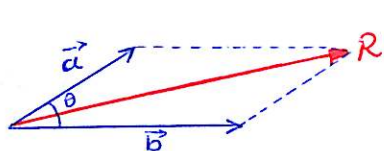
- ① کمیت‌های (اسکالر) و آنها دارای بُرداری نیست و باید عدد بیان می‌شود. مانند جرم - زمان - حجم - چگالی - فشار - دما - انرژی پتانسیل الکتریکی - دما - شدت جریان الکتریکی - ...
- ② کمیت برداری علاوه بر بُرداری جهت (راست‌دست) است و از تعداد جمع برداری پیروی می‌کند. مانند مکان - سرعت - شتاب - نیرو - میدان درآسی - میدان الکتریکی - ...

* جهت برداری را با فلش $\vec{F}$ نمایش می‌دهند.

* بُرداری هر بردار عدد مثبتی است که بیانگر اندازه و مقدار آن جهت است $(F \text{ یا } |\vec{F}|)$

برآیند دو بردار

قطر متوازی الاضلاعی که بر دو بردار ساخته می‌شود برآیند دو بردار است.



$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow$$

$$R = 2a \cos \frac{\theta}{2}$$

* اگر دو بردار هم‌اندازه باشند

* اگر زاویه بین دو بردار افزایش یابد، بُرداری برآیند آن‌ها کم‌تر می‌شود.

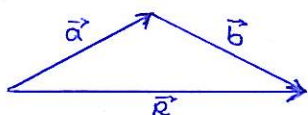
* برآیند دو بردار که با هم زاویه ۱۸۰ درجه بسازند، هم‌رکز صفر می‌شود.

* بُرداری برآیند دو بردار بین مقدار بیشینه (۲ بردار هم‌جهت) و مقدار کمینه (۲ بردار خلاف جهت) قرار دارد.

$$|a - b| \leq R \leq a + b$$

* اگر برآیند ۲ نیروی در حال تعادل صفر شود، در صورت حذف هر یک از نیروها، بُرداری برآیند نیروهای باقی‌مانده با هم برابر است.

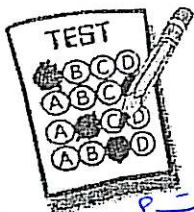
* هرگاه برآیند سه بردار صفر شود، شش‌تایی می‌دهند و بُرداری هر یک از بردارها از مجموع بُرداری دو بردار دیگر کمتر و از تفاضل آن دو بیشتر است. (روش هندسه‌ای یا مثلثی)



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$|a - b| \leq R \leq a + b$$





آزمون

۹۰ تجربی: اگر $F_1 + F_2 + F_3 = 0$ و $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 5N$ باشد، اندازه $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F}_3|$ چندین است؟

۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ:

۱۹ ریاضی: سه بردار سه نیروی $F_1 = 3N$ ، $F_2 = 8N$ و $F_3 = 7N$ برابر صفر است. زاویه بین دو نیروی F_1 و F_2 چند رادیان

است؟

$\frac{5\pi}{4}$ (۴)

$\frac{2\pi}{3}$ (۳)

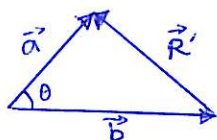
$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

پاسخ:

تفاضل دو بردار

برای بدست آوردن بزرگی تفاضل دو بردار می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم.



$$\vec{R}' = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$R' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$R' = 2a \sin \frac{\theta}{2}$$

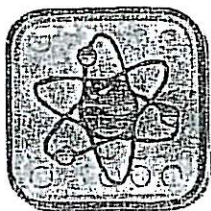
* اگر بردار هم اندازه باشند:

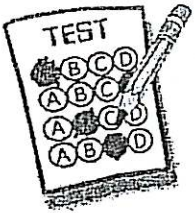
* اگر زاویه بین بردار افزایش یابد، بزرگی تفاضل آن‌ها چگونه افزایش می‌یابد.

* بزرگی تفاضل دو بردار، یعنی مجموع بزرگی آن‌ها و تفاضل بزرگی آن‌ها است.

* بیشینه بزرگی تفاضل (دو بردار خلف جهت) برابر $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ و کمینه بزرگی تفاضل دو بردار (دو بردار هم جهت)

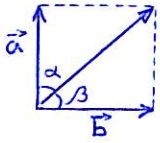
برابر $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ است.





