روش ژئودتیک (Geodetic methodology) : مجموعه ای از فرآیندها و ارزیابی ها از مقادیر عددی است که بصورت مستقیم و غیر مستقیم به توضیح و تفسیر هندسه و میدان ثقل زمین می پردازد

در عمل برای انجام یک پروژه ژئودتیک یا نقشه برداری باید به مراحل زیر توجه شود :

۱- شناخت مجهولات و تعیین دقت مورد نیاز برای مجهولات

۲- کلیه راه حل های ممکن برای رسیدن به مجهولات مورد بررسی قرار گیرد . در حقیقت یک مدل ریاضی برای رسیدن به مجهولات تعیین می شود

۳- انتخاب بهترین راه حل ممکن از بین راه حل های موجود

معیارهای بهینگی : الف) دقت ب) زمان ج) هزینه

با توجه به معیارها در این مرحله یک طرح مشاهداتی ریخته می شود که مشخص می کند چه مشاهداتی ، توسط چه دستگاهی و چگونه انجام می پذیرد . (preanalysis)

۴- جمع آوری اطلاعات و مشاهدات مورد نیاز

۵- پردازش روی مشاهدات (پردازش قبل از سرشکنی) ، در این مرحله مشاهدات تکراری را تست می کنند باید توجه داشت که مشاهدات مورد نیاز برای تست سازگاری باید از یک جامعه باشند (باید توجه داشته باشید که بر مشاهدات مختلف که از یک جنس نیستند نمی توان تست سازگاری انجام شود)

۶- تشکیل مدل ریاضی و تعیین مجهولات و دقت آن ها ؛ مدل ریاضی : رابطه ایست بین مجهولات و مشاهدات .

کمیت های مختلف یک مدل :

الف) مشاهدات : طول ، زاویه ، ارتفاع ، اختلاف ثقل ، استدار ، مختصات ← L

ب) مجهولات : طول ، زاویه ، . . . ← معمولاً مختصات و ارتفاع مجهولند ← X

ج) ثابت ها : C ← این مقادیر یکسری constrain هستند مانند ثابت نیوتن یا مجموع زوایای مثلث مسطح

فرمول بندی مدل های ریاضی :

فرمول بندی مدل های ریاضی رابطه ایست میان پارامترهای مجهول و پارامترهای مشاهده شده ، که نقش اساسی و کلیدی در انجام عملیات ژئودتیکی بازی می کند ؛ بعبارت دیگر مدل ریاضی عنصر اصلی طراحی و پردازش اطلاعات و مشاهدات می باشد .

مدل های ریاضی بطور ساده یک رابطه ریاضی میان یکسری مقادیر ویژه است که بر پایه قوانین فیزیکی معلوم و قطعی بنا شده اند . بطور سمبلیک می توان معادله یک مدل ریاضی را بصورت زیر نوشت $f(q) = 0$ ①

در این رابطه f یک تابع منحصر بفرد بوده و q شامل N مقدار بوده با یک بردار نمایش داده می شود .

با توجه به اینکه یک مدل ریاضی بر پایه یکسری قوانین طبیعی یا هندسه مسئله بنا شده است می توان مقادیر q را کاملاً معلوم در نظر گرفت .

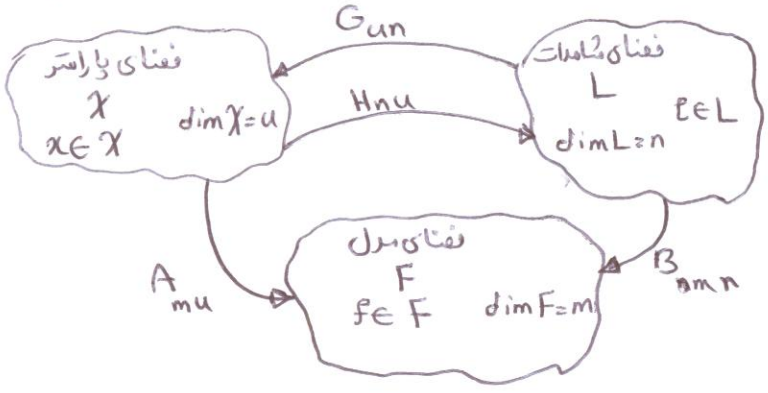
مدل ریاضی ① را با توجه به پارامترهای ثابت c ، پارامترهای مجهول x و پارامترهای مشاهده شده l می توان بصورت زیر نوشت .

$$f(q) = f(c, x, l) = 0 \quad ②$$

به وضوح مشاهده می شود که بردار q در رابطه ① به سه جزء در رابطه ② تفکیک شده است . باید توجه داشت که در مدل های صریح می توان از c صرفنظر نمود و آن را حذف کرد

توجه : در رابطه ② به x : solution مدل فیزیکی می شود .

