

به نام خدا

# موسسه علمی آموزشی کنکور آسان است

※ DVD های آموزشی برترین اساتید کشور

※ جزوات خلاصه رتبه‌های برتر کنکور سراسری

※ ارائه تخصصی‌ترین مشاوره به صورت رایگان



هیرفا هستیم از دیدن شما خوشحالیم



برای ارتباط مستقیم با استاد حسین احمدی

با شماره

**09121004708**

تماس بگیرید

( آنالیز ترکیبی )

- اصل ضرب : هرگاه عملی به  $m$  طریق و عمل دیگری به  $n$  طریق انجام شود این دو عمل با هم به  $m \times n$  طریق انجام می شوند  
 \* هرگاه بین اعمال از « و » استفاده شود از ضرب و اگر از « یا » استفاده شود از جمع استفاده می کنیم  
 - جایگشت : هرگاه  $n$  بخواهیم  $n$  شیء متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم تعداد حالات مختلف برابر است با :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$
 \* تعداد حالات مختلف قرار گرفتن  $n$  شیء یکسان برابر است با 1

مثال : 5 کتاب فارسی متمایز و 4 کتاب ریاضی متمایز را کنار هم قرار می دهیم الف) در چند حالت کتابها از نظر نوع جدا اند ؟  $4! \times 5!$   
 ب) \* جایگشت شروع ! : فقط زمانی این  $2!$  را می آوریم که در سوال قید شود انواع اشتباه از هم جدا باشند

پ) در چند حالت کتاب فارسی شخص همواره کنار هم هستند ؟

\* در این موارد ایستایی که قرار است کنار هم باشند را به هم بسته و یک شیء فرض می کنیم و جایگشت آن ها را با بقیه محاسبه می کنیم و در آخر جایگشت خود ایستایی بسته شده را نیز محاسبه می کنیم و در جواب اول ضرب می کنیم

\* به این است اگر ایستایی بسته شده یکسان باشد  
 جایگشت درونی برابر 1 است .  

$$\boxed{\text{فف ف}}$$
  $\rightarrow 7 = 7 + 4$   $\rightarrow 7! \times 4!$   
 درونی کلی

مثال : 7 کارت با شماره های 1 تا 7 را یکی یکی از کیسه ای خارج می کنیم ، در چند حالت کارت 3 بعد از 5 خارج شود  
 \* در جایگشت اشتباه هر قبل و بعدی جایگشت را نصف می کند  $\frac{7!}{2} = 3$  بعد از 5  $\rightarrow 7! = 7$  کل حالات

در چند حالت 3 بعد از 5 و 5 بعد از 7 می آید ؟  $\frac{7!}{2 \times 2}$

مثال : با ارقام 0 تا 9 چند عدد سه رقمی زوج و فرد می توان ساخت ؟

فرد  $\left\{ \begin{array}{l} 9, 7, 5, 3, 1 \end{array} \right. \Rightarrow (9, 7, 5, 3, 1)$   
 $9 \times 10 \times 5 = 450$  با تکرار  
 مرادف شروع تا آخر

زوج  $\left\{ \begin{array}{l} 8, 6, 4, 2, 0 \end{array} \right. \Rightarrow 8, 6, 4, 2, 0$   
 $8 \times 8 \times 5 = 320$  بدون تکرار  
 صفر نمی آید یک رقم هم در آن

زوج  $\left\{ \begin{array}{l} 9 \times 10 \times 5 = 450 \\ 9 \times 8 \times 10 = 720 \text{ مشتمل بر تکرار} \\ 8 \times 8 \times 4 = 256 \end{array} \right. \Rightarrow 256 + 720 = 976$

\* در دفع سوال صفر را جدا می کنیم / اعداد زوج ضرب جای 5 فقط در حالت های بدون تکرار

- ترتیب : هرگاه بخواهیم از بین  $n$  شیء متمایز  $r$  شیء را انتخاب کنیم به نحوی که ترتیب مهم نباشد :  $(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$   
 - ترکیب : ~ ~ ~ ~ ~

مثال : 5 نفر می خواهند از یک ساختمان 12 طبقه بالا روند به طوری که در هر طبقه حداکثر 1 نفر از آن ها سوار بیاید . سوال : این کار به چند طریق انجام می شود ؟

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

راه اول : انتخاب طبقه  $\rightarrow 5! \times \binom{12}{5}$  چاپ جایی افراد

راه دوم :  $\frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{8}$

۱)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

۲)  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

۳)  $\binom{n}{r} = \binom{n}{r'} \iff n = r + r'$

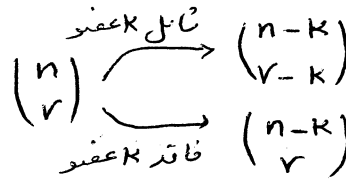
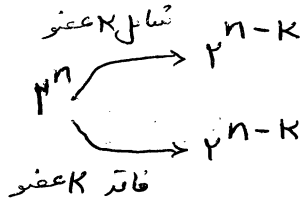
$\binom{10}{3} = \binom{10}{7} \iff 3+7=10$

۴)  $2^n =$  تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی

۵)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

$\binom{n}{r} =$  تعداد زیر مجموعه‌ها  $r$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی

۶)  $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \rightarrow \binom{10}{k} + \binom{10}{k-1} = \binom{11}{k}$



در زیر مجموعه‌ها:

سوال: در مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$  رتس:

$2^9 = 2^5 \times 2^4$  شامل اعداد اول  $\rightarrow$  کل  $2^9$  عضو ۴

الف) چند زیر مجموعه شامل اعداد اول داریم؟

ب) چند زیر مجموعه ۴ عضوی شامل ۲ داریم؟  $\binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3}$  شامل ۲  $\rightarrow$  کل  $\binom{9}{4}$  عضو

\* چراغ بخوابیم دو نوع شی را کنار هم بچینیم طوری که یک نوع از آن‌ها کنار هم نباشند ابتدا نوع بسته را چیده سپس با انتخاب چای از بین آن‌ها و اول و آخر آن‌ها نوع کمتر را بچینیم

$4! \times \binom{9}{4} \times 4!$  نفرها انتخاب چای بدها برای دفتران

سوال ۱: پرو ۴ دفتر چگونه کنار هم قرار بگیرند که هیچ دو دفتری کنار هم نباشند؟

جائگت اشیای تکراری =  $\frac{\text{جائگت کل با فرض تمایز بودن اشیاء}}{\text{جائگت اشیای تکراری}}$

سوال ۱: با حروف کلمه پرسپولیس چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟  $\frac{16!}{2! \times 2!}$  س س س س س

چند کلمه ۵ حرفی که باب شروع و باب تمام شود؟

$\frac{16!}{2!}$  س س س س س

# احتمال

احتمال A  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

فضای نمونه: کل حالات ممکن  $S \leftarrow$

پیتا: هر زیر مجموعه از فضای نمونه  $A \leftarrow$

مسئله: یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آمدن حداقل یک بار شیر بیشتر از 99 درصد باشد؟

$$1 - \frac{\binom{n}{0}}{2^n} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n_{min} = 7$$

قانون متمم:  $1 - \text{احتمال یک شیر}$

مسئله: می خواهم از بین 5 زوج 4 نفر را انتخاب کنم. با چه احتمالی هیچ کدام زن نخواهند شد؟

انتخاب 4 نفر از 5 زوج  $\rightarrow$  انتخاب یک نفر از یک زوج

$$P = \frac{\binom{5}{4} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{10}{4}}$$

(T) تجربه 92

2 ناس را با هم پرتاب می کنیم تا کدام احتمال مجموع دوبر روی شده مغرب 4 است؟

- 3) 1 و 3, 2 و 2, 3 و 1  $\rightarrow 4$
- 5) 1 و 4, 2 و 3, 3 و 2, 4 و 1  $\rightarrow 8$
- 1) 4 و 4, 3 و 3, 2 و 2, 1 و 1  $\rightarrow 2$

مجموع کل حالت 9

الف)  $\frac{2}{9}$  ب)  $\frac{5}{18}$  ج)  $\frac{1}{4}$  د)  $\frac{5}{12}$

$P = \frac{9}{9 \times 4} = \frac{1}{4}$

\* اگر آزمایشی فقط دو حالت داشت که ناسن دو حالت مادی بود (سکه یا فرزند) از فرمول مقابل استفاده کنیم:

$n$ : تعداد کل آزمایش  
 $k$ : تعداد دفعات خواسته شده

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

## قوانین احتمال:

1)  $0 \leq P(A) \leq 1$   
 زدن  $P(A) = 0$   
 حتی  $P(A) = 1$

2)  $P(A') = 1 - P(A)$   
 $A - B = A \cap B'$

3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 درخت ها هر وقت این 3 گزینه مطرح بود این قانون مدنظر است

1)  $B \subset A$   
 2) یکی از خود پیتا مد  
 3) حداقل یکی از خود پیتا مد

4)  $A \cap B = \emptyset \rightarrow A, B$  ناممکن دارند  
 $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$   
 با پیتا و بی B نباشد

(T) تجربه 90: در یک خانواده 4 فرزند می توانیم احتمال 2 فرزند پسر یا 3 فرزند دختر است؟

قانون سوم

با توجه به نکته بالا چون دختر و پسر احتمال برابر دارند

در دختر  $\rightarrow \binom{4}{4} + \binom{4}{3} = \frac{5}{8}$

$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \rightarrow \frac{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}}{2^4} = \frac{5}{8}$

(۴)

09121004708

- پیدمدهای مستقل: در پی آنکه حجم وابسته نباشند اگر A و B مستقل باشند: A و B و A' - A' و B' - B' و A و B هم مستقل

مثال) اگر A و B مستقل باشند و P(A) = 0.3 و P(B) = 0.2 و آنگاه پاسخ: P(B - A')

P(B - A') = P(B) - P(A ∩ B) = 0.2 - 0.3 \* 0.2 = 0.14

مستقل به معنی وابسته نیستیم  
با دوتا باشد  
A ∩ B = ∅ رابطه ای ندارند

- احتمال شرطی: احتمال وقوع A به شرط آن که B اتفاق بیفتد

احتمال هر دو  
۳ و ۲  
۴ و ۳  
۵ و ۲  
۵ و ۲  
۱ و ۶  
۶ و ۲

مثال) دو تاس پرتاب کردیم، مجموع ۷ یا ۸ شده است. با چه احتمالی هر دو عدد مساوی اند؟

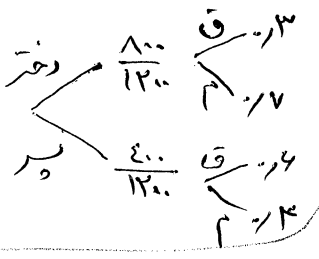
احتمال ممکن  
۳ و ۴  
۴ و ۵  
۵ و ۳  
۲ و ۶  
۶ و ۲

در این سوالات قضایای نمونه‌ای بخوبی آنگاه چیزی است که اتفاق افتاده است

P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B)

- قانون احتمال کل (نمونه درختی): این نوع سوالات، ساختن درختی را در خود دارند

مثال) در یک دانشگاه ۱۲۰۰ نفری ۸۰۰ نفر دختر و بقیه پسراند. اگر ۷٪ دختران و ۳٪ پسران در یک درس مورد تدریس با چه احتمالی یک فرد انتخاب شده در آن درس قبول شده است؟



P = (800/1200) \* 0.03 + (400/1200) \* 0.07 = 0.025

جدول توزیع احتمالی

\* در هر جدول توزیع احتمال جمع احتمالات همواره ۱ است.

Table with 4 columns (0, 1, 2, 3) and 4 rows. Row 1: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8. Row 2: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8. Row 3: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8. Row 4: 1/8, 3/8, 3/8, 1/8. Below the table: 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1

مثال) جدول توزیع احتمالی دختران یک خانواده ۳ فرزندگی؟

- توزیع دو جمله‌ای: اگر آزمائشی فقط ۲ حالت داشته باشد و آن را n مرتبه انجام دهیم داریم

P(x) = C(n, x) \* P^x \* (1-P)^(n-x)

n: تعداد آزمائش  
P: احتمال خواسته شده  
x: تعداد دفعات خواسته شده

اگر تاس‌ها برابر باشند از روش قبلی که گفته شد استفاده می‌شود: P = C(n, x) / 2^n

(T) تجربه ۸۹: از نوعی پذیری که ۸۰ درصد آن جوانه می‌زند ۵ عدد کاشته شده. با کدام احتمال حداقل دو عدد از آن‌ها جوانه می‌زند؟

P(x) = 1 - P(x') -> P(x') = 1 - [C(5, 0) \* (0.18)^5 + C(5, 1) \* (0.18)^4 \* (0.82)] = 0.993228

\* از کجا بفهمیم توزیع دو جمله‌ای است؟

- ۱) آزمائش دو حالتی است (سکه یا فرزندی)
- ۲) از تعداد کلی، تعدادی را می‌خواهد.

5

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 \leftarrow a+b+c=0 \\ x_2 &= \frac{c}{a} \\ x_1 &= -1 \leftarrow a+c=b \\ x_2 &= \frac{-c}{a} \end{aligned} \right\} \text{حالات خاص}$$

تالیف  
 $\Delta > 0 \rightarrow$  ۲ ریشه حقیقی متمایز  
 $\Delta = 0 \rightarrow$  ریشه حقیقی مضاعف  
 $\Delta < 0 \rightarrow$  ریشه حقیقی ندارد

نامعادلات:

\* در نامعادلات درجه ۲ برای تعیین علامت ریشه ها: علامت  $x^2$  را با علامت را مقایسه می کنیم  $\leftarrow$  می توان باشد  $\leftarrow$  جواب خارج ریشه ها نباشند  $\leftarrow$  بین دور ریشه

09121004708

مثال  $x_1 = 1$   $x_2 = \frac{-7}{3}$   
 $4x^2 + 3x - 7 < 0$  نسبت  
 $\frac{-7}{3} < x < 1 \rightarrow$  بین دور ریشه

در نامعادلات درجه ۱ به درجه ۱ همه را به یک طرف می بریم و ساده می کنیم - علامت ضرب  $x$  در بالا و پایین را در هم ضرب می کنیم - با علامت

$$\frac{2x-1}{x+3} \geq 1 \rightarrow \frac{2x-1}{x+3} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x-3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+3} \geq 0$$

نامعادله مقایسه می کنیم و طبق بالا عمل می کنیم. مثال:

$$x < -3 \text{ یا } x > 4 \leftarrow \text{خارج دور ریشه}$$

در نامعادلات به دو دستر به این شکل عمل می کنیم:

همه را به یک طرف می بریم و ساده می کنیم - در جدول تعیین علامت اولین علامت سمت چپ، نسبت بزرگترین توان صورت به مخرج را به دست می آوریم و به متغیر آن عدد منفی فرضی می دهیم تا علامت مشخص شود - برای تعیین سایر علامت ها با توجه به نوع ریشه ها، ریشه های ساده و مکرر فرد علامت را عوض می کنند اما ریشه های مکرر زوج تغییری نمی دهند.

\* انواع ریشه ها

$$\left. \begin{aligned} x-3=0 \rightarrow x=3 \text{ ساده} \\ (x-3)^2=0 \rightarrow x=3 \text{ مکرر زوج} \\ (x-3)^3=0 \rightarrow x=3 \text{ مکرر فرد} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{(x^3-1)^4 (x^2-4)}{(x^2+3x+2)^3 (x^2+1)} \geq 0$$

بدون ریشه  
 $x=1$   
 $x=-2$

تعیین اولین علامت  $\rightarrow \frac{x^4}{x^4} = x^0 = 1$  منفی

ساده	مکرر فرد	مکرر فرد	مکرر زوج	$x$
۲	۱	۱	۲	
+	-	+	-	علامت

$x \geq 2$  یا  $-1 < x < 1$

\* اگر در معادله یا نامعادله ای، جواب کامل درگزینده خواهد بود  $\leftarrow$  از عدد گذاری استفاده کنید.

