ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

ایوان نیون

ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۱۵)

ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۱۵)

ایوان نیون

ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۵۱

مرکز نشر دانشگاهی
۴۵۷

Mathematics of Choice of How to Count without Counting
New Mathematical Library (15)
Ivan Niven
The Mathematical Association of America, 1965

ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم
تألیف ایوان نیون
ترجمهٔ دکتر علی عمیدی، بتول جذبی
ویراستهٔ دکتر علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ سوم ۱۳۷۹
تعداد ۴۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: الهادی ـ قم

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

نیون، ایوان مورتن، ۱۹۱۵ ـ Niven, Ivan Morton.
ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم / ایوان نیون؛ ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی. ـ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
هفت، ۲۲۲ ص. : مصور، جدول. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۵۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۵۱) (ریاضیات پیش‌دانشگاهی؛ ۱۵)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی:
Mathematics of Choice or How to count without counting.
کتابنامه: ص. ۲۲۲.
چاپ سوم: ۱۳۷۹. ISBN 964-01-0457-3
۱. آنالیز ترکیبی. الف. عمیدی، علی، ۱۳۱۲ ـ ، مترجم. ب. جذبی، بتول، ۱۳۲۹ ـ ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان. ه. عنوان: چگونه بدون شمارش بشماریم.
QA۱۶۴/ن۹ر۹ ۵۱۱/۶
۱۳۶۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۲۷۵۸ ـ ۶۸م

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان | صفحه

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی است که به کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان يك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ کمی این توانایی را دارند که در آن زمینهٔ علمی، و با رعایت همهٔ دقتها و نکته‌ها، کتابهایی تألیف کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، و گاه برای افراد عادی، آموزنده و قابل درك باشد. این شخصیتها، که در هر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود و جوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشر کرده است که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده و هرکدام، چه در آمریکا و چه در کشورهای دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند و کوشش لازم به‌عمل آمده است تا، ضمن رعایت امانت کامل‌در ترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی در یك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به آنها باز گشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملاً آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هر مسأله را خود حل کند و فقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. در این کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. در مورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به ادامهٔ کار و گسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

موضوع این کتاب غالباً «آنالیز ترکیبیاتی» و یا «ترکیبیات» نامیده‌می‌شود. مسائلی که مورد بحث قرار گرفته‌اند از نوع «به‌چند طریق ممکن است که...؟»، یا صورتهای دیگر این عبارت هستند. جایگشتها و ترکیبها بخشی از آنالیز ترکیبیاتی را تشکیل می‌دهند که شاید خواننده قبلاً با آنها آشنا شده باشد. دراین صورت، ممکن است خواننده با بعضی از مطالب سه فصل اول آشنا باشد.

این کتاب تنها با پیشنیاز مقدمات جبر، مستقلاً قابل استفاده است. خلاصه‌هایی که شامل تمام فرمولهاست در آخر هرفصل داده شده‌اند. در سرتاسر کتاب مسائل زیادی برای خواننده آورده‌ایم. درواقع این کتاب بیشتر یک کتاب مسأله است که درآن اطلاعات پایه‌ای کافی برای حل مسائل عرضه شده‌است. بعد از فصل آخر، فهرستی از مسائل گوناگون آمده است. درپایان کتاب برای مسائل مشکلتر راه حل یا خلاصه‌ای از راه حل را آورده‌ایم و برای مسائل ساده‌تر به پاسخهای عددی اکتفا کرده‌ایم.

اعضای هیأت داوری گروه بررسی ریاضیات مدرسه‌ای، و همچنین هربرت سوکرمان[1] پیشنهادهای مفیدی داده‌اند. ماکس بل[2] بعضی ازمباحث را با دانشجویان خود درمیان نهاده و نظرات آنان را برای من فرستاده است. مارك كاك[3] عناوین فرعی ظریف و بدیع کتاب را پیشنهاد کرده‌است. مراتب قدردانی خود را برای تمامی این کمکها ابراز می‌دارم.

1. Herbert S. Zuckerman 2. Max Bell 3. Mark Kac

۱

مسائل مقدماتی

هدف این فصل معرفی چند مسألهٔ نمونه برای تشریح موضوع کتاب است. بسط سیستماتیك موضوع از فصل بعدی شروع می‌شود. بعضی از نمونه‌مسائلی راکه در اینجا داده شده‌اند می‌توان بدون داشتن پایهٔ نظری حل کرد، حل بقیهٔ مسائل تا ارائه نظریهٔ لازم به‌تعویق می‌افتد.

ایدهٔ این کتاب بررسی جنبه‌های معین سؤال «چندتا؟» است. ممکن است سؤالهایی، مانند «تعداد صفحه‌ها از صفحهٔ ۱۴ تا ۵۹ چندتاست؟» بسیار ساده باشند؛ دربعضی موارد ممکن است پاسخ سؤالهایی مانند تعداد روزهای ماه اکتبر، یا تعداد یاردها در یك مایل، تنها به‌داشتن معلومات عمومی مربوط باشد. درموارد دیگر ممکن است پاسخ به سؤالاتی مانند تعیین تعداد عناصر شیمیاییی که تا زمان حال شناخته شده‌اند، یا تعیین تعداد سانتیمترهای مکعب جابه‌جایی درموتوراتومبیلی معین، به اطلاعات فنی نیاز داشته‌باشد، اما علاقهٔ ما به‌حل مسائلی است که پاسخ آنها به فکر نیاز دارند. همچنین ممکن است پاسخ دادن به این مسائل به بعضی شناختهای قبلی احتیاج داشته باشند که اگر جزء اطلاعات عمومی نباشند در متن کتاب فراهم می‌شوند. به‌کمك بعضی ازفرمولهای ریاضی نیاز است که به‌موقع‌خود

ارائه خواهند شد. ولی حل بیشتر مسائل تنها به کمی قوهٔ ابتکار احتیاج دارند. با یکی ازاین مسائل شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۰۱* درتقویم هرسال، چند جمعه وجود دارندکه سیزدهمین روز ماه باشند؟ کوچکترین تعداد ممکن چیست؟

این مسأله، مانند بسیاری از مسائل دیگر این کتاب، در بخش پاسخها و راه‌حلها در آخرکتاب حل شده‌است. البته از خواننده مصراً خواسته می‌شود که قبل از مراجعه به راه‌حل کتاب سعی‌کند شخصاً مسأله را حل کند. مسألهٔ ۱۰۱ را می‌توان با مراجعه‌ای ساده به یك تقویم، ویا به مجموعه‌ای از تقویمهای سالانه‌که تمام آرایشهای ممکن روزهای سال را دارا باشند حل کرد. هدف این است‌که مسأله را، حتی به‌روشی ساده‌تر باابداع یك دستگاه حل کنیم. مثلاً باید توجه‌کرد سالهایی راکه دارای ۳۶۵ روزند می‌توان به هفت نوع مختلف تفکیك نمود. نوعی که با دوشنبه شروع می‌شود، نوعی که با سه‌شنبه شروع می‌شود و قس‌علی‌هذا. به همین ترتیب هفت نوع سال‌کبیسه وجود دارند، و بنا براین‌کلاً در ارتباط با این مسأله، چهارده نوع سال وجود دارند. سپس برای بررسی تعداد جمعه‌هایی‌که سیزدهم ماه در این نوع سالها هستند می‌توان نظامی ابداع کرد. لیکن ما دراین‌جا تحلیل مطلب را نمی‌آوریم وبقیهٔ کار را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مسألهٔ ۲۰۱ سازنده‌ای برای بچه‌ها مکعبهایی می‌سازد. وجوه هرمکعبی‌که حجمش دو اینچ مکعب است با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌شود. وجوه بعضی ازمکعبها تماماً آبی، وجوه بعضی تماماً قرمز و وجوه بعضی آمیزه‌ای از قرمز وآبی است. سازنده چندنوع مختلف ازاین مکعبها می‌تواند بسازد؟

برای آنکه سؤال دارای معنی دقیق باشد، لازم است منظور از مکعبهای «مختلف»را تعریف کنیم. دومکعب را یکسان می‌گوییم‌که اگرآنها را در وضعیتهای همانند قرار دهیم، وجوه متناظرشان دارای رنگهای یکسان باشند، یعنی به‌قسمی‌که وجوه پایین دارای یك رنگ، وجوه بالا دارای یك رنگ و وجوه مقابل دارای یك رنگ و الخ... باشند. اگر دو مکعب با این مفهوم یکسان نباشند، آنها را دو مکعب مختلف می‌گوییم. مثلاً هردومکعبی‌که پنج وجه‌آنها آبی ویك وجه‌آنها قرمز باشد یکسان‌اند. اما به عنوان مثالی دیگر، دو مکعب را در نظر بگیریدکه چهار

---

* این مسأله، تحت عنوان مسألهٔ E۱۵۴۱ درصفحهٔ ۹۱۹
the American Mathematical Monthly, November, 1962
آمده است.