هریک از اجزای رابطه ② در فضای مربوط به خود تعریف می‌شوند که رابطه آن‌ها نسبت به هم بصورت زیر می‌باشد



انواع مدل‌ها:

مدل‌های ریاضی می‌توانند مستقیم (direct)، غیرمستقیم (indirect)، implicit variety باشند و هر کدام از آن‌ها می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند

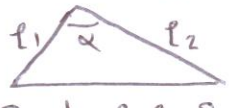
الف) مدل صریح در x: این مدل بصورت زیر نوشته می‌شود ③ $x = g(\ell)$، از آنجائیکه g یک تابع صریح از فضای مشاهدات به فضای مجهولات است، لذا هر دو طرف رابطه ③ متعلق به فضای مجهولات می‌باشد و در اصطلاح گفته می‌شود مدل در فضای مجهولات فرمول‌بندی شده است.

* مدل خطی صریح در x ④ $x = G\ell + w$: در این رابطه G ماتریس ترانسفورماسیون از فضای مشاهدات به فضای مجهولات می‌باشد، اصطلاحاً ماتریس G را design matrix (ماتریس طراحی) گویند. بردار w یک بردار ثابت است؛ ماتریس G و بردار w شرایط فیزیکی و هندسی کار را تعیین می‌کنند

$\dim G(u \times n)$ و $\dim w = u = m$

اگر معادله در فضای مجهولات بصورتی نوشته شود، که از وقوع پیشامد مطمئن باشیم، رابطه در بیان مقادیر مجهول نوشته می‌شود و مدل صریح بصورت زیر (certain circumstance) نوشته خواهد شد ⑤ $g(\ell) = 0$: به این مدل، مدل شرط گوییم که هندسه و شرایط فیزیکی مسئله را در بین مشاهدات بازسازی می‌کند [معادله شرط رابطه‌ای بین مشاهدات است که از یک قانون هندسی یا فیزیکی برگرفته شده است.]: رابطه خطی مدل شرط: ⑥ $G\ell + w = 0$

مدل صریح در فضای مجهولات



$S = \frac{1}{2} \ell_1 \ell_2 \sin\alpha$

مدل شرط: $\alpha + \beta + \gamma = 180$

ب) مدل صریح در ℓ: غالباً بیان مشاهدات برحسب مجهولات آسان‌تر از معکوس آن می‌باشد، لذا معادلات صریح در ℓ (مشاهدات) بصورت زیر بیان می‌شود ⑦ $\ell = h(x)$، در این رابطه h تابعی است که تحت عنوان ترانسفورماسیون از فضای χ به فضای L از آن یاد می‌شود، این مدل در فضای مشاهدات فرمول‌بندی شده است * رابطه خطی مدل صریح در ℓ بصورت ⑧ $\ell = Hx + w$ بیان می‌شود، در این رابطه ماتریس ترانسفورماسیون از فضای χ به L می‌باشد که dim آن

$\dim H = (n \times u)$ و $\dim w = n = m$

مدل صریح در ℓ: $L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

ج) مدل غیرصریح ، در بعضی از مسائل ها و کارها مشاهدات و مجهولات را نمی‌توان از هم تفکیک نمود، لذا این مدل‌ها بصورت زیر نوشته می‌شوند (۹) $f(x, l) = 0$ ، مدل غیرصریح در فضای مدل فرمول بندی می‌شود

لذا $\dim f = m$ * فرمول خطی مدل غیرصریح بصورت زیر خواهد بود (۱۰) $Ax + Bl + w = 0$

در این رابطه ماتریس A ، ماتریس طراحی بوده $\dim A = (m \times u)$ ، ماتریس B ماتریس طراحی ثانویه $\dim B = (m \times n)$ و $\dim w = m$ خواهد بود

$$f(l_1, l_2, x_1, x_2) = l_1^2 \sin x + (l_2 x_2)^{1/2} = 0$$

د) مدل ترکیبی ،

$f(x, l) = 0$ ← مدل متوماتیک

$h(x) = 0$ ← مدل ثانویه

constrain (قید)

constrain به تنهایی برای محاسبه جواب کافی نمی‌باشد و برخلاف مدل شرط نباید به تنهایی استفاده شود و در همواره در کنار مدل اولیه می‌آید.