\* اگر به عبارتی رسیدید که همواره مثبت (مثلاً  $x+1$  یا  $\Delta < 0$  یا  $a > 0$ ) یا قدر مطلق و... و یا همواره منفی ( $\Delta < 0$  و  $a < 0$  و یا  $-x-1$  و...) رسیدید می توانید آن ها را در نظر بگیرید و فقط اگر ریشه راستند

- ریشه ها را در آخر بررسی کنید.
- (۱)  $a > 0$   $\leftarrow$  همواره نامنفی  $ax^2+bx+c \geq 0$
  - (۲)  $a > 0$   $\leftarrow$  همواره مثبت  $ax^2+bx+c > 0$
  - (۳)  $a < 0$   $\leftarrow$  همواره نامنفی  $ax^2+bx+c \leq 0$
  - (۴)  $a < 0$   $\leftarrow$  همواره منفی  $ax^2+bx+c < 0$

(4) تعریف تابع: زوج‌های مرتبی که مولفه‌های اول یکسان نباشند، اگر هم‌سازی بودند مولفه‌های دوم نیز یکسان باشد.  
 \* در نمودار یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور  $y$  ها آن را در حداکثر 1 نقطه قطع کند.  
 \* برای تشخیص تابع نمودار یک رابطه از روی ضابطه می‌توان به  $x$  عدد دلخواه بدیم ← اگر برای  $y$  بیش از یک جواب بدست آید تابع نیست [ولی اگر 1 جواب بدست آید نمی‌توان گفت تابع است]

مثال: کدام تابع نیست؟  
 $|x-2| + |y-3| = 4 \xrightarrow{x=2} \begin{cases} y-3=4 \\ y-3=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=7 \\ y=-1 \end{cases} \quad \times$   
 09121004708

نقطه (0, -2) تابع است  
 $|x-2| + |y-1| = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$   
 حرکت جمع هند عبارت نیست  
 منفی شود حرکت از آنها  
 صفر است

✓ (همه تابع است) → نمی → این رابطه برقرار نیست → مجموع هیچ دو عدد صحیحی، منفی نمی‌شود  
 $|x-2| + |y-1| + 3 = 0$   
 + همواره + همواره

- دامنه و برد: به مولفه‌های اول هر دانه  $x$  و مولفه‌های دوم  $y$  برد می‌گویند.
- 1) دامنه توابع چند جمله‌ای  $R$  است.
  - 2) در رادیکال با فرجه فرد تأثیری در دامنه ندارد.
  - 3) در توابع کسری باید عبارت زیر رادیکال را بررستر و مساوی صفر قرار دهیم و نامعادله را حل کنیم.
  - 4) در توابع کسری باید ریشه‌های منخرج را از دامنه اصلی حذف کنیم.
  - 5) قدر مطلق و جزو صحیح تأثیری در دامنه ندارد. (قدر مطلق و جزو صحیح دور کل تابع نه درون آن)
  - 6) سینوس و کسینوس تأثیری در دامنه ندارد.

$y = \log_y^A B \rightarrow D = \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ B \neq 1 \end{cases}$  (9)

$F(x) = \text{tg } x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow D = R - (k\pi + \frac{\pi}{2})$  (7)

$F(x) = \text{cotg } x \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} \rightarrow D = R - k\pi$  (8)

- \* در بدست آوردن دامنه نباید عبارت را ساده کنیم.
- \* برای بدست آوردن دامنه تابع چند ضابطه‌ای باید بین شرایط اجتماع بگیریم پس محدودیت‌ها هر ضابطه را حل کنیم.
- \* برای همینه به خاطر بسیاریه در کلیه مباحث ریاضی هرگاه به قدر مطلق برخورد کردیم ریشه‌های داخل آن را بدست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

(T) تجربی 92 اگر  $F(x) = \sqrt{2x-x^2}$  باشد، دامنه تابع  $F(3-x)$  کدام است؟

$F(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$   
 [0, 3] (ب) [0, 2] (الف)  
 [1, 3] (د) [1, 2] (ج)  
 $a+b+c=0$   
 $x_1=1 \quad x_2=3$

$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$   
 $1 \leq x \leq 3$   
 بین در ریشه

تساوی دو تابع: دو تابع را زمانی مساوی می‌دانیم که هر دو شرط زیر را همزمان داشته باشند

۱- دامنه‌های مساوی      ۲- ضابطه‌های مساوی

09121004708

(مثال)

$$F(x) = \log x^2 \quad g(x) = 2 \log x$$

$$x^2 > 0 \rightarrow D_F = \mathbb{R} - \{0\} \quad x > 0 \rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

مساوی نیستند  $\rightarrow$  ضابطه‌ها  $\checkmark$  دامنه‌ها  $\times$

۱- اعمال جبری روی توابع: \* به شرطی که دامنه‌ی دو تابع اشتراک داشته باشند \*

$$(F+g)(x) = F(x) + g(x) \rightarrow D_{F+g} = D_F \cap D_g$$

$$(F-g)(x) = " - " \rightarrow D_{F-g} = " "$$

$$(F \times g)(x) = " \times " \rightarrow (F \times g)(x) = " "$$

$$\left(\frac{F}{g}\right)(x) = \frac{F(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{F}{g}} = D_F \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ترکیب دو تابع

$$(F \circ g)(x) = F(g(x)) \rightarrow D_{F \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_F\}$$

$(g \circ F)(x)$  برعکس بالاها

۱۲ تجربی خارج از کشور ۹۰: اگر  $F(x) = x^2 - x - 2$  و  $F(g(x)) = x^2 + x - 2$  آنگاه  $(F+g)(x)$  کدام است

$$F(g(x)) = g(x) - 2 = x^2 + x - 2$$

✓ الف)  $x^2 - 1$

$$\xrightarrow{\text{تکامل}} (g(x) - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} \rightarrow g(x) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}$$

ب)  $x^2 + 1$

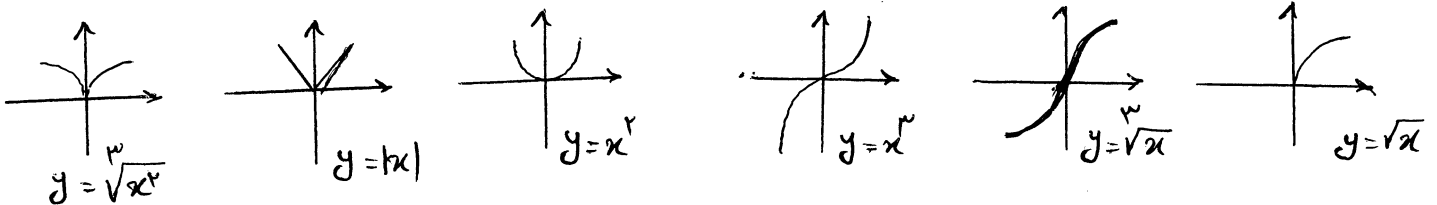
ج)  $x^2 - 2x$

د)  $x^2 + 2x$

$$\rightarrow \begin{cases} g(x) = x + 1 \rightarrow (F+g)(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = -x \rightarrow (F+g)(x) = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

تابع یک به یک: تابعی که برای  $x$  فقط یک  $y$  وجود داشته باشد یعنی مولفه‌های دم نگاری نباشند.  
در نمودار خطی هر خطی موازی محور  $y$ ها باید نمودار تابع  $y = f(x)$  را در حد اکثر ۱ نقطه قطع کند.  
برای بررسی  $y = f(x)$  نبودن  $y$ ها باید بررسی کنیم: این بار به  $y$  عدد دادیم و  $x$  را بررسی کردیم.

\* چند نمودار مهم \*



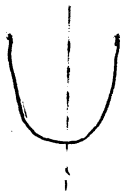
\* توابع چند جمله‌ای با درجه زوج همواره یک به یک نیستند و درجه فرد مشخص نیست \*

\* توابع همگرافیک همواره یک به یک هستند \*  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$





9)



$a > 0$  (دکانه رو به بالا)

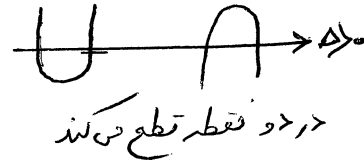
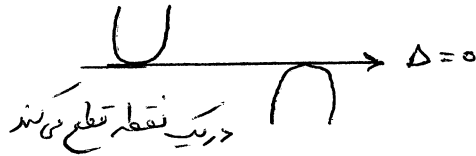
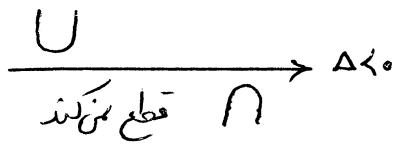
$a < 0$  (دکانه رو به پایین)

\* خط  $x = -\frac{b}{2a}$  محور تقارن تابع است \*

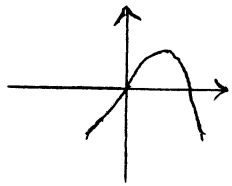
$\min(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

$\max(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

- چند حالت مختلف نمودار: (برخورد توابع با محور x ها، همان ریشه های معادله است):



مثال: معنی  $y = ax^2 - (a+2)x + c$  از ناحیه دوم نمی گذرد. حدود  $a$  را تعیین کنید.  
چون معادله ضرب ثابت  $(c)$  ندارد از مبدأ محقق نمی گذرد و چون از ناحیه دوم نمی گذرد شکل آن اینگونه است



$x^2$  ضرب  $< 0 \Rightarrow a < 0$  ①

$P = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \frac{0}{a} = 0 \rightarrow$  نمی گذرد

$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{c+2}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} a+2 < 0 \Rightarrow a < -2$  ②

① و ②  $\Rightarrow \boxed{a < -2}$

\* هرگاه در تابعی ماکسیموم یا مینیموم داده شود و مشخص نکرده باشند که مربوط به طول یا عرض است  $\leftarrow$  منظور عرض است

مسائل S و P: روابط متقابل را به خاطر بسپارید:

1)  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

2)  $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

3)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{S^2 - 2P}{P}$

مثال در معادله  $x^2 + x - 1 = 0$  حاصل  $5x_1^2 + 3x_2^2$  را بدست آورید ( $x_2 > x_1$ )

طبق معادله:  $S = -1$        $P = -1$        $D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{5}$

$x_2 > x_1 \Rightarrow x_1 - x_2 = \boxed{-\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} 5x_1^2 + 3x_2^2 &= 4x_1^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - x_2^2 \\ &= 4(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \\ &= 4(S^2 - 2P) + D \times S = \\ &= 4(1 + 2) - \sqrt{5}(-1) = \boxed{12 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

در مثل معادله درجه ۲ که پارامتری خواسته می شود بعد از حل باید پارامترهای بدست آمده را در معادله برگرداند و ۵ و ۸ بررسی کرد.  
 (۱۹) 09121004708 (۵ باید مثبت یا منفی شود)

۱۲) تجربی ۹۰ خارج از کور: به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه ها حقیقی معادله  $m x^2 + 3x + x^2 = 2$  معکوس یکدیگرند؟

$\Rightarrow P = \frac{C}{\alpha} = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 2}{x} = 1 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \begin{cases} m = -1 & \checkmark \\ m = 2 & \times \end{cases}$

- \* اگر در ریشه قرینه باشند  $\leftarrow \frac{-b}{\alpha} = 0 \leftarrow \boxed{b=0}$  (باید  $\alpha$  و  $c$  مختلف علامت باشند)
- \* " معکوس "  $\leftarrow \frac{c}{\alpha} = 1 \leftarrow \boxed{c=\alpha}$
- \* " عکس و قرینه باشند "  $\leftarrow \frac{c}{\alpha} = -1 \leftarrow \boxed{c=-\alpha}$

\* هرگاه در ریشه داده شود و خود معادله خواسته شود،  $S$  و  $P$  را بدست آورده و از معادله  $x^2 - Sx + P = 0$  استفاده می کنیم.  
 \* یکی از ریشه های معادله  $\boxed{a - \sqrt{b}}$  باشد، ریشه دیگر  $\boxed{a + \sqrt{b}}$  است و بالعکس.

- تشکیل معادله درجه دوم جدید: هرگاه یک معادله درجه ۲ داده شود و معادله درجه ۲ دیگری خواسته شود که ریشه ها جدید بر حسب ریشه های معادله قدیم داده شده باشند: ریشه های جدید را  $y$  و ریشه های قدیم را  $x$  می نامیم و  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم  $x$  را بر حسب  $y$  مرتب کرده و در معادله قدیم برمی گردانیم.

مثال: (معادله درجه دوم بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله  $x^2 - 3x - 2 = 0$  باشند)

جدید =  $y$   
 قدیم =  $x$

$$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y} \rightarrow (\sqrt{y})^2 - 3\sqrt{y} - 2 = 0 \rightarrow y - 3\sqrt{y} - 2 = 0$$

$$\rightarrow y - 2 = 3\sqrt{y}$$

توان ۲  $\rightarrow y^2 - 4y + 4 = 9y$

$$\rightarrow y^2 - 13y + 4 = 0$$

- تابع قدر مطلق: این تابع خطی نیست، کار اصلی قدر مطلق چیست؟ قدر مطلق درون خود را بررسی می کند. اگر مثبت باشد به آن دست نمی زند و اگر منفی باشد آن را در یک منفی ضرب می کند. به طریقی در برخورد با قدر مطلق باید داخل آن را بقسین علامت کنیم تا قدر مطلق برداشته شود. برای این کار ریشه داخل آن را بدست می آوریم.  
 قوانین قدر مطلق:

- |  |   |
|--|---|
| ۱) $ x  \geq 0$  | ۷) $ x  < a \rightarrow -a < x < a$               |
| ۲) $ xy  =  x  y $   | ۸) $ x  > a \rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$ |
| ۳) $\left  \frac{x}{y} \right  = \frac{ x }{ y } \quad y \neq 0$ | ۹) $ f(x)  =  g(x)  \rightarrow f(x) = \pm g(x)$  |
| ۴) $ -x  =  x $  | ۱۰) $ x+y  \leq  x  +  y $ اصل نامساوی مثلثی      |
| * ۵) $\sqrt[n]{x^{2n}} =  x $                                    | اگر $x$ منفی هم علامت باشد: حالت تری              |
| ۶) $ x  = a \rightarrow x = \pm a$                               | و مختلف علامت: حالت کوچکتر                        |

(11)

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

$$|x - |x|| = 1$$

$x \geq 0 \rightarrow x - |x| = 1 \rightarrow x - x = 1 \rightarrow 0 = 1 \quad \times$   
 $x < 0 \rightarrow x - |x| = 1 \rightarrow x - (-x) = 1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \times$   
 $x \geq 0 \rightarrow x - |x| = -1 \rightarrow x - x = -1 \rightarrow 0 = -1 \quad \times$   
 $x < 0 \rightarrow x - |x| = -1 \rightarrow x - (-x) = -1 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$

09121004708

\* در سوالات اگر دو طرف نامعادله قدر مطلق بود می توانیم دو طرف را به توان 2 برسانیم \*

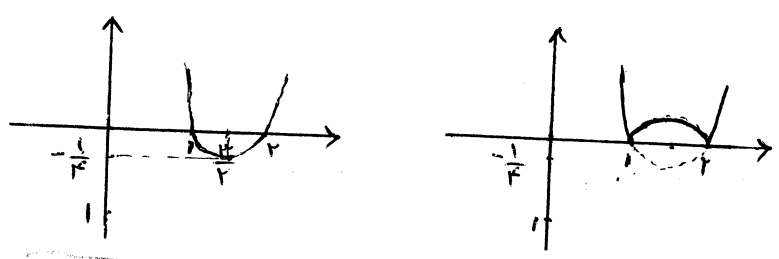
- نمودار  $y = |f(x)|$ : نمودار را ببرید قدر مطلق رسم می کنیم و پس قسمت ها را بین محور x ها راست به محور x ها قرینه می کنیم

$y = |x^2 - 3x + 2|$

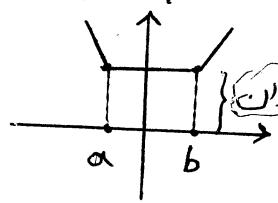
$a > 0 \rightarrow \min(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$

x	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$-\frac{1}{4}$	0

مثال:



- نمودار  $y = |x-a| + |x-b|$ : ریشه های داخل قدر مطلق را در دستگاه مشخص می کنیم و هر کدام را به اندازه اختلاف دوری به بالای محور x ها (مقدار)

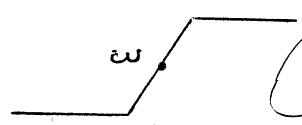
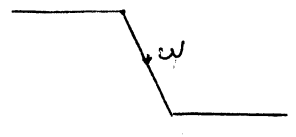


اختلاف بین ریشه ها = کف مقداری

کف مقداری  $y \geq$  برد

جمع ریشه ها  $x = \frac{a+b}{2}$  محور تقارن

- نمودار  $y = |x-a| - |x-b|$ : ریشه های داخل قدر مطلق را بدست آورده، هر کدام را در محل تابع بر می گردانیم تا آن بدست آید و به این ترتیب



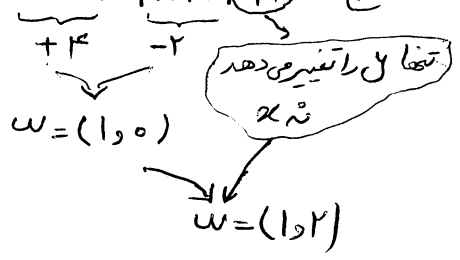
در نقطه ایجاد می شود که شکل از دور آن را رسم می شود.