وجوه آبی مقابل‌اند (بالا و پایین)　　　　وجوه آبی مجاورند

شکل ۱۰۱

وجه آنها قرمز و دو وجه آنها آبی باشند، این‌چنین دومکعبی ممکن است یکسان باشند ویا نباشند. اگر درهرمکعب دو وجه آبی مجاور یکدیگر باشند، آن‌گاه این دومکعب یکسان‌اند، یا اگر درهر مکعب دو وجه مقابل آبی باشند، این دو مکعب یکسان‌اند. اما اگر در یکی از مکعبها دو وجه مجاورآبی و در مکعب دیگر دو وجه مقابل‌آبی باشند، آن گاه این دومکعب مختلف‌اند. شکل ۱۰۱ را ببینید.

این مسأله نیز در بخش پاسخها و راه حلها حل شده است، امـا باز توصیه می‌شودکه خواننده شخصاً مسأله را حل، و از راه حل آخرکتاب برای کنترل کارش استفاده کند.

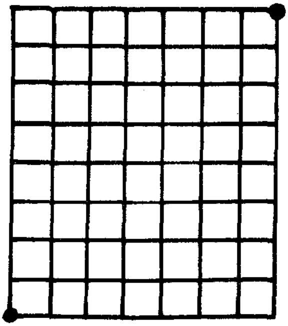
اکنون به سه مسأله کـه قدری مشکلترند و راه حل آنها تا ارائه نظریهٔ لازم به‌تعویق می‌افتد می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱۰۳ مسألهٔ مسیر. شخصی در ساختمانی کار می‌کند که هفت بلوك در شرق و هشت‌بلوك درشمال‌خانه‌اش قرار دارد. (شکل ۲۰۱ را ببینید.) بنابراین، برای‌رسیدن به‌محل کارش هر روز پانزده بلوك را طی می‌کند. تمام خیابانهایی کــه در الگوی مستطیل‌شکل وجود دارند برای رفتن او به محل کار قابل‌استفاده‌اند. این شخص با چند مسیر مختلف می‌تواند از منزل به‌محل کارش برود، درصورتی‌که تنها ازپانزده بلوك بگذرد؟

رهیافتی بدیهی برای این مسأله رسم نمودار تمام مسیرهـای ممکن و سپس شمارش آنهاست. اما ۶۴۳۵ مسیر مختلف وجود دارند، و بنابراین رهیافت مستقیم تاحدودی غیرعملی است. اگر به‌طریقی صحیح به‌مسأله نگاه کنیم مسأله خیلی مشکل نیست. راه حل درفصل ۳ داده شده‌است.

اکنون به‌مسألهٔ دیگری می‌پردازیم که راه حل آن موکول به تحلیلی نظری است.

مسألهٔ ۴۰۱ فرماندار یك ایالت در جشن صدمین سال تأسیس یك چاپخانه معروف شرکت مـی‌کند. ناشر بـه منظور ابراز قدردانی، به فرماندار پیشنهاد می‌کندکـه



شکل ۲۰۱

بــه عنوان هدیه، ده کتاب از بیست کتابی را کــه جزو پرفروشترین کتابهای این چاپخانه است، انتخاب کنند. فرماندار مجاز است که ده کتاب مختلف از بیست کتاب، یا ده کتاب مشابه (ده نسخه از یك کتاب)، یا هر ترکیب دلخواه دیگری را که ترجیح می‌دهد انتخاب کند مشروط به اینکه تعداد کتابهــا از ده جلد تجاوز نکند، (الف) فرماندار به‌چندطریق می‌تواند انتخابش‌را انجام دهد؟ (ب) اگر فرماندار بخواهد ده‌جلد کتاب متمایز انتخاب کند، به چندطریق می‌تواند این انتخاب را انجام دهد؟

سؤال (ب) از سؤال (الف) آسانتر است، زیرا سؤال (ب) مطلب سرراست انتخاب ده شیء از بیست‌شیء است. تعداد انتخابهای مختلف ده‌شیء از بیست‌شیء را با نماد $C(20, 10)$ نشان می‌دهند و همان طوری کــه در فصل بعد خواهیم دید، به‌راحتی محاسبه می‌شود. حل قسمت (الف) مسأله در صفحهٔ ۶۵ داده شده‌است.

مسألهٔ ۵۰۱ به‌چند طریق ممکن است یك اسکناس یك دلاری را خرد کــرد؟ (فرض کنید سکه‌ها به‌صورت ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی باشند، که به سکه‌های یك سنتی، نیکلی، ده سنتی، ربع ونیم دلاری نیز معروف‌اند.)

این مسأله را، نظیر بسیاری ازمسائل دیگر این کتاب می‌توان صرفاً با تعیین تمام حالتها و شمارش آنها حل کرد. راهی‌اصولیتر برای حل آن در فصل ۷ ارائه شده‌است.

این فصل را با بیان اصلی اساسی دربارهٔ شمارش به پایان می‌رسانیم، این اصل ازسؤال ساده‌ای، مثل تعیین تعداد صفحه‌ها ازصفحهٔ ۱۴ تا ۵۹، حاصل می‌شود، پاسخ برابر ۴۶ است که یك واحد از تفاضل دوعدد صحیح* ۱۴ و ۵۹ بیشتر است.

---

* اعداد صحیح کــه بعضی اوقات «اعداد درست» نامیده می‌شوند، بر سه نوع‌اند: اعداد صحیح مثبت یا اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ...، کــه، (...)، به‌جای کلمهٔ «وغیره» به‌کار می‌رود؛ اعداد صحیح منفی ۱ــ، ۲ــ، ۳ــ، و ...؛ و ۰ کــه نه منفی و نه مثبت است. اعداد صحیح نامنفی عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... .

به‌طور کلی تعداد اعداد صحیح از k تا n، برابر $n-k+1$ است که در آن فرض شده است که n بزرگتر از k است، یعنی $n>k$.

مجموعه مسائل ۱

۱. از عدد ۲۵ تا ۷۹ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۲. پنجاه‌وسومین عدد صحیح دنبالهٔ ... ,۸۶, ۸۷, ۸۸ کدام است؟

۳. بزرگترین عدد ۱۲۳ عدد متوالی، عدد ۳۰۷ است. کوچکترین عدد این دنباله چند است؟

۴. کوچکترین عدد r عدد متوالی n است، بزرگترین عدد این دنباله چند است؟

۵. بزرگترین عدد r عدد متوالی k است، کوچکترین عدد این دنباله چند است؟

۶. در دنبالهٔ $n, n+1, n+2, \ldots, n+h$ چندعدد صحیح وجود دارد؟

۷. چند عدد صحیح x در نابرابریهای $12<\sqrt{x}<15$، یعنی $\sqrt{x}$ بزرگتر از ۱۲ و کوچکتر از ۱۵، صدق می‌کنند؟

۸. در دنباله‌های زیر چندعدد صحیح وجود دارند؟
الف) ۶۰, ۷۰, ۸۰, ..., ۵۴۰؛ ب) ۱۵, ۱۸, ۲۱, ..., ۱۴۴؛
پ) ۱۷, ۲۳, ۲۹, ۳۵, ..., ۲۲۱.

۹. بین ۱ تا ۲۰۰۰ چند عدد صحیح وجود دارد که (الف) مضرب ۱۱ باشند؛ (ب) مضرب ۱۱ بوده ولی مضرب ۳ نباشند؛ (پ) مضرب ۶ بوده ولی مضرب ۴ نباشند؟

۱۰. کمترین تعداد سکه‌های لازم برای پرداخت هزینه‌ای کمتر از یک دلار به‌صورت پول خرد چقدر است؟ (سکه‌ها به ترتیب ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی نامگذاری شده‌اند.)

۱۱. شخصی ۴۷ سنت طلبکار است. فرض کنیم پول نقد موجود صندوقدار شامل مقدار زیادی سکه‌های ۱، ۵، ۱۰ و ۲۵ سنتی است. صندوقدار به‌چندطریق مختلف می‌تواند بدهی شخص را بپردازد؟

۱۲. شخصی دریک جعبه تعداد شش جفت دکمهٔ سردست دارد. هیچ دوجفتی شبیه به‌هم نیستند. این شخص برای اینکه مطمئناً یک جفت دکمهٔ جور به‌دست آورد، چندتا از

این دکمه سردستها را باید باهم (چشم بسته) بیرون بکشد؟

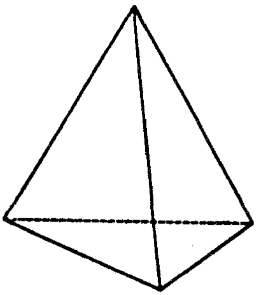
۰۱۳ شخصی دریك کشو دوازده جوراب آبی و دوازده‌جوراب مشکی که به صورت تصادفی قاطی شده‌اند دارد. او باید چندجوراب را باهم (چشم بسته) بیرون بیاورد تا مطمئن باشد که یك جفت جوراب جور در بین آنهاست؟ (هردو جورابی که آبی و هردو جورابی که مشکی باشند یك جفت جوراب جور را تشکیل می‌دهند.)

