
**** هرجا که محاسبه ای لازم است؛ محاسبات را تا سه رقم بعد از اعشار انجام دهید****

۱- الف) به کمک تعبیر هندسی فرمول ریشه‌یابی به روش نیوتن را به دست آورید.(۱,۵)

ب) معادله $\sin(x)-e^{-x}=0$ را به کمک روش نیوتن و با نقطه شروع $x_0=0.5$ و شرط توقف $\frac{|x_n-x_{n-1}|}{|x_n|}\le 0.01$ حل کنید.(همه محاسبات تا سه رقم بعد از اعشار انجام شود) (۲)

ج) برای پیدا کردن ریشه معادله‌ای به صورت $f(x)=0$ که مقدار مشتق تابع در ریشه آن برابر صفر است (یعنی $f'(\mathrm{c})=0$ که c همان ریشه است)؛ کدام شرط توقف بهتر است: $|f(x_n)|\le Tol$ یا $\frac{|x_n-x_{n-1}|}{|x_n|}\le Tol$ چرا؟ (۰,۷۵)

د) اگر بخواهید ریشه ای از معادله گفته شده در قسمت ب و در بازه $[0,1]$ را به کمک متلب به دست آورید؛ اینکار را چگونه انجام می‌دهید (یعنی بنویسید چگونه تابع را تعریف می کنید و از چه دستوری و چگونه برای ریشه یابی استفاده می‌کنید.) (۱)

۲- الف) چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x)=x^2Ln(x)$ را در نقاط $x_0=1, x_1=1.5, x_2=2$ به دست آورید. (۱,۵)

ب) یک کران بالا برای خطای چندجمله‌ای درونیاب در نقطه $x=1.75$ ارائه کنید. (۱,۵)

۳- الف) معادله $y=\frac{a}{be^{2x}+1}$ را به فرم خطی بنویسید. (۱,۵)

ب) فرض کنید فرمول بالا برای داده هایی به صورت زیر پیشنهاد شده است. (داده‌ها کاملا فرضی هستند)

x	0.1	1.6	2.3	3.2
y	1.2	1.3	1.5	1.7

توضیح دهید بعد از خطی سازی فرمول بالا؛ داده‌های داده شده در بالا باید به چه شکل تغییر یابند و از چه دستوری در متلب استفاده کنیم تا در نهایت بتوانیم a,b را تخمین بزنیم. (۱,۲۵)

۴- الف) در انتگرال گیری به روش ذوزنقه‌ای بازه انتگرال‌گیری باید حداقل به چند زیر بازه تقسیم شود تا خطای انتگرال $\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ کمتر از 0.001 شود. (۲)

ب) اگر بخواهید انتگرال بالا را در متلب به روش ذوزنقه‌ای و با نقاطی که در قسمت الف به دست آورده‌اید حل کنید؛ این کار را چگونه انجام می‌دهید.(۱)

۵- فرض کنید در تابع $f(x)$ داشته باشیم. $f(-1)=2f(1)$ به علاوه $\int_{-1}^1 f(x)dx$ با $h=1$ با روش ذوزنقه‌ای برابر 3.8 و با روش سیمپسون برابر ۴ باشد. مقادیر $f(-1), f(0), f(1)$ را بیابید. (۲)

۶- گزاره‌های زیر درستند یا نادرست؟ در مورد درستی یا نادرستی هریک توضیح دهید.(۲)

الف) برای محاسبه چند جمله‌ای $P(x)=x^3-6x^2+3x-0.149$ بهتر است آن را به فرم $P(x)=((x-6)x+3)x-0.149$ بنویسیم.

ب) برای محاسبه ریشه مثبت معادله درجه دوم $x^2 - 1395x + 0.2017$ به جای استفاده از فرمول $x = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$ بهتر است از فرمول $x = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ استفاده کنیم.

۷- الف) α را به گونه‌ای تعیین کنید که دستگاه زیر دارای جواب نباشد.(۱,۵)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب) فرض کنید دستگاه $Ax = b$ دارای جواب نیست؛ اما ما نیاز داریم به هر حال یک جواب برای دستگاه به دست آوریم که حتی المقدور مناسب باشد. این کار را چگونه در متلب انجام می‌دهیم.(۰,۵)

برخی از فرمول‌ها:

خطای انتگرال گیری ذوزنقه‌ای: $E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\alpha)$

خطای چند جمله‌ای درونیاب: $\mathrm{E} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

فرمول انتگرال‌گیری سیمپسون: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + f(x_{2m})\right)$

فرمول انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$

موفق باشید.