محور تقارن  $w = (\frac{جمع\ ریشه\ ها}{2}, 0)$

اختلاف ریشه ها  $y \leq$  قرینه اختلاف ریشه ها = برد

مثال: برد و مرکز تقارن تابع  $y = |x-4| - |x+2| + 2$  را تعیین کنید.

$-4 \leq y \leq 6$   
 $\Downarrow$   
 $-4 \leq y \leq 8$



- تابع جزء صحیح:

$x \in R \rightarrow x = n + p \quad n \in Z \quad 0 \leq p < 1 \rightarrow [x] = n$

۱)  $0 \leq x - [x] < 1 \rightarrow [x - [x]] = 0$

۲)  $[x] + [-x] = 0 \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۳)  $[x \mp k] = [x] \mp k \quad k \in \mathbb{Z}$

۴)  $[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] & \text{جمع اعداد صحیح! نمی‌شود} \\ [x]+[y]+1 & \text{جمع اعداد صحیح! می‌شود} \end{cases}$

۵)  $[x+y] \geq [x] + [y]$

۶)  $[x] = a \rightarrow a \leq x < a+1$

۷)  $[x] < a \rightarrow x < a$

۸)  $[x] \leq a \rightarrow x < a+1$

۹)  $[x] > a \rightarrow x \geq a+1$

۱۰)  $[x] \geq a \rightarrow x \geq a$

09121004708



\* برای اینکه جزء صحیح را برای همیشه یاد بگیرد محور مختصات را به خاطر بسپارد \*

(T) تجزی ۹۱ برای هر عدد طبیعی  $n > 2$  حاصل  $[ \sqrt{4n^2 - 4n + 1} ] - 2[ \sqrt{n^2 - 2n} ]$  چیست؟

- الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) ۴

عدد ۳ را جایگزین می‌کنیم  $n > 2$

$$[ \sqrt{4(3)^2 - 4(3) + 1} ] - 2[ \sqrt{3^2 - 2(3)} ] = [ \sqrt{28} ] - 2[ \sqrt{3} ] = 5 - (2 \times 1) = 3$$

بین اعداد      بین اعداد

- برای رسم تابعی که درون آن‌ها جزء صحیح به کار رفته باید فاصله داده شده را یکی یکی جدا کرد و مقدار جزء صحیح را بدست آورد. پس نمودار بدست آمده را در فاصله مشخص رسم کرد.

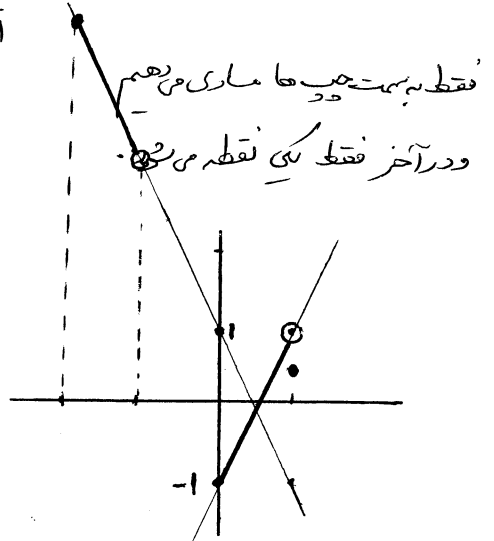
مثال: نمودار تابع  $y = \frac{2x-1}{[x]+1}$  در فاصله  $[-2, 1]$  از چه اجزایی تشکیل شده است؟

$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = \frac{2x-1}{-2+1} = -2x+1$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = \frac{2x-1}{-1+1}$  غ

$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = \frac{2x-1}{0+1} = 2x-1$

$x=1 \xrightarrow{\text{نقطه}} y = \frac{1}{2}$  (۱ و  $\frac{1}{2}$ )



رسمت‌های آبی نمودار اصلی است

\* در حالت  $[Kx]$  باید فاصله را ستاب با معکوس K جدا کرد.

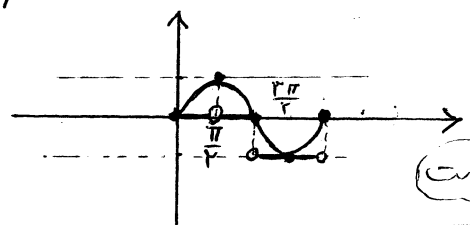
مثال:  $x \in [-2, 6]$  در فاصله  $y = 2[ \frac{x}{2} ] + 1$  ؟

$K = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \leq x < 4 \rightarrow -2 \leq x < 0$

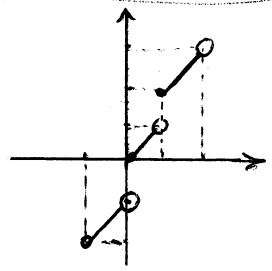
$4 \leq x < 6$

$x=6$

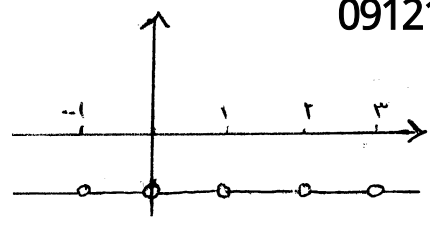
۱۳) نمودار  $y = [F(x)]$  : نمودار بدون جزو صحیح را رسم می کنیم، سپس خطوط افقی گذراندن از اعداد صحیح که نمودار را قطع می کنند رسم می کنیم، سپس قسمت هایی از نمودار را که بین خطوط موازی قرار دارد را روی خط پایین تصویر می بینیم محل برخورد خطوط افقی با نمودار اولیه توپیر و نظیر آن تو خالی است.



مثال: نمودار  $y = [\sin x]$  را در فاصله  $[0, 2\pi]$  رسم کنید  
 (قسمت های قرمز اصلی است)



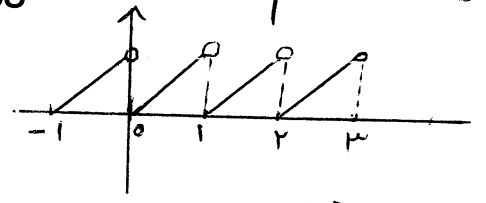
$y = x + [x]$



$y = [x] + [-x]$

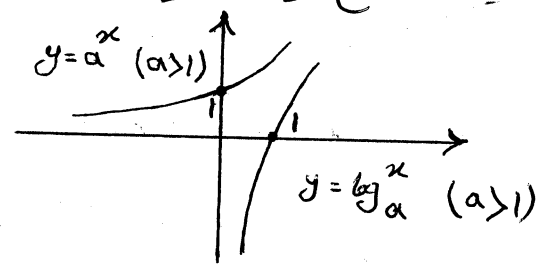
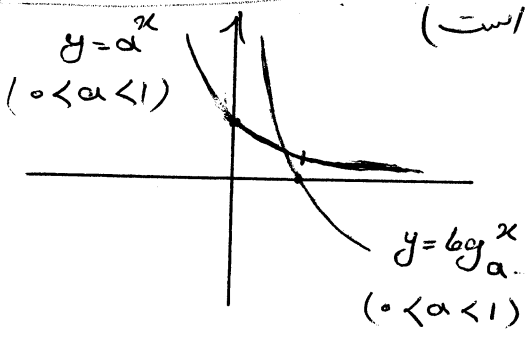
09121004708

چند نمودار مهم \*



$y = x - [x]$

قوانین توابع نمایی و لگاریتمی: (تابع لگاریتم معکوس نمایی است)



اگر پایه لگاریتم عدد نپیر (e ≈ ۲,۷۱۸) باشد آن را لگاریتم نپیری می گوئیم  $[\log_e^a = \ln a]$

- ۱)  $\log_a^1 = 0$
- ۲)  $\log_a^a = 1$
- ۳)  $\log_c^a \times \log_c^b = \log_c^{a \times b}$  قانون زنجار
- ۴)  $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$  قانون زنجار
- ۵)  $\log_b^{a^n} = n \log_b^a \rightarrow \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$
- ۶)  $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$  (برای تغییر مبنا)  $\rightarrow \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$
- ۷)  $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$
- ۸)  $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a} \rightarrow a^{\log_a^b} = b$
- ۹)  $\log_c^a = \log_c^b \iff a = b$

قوانین لگاریتم:

- ۱۰)  $a < b \rightarrow \begin{cases} \log_c^a < \log_c^b & c > 1 \\ \log_c^a > \log_c^b & 0 < c < 1 \end{cases}$
- ۱۱)  $\log_c^a < \log_c^b \rightarrow \begin{cases} a > b & 0 < c < 1 \\ a < b & c > 1 \end{cases}$

۱۲)  $\log_B^A$   $\xrightarrow{\text{دامنه}}$   $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ B \neq 1 \end{cases}$  حرفه باید همزمان برقرار باشد

\* (T) تجربی خارج از کشور ۱۸ :

اگر  $a$  و  $b$  بر سه معادله  $x^2 - 10x + 1 = 0$  باشند حاصل  $\log(a+b) - \log a - \log b$  چیست؟

✓ الف) ۲ - ب) ۱ - ج) صفر - د) ۱

$$\log(a \cdot b) - \log(a+b) = \log \frac{a \cdot b}{a+b} = \log \frac{P}{S} = \log \frac{1}{10} = \log \frac{1}{10} = -2$$

- برای حل معادلات نمایی باید پایه‌ها را یکسان کرد.

مثال: معادله  $4^x + 7^x + 6^x = 2^x$

$$\begin{cases} t^2 + 7t + 6 = 0 \\ t = -1 \rightarrow 2^x = -1 \quad \times \\ t = -6 \rightarrow 2^x = -6 \quad \times \end{cases}$$

معادله جواب ندارد

\* عبارات حل معادله باید جواب بدست آمده را در معادله اولیه بگزارد و شرایط دامنه را بررسی کرد.

\* (T) تجربی ۱۹ : اگر  $\log_3 x + \log_3 y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 44$   $\log_4(x+y) = ?$

حل:  $\log_3 xy = 2 \rightarrow 3^2 = 9 = xy$

✓ الف) ۱.۵ ج) ۲  
ب) ۲.۵ د) ۳

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 44 + 2 \times 9 = 62$$

$$\rightarrow x+y = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \checkmark \rightarrow \log_4(x+y) = \log_4 1 = \log_4 4 = \log_{2^2} 2^2 = \frac{2}{2} = 1$$

برای حل نامعادلات لگاریتمی: مانند معادله آن را مساوی می‌کنیم تا به یکی از این حالات برسیم:

$$\log_c^a < \log_c^b \Rightarrow \begin{cases} a < b & c > 1 \\ a > b & 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\log_c^a < b \Rightarrow \begin{cases} a < c^b & c > 1 \\ a > c^b & 0 < c < 1 \end{cases}$$

\* بعد از حل نامعادله باید دامنه عبارات لگاریتمی را بدست آورید و با جواب نامعادله اشتراک گرفت.

مثال: اگر  $2^x < 7$  و  $2^x = 3$  و  $2^x = 3$  را با دو رقم اعشار حساب کنید.

$$2^{-x} < 10^{-4} \rightarrow \log_2 2^{-x} < \log_2 10^{-4} \rightarrow -x \log_2 2 < -4 \log_2 10 \Rightarrow x > \frac{4}{\log_2 10} = \frac{4}{\frac{1}{\log_{10} 2}} \rightarrow x > 19.93 \rightarrow \boxed{19.94}$$

$$P(t) = P(t_0) \times e^{kt}$$

- تابع رشد و زوال: فرم کلی آن اینگونه است:

$k > 0$  ضریب رشد

$P(t)$  مقدار ثانویه

$k < 0$  ضریب زوال

$P(t_0)$  " اولیه

$k = 0.04$

(T) تجربی ۹۲: در شروع یک نوع گسب ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری‌ها پس از  $t$  دقیقه به صورت  $F(t) = Ae^{kt}$  است.

پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟  $P(t_0)$

$$7000 = 1400 \times e^{0.04t} \rightarrow 5 = e^{0.04t} \rightarrow \log 5 = 0.04t$$

$$\rightarrow t = 24$$

$P(t)$  الف) ۲۱

ب) ۲۸

ج) ۳۵

د) ۴۲ ✓

15

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \times 3$$

ماتریس

ماتریس مربعی: تعداد سطرها و ستون ها برابرند

ماتریس قطری: عناصر غیر قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

ماتریس واحد (همانی): عناصر قطر اصلی 1 و بقیه صفر اند.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$A_{ii} = 5$$
  
$$A_{21} = 1$$

- تاروی دو ماتریس: هرگاه دو ماتریس هم مرتبه بوده و درایه ها نظیر به نظیر مساوی باشند، دو ماتریس مساویند.

09121004708

- ضرب عدد در ماتریس: عدد را در تمام درایه ها ضرب می کنیم.

- جمع و تفریق دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه را می توان جمع و تفریق کرد. درایه ها نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می شوند.

- ضرب دو ماتریس: اگر تعداد ستون های ماتریس اول با سطرهای ماتریس دوم برابر باشد می توانیم دو ماتریس را ضرب کنیم.

\* ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد ( $AB \neq BA$ )

\* در هر ماتریس مربعی:  $A^{m \times p} \times B_{p \times n} = (AB)_{m \times n}$   $[A^2 = A \times A, A^3 = A \times A \times A = A \times A^2]$

\* برای محاسبه توان های بالا باید چند توان اول را محاسبه کنیم تا به یک روند برسیم. (اگر به روند نرسیدیم به I برسیم)

مثال: هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & \end{bmatrix}$  و نگاه  $A^{11}$  را بدست آورید

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \\ 2 & \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & \\ 1 & \end{bmatrix} = 2I \rightarrow A^{11} = (A^2)^5 \times A = (2I)^5 \times A = 32I = \begin{bmatrix} 64 & \\ 32 & \end{bmatrix}$$

\* I در ضرب نسبی ندارد

\* برای به توان رساندن ماتریس های قطری باید عناصر قطر اصلی را به توان برسانیم.