۰۱۴ اندازهٔ یك زاویهٔ چند ضلعی منتظم برحسب درجه عددی صحیح است. چنین چند ضلعی چندضلع می‌تواند داشته باشد؟

۰۱۵ شخصی تعداد زیادی چهار وجهیهای منتظم چوبی دارد که تمام آنها یك اندازه‌اند. (چهاروجهی منتظم عبارت ازجسم صلبی است که به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان محدود شده‌است؛ شکل ۳.۱ را ببینید.) اگر او هر وجه مثلث شکل را با یکی از چهار رنگ‌ها رنگ‌آمیزی کند، واگر تمام ترکیبهای رنگهای مختلف مجاز باشند، چند چهاروجهی رنگ شدهٔ مختلف می‌تواند تهیه نماید؟ (دو بلوك را مختلف گویند، اگر نتوان آنها را در وضعیتهای یکسان باوجوه متناظری که رنگهای یکسان دارند قرار داد.)

۰۱۶ چند مسیرمختلف، یك رأس‌مکعب را به‌رأس مقابل آن وصل‌می‌کند به‌طوری که هر مسیر ممکن در روی سه یال از دوازده یال مکعب قرار داشته باشد؟

۰۱۷ درکنفرانسهای رسمی دیوان عالی ایالات متحده، هریك از نه‌قاضی درشروع جلسه با بقیه دست می‌دهد. درچنین جلسه‌ای چندبار عمل دست‌دادن انجام می‌گیرد؟



شکل ۳.۱

۲

جایگشتها و ترکیبها

این فصل و فصل بعدی بعضی از ایده‌های اساسی موضوع این کتاب را معرفی می‌کنند. ممکن است خواننده از روی مطالعات قبلی خود با تعدادی از این مفاهیم آشنا باشد. اما درچندین‌مورد، درفصلهای ۲ و ۳، موضوعها با تفصیلی بیشتراز آنچه معمولاً درکتابهای مقدماتی جبر وجود دارند، مورد بحث قرار می‌گیرند. اگر خواننده تمام این ایده‌های اساسی را کاملاً بفهمد در فصلهای بعدی برای او راه هموار خواهد بود. اگر او قادر باشد به سؤالهای مجموعه‌های مسائل پاسخ دهد، می‌تواند اطمینان حاصل کند که موضوع را درك کرده‌است. دراین دو فصل بیشتر نمادهای پایه‌ای ترکیبیاتی بیان می‌شوند. از میان نمادهای مختلفی که در تمام نوشته‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، چند صورت استاندارد را شرح می‌دهیم، اما بعداً تنها با یکی ازاین صورتها کار می‌کنیم.

برای معرفی موضوع، مسألهٔ سادهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم. یك فروشگاه‌لباس پنج نوع کمربند برای‌آقایان وپسران دارد. واز هرنوع کمربند هفت‌اندازه موجود است. چند نوع مختلف کمربند دراین فروشگاه یافت می‌شود؟

از ضرب ۵ در ۷ می‌توان جواب ۳۵ را به دست آورد، زیرا ۷ کمربند از نوع اول و ۷ کمربند از نوع دوم و...، ۷ کمربند از نوع پنجم وجود دارند، و بنابراین داریم:

$$۷+۷+۷+۷+۷=۵\times۷=۳۵.$$

این مسألهٔ ساده، یك اصل پایه‌ای را توضیح می‌دهد.

۱.۲ اصل ضرب

اگر گردایه‌ای از اشیاء را بتوان به m دستهٔ مختلف تفکیك کرد و اگر هریك ازاین دسته‌ها را بتوان به‌صورت k زیردستهٔ مختلف تفکیك نمود، آن‌گاه کلاً mk دستهٔ مختلف وجود دارد.

این اصل را می‌توان، علاوه‌بریك رده‌بندی برحسب دو ویژگی مانند نوع و اندازهٔ کمربندها، به رده‌بندیهایی برحسب سه ویژگی، چهار ویژگی و بیشتر تعمیم داد. به‌عنوان مثال، سؤال زیر را در نظر بگیرید. داروخانه‌ای ازهفت تولیدکنندهٔ مختلف، خمیردندان تهیه می کند. هـر تولیدکننده دو نوع خمیردندان فلوردار و معمولی را در سه اندازهٔ مختلف می‌سازد. داروخانه چند نوع مختلف خمیردندان دارد؟ چـون ۷ تولیدکننده، در ۳ اندازه، ۲ نوع خمیردندان فلوردار و معمولی می‌سازند مبتنی براصل ضرب، پاسخ برابر با ۲ × ۳ × ۷ یا ۴۲ است.

اصل ضرب را علاوه بر مورد مسائل مربوط به‌اشیاء رده‌بندی شده، در مورد بسیاری از مسائل دیگر نیز می‌توان به کار برد. به عنوان مثال، شخصی را درنظر بگیرید که تصمیم دارد با هواپیما به اروپا رفته وبا کشتی برگردد. اگر هشت خط مختلف هوایی و نه شرکت مختلف کشتیرانی موجود باشند، آن‌گاه او به ۹ × ۸ یا ۷۲ راه مختلف می‌تواند سفر خودرا انجام دهد.

مثال سادهٔ دیگری نیز می‌آوریم. دریك پیك‌نیك بزرگ، ناهارشامل‌ساندویچ (باچهارنوع انتخاب)، نوشیدنی (باانتخاب ازقهوه، شیر، چای) ویك ظرف بستنی (باانتخاب از سه نوع طعم) است. هرشخص به چند راه مختلف می‌تواند ناهـار خودرا انتخاب کند؟ بنابراصل ضرب می بینیم که پاسخ برابر با ۳ × ۳ × ۴ یا ۳۶ راه است.

به دلیل کاربردهای مختلف اصل ضرب، غالباً این اصل برحسب پیشامدهـا فرمولبندی می‌شود: اگر پیشامدی بتواند به m طریق رخ دهد و پیشامد دوم بتواند

مستقل از اولی به k طریق رخ دهـد، آن‌گاه این دو پیشامد می‌توانند به $m.k$ طریق مختلف رخ دهند.

واژهٔ «مستقل» دراینجا نقش اساسی دارد، زیرا برای وضعیتهایی کـه پیشامد دوم به‌پیشامد اول وابسته بوده و یا به‌وسیلهٔ آن محدود می‌شود، اصل ضرب الزاماً معتبر نیست. مثلاً دختری باهفت‌دامن و پنج‌بلوز نمی‌تواند ۳۵ بلوز و دامن جورداشته باشد. زیرا ممکن است بعضی از رنگها یا طرحها ازنظر زیبایی ناهماهنگ باشند، به‌عنوان مثال یك دامن قرمز بخصوص بایك بلوز نارنجی بخصوص به‌هم نمی‌آیند. اما مثال زیر، نوع استاندارد وابستگی پیشامدها را نشان می‌دهدکـه درآن باز می‌توان از اصل ضرب استفاده‌کرد.