حالت‌های خاص پراش و قضاصل

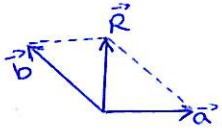
$$R' = R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad * \text{ اگر دوبردار عمود باشند}$$



در این حالت بردارهای پراش و قضاصل هم اندازه اند (مانند قطب‌های مستطیل).

همواره بردار پراش (برایند) با بردار بزرگتر زاویهٔ کوچکتری سازد. $|a| \geq |b| \Rightarrow \alpha \leq \beta$

* در حالتی که بردار پراش بر یکی از بردارها عمود است، زاویهٔ بین دوبردار متغیر خواهد بود.



$$a^2 + R^2 = b^2$$

* اگر زاویهٔ بین دوبردار از صفر تا 180° افزایش دهیم، بزرگی پراش آن‌ها کاهش یافته و بزرگی قضاصل آن‌ها افزایش می‌یابد.

$$* \text{ اگر } \vec{a} = \vec{b} \text{ و } \theta \text{ زاویهٔ خاص باشد}$$

$$R \begin{cases} \theta = 0^\circ \rightarrow R = \sqrt{2}a \\ \theta = 90^\circ \rightarrow R = \sqrt{2}a \\ \theta = 180^\circ \rightarrow R = a \end{cases} \quad \text{و} \quad R' \begin{cases} \theta = 0^\circ \rightarrow R' = a \\ \theta = 90^\circ \rightarrow R' = \sqrt{2}a \\ \theta = 180^\circ \rightarrow R' = \sqrt{2}a \end{cases}$$

تست

۹۲ خارج ریاضی: دوبردار هم اندازه بر نقطه‌ای اثر می‌کنند و زاویهٔ بین آن‌ها قابل تغییر است. اندازهٔ قضاصل آن‌ها در حالتی بیشتر است.

(۱) برهم عمود باشند

(۳) پراش آن برابر صفر باشد.

(۲) پراش آن‌ها بیشتر باشد

(۴) راستای آن‌ها با هم زاویهٔ 45° و 135° سازد

پاسخ:

۹۱ ریاضی: زاویهٔ بین دوبردار هم اندازه 53° و 127° است. بزرگی پراش پراش دوبردار، چند برابر بزرگی قضاصل آن دوبردار است؟ (چون $\cos 53^\circ = 0.4$)

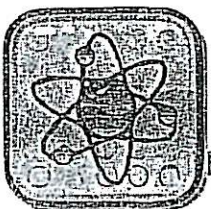
۲ (۴)

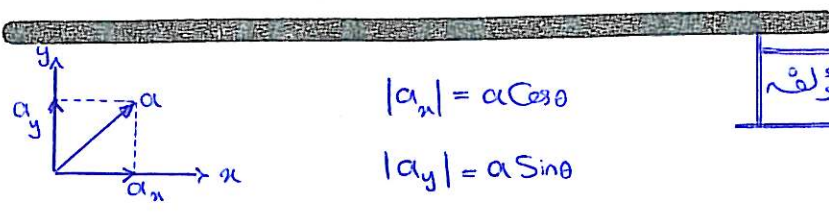
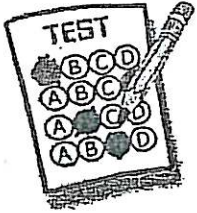
$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ:





$$|a_x| = a \cos \theta$$

$$|a_y| = a \sin \theta$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

* برای دو بردار بر حسب مؤلفه ها

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} \rightarrow R = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}$$

* تفاضل دو بردار بر حسب مؤلفه ها

$$\vec{R}' = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} \rightarrow R' = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$$

✓ تست

۱۳) ریاضی: برای بردار $\vec{A} = 5\vec{i}$ و $\vec{B} = -\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{5\sqrt{3}}{4}\vec{j}$ و $\vec{C} = \frac{5}{4}\vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\vec{j}$ کدام است؟

$$3\vec{i} + 5\sqrt{3}\vec{j} \quad (4)$$

$$\sqrt{3}\vec{j} \quad (3)$$

$$5\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} \quad (2)$$

$$5\vec{i} \quad (1)$$

پاسخ:

۱۱) ریاضی: دو بردار $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ و $\vec{B} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ برهم عمود و سرانیدانها با محور x زاویه ۴۵ درجه می سازد. α و β به ترتیب از راست به چپ کدام اند؟