- دترمینان: فقط برای ماتریس ها مربعی تعریف می شود و حاصل دترمینان همیشه یک عدد است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

\* برای دترمینان ماتریس  $2 \times 2$  این روابط صادق است:

1) $ A+B  \neq  A  +  B $	3) $ A^n  =  A \times A \times \dots \times A  =  A  \times  A  \times \dots \times  A  =  A ^n$
2) $ AB  =  A  \times  B $	4) $ kA  = k^n \times  A $

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس معکوس (عکس):}$$

1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$	2) $(A^{-1})^{-1} = A$	3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad k \neq 0$	* چند رابطه:
4) $ A^{-1}  = \frac{1}{ A }$	5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$		

T) تجربی خارج از کلاس 91: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس B از معادله  $A \times B = 2I$  کلام است؟

$$\bar{A} \times AB = \bar{A} \times 2I \rightarrow (\bar{A} \times A)B = 2\bar{A}$$
  
$$\Rightarrow B = 2\bar{A}^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \rightarrow 2\bar{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



حل دستگاه بکمک ماتریس وارون: هر دستگاه دو معادله دو مجهولی را می توان به یک معادله ماتریسی تبدیل کرد.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

$$AX = B \xrightarrow[\text{ضرب در معکوس}]{\text{از سمت چپ: } A^{-1}} A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$1) \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

دستگاه سازگار است  
(حجاب دارد)

$$2) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

دستگاه ناسازگار است  
(حجاب ندارد)

$$3) \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

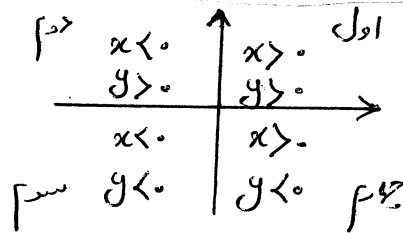
دستگاه همبسته  
(به شمار جواب)

مثال: به ازای کدام مقدار  $m$  ماتریس زیر وارون پذیر نیست؟

09121004708

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \dots \Rightarrow |A| = m^2 + m - 2 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

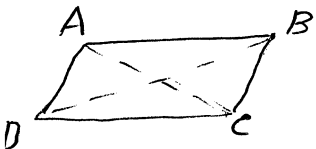
یعنی اگر صف سطر (مخرج) صفر  
وارون پذیر نیست



دستگاه محققاً:

- فاصله بین دو نقطه:  $A = (x_A, y_A) \quad B = (x_B, y_B) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

- نقطه وسط:  $M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$



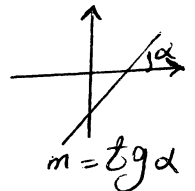
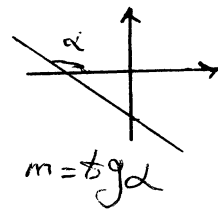
\* در متوازی الاضلاع (مستطیل، لوزی و مربع) روابط زیر بین رئوس برقرار است:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

معادله خط: هر خط با محور  $x$  ها درجهت مثبت یا منفی می سازد که  $tg$  آن زاویه، شیب خط نامیده می شود.

$$y = mx + n \rightarrow m = \text{شیب}$$

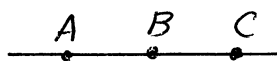
$$ax + by + c = 0 \rightarrow \text{شیب} = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$



\* هرگاه دو نقطه از خطی نادره شود:

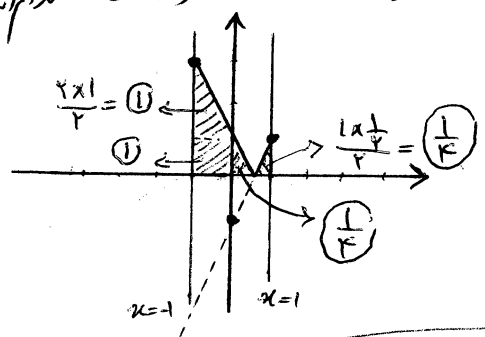
$$A = (x_A, y_A) \quad B = (x_B, y_B) \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = m_{BC}$$



\* اگر دو نقطه سه نقطه در یک راستا باشند:

(17) مساحت ناحیه محدود به نمودار  $f(x) = |2x-1|$ ، محور  $x$  ها و دو خط  $x=1$  و  $x=-1$  است؟

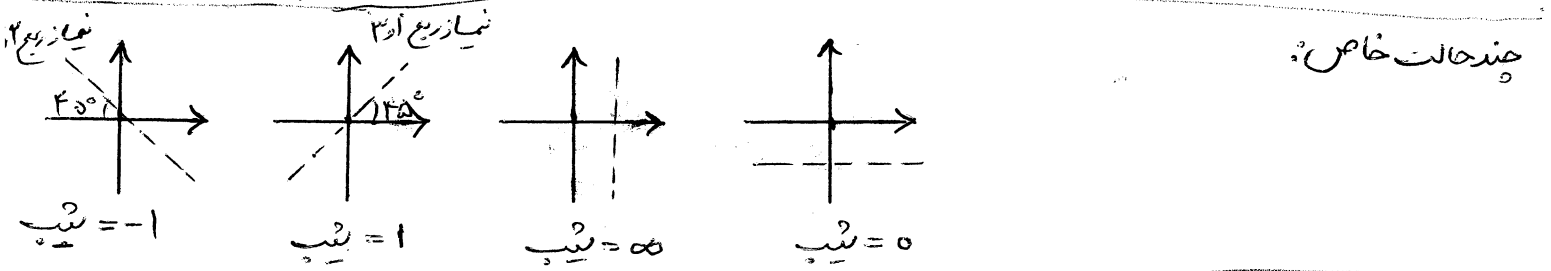


$$\begin{array}{r|l} x & -1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline y & 1 \quad -1 \quad 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

- الف)  $\frac{2}{2}$
- ب)  $2$
- ج)  $3$
- د)  $\frac{5}{2}$

09121004708



\* هرگاه دو خط موازی باشند شیب آنها با هم برابر است.  
 \* هرگاه دو خط عمود باشند شیب آنها عکس و قرینه هم است.

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- فاصله نقطه از خط  $ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$

(18) تجزیه 92: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند. مساحت مربع کدام است؟

- الف)  $\frac{9}{8}$
- ب)  $\frac{9}{4}$
- ج)  $\frac{25}{8}$
- د)  $\frac{25}{4}$

$a =$  اندازه طول ضلع = فاصله دو ضلع مربع

$$2x - 2y - 3 = 0$$

$$x - y + 1 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$S = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c' \end{cases}$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  دو خط در نقطه تلاقی دارند

- دستگاه معادلات خطی:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  دو خط موازیند (تلاقی ندارند)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  دو خط منطبق

- دستگاه ها خاص:

سوال) از دستگاه  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+2$  و  $2x+y-2z=16$  مقادیر  $x$  و  $y$  و  $z$  را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} 2t + 2 + 2t - 2t + 4 &= 16 \\ \rightarrow 5t &= 10 \rightarrow t = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= t \rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = t - 2 \end{cases}$$

\* اگر تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر بود، کیفیت بی از متغیرها را به دلخواه حذف کنیم. اگر به یک رابطه غلط رسیدیم دستگاه فاقد جواب و اگر به یک معادله رسیدیم به شمار جواب دارد.

مثال: 
$$\begin{cases} (x+2y-3z=-4) \times -1 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x-2y+3z=4 \\ 2x+y-3z=4 \end{cases}$$

به شمار جواب دارد  $x-y=8$

09121004708

ملاحظات:

- ارتباط بین واحدهای اندازه گیری:  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

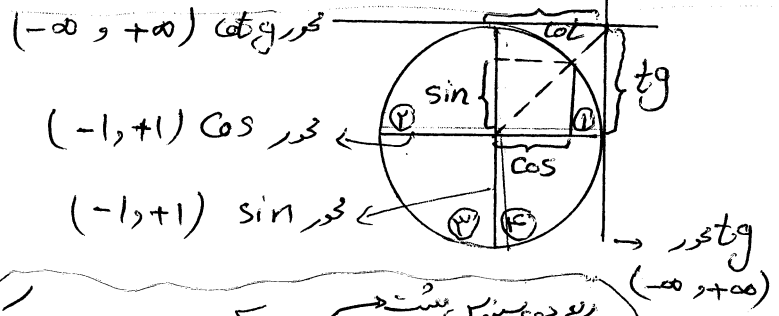


- طول کمان:  $L = r\theta$  (theta بر حسب رادیان)

دایره مثلثاتی:

شعاع 1 است. جهت چرخش خلاف ساعت.

م	م	م	م	اول	دوم	سوم	چهارم
+	-	+	-	+	+	+	+
+	-	-	+	+	-	-	-
+	+	+	-	-	+	+	+
+	+	-	-	-	-	+	+



ربع دوم سینوس مثبت است  
 ربع اول همه مثبت است  
 ربع سوم تانژانت مثبت است  
 ربع چهارم کسینوس مثبت است

مثال: اگر  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  معلوم شود،  $\tan \alpha$  و  $\cot \alpha$  را می توانیم پیدا کنیم. نگاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه است.

مجموع

- نسبت های مثلثاتی مهم:

	30	45	60
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

\* هرگاه در کمان یک نسبت مثلثاتی مضارب  $\pi$  اضافه یا کم شود، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

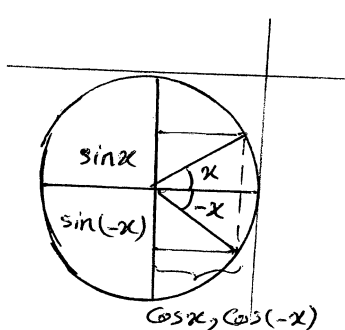
ولی اگر مضارب فرد  $\frac{\pi}{2}$  اضافه یا کم شود نسبت تغییر می کند. که در هر دو حالت برای تعیین علامت از دایره مثلثاتی استفاده می کنیم.

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

(19)



$$\sin(-x) = -\sin x$$

کمانهای قرمز:

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

09121004708

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$$

T تجزیه خارج از کسره 11:

اگر  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{2}{3}$  آنگاه  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  کدام است؟

حل:  $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha \xrightarrow{\text{ربع اول}} +\frac{2}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$

الف)  $\frac{1}{3}$   
ب)  $-\frac{1}{5}$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \times \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + 1 \times \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

ج)  $\frac{1}{5}$   
د)  $\frac{1}{3}$

خواص زوایای مکمل و متمم:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \\ \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \\ \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{cotg} \beta \end{cases}$$

سؤال: حاصل عبارت معادلی را بدست آورید.

$$\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{13\pi}{14}$$

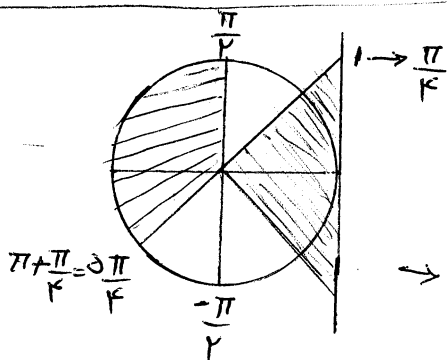
$$0 + 0 + 0 + \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

حاصل جمع صفر = کسینوس قرینه = مکمل

تا معادلات مثلثاتی: باید از زاویه مثلث استفاده کرد.

سؤال: دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$  را بدست آورید

$$1 - \operatorname{tg} x \geq 0 \rightarrow \operatorname{tg} x \leq 1$$



$$\rightarrow \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$$

1) sin^2 x + cos^2 x = 1

2) 1 + tg^2 x = 1/cos^2 x

3) 1 + cotg^2 x = 1/sin^2 x

09121004708

4) sin(alpha - beta) = sin alpha cos beta - cos alpha sin beta

5) cos(alpha - beta) = cos alpha cos beta + sin alpha sin beta

6) tg(alpha - beta) = (tg alpha - tg beta) / (1 - tg alpha tg beta)

7) sin 2alpha = 2 sin alpha cos alpha

1) cos 2alpha = cos^2 alpha - sin^2 alpha

2) 1 + cos 2alpha = 2 cos^2 alpha (فرمول ها)  
1 - cos 2alpha = 2 sin^2 alpha (طلایی)

3) tg alpha = tg alpha / (1 - tg^2 alpha)

4) (sin alpha - cos alpha)^2 = 1 - sin 2alpha

5) sin x + cos x = sqrt(2) sin(x + pi/4) = sqrt(2) cos(x - pi/4)

6) sin x - cos x = sqrt(2) sin(x - pi/4) = -sqrt(2) cos(x + pi/4)

7) sin alpha cos alpha = 1/2 sin 2alpha

tg 1v + tg 1a + tg 1v \* tg 1a = ?

1v + 1a = 45

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید  
-> tg(1v + 1a) = tg 45 -> (tg 1v + tg 1a) / (1 - tg 1v \* tg 1a)

-> tg 1v + tg 1a = 1 - tg 1v \* tg 1a

-> tg 1v + tg 1a + tg 1v \* tg 1a = 1

tg x = -1/2 و cos x < 0 => sin x = ?  
cotg x = -2 -> ربع دوم -> sin x > 0

1 + cotg^2 x = 1/sin^2 x -> 1 + 4 = 5 = 1/sin^2 x -> sin^2 x = 1/5 -> sin x = sqrt(5)/5 (V) or -sqrt(5)/5 (X)

\* هرگاه یک متغیری برقرار باشد و پارامتری از داخل آن خواسته شود (m - A) کافیت به متغیر آن عدد بدیم

1/cos^2 x + A/cos^2 x = tg^2 x - 1 => A = ?

مثال: فرض x = 70 -> 1/16 + A/16 = 9 - 1

-> 16 + 16A = 128 -> A = -7

\* اکثریک عبارات مثلثاتی سینوس و کسینوس وجود دارند و ضرب یکی از آنها با sqrt(3) یا sqrt(3)/3 بود می توانیم به جا بیاوریم تا فرمول آن را قرار داد و مخرج مشترک گرفت

sin 50 + sqrt(3) cos 50 = ?

مثال: sin 50 + tg 40 \* cos 50 = sin 50 + sin 40 / cos 40 \* cos 50

= (sin 50 cos 40 + sin 40 cos 50) / cos 40 = sin(50 + 40) / cos 40 = 1 / cos 40

\* اگر در جوابی حاصل یک عبارت مثلثاتی خواسته شود و عبارت دارای متغیر باشد می توان به جای متغیر در صورت سوال و گزینه ها عددگذاری کرد.

09121004708

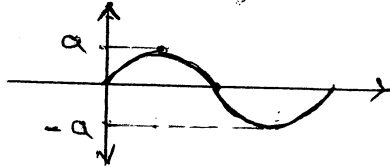
$$\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = ?$$

سوال :  
الف) ۱ - ب) صفر

حل: فرض  $x=0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2} \sin 0 - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 0}{\sin 0 + \cos 0} + \sqrt{2} \cos 0$   
 $= -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = -1$

ج) ۱ د)  $2\sqrt{2} \cos x$

$$y = a \sin bx$$



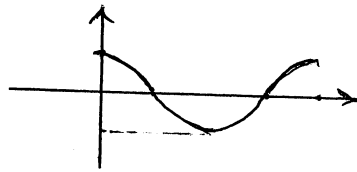
$a > 0$

$a < 0$

توابع مثلثاتی :

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ دوره تناوب}$$

$$y = a \cos bx$$



$a > 0$

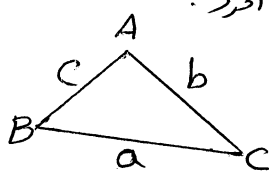
$a < 0$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

\* دوره تناوب توابع  $y = \cot ax$  و  $y = \tan ax$  برابر است با  $T = \frac{\pi}{|a|}$

قضیه سینوس ها : زمان کاربرد دارد که از یک مثلث ضلع داده شود و زاویه خواسته شود یا دو ضلع و زاویه داده شود و ضلع سوم خواسته شود.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$



\* مساحت مثلث را می توان از روابط زیر بدست آورد.

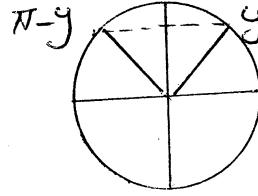
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \\ S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \\ S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \end{cases}$$

قضیه سینوس ها : هرگاه از یک مثلث ، دو زاویه و یک ضلع داده شود و ضلع دیگر خواسته شود از این قضیه استفاده می کنند

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

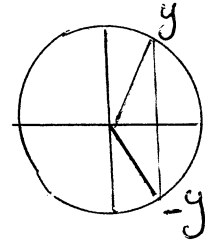
۲۲) - معادله مثلثاتی: به کمک اتحادهای مثلثاتی معادله را ساده کنیم تا به یکی از حالات زیر برسیم:

$$1) \sin x = \sin y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$$

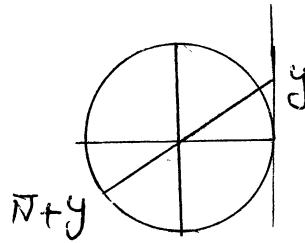


09121004708

$$2) \cos x = \cos y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$



$$3) \tan x = \tan y \rightarrow x = k\pi + y$$



\* حرکت به بجا هم نیت را عوض کنیم کافیت همان آن را از  $\frac{1}{2}$  کم کنیم  $(\tan \leftrightarrow \cot, \sin \leftrightarrow \cos)$

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\sin 3x = -\cos 2x \rightarrow \sin 3x = \cos(\pi - 2x)$$

مثال:

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(\pi - 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 3x = 2k\pi + \pi - 2x \rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - 3x = 2k\pi - \pi + 2x \rightarrow x = \frac{-2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{5} \end{cases}$$

۳) تجزیه ۹۲: جواب کلی معادله مثلثاتی:  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  کسری

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \checkmark$$

در محاسبه حد اولین اقدام جای گذاری عدد مورد نظر است. ولی در بسیاری موارد حد تابع با مقدار آن مرتبط نیست و رفع ابهام لازم است. اگر حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه برابر باشد آن تابع در آن نقطه حد دارد.