مسألهٔ ۱۰۲ چهار حرف A، B، C و D را به‌چند ترتیب مختلف می‌تـوان طوری نوشت‌که درهیچ آرایشی هیچکدام از حروف تکرار نشود؟

به‌این‌سؤال می‌توان صرفاً با نوشتن تمام ترتیبهای ممکن $ABCD$، $ACBD$، $ABDC$ وغیره پاسخ داد. اما ساده‌تر است ودرمسائل پیچیده‌تر لازم است‌که برای حل مسأله سیستمی ابداع‌کنیم. درهرآرایش، حرف اول را درنظر بگیرید. برای این حرف دراین موضع، چهار انتخاب وجود دارد. به‌ازای هرانتخاب حرف‌اول، سه انتخاب ممکن برای حرف دوم موجود است. اگـر مثلاً، حرف اول B باشد آن‌گاه حرف دوم یکی از حرفهای A، C یا D است. به‌طورمشابه بعد ازآنکه از میان چهارحرف دوحرف انتخاب شد، سومین حرف را می‌توان به‌دوراه انتخاب کرد، و وقتی می‌خواهیم حـرف چهارم را به‌دست آوریم تنهـا یك راه انتخاب وجود دارد؛ یعنی تنها یك حرف موجود است کـه می‌تواند در محل چهارم قرار بگیرد. بنابراین، اصل ضرب پاسخ

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

را به‌دست می‌دهد. خواننده باید بافهرست‌کردن تمام ۲۴ حالت، درستی جواب را تحقیق کند. آرایشهایی راکه باحرف A شروع می‌شوند درزیر ارائه می‌دهیم:

$$ABCD,\ ABDC,\ ACBD,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB.$$

مسألهٔ ۲۰۲ در یـك استان (فـرضی) شمارهٔ پـلاك اتومبیلها به جـای اعـداد با حروف مشخص شده‌اند. برای این کار دقیقاً از سه حرف استفاده شده است، مثلاً BQJ، CCT و DWD. اگـر تعداد حـروف الفبا ۲۶ باشد چند پلاك مختلف

می‌توان ساخت؟

همان‌طوری‌که مثالها نشان می‌دهند، تکرار حرفها در شمارهٔ اتومبیل مجاز است. باتوجه به‌اینکه برای انتخاب هریك ازسه حرف، ۲۶ انتخاب وجود دارد، جواب برابر است با:

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶ = ۱۷۵۷۶.$$

مسألهٔ ۳.۲ اگر در مسألهٔ ۲.۲ در شماره‌گذاری پلاك اتومبیل تکرار حروف مجاز نباشد، پاسخ چه خواهد بود؟

می‌توان استدلالی را به کار برد که با آنچه در حل مسألهٔ ۱.۲ به‌کار رفت مشابه است. برای اولین حرف ۲۶ انتخاب، ولی برای حرف دوم ۲۵ انتخاب و برای حرف سوم تنها ۲۴ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰.$$

مجموعهٔ مسائل ۲

۱. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۲.۲ باحرف Q شروع می‌شوند؟

۲. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۳.۲ با حرف Q شروع می‌شوند؟ چندتا به حرف Q ختم می‌شوند؟

۳. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۲.۲ به‌یکی از حرفهای صدادار (A، E، I، O و U) ختم می‌شوند؟

۴. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۳.۲ به‌یك حرف صدادار ختم می‌شوند؟

۵. اتاقی دارای شش‌در است. به‌چند طریق می‌توان از یك در وارد و ازدر دیگر خارج شد؟

۶. یك انبارلاستیك ماشین ازنظر اندازه دارای هشت نوع لاستیك است. هرنوع یا با تویی ویا بدون تویی است، وهرلاستیك دارای زه نایلونی و یا زهی از بافتهای سلولزی است وجدار هرلاستیك یا دورسفید ویا کاملاً سیاه است. چندنوع مختلف لاستیك دراین انبار وجود دارد؟

۷. یك کمپانی سفارش کالا، ۲۳ نوع دمپایی زنانه سفارش می‌دهد. اگر دمپاییها

از نظر طولی در ۱۲ اندازه و از نظر عرضی در سه اندازه و از نظر رنگ در شش رنگ باشند، چند نوع مختلف دمپایی زنانه ممکن است در انبار این کمپانی موجود باشد؟

۸. بین اعداد ۱۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ چند عدد صحیح (درست) وجود دارند که ارقامی بجز ۶، ۷ یا ۸ ندارند؟ چند عدد صحیح موجودند که ارقامی بجز ۶، ۷، ۸ یا ۰ ندارند؟

۲.۲ فاکتوریلها

در بسیاری از وضعیتها برای حاصلضربهایی نظیر

$$۴\times۳\times۲\times۱,\ ۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱,\ ۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱,$$

که هر کدام از آنها حاصلضرب دنباله‌ای از اعداد صحیح متوالی بوده و تمام آنها به یک ختم می‌شوند، داشتن نماد ساده‌ای مفید است. چنین حاصلضربهایی فاکتوریل نامیده می‌شوند. نماد ریاضی استانداردی که معمولاً به‌کار می‌رود یک علامت تعجب است. بنابراین

$$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴,$$

$$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰,$$

$$۷!=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰.$$

!۴ را «فاکتوریل چهار»، !۶ را «فاکتوریل شش»، !۷ را «فاکتوریل هفت» می‌خوانیم. به طور کلی برای هر عدد صحیح مثبت n، $n!$ را (که فاکتوریل n خوانده می‌شود) به‌صورت

$$n!=n(n-۱)\,(n-۲)\,(n-۳)\ \cdots\ ۱,$$

تعریف می‌کنیم. این، حاصلضرب تمام اعداد صحیح از n تا ۱ است. توجه کنید که !۱ برابر ۱ است.

مجموعه مسائل ۳

۱. !۳، !۵، !۸ را به صورت حاصلضرب درآورده، سپس مقدار آنها را محاسبه

کنید.*

۲. هریك ازمقادیر زیر را به دست آورید:

$$\frac{۱۲!}{۱۰!};\ ۲!;\ ۴!+۳!;\ (۴+۳)!\ .$$

۳. مقدار $(n+۱)!$ را درحالت $n=۴$ محاسبه کنید.

۴. مقدار $n!+۱$ را درحالت $n=۴$ محاسبه کنید.

۵. مقدار $(n-۲)!$ را درحالت $n=۴$ حساب کنید.

۶. مقدار $(n-r)!$ را درحالت $n=۱۰$ و $r=۸$ محاسبه کنید.

۷. مقدار $(n-r)!$ را درحالت $n=۱۲$ و $r=۶$ حساب کنید.

۸. مقدار $\frac{n!}{(n-r)!}$ را درحالت $n=۱۲$ و $r=۴$ و همچنین درحالت $n=۱۰$ و $r=۶$ محاسبه کنید.

۹. مقدار $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ را درحالت $n=۱۰$ و $r=۶$ محاسبه کنید.

۱۰. کدام یك از روابط زیر صحیح و کدام یك غلط است؟

الف) $۸!=۸\times ۷!$ ب) $\frac{۱۰!}{۹!}=۹$ پ) $۴!+۴!=۸!$

ت) $۲!-۱!=۱!$ ث) $n!=n\times(n-۱)!$ به ازای $n>۱$

ج) $n!=(n^۲-n)\times(n-۲)!$ به ازای $n>۲$.

۳.۲ جایگشتها

جایگشتها آرایشهای مرتب اشیاء هستند. به‌عنوان مثالهایی برای جایگشتها، دوباره مسائل ۱.۲ و ۳.۲ از بخش ۱.۲ را درنظر بگیرید.

---

* اگرچه از خواننده خواسته می‌شودکه اعدادی مانند !۵ و !۸ را محاسبه نماید، ولی نباید از او انتظار داشت‌که (مثلاً) !۲۰ را حساب کند. اگر چنین عددی پاسخ سؤالی در این کتاب باشد، باید آن را دقیقاً به همان شکل فاکتوریل باقی گذاشت. تکنیکهای شمارشی بسیار اهمیت دارند ولی دراین کتاب روی آنها تأکیدی نمی‌شود.

مسألهٔ ۱۰۲ چهار حرف A، B، C، D را به چند ترتیب مختلف می‌توان طوری نوشت که در هیچ آرایشی هیچ حرفی تکرار نشود؟

مسألهٔ بالا نظیر این است که بپرسیم چندجایگشت برای چهارحرف، هردفعه چهارحرف، وجود دارد. تعداد چنین جایگشتهایی را بانماد $P(۴,\ ۴)$ نشان می‌دهند.

مسألهٔ ۳۰۲ اگر درهر شمارهٔ اتومبیل سه‌حرف وجود داشته باشد و تکرار حروف درشماره‌گذاری مجاز نباشد، چند شمارهٔ متفاوت اتومبیل وجود دارد؟

این نظیر آن است که بپرسیم چند جایگشت برای بیست‌وشش حرف، هردفعه سه حرف، وجود دارد؟ تعداد چنین جایگشتهایی با $P(۲۶,\ ۳)$ نشان داده می‌شود. این مسائل را در بخش ۱۰۲ حل کرده‌ایم و حالا می‌توان این پاسخها را با نماد جدید به‌صورت

$$P(۴,۴)=۴\times ۳\times ۲\times ۱=۲۴ \quad \text{و} \quad P(۲۶,۳)=۲۶\times ۲۵\times ۲۴=۱۵۶۰۰$$

نوشت.