۷ـ پردازش‌های بعد از سرشکنی

در این مرحله مجهولات تست می‌شوند که آیا نتایج قابل قبول‌اند یا خیر

۸ ـ ارائه نتایج بصورت مناسب (گرافیکی ، عددی و ...)

در صورت غیرقابل قبول بودن نتایج ، عامل آن پیدا شده و پس از رفع ، سرشکنی تکرار می‌شود.

مروری بر جبر خطی

تعریف مرتبه ماتریس (rank) : فرض کنید A ماتریس $m \times n$ باشد ، مرتبه ماتریس A بزرگترین زیرماتریس مربعی از A است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. (ماکزیمم تعداد سطرها و یا ستون‌های مستقل خطی A مرتبه ماتریس A نامیده می‌شود.)

فضایی که توسط سطرهای مستقل خطی یک ماتریس کشیده (ایجاد) شود ، فضای سطری $R(A)$ و فضایی که توسط ستون‌های مستقل خطی یک ماتریس کشیده می‌شود ، فضای $C(A)$ نامیده می‌شود.

$$\dim(R(A)) = \dim(C(A))$$

$$\text{if } A_{m \times n} \Rightarrow r(A) \leq \min\{m, n\}$$

$$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^T A)$$

ماتریس A یک نگاشت خطی (اپراتور خطی) است $A_{m \times n} : R^m \longrightarrow R^n$

$r(A) = n \rightarrow$ A یک به یک است

$r(A) = m \rightarrow$ A پوشاست

$r(A) = m = n \rightarrow$ A یک به یک و پوشاست

اگر ماتریس A ، full rank (با مرتبه کامل) باشد یعنی: مرتبه کامل ستونی $r(A) = n$ مرتبه کامل سطری $r(A) = m$ در این حالت ماتریس A را معکوس پذیر ، یا وارون پذیر یا غیرسینگولار گویند.

مشتقات ماتریس

۱ـ مشتق بردار نسبت به اسکالر

$$x_{u \times 1} = \begin{bmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ \vdots \\ x_u(u) \end{bmatrix}_{u \times 1} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_u}{\partial u} \end{bmatrix}$$

۲- مشتق تابع اسکالر نسبت به بردار

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right]$$

۳- مشتق بردار نسبت به بردار

$$y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n} = J_{yx}$$

ژاکوبین

۴- مشتق ماتریس نسبت به اسکالر

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11}(v) & \cdots & a_{1n}(v) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(v) & \cdots & a_{mn}(v) \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\partial A}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(v)}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(v)}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}(v)}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}(v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

۵- مشتق اسکالر نسبت به ماتریس

$$y = f(A) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}$$

۶- مشتق حاصل ضرب ماتریس‌ها نسبت به اسکالر

$$\begin{matrix} A = A(u) \\ B = B(u) \end{matrix} \qquad C = A \times B \longrightarrow \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial u} \times B + A \times \frac{\partial B}{\partial u}$$

۷- مشتق فرم مربعی

$$y = x^T_{1 \times n} \, A_{n \times n} \, x_{n \times 1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^T A + x^T A^T \qquad \text{if} \quad A = A^T \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 2x^T A$$

: Trace

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \lambda_i$$ مقادیر ویژه

① $\text{Trace } A_{n \times n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \left[\det A_{n \times n} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right]$

② $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

③ $Tr(KA) = K\,Tr(A)$

④ $Tr(AB) = Tr(BA)$

⑤ $Tr(R^{-1}AR) = Tr(RAR^{-1}) = Tr(A)$

⑥ $Tr(x^T A x) = x^T A x$

مشتقات Trace :

۱) $\frac{\partial Tr(A)}{\partial A} = \frac{\partial Tr(A^T)}{\partial A} = I$ ۲) $\frac{\partial Tr(A^T B A)}{\partial A} = (B+B^T)A$