- در حالت های زیر رفع ابهام تعریف می شود:

صفر عددی	$\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
صفر عددی		صفر عددی		صفر عددی

حالات زیر را به خاطر بسازید:

$\infty + \infty = \infty$	عدد $\times \infty = \infty$	$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$	توی زره = $\frac{\text{صفر عددی}}{\text{صفر عددی}}$
$\infty \times \infty = \infty$	صفر عددی $\times \infty = 0$	$\frac{\text{صفر عددی}}{\text{صفر عددی}} = 0$	
$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر عددی}} = \infty$	توی نند = $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر عددی}}$		$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

رفع ابهام  $\frac{0}{0}$ :

(۱) باید حاصل صفر کننده از صورت و مخرج را پیدا کرده و آن را حذف کنیم (توسط اتحاد، تجزیه، گویا کردن و...)

(۲) هم ارزی

(۳) قاعده هسپیتال: مخرج را همزمان باید بگیریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فقط در این حالت هسپیتال استفاده می شود

\* در مورد توابع دارای قدر مطلق و جزء صحیح ابتدا باید تکلیف آن ها را مشخص کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x| - [x]}{|x| + [x]} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 0}{x + 0} = \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x - (-1)}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x + 1}{-x - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases}$$

حد ندارد

\* توابع  $y = [x]$  و  $y = [-x]$  در نقاط صحیح، حد ندارند و در نقاط غیر صحیح حد دارند.

\* تابع  $y = [f(x)]$  در نقاطی که داخل جزء صحیح را غیر صحیح کند حد ندارد و در نقاطی که داخل جزء صحیح را صحیح کند باید

\* در توابع دارای قدر مطلق اگر  $x$  به سمت  $\infty$  داخل قدر مطلق برود، باید سمت چپ در است آنگاه تعیین کرد (مثال ۱)

\* در توابع چند ضابطه ای که  $x$  به سمت  $\infty$  برود هم باید سمت چپ در است را جدا کرد.

مثال:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - 1} & x < -1 \\ [x] + 2 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = ? \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} ([x] + 2) = -1 + 2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - 1} \xrightarrow{H} \frac{2x - 5}{2x} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$



\* در توابع رادیکالی که  $x$  به سمت  $\infty$  زیر رادیکال می رود قاعده هسپیتال استفاده نمی شود و باید از گویا کردن استفاده کرد.

(اگر فرجه زوج باشد سمت چپ و سمت راست را باید جدا کرد)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = 2 \times 0 = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = X \text{ خارج از دامنه}$$

حد سمت چپ مساوی نیست و حد ندارد

\* در توابعی که به صورت چند جمله ای هستند و حجه عبارت به حسب تغییرات و متغیر (هم شکل ها) به سمت صفر میل می کند کل عبارت هم از جمله دارای کوچکترین توان است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^3 + (x-1)^5}{(x-1)^2 + 3(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^3}{3(x-1)^3} = \frac{2}{3}$$

مثال:

مقایسه مثلثاتی: چند هم ارزی:

$$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$$

$$\tan u \sim u$$

$$\sin u \sim u$$

$$\cos u \sim 1 - \frac{nu^2}{2}$$

$$\sqrt{\cos u} \sim 1 - \frac{u^2}{2m}$$

(در هم ارزی ها  $x$  به سمت هر عددی برود  $u$  باید به سمت صفر برود)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \text{ کدام است؟}$$

(T) تجربی 91: حاصل عبارت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2}) - (1 - \frac{4x^2}{2})}{x^2} = \frac{3x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

- (الف)  $-\frac{1}{2}$  (ج)
- (ب)  $\frac{1}{2}$  (د)  $\frac{3}{2}$

\* به یاد داشته باشید که برای استفاده از قانون هسپیتال حتماً باید از صورت و مخرج همزمان مشتق گرفت ولی هم ارزی ها می توان بر صورت یا مخرج یا هر دو از آن استفاده کرد.

\* هرگاه از هم ارزی استفاده کردیم و متغیرها در اثر قیوتی ساده شدند و حاصل صفر شد حق نداریم از آن هم ارزی استفاده کنیم در صورتی که می توان از هم ارزی استفاده کرد

مثال: حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - (1 - \frac{x^2}{2})}{3x^2}$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{2}$$

ولی در مخرج می توان

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \xrightarrow{\text{آنگاه داریم}} \lim_{x \rightarrow a} L(x) = b$$

(T) تمرین ۸۶ : در بازه  $[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$  همواره  $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)) = 0$  حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

- (الف)  $-\pi$
- (ب)  $0$
- (ج)  $\frac{\pi}{2}$
- (د)  $\pi$

\* هرگاه تابع  $g(x)$  در  $x=a$  کران  $b$  باشد (مخصوصاً در دو عدد مشخص) و حد تابع  $f(x)$  در  $x=a$  صفر باشد

صفر  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = 0 \times \infty = 0$    
 کران دار  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = 0 \times \infty = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) \times \infty = 0 \times \infty = 0$$

بسیار -1 و +1  
 کران دار

\* طبق نکته قبل اگر تابعی حد ندارد برای آن که حد دارد شود کافیت در یک عامل صفر کننده ضرب شود.

مثال : تابع  $f(x) = (4x^2 - 3x - 1)(x)$  در چند نقطه صحیح حد دارد؟

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

✓ صحیح نیست  $\times$

در اعداد صحیح عامل صفر کننده  
 حد ندارد باید باشد

- حد بی نهایت :

اگر عامل حدی عدد  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$  شد باید سمت چپ در انت آن را جداگانه حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)}{(x+1)^2} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(0^+)^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(0^-)^2} = -\infty \end{cases}$$

مثال :

- حد در بی نهایت : وقتی متغیر یک عبارت به سمت بی نهایت می رود، آن عبارت با جمله دار بزرگترین توان هم ارزش  $(\frac{0}{0})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^5 - \sqrt{x} - 2}{x^2 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^5}{x^2} = -4x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x}{3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-x}{-3x} = \frac{2}{3}$$

\* اگر  $x \rightarrow \infty$  و داخل جزء صحیح عدد صحیح باشد خرج را در صورت باید بایزم !! \*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x+1}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2(x-3)+7}{x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2 + \frac{7}{x-3} \right] = [2] = 2$$

مثال :

\* حتماً  $x \rightarrow \infty$  و بزرگترین توان رادیکال؛ درجه یکسان باشد:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 1} + x + 3) = \sqrt{1} \left| x + \frac{4}{2 \times 1} \right| = -x - 2 + x + 3 = 1$$

هم ارزی رادیکالی برای رفع ابهام  $-\infty - \infty$  است یعنی غیر کسری ها)

رفع ابهام  $0 \times \infty$ : باید عامل  $\infty$  شونده را معکوس کرد و در مخرج عامل صفر قرار دهیم.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \times \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{-\frac{\pi}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2})} = \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

رفع ابهام  $\frac{\infty}{\infty}$ : اگر بتوان هم ارزی بزرگترین جمله را استخوان کرد عوامل  $\infty$  شونده در صورت و مخرج را معکوس کرد تا

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}} \quad \frac{0}{0} \text{ برسم}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} 4x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{-2(1 + \operatorname{ctg}^2 4x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

رفع ابهام  $\infty - \infty$ : اگر بتوان از هم ارزی رادیکال استفاده کرد باید مخرج و ترک گرفت تا به  $\frac{0}{0}$  تبدیل شود.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x} = -1$$

رفع ابهام  $\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \sim e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \times (f(x) - l)}$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-2} \right)^{1/x} = 1 = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-2} - 1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-2} \times \frac{x-2}{x-2} - 1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \times x}{x-2}} = e^1 = e$$

دنباله: جمله عمومی را  $u_n$  می‌نامیم.

$$u_n = \frac{2n+1}{n+5} \rightarrow u_v = ? = \frac{15}{12}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & n > 1 \\ \frac{1}{n} & n \leq 1 \end{cases} \quad a_{11} = ? = \frac{12}{13}$$

همگرایی: هرگاه حد دنباله وقتی  $n \rightarrow +\infty$  برابر یک عدد شود دنباله را همگرا به آن عدد می‌نامیم.  
ولی اگر حاصل بی‌نهایت یا نامعلوم شد، دنباله واگرا است

$$\{\sqrt{n}\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{واگرا}$$

$$\{\sin n\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = \sin \infty \xrightarrow{\text{نا معلوم}} \quad \text{واگرا}$$

$$\left\{ \frac{n - [n]}{2n+3} \right\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - [n]}{2n+3} = \frac{0^+}{2n} = 0 \quad \text{همگرا به صفر}$$

سخت‌ترین دنباله‌ها:  $\log n > n^c > (عدد بزرگتر از ۱)^n > n! > n^n$

$$\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\} \xrightarrow{\text{عدد}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{واگرا}$$

$$\left\{ \frac{n^2 + 2n - 4}{2^n} \right\} \xrightarrow{\text{عدد}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} = 0 \quad \text{همگرا}$$

- نیکوایی: اگر برای هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم:  $u_n \leq u_{n+1}$  دنباله صعودی و اگر  $u_n \geq u_{n+1}$  دنباله نزولی است در غیر اینصورت دنباله غیر نیکو است. (برای بررسی نیکوایی از عددگذاری در رسم شکل استفاده می‌شود)

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \text{ را نزولی}$$

$$\{\sin n\} \rightarrow \text{غیر نیکو}$$

\* در دنباله‌های سری اگر ریشه خارج  $\ll 1$  باشد دنباله غیر نیکو است در غیر اینصورت باید عددگذاری شود.

$$\left\{ \frac{2n+1}{n+3} \right\} \rightarrow \frac{2}{3} \text{ را صعودی}$$

مکوان داری: اگر جملات یک دنباله بین دو عدد محدود باشد آن دنباله مکوان دار است که برای بررسی مکوان داری، حد دنباله را در  $+\infty$  حساب می‌کنیم. اگر عدد شد مکوان دار است، اگر  $\infty$  شد بی‌مکوان است و اگر نامعلوم شد باید عددگذاری کنیم

$$\{\sqrt{n}\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{بی مکوان}$$

$$\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{n\pi}{2} = \text{نامعلوم} \rightarrow -1 \leq \sin \leq 1 \quad \text{مکوان دار}$$

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{مکوان دار}$$

تجربی 91 : کدام یک از دنباله‌ها زیر صعودی و همگرا است؟

$u_n = \frac{2n+1}{n}$  (۴)

$u_n = \left[ \frac{(-1)^n}{n} \right]$  (۳)

$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$  (۲)

$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$  (۱)

①  $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} = 0$  همگرا نیست

همگرا  $\rightarrow$  نرینه (۴)  $3, 2, 5 \rightarrow 2$  جمله اول  $\rightarrow$  صعودی نیست

③ همگرا  $\rightarrow$  نرینه (۳)  $3$  جمله اول  $\rightarrow$   $-1, 0, 1$  صعودی نیست

- پیوستگی : اگر حد چپ و در راست و مقدار تابع در یک نقطه با هم برابر باشند تابع در آن نقطه پیوسته است.

$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x^2-1 & x < 0 \end{cases}$   $x=0 \rightarrow \begin{cases} حد راست = 1 \\ حد چپ = -1 \\ مقدار = 1 \end{cases}$  ناتوان

تجربی 92 : به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$  در نقطه  $x=2$  پیوسته است؟

حل:  $حد چپ = 7 - [7] = 5$

هم مقدار  $a$  (۴)  $4, 5$  (۲)

$حد راست = 2 + 2 = 4$  پیوسته نیست

- نقطه‌های مهم اتصال (عدم پیوستگی) : (۱) جزء صحیح در اعداد صحیح (باید بررسی شود)
- (۲) مرز تابع چند ضابطه‌ای (باید بررسی شود)
- (۳) ریشه مخرج تابع کسری (بدون بررسی)

مثال : به ازای چه مقادیری از  $m$  تابع  $y = \frac{x^2+1}{x^2+x-m}$  همواره پیوسته است؟

اگر تابع کسری همواره پیوسته باشد  $\rightarrow$  مخرج ریشه ندارد  $\Rightarrow \Delta < 0$

$\rightarrow 1 + 4m < 0 \rightarrow m < -\frac{1}{4}$

- ۱)  $y = c$  (عدد ثابت)  $\Rightarrow y' = 0$
- ۲)  $y = u^n$  (تعبیر از  $x$ )  $\Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$
- ۳)  $y = u \times v \Rightarrow y' = u'v + v'u$
- ۴)  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- ۵)  $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- ۶)  $y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
- ۷)  $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \times \cos u$

- ۱)  $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \times \sin u$
- ۲)  $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \times (1 + \tan^2 u)$
- ۳)  $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \times (1 + \cot^2 u)$
- ۴)  $y = a^u \Rightarrow y' = u' \times a^u \times \ln a$
- ۵)  $y = e^u \Rightarrow y' = u' \times e^u$
- ۶)  $y = \log_e u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \times \ln e}$
- ۷)  $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad h = x - a$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

\*  $f'(a)$  نیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطه  $x = a$  است.

(T) تجربه ۹۱ : مقدار مشتق  $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$  به  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

$$\Rightarrow \text{قانون ۴} \rightarrow y' = \frac{(2 \sin x \cos x)(2 - \sin^2 x) - (-2 \cos x \sin x)(1 - \cos^2 x)}{(2 - \sin^2 x)^2}$$

الف)  $\frac{4}{9}$  ج)  $\frac{7}{9}$   
ب)  $\frac{5}{9}$  د)  $\frac{1}{9}$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

\* برای محاسبه حدهایی که فرم آن‌ها شبیه تعریف مشتق است از هوپیتال استفاده کنیم.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(3x-2h) - \cos 3x}{\Delta h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(-2) \times \sin(3x-2h) - 0}{\Delta h} = \frac{2}{\Delta h} \sin 3x$$

(مثال)

(مشتق پذیری برای  $h$  است نه  $x$ )  
پس  $h$  متغیر را محسوب می‌کنیم

- مشتق پذیری: اگر تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در آنجا برابر باشند تابع در  $x = a$  مشتق پذیر است.

در نمودار تابع زمانی در یک نقطه مشتق پذیر است که در آن نقطه بتوان خط مماسی بر نمودار رسم کرد. در واقع نیم فاصله راست و چپ باید در راستای هم باشند و مماس منحرفی نداشته باشند.

مثال: مشتق پذیر تابع  $y = \sqrt{x-2}$  را در  $x = 2$  بررسی کنید.  

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^+ \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty \\ 2^- \rightarrow \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

\* توابع با فرجه فرد همواره پیوسته‌اند

\* اگر تابعی مشتق پذیر باشد همواره دارای خط مماس است و اگر مشتق پذیر نباشد فقط ران دارای مماس است

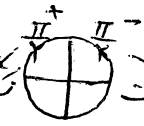
09121004708

مشتق حیب در آن در بی نهایت هم علامت باشد \*

\* اگر تابع جزو صمیم داشته باشد باید ابتدا مقدار عددی جزو صمیم را تعیین کرد و پس مشتق بگیرد \*

\* در قدر مطلق دانت ابتدا باید علامت داخل قدر مطلق را در نقطه داده شده مشخص کرد و پس مشتق گرفت \*

مثال: مشتق پذیری تابع  $y = | \cos x | + 1$  را در  $x = \frac{\pi}{4}$  بررسی کنید

کسینوس مثبت  مشتق ناپذیر  $y = -\cos x + 1 \rightarrow y' = \sin x = 1$  مشتق راست  $\checkmark$   
 کسینوس منفی (عکس هم نذار)  $y = \cos x + 1 \rightarrow y' = -\sin x = -1$  مشتق چپ

\* توابع دارای قدر مطلق در ریشه‌ها یا نقاط خود مشتق ناپذیر و در ریشه‌ها مگر خود مشتق پذیرند \*

مثال: اگر  $f(x) = |x-2| + \sqrt{2x}$  آنگاه  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$  را بدست آورید.

لم مشتق حیب تابع به ازای 2

$$\rightarrow f(x) = -x + 2 + \sqrt{2x} \rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2x}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$f'(2) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- آهنگ تغییر: اگر  $x$  در تابع  $x=a$  تا  $x=b$  تغییر کند آنگاه متوسط تغییر برابر است با:  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

همچنین آنگاه لحظه‌ای تغییر تابع  $f$  در  $x=a$  همان  $f'(a)$  است.