هریك از این $P(۲۶,۳)=۱۵۶۰۰$ جایگشت سه به سه از ۲۶ شیء را یك جایگشت سه‌تایی گویند. به‌طورکلی یك جایگشت r تایی، آرایشی مرتب از r شیء است، و $P(n,\ r)$ تعداد جایگشتهای r تایی یك مجموعه از n شیء متمایز را نشان می‌دهد. این نظیر آن است که بگوییم $P(n,\ r)$ تعداد جایگشتهای r به r از n شیء است. البته از پیش فرض می‌شود که r از n تجاوز نکند یعنی $r\leqslant n$. توجه کنید که n شیء باید متمایز باشند، یعنی باید بتوانیم آنهارا از یکدیگر تمیز دهیم.

به منظور به دست آوردن فرمولی برای $P(n,\ r)$، r جعبهٔ متمایز در نظر می‌گیریم که n شیء را بتوان در داخل آنها قرار داد:

جعبهٔ r ام   جعبهٔ سوم   جعبهٔ دوم   جعبهٔ اول

بنابراین $P(n,r)$ را ممکن است تعداد راههایی درنظر گرفت که می‌توان n شیء متمایز را در داخل r جعبه قرار داد، به‌شرطی که درهرجعبه یك شیء قرارگیرد.

ابتدا حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که تعداد اشیاء به‌اندازهٔ تعداد جعبه‌ها باشد. برای اولین جعبه می‌توان هریك از n شیء را انتخاب کرد. بعداز انجام این کار، $n-۱$ شیء باقی می‌مانندکه می‌توان یکی از آنها را برای جعبهٔ دوم انتخاب

کرد. به‌همین‌ترتیب $n-۲$ شیء باقی می‌مانند که می‌توان یکی‌ازآنها را برای جعبهٔ سوم انتخاب کرد. با ادامهٔ این روش می‌بینیم کــه وقتی به جعبهٔ آخر می‌رسیم فقط یك شیء باقی می‌ماند و بنابراین تنهــا یك انتخاب وجود دارد. بنابر اصل ضرب داریم

$$P(n, n)=n(n-۱)(n-۲)\cdots۱ \text{ یا } P(n, n)=n!.$$

مثلاً

$$P(۷, ۷)=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷!,$$

$$P(۲۸, ۲۸)=۲۸\times۲۷\times۲۶\times\cdots\times۳\times۲\times۱=۲۸!.$$

می‌توان همــان استدلالی را کــه برای محاسبهٔ $P(n, n)$ به کار رفت برای محاسبهٔ $P(n, r)$ به‌کار برد. به‌عنوان نمونه توجه‌کنیدکه

$$P(۲۸, ۵)=۲۸\times۲۷\times۲۶\times۲۵\times۲۴.$$

مشاهده‌کنیدکــه دراین حاصلضرب ۵ عدد صحیح متوالی، تفاضل بین‌بزرگترین و کوچکترین عدد، یعنی تفاضل بین ۲۴ و ۲۸، برابر ۴ است. به‌طورکلی $P(n, r)$ حاصلضرب r عدد صحیح n، $n-۱$، $n-۲$، ...، $n-r+۱$ است:

$$P(n, r)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱).$$

برای آنکــه ببینیم $P(n, r)$، حاصلضرب r عــدد صحیح متوالی است، یادآوری می‌کنیم‌که تعداد اعداد صحیح‌از k تا n و خود n، برابر $n-k+۱$ است (صفحهٔ ۶ را ببینید). بنابراین تعداد اعداد صحیح از $n-r+۱$ تا n و خود n، برابر

$$n-(n-r+۱)+۱=r$$

است. توجه‌کنیدکه اگر $r=n$، فرمول $P(n, r)$ با فرمول قبلی

$$P(n, n)=n(n-۱)(n-۲)\cdots۱$$

هماهنگی دارد.

اکنون به‌تهیهٔ فرمول دیگری برای $P(n, r)$ می‌پردازیم. به‌عنوان مثال‌توجه کنیدکه

$$P(۱۰, ۴)=۱۰\times۹\times۸\times۷,$$

که بااستفاده ازکسری شامل فاکتوریلها می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$P(۱۰,۴)=۱۰\times ۹\times ۸\times ۷$$
$$=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}=\frac{۱۰!}{۶!}.$$

همین شیوه درمورد حالت کلی $P(n,r)$ به‌کار می‌رود:

$$P(n,r)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)$$
$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)(n-r)\cdots ۱}{(n-r)(n-r-۱)\cdots ۱},$$
$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۱.۲)$$

مثال: بین اعداد صحیح ۱۰۰ تا ۹۹۹ وخود این عدد چندعدد صحیح وجود دارند که رقمهای آنها اعداد فرد متمایزند.

حل : رقمهای فرد عبارت‌اند از ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و رقمهای زوج عبارت‌اند از ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ . عـدد صحیحی مانند ۷۲۳ به حساب نمی‌آید زیرا شامل ۲ است؛ وعدد صحیحی مانند ۳۷۳ نیز به‌حساب نمی‌آید زیرا این عدد شامل رقمهای متمایز نیست. این سؤال به سؤال دربارهٔ تعداد جایگشتهای ۵ رقم متمایز ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، هربار سه رقم، برمی‌گردد. پاسخ برابر است با

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=۵\times ۴\times ۳=۶۰.$$

فرمول (۱.۲) برای $P(n,r)$ را نمی‌توان در حـل تمام مسائل مربـوط به جایگشتها به کار برد، زیرا تمام آرایشهای مرتب n شیء متمایز، هربار r تا، پاسخ چنین مسائلی نیستند. همان طوری‌که مثالهای زیر نشان می‌دهند، گاهی یك مسأله با استفادهٔ مستقیم از اصل ضرب قابل حل است.

مثال: بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ چندعدد صحیح با رقمهای متمایز وجود دارند؟

حل : جواب، صرفاً $P(۱۰,۳)$، یعنی تعداد جایگشتهـای سه به سه تمام ۱۰ رقم نیست، زیرا مثلاً ۰۸۶ عددی بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ نیست. رقم ۰ می‌تواند درمرتبهٔ

یکان (مانند ۸۶۰) یا درمرتبهٔ دهگان (مانند ۸۰۶) قرارگیرد ولی درمرتبهٔ صدگان قرار نمی‌گیرد. سه جعبه درنظر بگیرید که هریک با رقمی از رقمهای اعداد صحیح موردنظر پر شود:

مرتبهٔ یکان　　　مرتبهٔ دهگان　　　مرتبهٔ صدگان

برای مرتبهٔ صدگان نه‌انتخاب وجود دارد زیرا از صفرنمی‌توان استفاده‌کرد. سپس برای مرتبهٔ دهگان نیز نه انتخاب، یعنی صفر و هشت رقم غیرصفر که قبلاً از آنها استفاده نشده است، وجود دارد. به همین‌ترتیب برای انتخاب رقم مرتبهٔ یکان هشت انتخاب موجود است. بنابراین پاسخ برابر با ۸ × ۹ × ۹ یا ۶۴۸ است.

مثال: درمیان ۶۴۸ عدد صحیح مسألهٔ قبل، چند عدد فرد وجود دارند.

حل : عددی فرد است که رقم یکان آن فرد باشد، یعنی یکی از رقمهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ در مرتبهٔ یکان آن قرارگیرد. بنابراین بهتر است که استدلال را با این سؤال آغاز کنیم که چند انتخاب برای رقمی که در مرتبهٔ یکان قرار می‌گیرد وجود دارد؛ پاسخ، پنج است. سپس، به مرتبهٔ صدگان برمی‌گردیم؛ هشت رقم، یعنی تمام رقمهای مخالف صفر بجز رقمی که قبلاً برای مرتبهٔ یکان انتخاب شده است وجود دارندکه می‌توان از میان آنها رقم صدگان را انتخاب کرد. سرانجام برای تعیین رقم‌مرتبهٔ‌دهگان نیز هشت انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر با ۸ × ۸ × ۵ یا ۳۲۰ است.

بعضی‌از مسائل‌را می‌توان بادرنظرگرفتن حالتهای جدا ازهم سریعتر حل کرد.

مثال: چند عدد از اولین ۱۰۰۰ عدد صحیح هستند که رقمهای آنها ازهم متمایزند؟

حل : عدد صحیح ۱۰۰۰ راکه رقمهای آن متمایز نیستند کنارگذاشته، بقیه را به‌سه‌دستهٔ مختلف تقسیم می‌کنیم:

اعداد صحیحی که یك رقم دارند: ۱, ۲, ۳, ..., ۹

اعداد صحیحی که دو رقم دارند: ۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۹۹

اعداد صحیحی که سه رقم دارند: ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۲, ..., ۹۹۹

همان طورکه درمثال قبل نشان داده شد تعداد اعداد صحیح سه رقمی، با رقمهای متمایز، برابر ۶۴۸ است. استدلال‌مشابهی نشان‌می‌دهد‌که ۸۱ عدد صحیح دو رقمی و البته ۹ عدد یك رقمی وجود دارند‌که دارای رقمهای متمایزند. از اینرو پاسخ برابر است با:

$$648+81+9=738.$$

ایده‌ای که در اینجا از آن استفاده شده است اصل جمع نامیده می‌شود: اگر اشیاء به‌حالتهای جدا ازهم‌شمارش‌شوند، تعدادکل، برابر مجموع تعداد درحالتهای مختلف است.