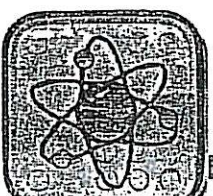
$$1, 2 \quad (4)$$

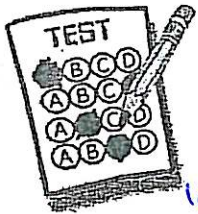
$$1, -2 \quad (3)$$

$$-1, 2 \quad (2)$$

$$-1, -2 \quad (1)$$

پاسخ:



تست جامع

۱- سه نیروی $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ در یک زاویه 120° می‌سازند. اگر اندازه نیروها به ترتیب ۵، ۱۰ و ۱۵ نیوتن باشد، برآیند آن‌ها چند نیوتن است؟

(۹۲ ریاضی)

(۴) ۱۰

(۳) $5\sqrt{3}$

(۲) ۵

(۱) صفر

۲- اگر برآیند سه نیروی $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ صفر و بزرگی هر کدام ۲۰ نیوتن باشد، اندازه $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F}_3$ چند نیوتن است؟

(خارج ۹۱ ریاضی)

(۴) $20\sqrt{2}$

(۳) ۴۰

(۲) ۲۰

(۱) صفر

۳- برآیند دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بر $\vec{F}_3$ عمود و هم‌اندازه با آن است. نسبت $\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|}$ چه قدر است؟

(خارج ۹۰ تجربی)

(۴) ۲

(۳) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$

۴- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک صفحه قرار دارند. اگر $\vec{a} + \vec{b}$ عمود بر $\vec{a} - \vec{b}$ باشد، این دو بردار باید نسبت به هم چگونه باشند؟

(۴) هم‌اندازه یا عمود بر هم

(۳) هم‌اندازه و عمود بر هم

(۲) عمود بر هم

(۱) هم‌اندازه

(خارج تجربی ۸۹)

۵- برآیند سه نیرو با اندازه‌های $F_1 = 12N$ و $F_2 = 14N$ و $F_3 = 20N$ برابر صفر است. بزرگی تفاضل دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ چند نیوتن است؟

(خارج ریاضی ۸۹)

(۴) ۲۰

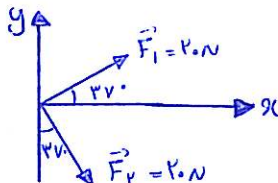
(۳) ۱۸

(۲) ۱۵

(۱) ۱۰

۶- دو شغل زیر، دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در صفحه xy مرتبط با O اثر می‌کنند. نیروی $\vec{F}_3$ در جهت مناسب مرتبط با O اثر می‌کند تا برآیند این سه نیرو صفر می‌شود. اندازه $\vec{F}_3$ چند نیوتن است؟

(۸۸ ریاضی)



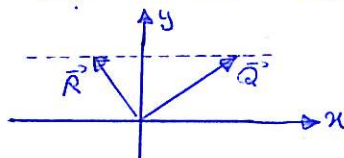
(۲) ۴۰

(۱) ۲۰

(۴) $40\sqrt{2}$ (۳) $20\sqrt{2}$

۷- اگر دو بردار $\vec{R}$ و $\vec{Q}$ مطابق شکل روبه‌رو باشند، کدام بردار می‌تواند نشان دهنده بردار $\vec{R} - \vec{Q}$ باشد؟

(خارج تجربی ۹۲)



(۲) ←

(۱) →

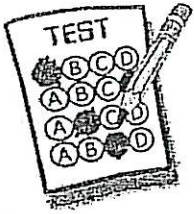
(۴) ↙

(۳) ↘

۸- دو نیروی $F_1 = 5N$ و $F_2 = 10N$ مرتبط با O اثر می‌کنند. اگر زاویه بین این دو نیرو 120° چه باشد، اندازه برآیند آن‌ها چند نیوتن است؟

(۹۲ تجربی)

(۴) $5\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۱) $5\sqrt{3}$ 



۹- بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با بردار $\vec{a}$ زاویه 40° می سازد. اگر اندازه بردار $\vec{a}$ برابر ۱۰ واحد و اندازه بردار $\vec{b}$ واحد باشد، زاویه بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟ (۹۰ ریاضی)

(۴) ۱۲۰

(۳) ۱۵۰

(۲) ۹۰

(۱) ۴۰

۱۰- بردار $\vec{a}$ با اندازه‌های مساوی $\vec{b}$ و $\vec{c}$ زاویه α می سازد، $\vec{a}$ واحد و تفاضل آن‌ها $\vec{a}$ واحد است. بزرگی هر بردار چند واحد است؟ (۸۸ خارج تجربی)

(۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{4}{5}$

(۲) ۵

(۱) ۲