(+) تجزیه 90: در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3x}{x^2}$  آنگاه متوسط تابع از  $x_1=2$  تا  $x_2=3$  حقیقتاً از آنگاه لحظه‌ای آن در

$x = \sqrt[3]{12}$  برابر است؟

آهنگ متوسط  $= \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{4-9}{3-2} = -5$

لحظه‌ای  $= f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 2x \cdot 3x}{x^4} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$   $x = \sqrt[3]{12} \rightarrow -6$

- الف) 1
- ب) 1.5
- ج) 2
- د) 2.5

توابع صعودی و نزولی:

تابع صعودی اگر:  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

" نزولی " :  $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

در نمودار اگر تابع از چپ به راست همواره به سمت بالا حرکت کند آنگاه صعودی و همواره پائین آنگاه نزولی است. اگر توقف داشته باشد (خط افقی) حالت آنگاه برداشته نمیشود.

اگر تابع در یک بازه پیوسته مشتق پذیر باشد می‌توان از دو تعیین علامت مشتق تابع صعودی یا نزولی بودن را تعیین کرد.

مثال:  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$  فاصله  $x$  فاصله  $x$   
 $f'(x) = \frac{7-(-1)}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} > 0$   
 فاصله  $x$  فاصله  $x$   
 غیر نیکو!

\* اگر تابعی کسری باشد و مخرج آن ریشه داشته باشد به طور مکرر غیر لیکوآنت اما با تقسیم علامت مشتق

09121004708

صعود یا نزول بودن تابع را می توان تعیین کرد ، (نشان صفحه قبل)

- سرعت صعود ، سرعت نزول ؛ اندازه مشتق همچنین نشان می دهد تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول است

\* اگر تابعی به صورت ضرب چند عامل باشد مقدار مشتق تابع در ریشه یکی از عوامل خواسته شود ، فقط از آن عامل مشتق می گیریم و در آخر نقطه داده شده را جای گذاری می کنیم .

$$F(x) = (x-3)|x-3| + \frac{\sqrt[3]{(x-3)(x-4)}}{x-3 \times \sqrt{x-4}} \quad F'(3) = ?$$

$$\Rightarrow (x-3) \times (|x-3| + \sqrt[3]{x-4})$$

$$\Rightarrow 1 \times (|1-3| + \sqrt[3]{1-4}) \rightarrow F'(3) = -1$$

- مشتق تابع مرکب :  $y = F \circ g(x) \rightarrow y' = g'(x) \times F'(g(x))$

$$y = F(u) \rightarrow y' = u' \times f'(u)$$

مثال) اگر  $f(e) = -2$  و  $y = F(e^{x^2-2x+3})$  آنگاه  $y'(1)$  را بدست آورید .

$$y' = (2x-2) \times e^{x^2-2x+3} \times f'(e^{x^2-2x+3}) \xrightarrow{x=1} y' = -1 \times e \times f'(e) = 2e$$

- مشتق های زنجیره ای : اگر  $y$  تابع از  $u$  و  $u$  تابع از  $x$  باشد داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

(T) تجربه خارج از کشور ۸۸

اگر  $y = tg^{-1}(nu)$  و  $u = x + \sqrt{x}$  آنگاه مقدار  $\frac{dy}{dx}$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  کدام است ؟

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow u = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- ✓ الف)  $-\pi$
- ب)  $-\pi$
- ج)  $4\pi$
- د)  $8\pi$

$$\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2\pi (tg^{-1} nu) (1 + tg^{-1} nu) \times 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} 2\pi \times (-1) \times 2 \times 1 + 1 = -8\pi$$

$$u = \frac{3}{4}$$

- مشتق ضمنی : هر تابع به فرم  $F(x,y) = 0$  را یک تابع ضمنی  $y$  بر حسب  $x$  می نامیم که مشتق آن اینگونه است :

(برای مشتق گیری باید همه اجزا را به یک طرف بیاوریم)

مشتق بر حسب  $x \rightarrow F'_x$

مشتق بر حسب  $y \rightarrow F'_y$

مثال) آهنگ تغییر تابع  $\frac{\sqrt{y}}{x} + y\sqrt{x} = 6$  را در نقطه  $(4, 1)$  تعیین کنید .

$$y' = - \frac{-\frac{\sqrt{y}}{x^2} + y \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}} + \sqrt{x}} \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=4}} y' = - \frac{-2+2}{\frac{1}{4} + 1} = 0$$



معادله خط مماس و قائم : باید مشتق تابع را بگیریم و نقطه را در آن قرار دهیم تا شیب مماس بدست آید  
اگر آنرا عکس و قرینه کنیم شیب خط قائم بدست می آید و از فرمول زیر استفاده می کنیم .

$y - y_0 = m(x - x_0)$  09121004708

مثال : معادله خط قائم بر منحنی  $y = \ln(2x - 5)$  را در نقطه تلاقی با محور  $x$  ها تعیین کنید .

محور  $x$  ها  $\rightarrow y = 0 \Rightarrow \ln(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = e^0 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$

$y' = \frac{2}{2x-5} \xrightarrow{x=3} m = 2 \rightarrow m \text{ قائم} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 3)$   
 $\Rightarrow x + 2y - 3$

\* برای نوشتن معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه ای خارج منحنی کافی است نقطه ای مانند  $(\alpha, f(\alpha))$  روی منحنی در نظر بگیریم و مانند قبل ادامه دهیم . در آخر نقطه داده شده را در معادله خط نوشته شده جای گذاری کنیم تا  $\alpha$

مثال معادله مماس بر منحنی  $y = \frac{1}{x}$  و گویا رنده از نقطه  $(2, 0)$  را تعیین کنید .  $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$  بدست آید

مصدق  $(2, 0)$   $y - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}(x - \alpha)$   
 $y' = -\frac{1}{x^2} \rightarrow m = -\frac{1}{\alpha^2}$   
 $0 - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}(2 - \alpha) \xrightarrow{\alpha \alpha^2}$   
 $0 = \frac{-1}{\alpha} = \frac{-1}{\alpha^2}(2 - \alpha)$   
 $\alpha = 2 - \alpha \rightarrow \alpha = 1$   
 $\rightarrow y - 1 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 2$

\* برای بدست آوردن زاویه نیک منحنی با محور  $x$  ها کافیست شیب خط مماس بر نمودار را در نقطه برخورد بدست آوریم  
معادله تابع را با  $y = 0$  قطع می دهیم (نقطه برخورد بدست آید) و  $\alpha$  بدست آمده را در معادله مشتق تابع قرار می دهیم  
مقدار بدست آمده شیب خط مماس است که  $tg$  زاویه مورد نظر است .

مثال منحنی  $y = 1 + tg x$  محور  $x$  ها را تحت چه زاویه ای قطع می کند؟  
 $y = 1 + tg x \xrightarrow{y=0} tg x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$   
نقطه برخورد

$y' = 1 + tg^2 x \xrightarrow{x = -\frac{\pi}{4}} m = 2 \rightarrow tg \alpha = 2 \rightarrow \alpha = \text{Arc } tg 2$

\* دو منحنی  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  در  $x = \alpha$  زمانی مماس یکدیگرند که :

1)  $f(\alpha) = g(\alpha)$   
2)  $f'(\alpha) = g'(\alpha)$   
مثال : به ازای کدام مقدار  $m$  و  $n$  منحنی توابع  $y = x^3 + n$  و  $y = x^2 + mx - 2$  در  $\alpha = 1$  بهم مماس اند  
{ 1)  $1 + n = 1 + m - 2 \rightarrow n - m = -2$   
 2)  $3 = 2 + m \rightarrow m = 1 \Rightarrow n = -1$

\*\* اگر نقطه ای داده نشود ، دو منحنی زمانی بهم مماس اند که معادله تلاقی آن ها ریشه مضاعف داشته باشد ( $\Delta = 0$ )  
\* به طور کلی یک معادله زمانی ریشه مضاعف است که ریشه مشتق آن در خودش صدق کند \*  
سوال

مثال) معنی تابع  $y = x^2 + a$  و  $y = x^3$  در ناحیه اول برهم محاس اند،  $a$  را تعیین کنید  
تلاقی  $\rightarrow x^2 = x^2 + a \xrightarrow{\text{مشتق}} 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 & \times \\ x=\frac{2}{3} & \checkmark \text{ ناصحیح}$

در خود معادله  $\frac{1}{27} - \frac{4}{9} - a = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-4}{27}$

09121004708

کاربرد مشتق :  
- نقاط بحرانی و تابع  $f$  در نقاط  $x=a$  بحرانی است اگر یکی از در شرط مقابل اتفاق بیفتد :  
یا  $f'(a) = 0$  یا  $f'(a)$  در  $x=a$  موجود نباشد  
برای یافتن نقاط بحرانی کافی است مشتق گرفته در همه آن نقاط دارای مشکل را بیابیم. اگر عضو داشته باشند بحرانی است  
\* نقاط دارای مشکل :  
۱- ریشه خارج مشتق اگر عضو داشته باشد بحرانی است .  
۲- برز تابع چند ضابطه ای که باید پیوستگی و مشتق پذیری آن را بررسی کرد. اگر عضو دامنه تابع اصلی باشد و مشتق ناپذیر باشد بحرانی است .

$F(x) = (x^2 - 28)\sqrt{x}$

$F'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x^2}} \times (x^2 - 28) = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt{x^2}}$

$= \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt{x^2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 & \checkmark \text{ عضو دامنه} \\ x=0 & \checkmark \\ x=-2 & \checkmark \text{ عضو دامنه (شکل دارد)} \end{cases}$

\* در توابع  $y = |f(x)|$  نقاط بحرانی این ها هستند :  
(ریشه های عبارت داخل قدر مطلق در ریشه های مشتق عبارت قدر مطلق)  
\* اگر خارج شکل دار مشتق و خارج تابع یکی بود، مشکل دارها بحرانی نمی باشند \*

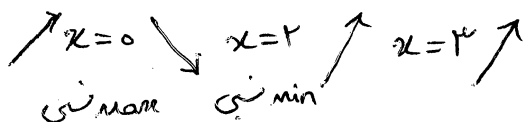
- اکستروم نسبی :  $x=a$  (عضوی از دامنه) ماکسیمم نسبی اگر  $f(x)$  در آن بازه از سایر مقادیر بزرگتر یا مساوی باشد  
اگر  $f(x)$  از سایر مقادیر کوچکتر یا مساوی باشد  $x=a$  مینیمم نسبی است

آزمون مشتق اول : (برای یافتن اکستروم ها توابعی که رسم ساده ای ندارند) اگر علامت مشتق قبل و بعد از نقطه تغییر کند آن نقطه اکستروم نسبی است (در صورت پیوستگی). باید ابتدا نقاط بحرانی را تعیین کنیم پس علامت مشتق قبل و بعد آن را تعیین کنیم.

$F(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2}$

$F'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt{(x^3 - 3x^2)^2}} \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

مشکل دار :  $x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$



\* در توابع قدر مطلق که درون آن ها عبارت درجه ۲ است داریم :

$$y = |ax^2 + bx + c| \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 & \text{همواره یک Min نبی دارد که ریشه مشتق عبارت داخل قدر مطلق است} \\ \Delta = 0 & \sim \sim \sim \sim \\ \Delta > 0 & \text{همواره ۲ Min نبی و یک Max نبی دارد} \end{cases}$$

ریشه های داخل قدر مطلق عبارت  
 ریشه مشتق عبارت داخل قدر مطلق

مثال: اگر هم حار تعیین کنند.

$$y = |x^2 - 3x + 2|$$

مشتق  $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$  ← Max نبی

کار ریشه خودش  $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$  ← Min نبی

\* نقاط اکسترم نبی در خود تابع صدق نمی کند  
 \* طول نقطه اکسترم مشتق را صفر می کند

مثال) مقدار m و n را طوری تعیین کنید که نقطه (-1, 2) ماکسیم نبی باشد.

$$y = -x^2 + mx + n - 1$$

صفر در تابع  $0 = -1 - m + n - 1 \Rightarrow m - n = -4$

$x = -1 \Rightarrow 0 = 2 + m \Rightarrow m = -2$  ,  $n = 2$

- اکسترم مطلق: اگر مقدار تابع در یک نقطه از همه مقادیر بزرگتر یا مساوی باشد آن نقطه را ماکسیم مطلق و اگر از همه مقادیر کوچکتر یا مساوی باشد آن را مینیم مطلق می نامند. برای یافتن آن گاهی است نقاط بحرانی را بدست آوریم و مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه تعیین کنیم. بیشترین مقدار ماکسیم مطلق و کمترین مقدار مینیم مطلق است

مثال) مقدار اکسترم مطلق را تعیین کنید.

$$f(x) = x^2 e^x \quad [-2, 1] \Rightarrow y = e$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 = 0 \Rightarrow e^x(2x + x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=-2 \rightarrow y = 4 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Max مطلق} \Rightarrow e \\ \text{Min مطلق} \Rightarrow 0 \end{cases}$$

\* در توابعی به فرم  $y = a \sin x + b \cos x + c$  یا  $y = a \cos x + b \sin x + c$  برای بدست آوردن اکسترم نبی

کافیست بجای  $\sin$  یا  $\cos$  مقادیر ۱ و -۱ را قرار دهیم و  $\frac{b}{2a}$  را قرار دهیم وین را تعیین کنیم. بیشترین مقدار Max مطلق و کمترین مقدار min مطلق است.

مثال) اکسترم تابع  $y = \sin x + \cos x + 3$  ؟

$$y = -\cos x + \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \rightarrow y = 1 \text{ مطلق min} \\ \cos x = 1 \rightarrow y = 3 \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

- جهت تقعر: اگر تابع  $f$  در بازه‌ای مشتق پذیر باشد و مشتق دوم موجود باشد:

(خط مماس بر منحنی زیر معنی است)  $f'' > 0 \rightarrow$  تقعر رو به بالا 

09121004708

( " " بالای " )  $f'' < 0 \rightarrow$  " " پایین 

- نقطه عطف:  $x = a$  را نقطه عطف می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر با هم برقرار باشد:

۱) تابع در آن نقطه پیوسته باشد ( $f$ )

۲) دارای مماس باشد ( $f'$ ) یعنی مشتق چپ در آن تابع موجود و عدد برابر یا خوبی نهایت هم علامت است

۳) علامت مشتق دوم قبل و بعد نقطه عوض شود. ( $f''$ )



\* در نقطه عطف مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند \*

برای بدست آوردن نقطه عطف باید بر روی مشتق دوم شکل را جدا کرد و به شرط بالا را بررسی کنیم.