۴.۲ فاکتوریل صفر

اگر از فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ درحالتی مانند

$$P(7, 7)=\frac{7!}{(7-7)!}=\frac{7!}{0!}$$

استفاده شود، پدیدهٔ جالبی رخ می‌دهد. نماد !۰ راکه تاکنون تعریف نشده‌است «فاکتوریل صفر» می‌گویند. در ریاضیات می‌توانیم مفهوم نمادها را به هرراهی‌که بخواهیم تعریف‌کنیم، البته به‌شرط آنکه دراین تعریف سازگاری وجود داشته‌باشد. درحالت فعلی چون قبلاً تعیین‌کردیم که مقدار $P(7, 7)=7!$، سازگاری ایجاب می‌کند‌که داشته‌باشیم

$$P(7, 7)=7!=\frac{7!}{0!}.$$

بنابراین باید فاکتوریل صفر را برابر ۱ تعریف‌کرد:

$$0!=1.$$

ممکن است این تعریف عجیب به‌نظرآید، ولی، تعریف مفیدی است. این تعریف نه‌تنها به $P(n, r)$، بلکه به نمادگذاری ترکیبیاتی دیگری نیز مربوط می‌شود.

مجموعه مسائل ۴

۱. $P(7, 3)$ و $P(8, 4)$ و $P(20, 2)$ را محاسبه کنید.

۲. تحقیق‌کنید‌که $P(7, 3)=P(15, 2)$ و $P(6, 3)=P(5, 5)$.

۰۳. ثابت کنید به ازای تمام اعداد صحیح مثبت m و n،

$$P(n, 1)+P(m, 1)=P(n+m, 1).$$

۰۴. ثابت کنید به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت n، $P(n, n)=P(n, n-1)$.

۰۵. از سه حرف مختلف یونانی، چند اسم برای سازمان دانشجویی می‌توان ساخت؟ (تعداد حروف الفبای یونانی بیست‌وچهارتاست.)

۰۶. اگر تکرار حروف در مسألهٔ قبل مجاز باشد، پاسخ چه‌خواهد بود؟ اگر تکرار حروف مجاز باشد و اسامی دوحرفی نیز به‌حساب بیایند، پاسخ چه‌خواهد شد؟

۰۷. از اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ چند عدد صحیح هستند که رقمهایشان متمایزند؟ چندتا ازاین اعداد فردند؟

۰۸. با رقمهای ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد چهار رقمی با رقمهای متمایز می‌توان ساخت؟ چندتا ازاین اعداد فردند؟

۰۹. با رقمهای ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چندعدد چهاررقمی بارقمهای متمایزمی‌توان ساخت؟ چندتا ازاین اعداد زوج‌اند؟

۰۱۰. چندعدد صحیح بزرگتراز ۵۳۰۰۰ وجود دارند که دارای دوویژگی زیر باشند:

الف) رقمهای هرعدد صحیح ازهم متمایز باشند

ب) رقمهای ۰ و ۹ درعدد ظاهر نشوند.

۰۱۱. در مسألهٔ قبل اگر شرط (ب) با شرط «رقمهای ۸ و ۹ در عدد ظاهر نشوند» عوض شود، پاسخ چه‌خواهد بود؟

۵.۲ ترکیبها

درحالی‌که یك جایگشت، آرایش مرتب اشیاء است، یك ترکیب، انتخابی بدون درنظرگرفتن ترتیب است. از نماد $C(n, r)$ برای نمایش تعداد ترکیبهای یك نوع خاص، به موازات نماد $P(n, r)$ برای نمایش تعداد جایگشتها، استفاده می‌شود. بنابراین $C(n, r)$، تعداد ترکیبهای، هربار r تا، را که می‌توان از میان کل n شیء متمایز انتخاب کرد، نشان می‌دهد.

مثلاً، $C(5, 3)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید پنج شیء، A، B، C، D و E باشند. بنابراین می‌توان دیدکه $C(5, 3)=10$، زیرا ده ترکیب از اشیاء، که

هر بار سه‌تا از آنها انتخاب شود، وجود دارند:

$$\begin{array}{lllll} A, B, C & A, B, D & A, B, E & A, C, D & A, C, E \\ A, D, E & B, C, D & B, C, E & B, D, E & C, D, E \end{array} \qquad (۲.۲)$$

توجه کنید که هر کدام از این ده سه‌تایی صرفاً گردایه‌ای است که در آن ترتیب اهمیت ندارد. مثلاً سه‌تایی C, D, E را می‌توان به‌صورت D, E, C یا E, C, D و یا هر ترتیب دیگری نوشت، که همگی یك سه‌تایی به‌حساب می‌آیند.

n شیء متمایز داده شده‌اند. $C(n, r)$ تعداد راههای انتخاب r شیء از گردایهٔ کلی است. البته فرض می‌شود که r از n تجاوز نمی‌کند، یعنی $r \leqslant n$. مفهوم $C(n, r)$ را می‌توان برحسب مجموعه‌ای از n عنصر نیز بیان کرد. $C(n, r)$ تعداد زیر مجموعه‌هایی است که شامل r عنصر هستند. مثلاً فهرست (۲.۲) در بالا، تمام زیرمجموعه‌های سه عنصری منتخب از مجموعهٔ A, B, C, D, E را به‌دست می‌دهد.

قبل از به دست آوردن یك فرمول کلی برای $C(n, r)$، به منظور تشریح استدلال، مقدار $C(۲۶, ۳)$ را محاسبه می کنیم. می‌توان $C(۲۶, ۳)$ را به عنوان تعداد راههای انتخاب سه حرف از ۲۶ حرف الفبا درنظر گرفت. مثلاً چنین انتخابی، سه‌تایی D, Q, X است که بدون درنظر گرفتن ترتیب انتخاب می‌شود. این ترکیب D, Q, X، با شش جایگشت متمایز

$$DQX \quad DXQ \quad QDX \quad QXD \quad XDQ \quad XQD$$

متناظر است.

در واقع هریك از $C(۲۶, ۳)$ ترکیب، با $P(۳, ۳)$ یا $۳! = ۶$ جایگشت متناظر است. از اینرو به ازای هر ترکیب، شش جایگشت وجود دارد:

$$P(۲۶, ۳) = ۶C(۲۶, ۳).$$

اما قبلاً مقدار

$$P(۲۶, ۳) = ۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

را در مسألهٔ ۳.۲ محاسبه کردیم. بنابراین داریم:

$$۶C(۲۶, ۳) = ۱۵۶۰۰ \text{ به طوری که } C(۲۶, ۳) = ۲۶۰۰.$$

اکنون برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بین $C(n, r)$ و $P(n, r)$، این استدلال

را تعمیم داده، سپس مقدار $C(n, r)$ را، با استفاده از فرمول(۱۰۲) برای $P(n, r)$، محاسبه می‌کنیم. با n شیء متمایز، $C(n, r)$ تعداد راههای انتخاب r شیء از n شیء بدون درنظر گرفتن ترتیب است. هر یك از این انتخابها صرفاً گردایه‌ای از r شیء است. چنین گردایه‌ای را به $r!$ راه مختلف می‌توان مرتب کرد. چون هر یك از چنین ترکیبهایی متناظر با $r!$ جایگشت است، تعداد جایگشتها $r!$ برابر تعداد ترکیبهاست:

$$P(n, r) = r!C(n, r) \quad \text{یا} \quad C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}.$$

اما بنا برفرمول(۱۰۲) می‌دانیم که $P(n, r)$ برابر $n!/(n-r)!$ است، و لذا فرمولی اساسی برای $C(n, r)$ به دست می‌آوریم،

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (۳۰۲)$$

شاید این پراستفاده‌ترین فرمول آنالیز ترکیبیاتی باشد. عدد $C(n, r)$ اغلب به صورتهای دیگری نشان داده می‌شود. مثلاً

$$nCr،\quad {}^nC_r،\quad C^n_r \text{ و } \binom{n}{r}.$$

آخرین نماد خیلی متداول است و آن را «n روی r» یا «ضریب دوجمله‌ای n روی r» می‌نامند. ضریبهای دوجمله‌ای دربسط توانی از مجموع دوجمله‌ای مانند $(x+y)^8$ ظاهر می‌شوند؛ این یکی ازعنوانهای فصل بعدی است.