۳) $\frac{\partial Tr(AB)}{\partial A} = \frac{\partial Tr(BA)}{\partial A} = B^T$ ۴) $\frac{\partial Tr(ABA^T)}{\partial A} = A(B+B^T)$

۵) $\frac{\partial Tr(ABA^T C)}{\partial A} = CAB + C^T AB^T$

خطی کردن با استفاده از بسط تیلور : $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

اگر بخواهیم تابع فوق را حول نقطه $x = x_0$ خطی نماییم، داریم :

$$y = y_0 + \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_0} (x - x_0) + \dots + \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{x_n = x_0} (x - x_0) \quad , \quad y_0 = f(x_0)$$

$$y_{m\times 1} = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{bmatrix} , \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow y_{m\times 1} = y_{0\,m\times 1} + \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x = x_0} (x - x_0)$$

بهینه سازی :

۱- بهینه سازی نامقید : هدف تعیین max و یا min یک تابع اسکالر n متغیره است

۲- الف) مسائل بهینه سازی مقید با قیدهای مساوی

ب) مسائل بهینه سازی مقید با قیدهای نامساوی

۱) $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max / \min$

۲) الف)
$$\begin{cases} y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max / \min \\ g(x)_{m\times 1} = 0 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max / \min \\ g(x) \geq 0 \text{ یا } \leq 0 \end{cases}$$

بهینه سازی نامقید :

هدف تعیین اکسترمم تابع $y = f(x)$ می باشد، شرط لازم برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه اکسترمم تابع y باشد اینستکه :

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x = x^*} = \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x = x^*} = \dots = \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{x = x^*} = 0$$

- شرط کافی برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه max باشد اینستکه ماتریس هسین تابع معین منفی باشد

شرط کافی برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه min باشد اینستکه ماتریس هسین تابع معین مثبت باشد

$$\text{هسین } H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{x = x^*}$$

اگر ماتریس H نیمه معین مثبت یا نیمه معین منفی باشد راجع به $x=x^*$ چیزی نمی‌توان گفت، در غیر این حالت ها $x=x^*$ نقطه زینی است.

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_1=|a_{11}| \qquad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad AK=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1K} \\ \vdots & & \\ a_{K1} & \cdots & a_{KK} \end{vmatrix}$$

اگر تمامی A_i ها مثبت باشند در اینصورت ماتریس A معین مثبت است و برعکس (اگر بعضی از A_i ها صفر باشند ماتریس A نیمه معین مثبت است)

اگر علامت A_i ها منفی باشند در اینصورت ماتریس A معین منفی است و برعکس

بهینه‌سازی مقید با قیدهای مساوی:

$$\begin{cases} y=f(x) \to \min,\ \max \\ \underset{m\times 1}{g(x)}=0 \end{cases}$$

روش‌های مختلفی برای حل موجود است که یکی از آن‌ها روش لاگرانژ است، اکسترمم تابع f، با شرط $g(x)=0$ می‌توان از اکسترمم تابع لاگرانژ استفاده نمود

$$\varphi=f(x)+\lambda^T g(x) \longrightarrow \text{اکسترمم} \quad \lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{bmatrix}$$

در مسئله بهینه سازی با قید مساوی، می‌توان از روش لاگرانژ استفاده نمود و آن را به مسئله بهینه سازی نامقید با تابع لاگرانژ با $(m+n)$ متغیر تبدیل نمود.

$$\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \longrightarrow \max \text{ or } \min$$

شرط لازم برای تعیین اکسترمم تابع φ بصورت زیر است:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_m}\right] \xrightarrow[\text{همگی}]{} =0$$

n+m معادله، n+m مجهول

مثال)

$$\begin{cases} x+y=r \\ xy\to\max \text{ or } \min \end{cases}$$

$$\varphi(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-r) \qquad \text{تابع لاگرانژ}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \Rightarrow y+\lambda=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \Rightarrow x+\lambda=0$$

$$\Big\}\ x=y \longrightarrow H=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1=0 \\ H_2=-1 \\ H_3=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0 \Rightarrow x+y-r=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{r}{2} \\ y=\frac{r}{2} \end{cases}$$