(T) طول نقطه عطف معنی  $\frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x}$  کدام است؟

$\frac{x}{1+ x } = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases}$	$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases}$	الف) -	ج) ۱
		ب) صفر	د) فاقد نقطه عطف

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x+1)^3} & x > 0 \\ \frac{2}{(-x+1)^3} & x < 0 \end{cases}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow$  فاقد ریشه

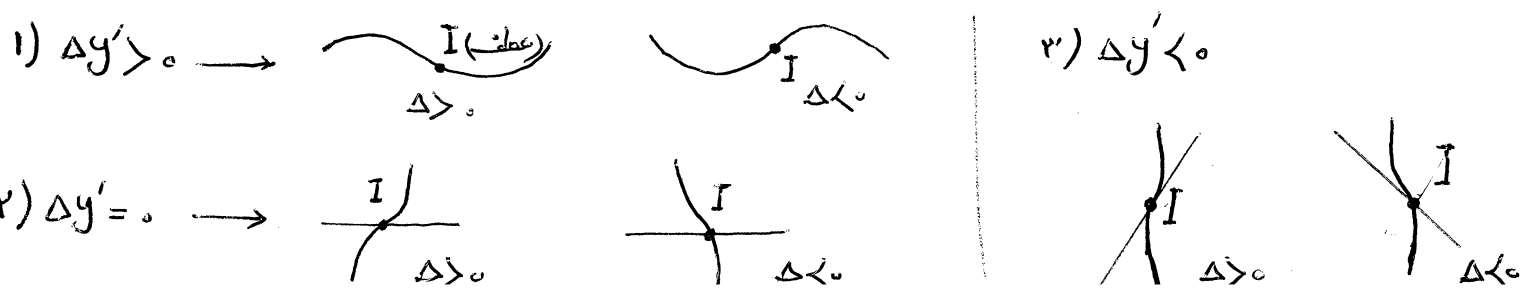
$x = 0 \rightarrow$  شکل طار  $\left. \begin{matrix} 1) \text{ پیوسته} \\ 2) \text{ دارای مماس} \\ 3) \text{ تغییر تقعر} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{عطف} \rightarrow \boxed{x=0}$

\* در توابع  $y = (x-a)^m$  ،  $x = a$  طول نقطه عطف است \*

\* " "  $y = \sqrt[m]{(x-a)^n}$  با شرایط  $m$  و  $n$  فرد و  $n < m$  ،  $x = a$  طول نقطه عطف است \*

\* نقطه عطف هر تابع در خود تابع صدق می‌کند و مشتق دوم را نیز صفر می‌کند \*

- منحنی شتابی - تابع درجه سوم:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$



\* نقطه  $I(-\frac{b}{3a}, m)$  محضاً نقطه عطف تابع است که مرکز تقارن نمودار نیز هست. در حالت  $\Delta y' > 0$  که منحنی دارای نقاط اکстрیم است نقطه عطف وسط پاره خط واصل ماکسیموم و مینیموم است:

09121004708

$$x_I = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \quad , \quad y_I = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$$

آوردید مثال) خط  $y=m$  منحنی تابع  $y = \frac{-x^3}{3} + x^2 + \frac{4}{3}$  را در سه نقطه  $A$  و  $B$  و  $C$  قطع کرده و  $AB=AC$  را بدست آورید

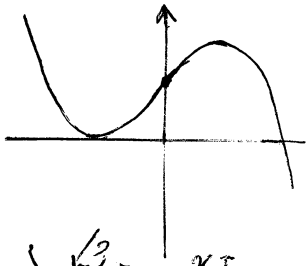
$$I(-\frac{b}{3a}, m) \rightarrow I(1, m) \xrightarrow{\text{صدق}} m = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = 2$$



برای شناختن منحنی تابع درجه ۳ از روش های زیر استفاده می کنیم:

- (۱) علامت  $a$
- (۲) محضاً نقطه عطف
- (۳)  $\Delta y'$
- (۴) نقاط اکتریم
- (۵) محل برخورد با محورهای مختصات
- (۶) شیب مماس

(۷) تجربه ۸۸ :



شکل مقابل نمودار تابع  $y = -x^3 + ax^2 + bx + 2$  است. زوج رتب  $(a, b)$  که ام است؟

(الف)  $(0, 3)$  (ب)  $(0, -3)$  (ج)  $(2, 7)$  (د)  $(0, 4)$

(ه)  $(1, -2)$  (و)  $(0, 4)$

در شکل  $x_I = 0$   
در تابع  $x_I = \frac{-a}{3(-1)} = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 0$

فرض  $y_{min} = 0$  در شکل  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$

$\rightarrow y' = -3x^2 + 6 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$y = -x^3 + bx + 2 \xrightarrow{\Delta y' > 0} y' = -3x^2 + b$   
 $\rightarrow \Delta y' = 12b > 0 \rightarrow b > 0$   
 $\rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = 4 \end{cases}$  (طبق ترتیبها)

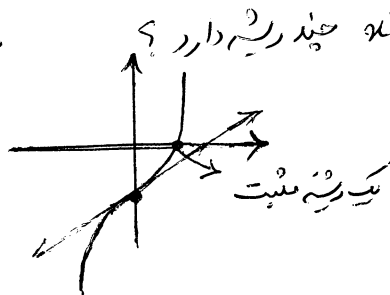
$y_{min} = 1 - 3 + 2 = 0$

پس  $b$  برابر ۳ صحیح است

\* نکته رسم نمودار می توان تعداد ریشه های معادله درجه ۳ را پیدا کرد.

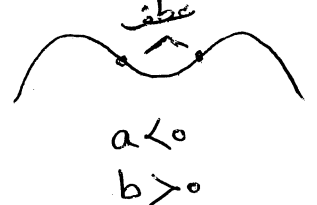
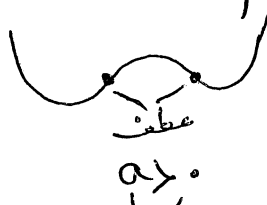
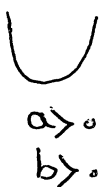
مثال) معادله  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$  چند ریشه دارد؟  
 $y' = 3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \rightarrow \Delta y' < 0$

$I(-\frac{b}{3a}, \dots) \Rightarrow I = (0, -1)$



$y = ax^2 + bx + c$

- تابع درجه ۲ دو معجزوری: فرم کلی آن است:



- بجانب قائم: برای بدست آوردن بجانب قائم کافیست ریشه مخرج را بدست آوریم. اگر این ریشه، ریشه صورت نبود بجانب قائم است. ولی اگر ریشه صورت هم بود آن را رفع ابهام می کنیم، اگر پس از رفع ابهام حاصل حد بی نهایت نبود بجانب قائم است.

- بجانب افقی: برای بدست آوردن بجانب افقی کافی است حد تابع را در بی نهایت بدست آوریم. اگر حاصل عدد سو در آن عدد بجانب افقی است.

مثال) بجانب های مقابل را بدست آورید

$$f(x) = \frac{\cos x + 1}{2 \sin x - 1} \quad [0, 2\pi]$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

09121004708

م افقی ندارد چون Sin و Cos در آن نامعلوم است.

۶) تجربه ۹۱: اگر  $f(x) = \frac{x^3}{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  باشند نقطه تلاقی بجانب حای تابع Fog کدام است؟

$$Fog = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 3}{\frac{2x-2}{x+2} + 1} = \frac{5x+1}{5x}$$

$1.3 \rightarrow y=1 \rightarrow x=0$   
 $2.4 \rightarrow x=0$

(۱) (-۱, ۰)	(۳) (-۱, ۱)
(۲) (-۲, ۲)	(۴) (۱, ۰)

\* هرگاه حد تابع در بی نهایت، بی نهایت سو در احتمالاً معنی دارای بجانب مایل است. یکی از این توابع، تابع کسری است که صورت و مخرج چند جمله ای هستند و درجه صورت فقط یک واحد از درجه مخرج بزرگ است. در این صورت بجانب مایل خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج است.

مثال: بجانب مایل  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$  ؟

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

\* دو روش نسی بجانب مایل:

۱)  $y = (3x - 1) + \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + 7x - 3}$  (مجموع یا تفریق)

حد در بی نهایت = ۲  $\rightarrow y = 3x - 1 + 2 = 3x + 1$  (مایل)

۲)  $2x - 1 + \frac{3x^2 + 5x - 1}{x + 2}$  (بدر در بی خورجی)

حد در بی نهایت =  $\infty \Rightarrow (3x^2 + 5x - 1) \div (x + 2) = 3x - 1$

$\rightarrow y = 2x - 1 + 3x - 1 = 5x - 2$  (مایل)

\* در توابع رادیکال برای بدست آوردن خطوط بجانب از هم ارزی رادیکال استفاده می شود (درجه هم گفنه سو)

در توابع به فرم  $y = mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}$

هم ارزی  $\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$

$x < 0$  ،  $y = x - \sqrt{x - 2x}$  فاصله نقطه  $A(-2, 0)$  از خط مجانب منحنی

کدام است؟ الف) ۱ ب) ۲ ج)  $\sqrt{5}$  د)  $2\sqrt{2}$

هم ارزی  $\Rightarrow x - |x - 1| \xrightarrow{x < 0} 2x - 1 = y \rightarrow y - 2x + 1 = 0$

فاصله نقطه داده شده تا خط  $\rightarrow \frac{|0 - 2(-2) + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

\* به طور کلی مجانب مایل از رابطه زیر بدست می آید :

$y = mx + h$

در این رابطه :  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  و  $h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

\* اگر  $m \neq h$  ،  $\infty$  ستور ، مجانب مایل ندارد .

\* فرمول تنبی :  $y = kx \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$  مایل  $\rightarrow y = k(x + \frac{a-b}{2})$

مثال) مجانب مایل  $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$  را بدست آورید :  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}}{\frac{x}{1}} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1$

$\Rightarrow y = x - 1$

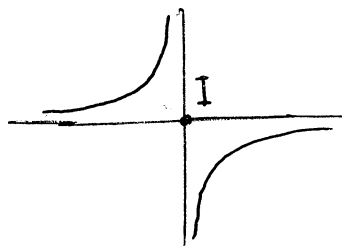
$h = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x^2 - x}{x+1} = \frac{-x}{x} = -1 \rightarrow h = -1$

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

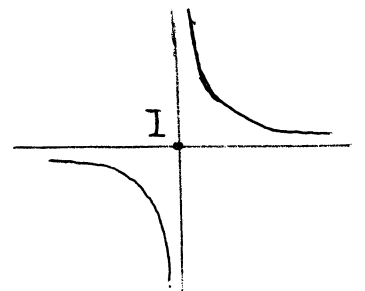
تابع هموگرافیک :

\* اگر  $cd - bc = 0$  آنگاه نمودار

به صورت خط راستی است که بر روی منحنی ، توخالی است . \*



$cd - bc > 0$



$ad - bc < 0$

\* نقطه I (مرکز تقارن) محل برخورد مجانب‌های افقی و قائم است \*

\* شیب‌های محورهای تقارن توابع هموگرافیک همواره ۱- و ۱+ است . \*

- برای شناسایی نمودار این توابع از علاقت  $ad - bc$  و هم‌جهت‌ی مجانب‌ها قائم و افقی استقامت می‌کنیم به طرکلی برابر شناسایی منحنی‌ها از روش‌ها زیر استقامت می‌کنیم:

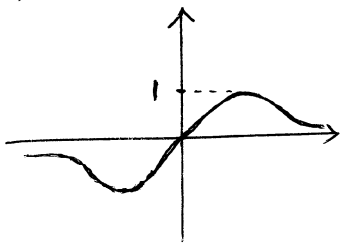
(۱) شناسایی مجانب‌ها و محاسبه حد تابع در اطراف مجانب قائم

(۲) شناسایی نقاط عطف و اکسترموم

(۳) محل برخورد نمودار با محورها

(۴) دوره تناوب (در توابع مثلثاتی)

مثال: شکل مقابل نمودار تابع  $y = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + 4}$  است. در تایی  $(a, b)$  را تعیین کنید.



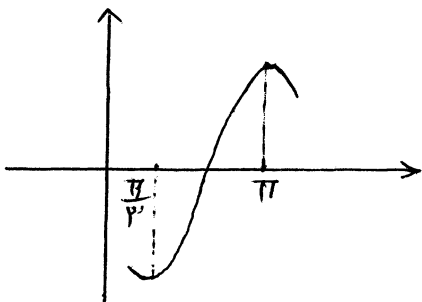
$$\left. \begin{array}{l} \text{افقی: } y = a \\ \text{در شکل مجانب افقی: } y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0$$

$$y = \frac{bx}{x^2 + 4} \rightarrow y' = \frac{b(x^2 + 4) - 2x \cdot bx}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

$$\rightarrow bx^2 + 4x = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow 1 = \frac{2b}{4 + 4} \rightarrow \boxed{b = 4}$$

مثال ۲: به ازای کدام مقدار  $a$  نمودار تابع  $y = \cos^2 x + 2a \cos x$  به صورت زیر است؟



$$y' = -2 \cos x \sin x - 2a \sin x$$

$$\frac{x = \frac{\pi}{3}}{y' = 0} \rightarrow 0 = -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a\sqrt{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$



فرم استاندارد:  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow C(\alpha, \beta)$

(1) > ایرد:

فرم گسترده:  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

در فرم گسترده:  $C(f'_x=0, f'_y=0)$  و  $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

\* ضریب  $x^2$  و  $y^2$  باید 1 باشد \*

در فرم گسترده باید شرایط زیر برقرار باشد:

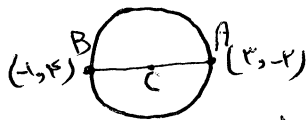
1) ضریب  $x^2 =$  ضریب  $y^2 = 1$

2)  $a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow$  نقطه  
 $a^2 + b^2 - 4c < 0 \Rightarrow$  خط

برای نوشتن معادله دایره باید مرکز و شعاع آن را بیفت آورد و از فرم استاندارد استفاده کرد.

مثال) معادله کوچکترین دایره ای را بنویسید که از نقاط  $(-1, 4)$  و  $(3, -2)$  بگذرد.

\* کوچکترین دایره مربوط به زمانش است که دو نقطه دایره قطرها باشد \*



وسط نقطه  $C \left( \frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) \rightarrow C(1, 1)$

$R = CA = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$

\* هرگاه خطم بر دایره مماس باشد فاصله مرکز تا خط برابر شعاع است \*

\* هرگاه تقاطع از دایره داده شد و معادله را هم خواست در فرم گسترده  $a, b, c$  بیفت کند

(2) تجربیه 91: شعاع دایره ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 4)$ ,  $(2, 1)$  و  $(0, 0)$  هم گذرد کدام است؟

$3, 5 \quad 14 \quad 3 \quad 3 \quad 2, 5 \quad 2\sqrt{5} \quad 2 \quad 11$

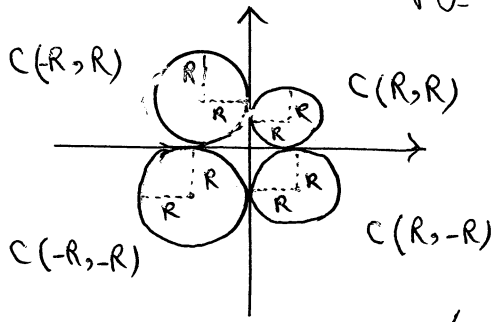
$(0, 0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \rightarrow \boxed{c=0}$

$(-2, 4) \Rightarrow (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \rightarrow \underline{a - 2b = 10}$

$(2, 1) \Rightarrow 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \rightarrow \underline{2a + b = -5} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-5 \end{cases}$

معادله دایره:  $x^2 + y^2 - 5y = 0 \Rightarrow x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$

\* اگر دایره ای بر محور مختصات مماس باشد، مختصات مرکز آن را طاعری بر حسب شعاع خواهد بود و علامت آن بر اساس ناحیه مختصات تعیین می شود:



برای بررسی اوضاع نسبت نقطه و دایره معادله به فرم لندره را هم توسعه (ضریب  $x^2$  و  $y^2$  برابر) و نقطه را جایگزین می کنیم:

$F(A) > 0 \rightarrow$  خارج دایره / مماس از آن بر دایره نمی شود



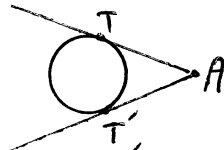
$F(A) = 0 \rightarrow$  روی دایره / مماس بر دایره می شود



$F(A) < 0 \rightarrow$  داخل دایره / مماس بر دایره نمی شود



\* در حالت اول که نقطه خارج دایره است داریم:

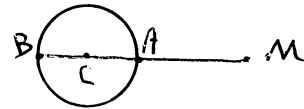


$$AT = AT' = \sqrt{F(A)}$$

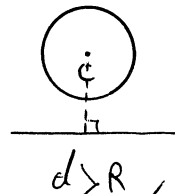
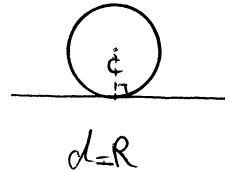
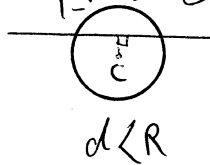
\* دو وتر و وتر بزرگترین نقطه دایره تا یک نقطه دایره دایره مربوط است به زمانی که از مرکز عبور کرده باشیم:

دو بزرگترین:  $MB = MC + R$

وتر بزرگترین:  $MA = MC - R$



برای بررسی اوضاع نسبت یک خط و دایره فاصله مرکز دایره تا خط را با شعاع مقایسه می کنیم:



\* خطی که از مرکز دایره عبور کند بر دایره عمود است پس برای نوشتن معادله خط قائم از یک نقطه بر دایره کاسیت پس از آن نقطه مرکز دایره معادله خط بنویسیم \*

(T) تجزیه M: هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-1, -1)$  می گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع کدام است؟

$2\sqrt{2}$  (ع)

۳ (ب)

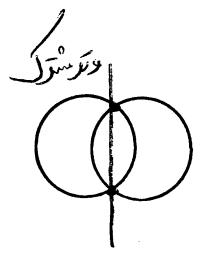
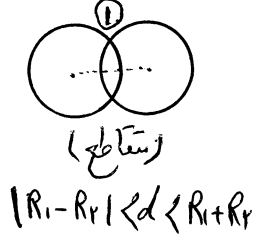
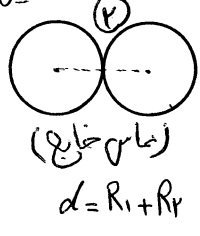
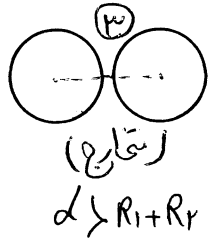
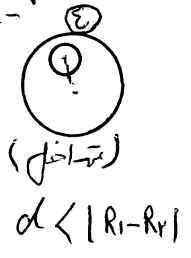
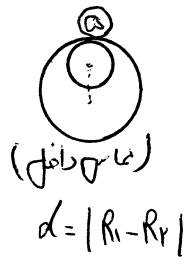
$2\sqrt{2}$  (د)

۲ (ا)

مرکز  $(-1, -1)$

$$R = \text{فاصله } C \text{ تا خط} \Rightarrow \frac{|1+1+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

برای بررسی انواع نسبی دو دایره فاصله مراکز را تعیین کرده و آن را با  $R_1 + R_2$  و  $|R_1 - R_2|$  مقایسه می‌کنیم:



\* در حالت متقاطع، معادله وتر مشترک دو دایره از حذف  $x^2$  و  $y^2$  در بین معادله به دست می‌آید.  
\* برای طول وتر مشترک نیز کافیست خط وتر مشترک را با یک از دایره‌ها قطع دهیم تا دو نقطه به دست آید.  
مثال) معادله وتر مشترک دو دایره  $x^2 + y^2 = 2$  و  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$  را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

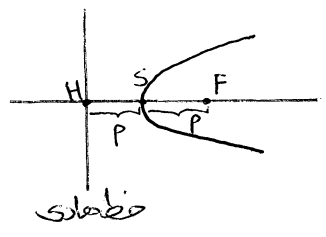
$$2x + 2y = -2 \Rightarrow x + y = -1$$

۱۲ سهمی:  $S(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} \text{سهمی قائم} \Rightarrow (x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta) \\ \text{سهمی افقی} \Rightarrow (y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha) \end{cases}$$

فاصله رأس تا خط‌های = فاصله رأس تا کانون  $P = SH = SF \rightarrow$  (پارابول سهمی)

\* پها را رسم است و علامت آن فقط در محاسبه مثبت یا منفی است.