یك ویژگی سادهٔ $C(n, r)$ که تقریباً بدیهی است عبارت است از

$$C(n, r) = C(n, n-r) \qquad (۴۰۲)$$

فرض کنیم به عنوان مثال قرار دهیم $n = 5$ و $r = 3$. آن گاه معادلهٔ (۴۰۲) به‌صورت $C(5, 3) = C(5, 2)$ درمی‌آید، و می‌توان درستی آن‌را به‌صورت زیر تحقیق کرد. ۵ شیء A، B، C، D، و E را اختیار می‌کنیم. می‌بینیم که $C(5, 3) = 10$، این ۱۰ سه‌تایی در(۲۰۲) به تفصیل نوشته شده‌اند. حال وقتی که یك سه تایی مانند A, C, D انتخاب می‌شود یك زوج (در این حالت B, E) انتخاب نشده باقی می‌ماند. بنابراین متناظر با هر سه‌تایی که در(۲۰۲) انتخاب شده

است می‌توان یك زوج متناظر انتخاب نشده را (در پرانتز) نوشت:

$$A, B, C(D, E) \qquad A, B, D(C, E) \qquad A, B, E(C, D)$$
$$A, C, D(B, E) \qquad A, C, E(B, D) \qquad A, D, E(B, C)$$
$$B, C, D(A, E) \qquad B, C, E(A, D) \qquad B, D, E(A, C)$$
$$C, D, E(A, B)$$

نتیجه می‌شود که تعداد راههای انتخاب سه شیء از ۵ شیء، برابر تعداد راههای انتخاب ۲ شیء از ۵ شیء است، بنابراین $C(5, 3) = C(5, 2) = 10$.

به‌طور کلی متناظر با انتخاب هر r شیء از میان n شیء، یك مجموعهٔ $n-r$ عنصری از اشیاء انتخاب نشده که هیچکدام درانتخاب وجود ندارند، موجود است. بنابراین تعداد راههای انتخاب r شیء باید برابر تعداد راههـای انتخاب $n-r$ شیء باشد و درنتیجه فرمول (۴.۲) برقرار است.

اگـر در فرمول (۴.۲) به جای r، صفر قـرار دهیم، بـه‌دست مـی‌آوریم $C(n, 0) = C(n, n)$. اما $C(n, n)$ به معنای تعداد راههـای انتخاب n شیء از میان n شیء است، بنابراین $C(n, n) = 1$. اما به‌نظر می‌رسد که $C(n, 0)$: «تعداد راههای انتخاب هیچ شیء ازمیان n شیء» بی‌معنی است. مناسب است که $C(n, 0)$ را برابر ۱ تعریف کنیم. توجه کنید که این تعریف با فرمول (۳.۲) که برای $r = 0$، برابری

$$C(n, 0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

را بـه دست می‌دهـد هماهنگی دارد، زیـرا $0! = 1$. همچنین تعریف مـی‌کنیم $C(0, 0) = 1$.

بجاست کـه تعریف $C(n, r)$ را به تمام اعداد صحیح n و r، حتی اعداد صحیح منفی؛ تعمیم داد، زیرا در این صورت فرمولهـای مختلف را می‌توان بدون توصیف یا توضیح اضافی نوشت. اگر n عـددی منفی، اگر r عددی منفی، یا اگر $r > n$ باشد، $C(n, r)$ برابرصفر تعریف می‌شود. مثلاً $C(-10, 8)$، $C(5, -8)$، و $C(10, 12)$ بنا بر تعریف برابر صفرند. به عبارت دیگر درحالتی که یکی یا چندتا از مقادیر n، r، $n-r$ منفی باشند، $C(n, r) = 0$

درحالتهای دیگر،

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مجموعه مسائل ۵

۱. مقدار $C(۶, ۲)$، $C(۷, ۴)$ و $C(۹, ۳)$ را محاسبه کنید.

۲. به‌وسیلهٔ جفت کردن زیرمجموعه‌های دوعنصری با زیرمجموعه‌های چهارعنصری مجموعهٔ A، B، C، D، E، F نشان دهید که $C(۶, ۲) = C(۶, ۴)$.

۳. امتحانی شامل ده سؤال است که هر دانشجو باید به هشت سؤال جواب داده و ۲ سؤال را نادیده بگیرد. (الف) دانشجو به چند طریق می‌تواند سؤالهای خودرا انتخاب کند؟ (ب) اگر دانشجویی به‌دوسؤال جواب داده وهشت‌سؤال را حذف کند، به‌چند طریق می‌تواند سؤالهای خودرا انتخاب کند؟

۴. دانشکده‌ای ۷۲۰ دانشجو دارد. به چند طریق می‌توان هیأتی ده نفری برای نمایندگی دانشکده انتخاب کرد؟ (پاسخ را به‌شکل فاکتوریل باقی بگذارید)

۵. بااستفاده از فرمول (۳.۲) درستی $C(n, r) = C(n, n-r)$ را تحقیق کنید.

۶. ۲۰ نقطه طوری در صفحه‌ای قرار دارند که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نیستند، یعنی هیچ سه نقطه‌ای بر یك خط مستقیم قرار ندارند. با وصل کردن هر دوتای این نقاط، چندخط مستقیم می‌توان رسم کرد؟ با اتصال هرسه نقطه ازاین نقاط چندمثلث می‌توان ساخت؟

۷. به‌چندطریق می‌توان ده نفر را دریك ردیف نشاند به‌طوری که دو نفر مشخص آنها کنار هم قرار نگیرند.

۸. ثابت کنید که حاصلضرب پنج‌عدد صحیح متوالی بر !۵ تقسیم‌پذیر است و به‌طور کلی ثابت کنید که حاصلضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ تقسیم‌پذیراست؟ پیشنهاد: فرمول را برای $C(n, r)$ امتحان کنید.

۹. نه جلدکتاب مختلف درقفسه‌ای قرار دارند. چهار جلدآنها قرمز وپنج جلدآنها سبزند. به‌چند ترتیب مختلف می‌توان کتابها را در قفسه‌ای مرتب کرد،

الف) اگر هیچ شرطی وجود نداشته باشد؛

ب) اگر کتابهای قرمز کنارهم و کتابهای سبز کنارهم باشند؛

پ) اگر کتابهای قرمز کنار هم باشند ولی در عین حال امکان داشته باشد که کتابهای سبز پهلوی هم باشند ولی نه الزاماً؛

ت) اگر رنگها یك‌درمیان باشند، یعنی هیچ دو کتاب همرنگی مجاور یکدیگر نباشند؟

۱۰. یك باشگاه مخصوص آقایان شصت عضو دارد، سی نفر آنها در کار تجارت وسی نفر آنها استادند. به‌چندطریق می‌توان کمیته‌ای مرکب از هشت نفر تشکیل داد که

الف) حداقل سه نفر درکار تجارت وحداقل سه‌نفر استاد باشند؛

ب) تنها شرط آن باشدکه حداقل یکی از هشت نفر در کارتجارت باشد.

(پاسخها را به‌صورت $C(n, r)$ باقی بگذارید.)

۱۱. اگر قرار باشدکه یك شهروند به‌یکی از سه نفر داوطلب مقام شهردار، به‌یکی از چهار نفر داوطلب عضویت انجمن شهرداری و به‌یکی از سه نفر داوطلب وکالت ناحیه رأی دهد، به چند طریق یك برگه رأی به‌صورتی معتبر نوشته مـی‌شود؟ لازم نیست که هر شهروند به هرسه مقام رأی دهد ولی از او انتظار می‌رودکـه حداقل به‌یکی ازاین افراد رأی دهد.

۱۲. اگر !۲۰ به‌صورت حاصلضرب نوشته شود درانتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی ظاهر خواهند شد؟

۱۳. اگر !۵۲ به‌صورت حاصلضرب نوشته شود درانتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی وجود خواهند داشت؟

۱۴. باحرکت دادن پرچمهایی از پنج رنگ در بالای یك دکل، علامتهـایی داده می‌شود. اگر ذخیره‌ای نامحدود از پرچمهایی که از هفت رنگ مختلف‌اند وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

۱۵. پاسخ مسألهٔ قبل چه‌خواهدبود، اگر (الف) درعلامتی که داده می‌شود پرچمهای مجاور از یك رنگ نباشند؛ (ب) در علامتی که داده می‌شود هرپنج پرچم رنگهای مختلف داشته‌باشند؟

۱۶. در ۲۶ حرف الفبا، چند زیرمجموعهٔ سه حرفی وجود دارد به قسمی کـه هیچ دوحرفی ازسه حرف مزبور حرفهای متوالی الفبا نباشند؟

۱۷. به‌چندطریق می‌توان تمام n شیء متمایز را در k جعبهٔ متمایز قرار داد به‌شرطی که درهرجعبه بیش‌ازیك شیء قرارنگیرد، وتعداد جعبه‌ها بیشتراز تعداد اشیاء باشد.

۶.۲ جایگشتهای اشیاء واقع بریك دایره

جایگشتهایی را که تاکنون بررسی کردیم جایگشتهای خطی می‌نامند، زیرا جایگشتهایی از اشیاء واقع بریك خط یا دریك سطرند. جایگشتهای اشیاء بریك دایره یا جایگشتهای دوری درمسأله‌ای مانند مسألهٔ زیر پیش می‌آیند: به‌چند طریق می‌توان پنج نفر را دور یك میز نشاند؟

راه حل اول. اگر افراد را با A، B، C، D و E نامگذاری کنیم، می بینیم که پنج جایگشت خطی

$$ABCDE, \quad BCDEA, \quad CDEAB, \quad DEABC, \quad EABCD,$$

وقتی آنها را به عنوان یك جایگشت دوری درنظر بگیریم، یکی هستند. این مطلب بدین‌دلیل است‌که دوآرایش ازافراددر دور یك‌میز را یك جایگشت دوری واحد درنظر می گیرند اگر یکی ازآنها از دیگری با دوران هرفردی به‌یك اندازه و در یك جهت حول یك دایره به دست آید. مثلاً این نظیر موردی است‌که هر فرد به صندلی سمت‌راست تغییرمکان دهد. از این‌رو می‌توانیم با مربوط کردن جایگشتهای دوری به جایگشتهای خطی تعدادآنها را به دست‌آوریم: هرجایگشت دوری با پنج جایگشت خطی متناظر است، بنابراین تعداد جایگشتهای دوری، فقط ۱/۵ تعداد جایگشتهای خطی است. اما پنج شیء دارای !۵ جایگشت خطی است و لذا، پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۱}{۵}(۵!) = \frac{۱}{۵}(۵\times۴\times۳\times۲\times۱) = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۴!\,.$$

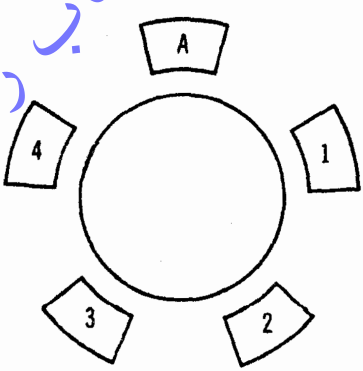
راه حل دوم. چون وقتی هرشیء (یا هرفرد) به طور یکنواخت به اندازهٔ یك مکان به سمت راست ویا به‌طور یکنواخت به‌اندازهٔ دو مکان به سمت راست وغیره حرکت کند، یك آرایش دوری تغییر نمی‌کند، می‌توانیم یك مکان را برای اولین فرد ثابت نگهداشته و دیگران را در مقایسه با مکان این فرد دور میز مرتب کنیم. A را در یك مکان ثابت قرار می‌دهیم، می‌بینیم که هریك از چهار نفر می‌تواند بلافاصله در سمت راست A قرارگیرد، آن‌گاه هریك ازسه نفر باقیمانده، در سمت

راست مکان جدید و هر یك از دو نفر بعدی در مکان بعدی و فرد باقیمانده در مکان آخر قرار می‌گیرد؛ شکل ۱۰۲ را ببینید. با استفاده از اصل ضرب، پاسخ $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ را به‌دست می‌آوریم.

درحالت کلی تعداد جایگشتهای دوری n شیء متمایز برابر $(n-۱)!$ است. برای نشان دادن این مطلب می‌توان مانند آنچه در راه‌حلهایی که در بالا برای حالت خاص $n=۵$ انجام دادیم استدلال کرد. بخصوص راه حل دوم را دنبال می‌کنیم. فرض می‌کنیم که n فرد A، B، C، D، ... در دور میزی نشسته باشند. چون دوران یکنواخت افراد، یك آرایش را تغییر نمی‌دهد، باید شخص A را در مکانی ثابت قرار داده، آن گاه تعداد راههای آرایش‌دادن بقیه را بررسی کنیم. در صندلی سمت راست A می‌توانیم هر یك از $n-۱$ فرد دیگر را قرار دهیم. بعد از انجام این عمل، می‌توانیم هریك از $n-۲$ فرد باقیمانده را در صندلی بعدی سمت راست قرار دهیم. با ادامهٔ این روش در دور میز، درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، می‌بینیم که اصل ضرب پاسخ

$$(n-۱)(n-۲)(n-۳)\cdots۱=(n-۱)!$$

را به‌دست می‌دهد.



شکل ۱۰۲

مجموعه مسائل ۶

۰۱ به‌چندطریق می‌توان هشت نفر را دور یك میز نشاند؟

۰۲ در مسألهٔ قبل اگـر دو شخص معین از هشت نفر نتوانند در دو صندلی مجاور بنشینند، پاسخ چه‌خواهد بود؟

۰۳ به‌چندطریق چهار مرد وچهار زن را می‌توان دور یك میز نشاند، بـه‌شرط آنکـه هیچ دو مردی در دوصندلی مجاور قرار نگیرند؟

۰۴ درمسألهٔ قبل فرض می‌کنیم که اشخاص، چهار زن و شوهر باشند، اگر هیچ زن و شوهری و همچنین هیچ دومردی پهلوی هم قرار نگیرند پاسخ چه‌خواهدبود؟

۰۵ دریك موتور شش سیلندر از لحاظ نظری جرقه‌زدن به‌چند ترتیب مختلف ممکن است صورت بگیرد؟ (اگـر سیلندرها از ۱ تا ۶ شماره‌گـذاری شوند، تـرتیب جرقه‌زدن فهرستی مانند ۱، ۴، ۲، ۵، ۳، ۶ است که یك ترتیب دورانی را می‌دهد که درآن سوخت در سیلندر می‌سوزد.)

۰۶ چند بلوك رنگ شدهٔ مـکعب شکل مـی‌توان ساخت به شرطی که ازشش رنگ استفاده شود و هر یك از شش وجه هر بلوك با رنگی متفاوت با رنگ وجوه دیگر، رنگ‌آمیزی شود؟ تعریف بلوکهـای رنگی متفاوت همان است که در مسألهٔ ۲.۱ ی فصل اول آمده‌است.

۰۷ چند مکعب مختلف، کـه شش وجه هریك را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌اند، می‌توان ساخت که مجموع اعداد روی هرجفت از وجوه مقابل برابر ۷ باشد؟

۷.۲ خلاصه

اصل ضرب: اگر پیشامدی به m راه و پیشامد دوم به k راه مستقل از راههای اول رخ دهد، آن‌گاه دو پیشامد به mk راه رخ می‌دهند.

فرمول فاکتوریل n:

برای اعداد صحیح مثبت n، $n!=n(n-۱)(n-۲)\cdots ۱$

$0!=۱$.

تعداد جایگشتها (یعنی آرایشهـای مرتب) r به r از n شیء متمایـز، برابر است با

$$P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}\cdot$$

تعداد ترکیبهای (یعنی تعداد انتخابهای بدون در نظرگرفتن ترتیب) r به r از n شیء متمایز برابر است با

$$C(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$C(n, r)$ را می‌توان به‌عنوان تعداد زیرمجموعه‌هـای rتایی (زیرمجموعه‌هـایی شامل r عنصر) یك‌مجموعه‌ای از n شیء تعبیر کرد. یك نماد دیگر برای $C(n, r)$، که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، $\binom{n}{r}$ است. ویژگی پایه‌ای $C(n, r)$ عبارت است از

$$C(n, r)=C(n, n-r).$$

نماد $C(n, r)$، مقدار عددی زیر به‌ازای تمام زوجهای اعداد صحیح n و r است:

درحالتی‌که یك یا چندتا از مقادیر n، r، $n-r$ منفی باشند، $C(n, r)=0$

درتمام حالتهای دیگر، $C(n, r)=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

تعداد جایگشتهای دوری (یعنی آرایشهای روی دایره) n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است.

فرمولهای $P(n, r)$ و $C(n, r)$ تنها در وضعیتهای خاص آرایشهای مرتب و انتخابهای نامرتب که در آنها n شیء متمایزند و تکرارها درمجموعه‌های r عنصری مجاز نیستند، به‌کار می‌روند. اینها فرمولهای کلی جایگشتها و ترکیبها نیستند. اما در فصلهای بعدی بسیاری از مسائل به‌این حالتهای خاص تبدیل می‌شوند.