در سهمی قائم  $\left. \begin{matrix} p > 0 \Rightarrow \text{دفعانه رو به بالا} \\ p < 0 \Rightarrow \text{دفعانه رو به پایین} \end{matrix} \right\}$   
در سهمی افقی  $\left. \begin{matrix} p > 0 \Rightarrow \text{دفعانه رو به راست} \\ p < 0 \Rightarrow \text{دفعانه رو به چپ} \end{matrix} \right\}$

نظم لینه سهمی

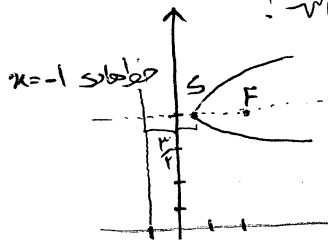
$$\begin{cases} \text{سهمی قائم} \Rightarrow Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \\ \text{سهمی افقی} \Rightarrow Ay^2 + By + Cx + D = 0 \end{cases}$$

نویس درجه ۱ اولی کنیم!!

$$\left. \begin{matrix} \text{در سهمی قائم } (x^2) \rightarrow S(Fx = 0, \dots) \\ \text{در سهمی افقی } (y^2) \rightarrow S(\dots, Fy = 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow p = -\frac{C}{4A}$$

ضریب جبهه ۲

تجدید ۹۲: سهمی کانون  $F(2, 4)$  و خط‌های  $x = -1$  محور  $x$  ها را با ایلام طول قطع می‌کنند.  $P$



(۱)  $\frac{17}{7}$  (۲)  $\frac{19}{7}$  (۳)  $\frac{13}{3}$  (۴)  $\frac{11}{3}$

$F = 3 = 2p \rightarrow p = \frac{3}{2} \rightarrow S(\frac{1}{2}, 4)$   
 $\Rightarrow (4 - 1)^2 = 7(x - \frac{1}{2})$   $\xrightarrow{C=0} x = \frac{19}{7}$

\* اگر اندامه های نورانی به موازات محور کانونی به هم بتابند ، بازتابش آن ها از کانونی که در مقابلش است.

09121004708

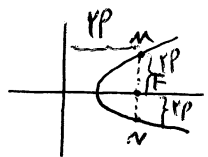
اوضاع نسبت به نقطه و محکم : اگر  $F(x, y) = 0$  معادله محکم باشد با شرط مثبت چون ضریب جمله توان ۲ باشد داریم:

$F(A) > 0 \Rightarrow$  خارج محکم / اعصاب رسم می شود

$F(A) < 0 \Rightarrow$  داخل محکم / اعصاب رسم نمی شود

$F(A) = 0 \Rightarrow$  روی محکم / اعصاب رسم می شود (معادله آن از طریق مشتق به دست می آید)

\* پاره خطی که در نقطه کانونی بر محور کانونی عمود به محکم می خورد است ، و در کانونی تا پاره می شود و اندازه آن  $F|P|$  است.



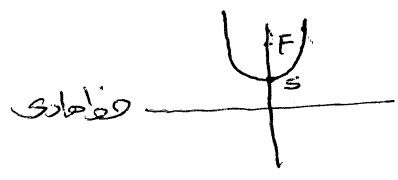
$MN = F|P|$

\* دایره محکم ، حایره به قطر و در کانونی (بسیار طایفه ای به مرکز F و شعاع  $\frac{r}{2}$ ) همواره بر خط های عمود است.

مثال دایره ای به قطر و در کانونی محکم  $x^2 - 6x + 8 = 2y$  یکایم خط عمود است!

$S(3, -\frac{1}{2}) \quad P = -\frac{r}{F} = \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow y = -1$



فرم بیضی  $\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \end{cases}$

$S(\alpha, \beta)$

(۳) بیضی:

$SA = SA' = a \Rightarrow AA' = 2a$

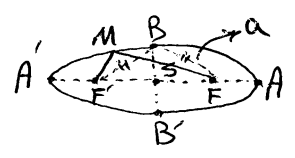
$SB = SB' = b \Rightarrow BB' = 2b$

$SF = SF' = c \Rightarrow FF' = 2c$

$A, A'$  رؤس اصلی (کانونی)  
 $B, B'$  رؤس فرعی (مخبر کانونی)  
 $F, F'$  کانونی ها

$a^2 = b^2 + c^2$  در هر بیضی

\* همواره بیضی:  $a > b > c$



برای شناسایی  $\left. \begin{matrix} \text{اندازه زیر } a \text{ باشد} \leftarrow \text{اقتضی} \\ \text{اندازه زیر } c \text{ باشد} \leftarrow \text{تمام} \end{matrix} \right\}$

$MF + MF' = 2a$

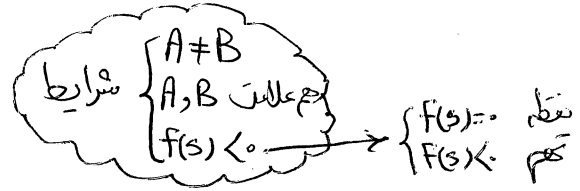
$BF + BF' = 2a$

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانونی برابر  $2a$  است:

برای نوشتن معادله بیضی داشتن مرکز و  $a$  و  $b$  و نوع بیضی لازم است

فرم گسترده بیضی  $\Rightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

نوع بیضی  $\begin{cases} |A| < |B| & \text{اقتضی} \\ |A| > |B| & \text{تمام} \end{cases}$



برای خاصیت  $F(s)$  باید همه عبارت یک سمت دارای باشد و سمت دیگر صفر باشد و ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  مثبت باشند.

09121004708

۱) معادله بیض را بنویسید که مجموع فواصل از دو کانون تا نقاط  $(3, 5)$  و  $(3, -1)$  برابر ۸ باشد.

$F(3, 5)$  کانون  
 $F(3, -1)$  کانون  
 $FF' = 2c = 7 \rightarrow c = \frac{7}{2}$   
 $\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = \sqrt{7}$   
 $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

(شعاع دایره)  $\frac{FF'}{2}$   
 \* وضعیت دایره داخل بیض  
 با قطر  $FF'$   
 $C = b$  در نقطه تماس بیض  
 $C > b$  در نقطه بیض را قطع کند  
 $C < b$  بیض را قطع نمی کند

مثال) دایره به قطر  $F, F'$  و  $F, F'$  کانون بیض  $F^2 + 7y^2 - 8x + 12y - 2 = 0$  هستند بیض چه وضع دارد؟

$$F(x^2 - 2x + (-1) + 7(y^2 + 2y + (-1)) - 2 = 0$$

$$F(x-1)^2 + 7(y+1)^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{\frac{4}{7}} = 1$$

$$a = \sqrt{3}, b = \sqrt{\frac{4}{7}} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow c < b$$



- ویژگی بازتابی بیض: اگر یک منبع نور از یک کانون بیض در یک نقطه از بیض وارد شود و در هر نقطه از بیض بازتابی شود و در هر نقطه از بیض بازتابی شود و در هر نقطه از بیض بازتابی شود! نزدیک شود  
 - خروج از مرکز: میزان کشیدگی بیض را نشان می دهد (هر چه  $e$  بزرگتر باشد بیض کشیده تر می شود)

$e = \frac{c}{a}$  و  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$   $0 < e < 1$

۲) محققان دو مرکز کوچک یک بیض  $(-1, 3)$  و  $(-1, -1)$  است. این بیض از نقطه  $(-4, 2)$  می گذرد. خروج از مرکز آن کدام است؟

$$BB' = 2b = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow S(-1, 1)$$

$\frac{\sqrt{12}}{4} (1)$   
 $\frac{\sqrt{12}}{4} (5)$   
 $\frac{\sqrt{7}}{3} (3\sqrt{7})$

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \quad b=2, x=-4 \rightarrow a^2 = 12$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مبارک‌تازین  $|A|$  و  $|B|$  →  $e = \sqrt{1 - \frac{\text{Min}(|A|, |B|)}{\text{Max}(|A|, |B|)}}$  در فرم گفته شده

مبارک‌تازین  $|A|$  و  $|B|$  →

از ضرایب ضمیمه نقطه و بیضی: اگر  $F(x, y) = 0$  معادله بیضی باشد با شرط ثابت بودن  $x$  و  $y$  و  $A$  نقطه مورد نظر باشد:

- $F(A) > 0$  → خارج بیضی / خارج از آن بیضی رسم نمی‌شود
- $F(A) < 0$  → داخل بیضی / داخل بیضی رسم نمی‌شود
- $F(A) = 0$  → (معادله آن از شرط گذشتن بیضی است) روی بیضی /  $A$  داخل بیضی رسم می‌شود

- وتر کانونی: پاره خطی که در کانونی بد محور کانونی عمود است و به بیضی محدود است.

طول پاره خط وتر کانونی =  $\frac{2b^2}{a}$

مقدار کانونی =  $mn$

۶) جدولی:

$$\begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 & \text{افتم} \rightarrow \text{مقیبیت } y \\ \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 & \text{تاسم} \rightarrow \text{مقیبیت } x \end{cases} S(\alpha, \beta)$$

$SA = SA' = a \Rightarrow AA' = 2a$  قطر واقع (کانونی)

$SB = SB' = b \Rightarrow BB' = 2b$  قطر مجازی

$SF = SF' = c \Rightarrow FF' = 2c$  فاصله کانونی

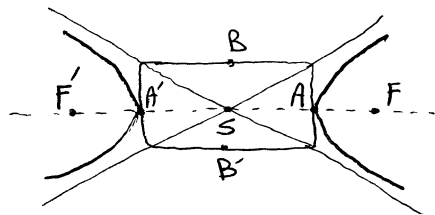
$c > a > b$

$c^2 = a^2 + b^2$

فرم گنرد هذلولی  $\rightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$S(F'_x=0, F'_y=0)$

مختلفات  $A, B$  شرایط  $f(s) \neq 0$



\* اگر  $f(s) = 0$  شکل به صورت دو خط مستقیم می‌شود.

برای نوشتن معادله هذلولی داشتن مرکز،  $a$  و  $b$  و نوع هذلولی لازم است.

خارج از مرکز:  $(e)$

$e = \frac{c}{a}$  و  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

وتر کانونی هذلولی: پاره خطی که در کانونی بد محور کانونی عمود به هذلولی است و اندازه آن برابر است با  $\frac{2b^2}{a}$

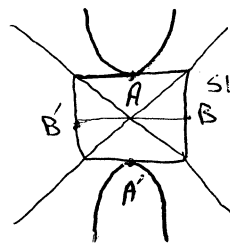
الف) مختصات رئوس دایره‌های منحلوم را تعیین کنید.  $9x^2 - 4y^2 - 18x + 12y + 19 = 0$

$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + 19 = 0$

مختصات مرکز دایره  $(1, 1)$  و شعاع  $2$  است.

$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 37 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

قائم  $S(1, 2)$   
 $a=3$   
 $b=2$



$A(1, 2+3)$   
 $A'(1, 2-3)$   
 $F(1, 2+\sqrt{13})$   
 $F'(1, 2-\sqrt{13})$   
 $B(1+2, 2)$   
 $B'(1-2, 2)$

ب) کبریا  $9x^2 - 4y^2 - 18x + 12y + 19 = 0$  در منحلوم  $2x^2 - 3y^2 - 6x = 2$  اندازه وتر آنرا بر کانون و عمود بر محور کانونی آن اعلام است.

$(x^2 - 3x) - 3y^2 = 2$

$\rightarrow (x^2 - 6x + 9 - 9) - 3y^2 = 2 \Rightarrow (x-3)^2 - 3y^2 = 11$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{11} - \frac{y^2}{1} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2=11 \rightarrow a=\sqrt{11} \\ b^2=1 \end{cases}$

$\frac{2\sqrt{11}}{3}$

$\sqrt{3} \cdot 12$

$2\sqrt{3} \cdot 6$

$3 \cdot 13$

$\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$

جانب های منحلوم: هر منحلوم دو جانب  $\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$  دارد که اندازه مختصات متقابل وسط آن هستند.

عبارت  $\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$  جانب ها

\* جانب ها همبند را در  $S$  قطع می کنند.

\* سبب جانب ها متدین است.

قائم  $\frac{y-\beta}{a} \pm \frac{x-\alpha}{b} = 0$

\* ساعت متقابل  $ab$  است.

در منحلوم قائم: سبب جانب ها  $\pm \frac{a}{b}$   
در منحلوم قائم: سبب جانب ها  $\pm \frac{b}{a}$

اگر معادله دو جانب را داشته باشیم و مختصات یک نقطه منحلوم را داشته باشیم و معادله منحلوم را بخوانیم:

دو معادله را مرتب می کنیم (هر یک طرف) و آن ها را در هم ضرب می کنیم و سمت چپ یک تساوی می نویسیم. سپس در سمت راست آن عدد حاصل از جایگزینی نقطه داده شده در عبارت سمت چپ را هم می نویسیم.

الف) معادله منحلوم را بنویسید که خطوط  $y = 3x - 1$  و  $y = -3x + 5$  در جانب های آن باشند و منحلوم از نقطه  $(3, -2)$  بگذرد.

$y - 3x + 1 = 0$   
 $y + 3x - 5 = 0$   
 $\Rightarrow (y - 3x + 1)(y + 3x - 5) = -10x^2 \Rightarrow y^2 + 3xy - 5y - 3xy - 9x^2 + 15x + y + 3x - 5 = -10x^2$

$\rightarrow y^2 - 9x^2 + 18x - 4y + 10 = 0$

\* در هر مثلث قائمه کاتون تا خط جانب برابر است با  $(b)$

\* در هر مثلث قائمه رأس تا خط جانب برابر است با  $(\frac{ab}{c})$

میدان مساوی القیاس: اگر در یک مثلث  $a = b$  در فتر گفته آن:  $(A+B=90)$

\* در این مثلث ضلع از مرکز هواره  $\sqrt{2}$  است و زاویه بین جانب ها  $90^\circ$  است.



به نام خدا  
مؤسسه علمی آموزشی کنکور آسان است

✱ DVD های آموزشی برترین اساتید کشور

✱ جزوات خلاصه رتبه‌های برتر کنکور سراسری

✱ ارائه تخصصی‌ترین مشاوره به صورت رایگان

  **هیرفا هتیم از زیرساخت دانشگاه**

برای ارتباط مستقیم با استاد حسین احمدی

با شماره

**09121004708**

تماس بگیرید