وارون ماتریس های پارتیشن بندی شده:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} A^{1\times 1}_{m\times m} & A^{1\times 2}_{m\times(n-m)} \\ A^{2\times 1}_{(n-m)\times m} & A^{22}_{(n-m)\times(n-m)} \end{bmatrix} \qquad B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

الف) if A, A_{11} nonsingular

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{12} B_{21} \qquad B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22}$$

$$B_{21} = -B_{22} A_{21} A_{11}^{-1} \qquad B_{22} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$

ب) if A, A_{22} non singular

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21})^{-1} \qquad B_{12} = -B_{11} A_{12} A_{21}^{-1}$$

$$B_{21} = -A_{22} A_{21} B_{11} \qquad B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} A_{12}$$

$$(C^{-1} + A^T B^{-1} A)^{-1} = C - CA^T (B + ACA^T)^{-1} AC$$

مشاهدات و ویژگی های آن ها:

برای مشخص شدن مفهوم یک مشاهده می بایست اندازه گیری را در زمان و در فضا معرفی نمود، بعنوان مثال فاصله در نقطه برروی زمین را می توان بصورت اندازه گیری ها مدارم در طول زمان انجام داده و یک سری زمانی ایجاد نمود، حال می توان این اندازه گیری را بین نقاط مختلف انجام داده و یکسری مشاهدات در فضا ایجاد نمود.

سری زمانی $\quad \ell(z_i) \quad i = 1, \dots, N$

به هر مشاهده انجام شده در زمان z_i یک نمونه (sample point) گفته می شود.

هر مشاهده انجام شده $\ell(z)$ بطور عمده شامل یک قسمت معین (deterministic) و یک قسمت تصادفی (stochastical) می باشد، که قسمت معین را ترند (trend) و قسمت تصادفی را باقیمانده (residual) گویند.

$$\ell(z) = \underset{t}{t(z)} - \underset{r}{r(z)} \qquad (11)$$

قسمت معین (t) خود از دو جزء تشکیل شده، یک مقدار $\hat{\hat{\ell}}$ که همان مقدار مورد انتظار است و $p(z)$ که جزء سیستماتیک می باشد

$$t(z) = \hat{\hat{\ell}}(z) + p(z) \qquad (12)$$

توجه: جزء سیستماتیک $p(z)$ بابت تغییر مشاهدات شده و آن را می توان به کمک یک فرمول برحسب یکسری پارامترهای معلوم بیان نمود، این پارامترها همان ترند سیستماتیک بوده که مشاهدات را تحت تأثیر قرار می دهند و تماماً در طول مشاهدات (فرآیند اندازه گیری مشاهدات) رفع نشده اند.

$$p(z) = \Phi(z)\,\lambda \qquad (13)$$

در رابطه بالا (13) $\Phi(z)$ یک سطر از ماتریس واندرموند است که توابع بکار رفته در آن برحسب توابع پایه نوشته شده اند. (فصل 14.2 concept)

مقادیر λ را گاهاً پارامترهای نویز nuisance parameters گویند، بعنوان مثال دستگاه طولیاب می تواند یکسری پارامتر نویز را به مدل اعمال کند.

توجه:

در بعضی از کارها اگر بخواهیم بر پایه به قضیه پناه کنیم، می‌توان یکسری از پارامترهای نویز را بصورت مجمل همراه با مجهولات X در نظر گرفت و آن‌ها را محاسبه نمود.

نسبت تصادفی را می‌توان بصورت زیر معرفی نمود

$$r(z) = v(z) + s(z) \quad (14)$$

s و v دو مقدار تصادفی هستند که وجود آن‌ها به جنبه فیزیکی پدیده بستگی دارد که به خوبی از آن مطلع نیستیم. پارامیتر v یک مقدار تصادفی (آماری) است که مستقل بوده و مقدار آن به کمک روش‌های آماری قابل پیش‌بینی می‌باشد. این مقدار اغلب مربوط به لوازم اندازه‌گیری بوده ولی منحصر به آن نیست. مقدار متوسط این پارامیتر صفر می‌باشد.

پارامیتر s یک متغیر تصادفی وابسته بوده که مربوط رفتار ویژه آن ماده در یک تکسر فاصل می‌باشد (اساس ایجاد آن خارج از سیستم اندازه‌گیری است و به محیط بستگی دارد)، پارامیتر s هم تصادفی است در نتیجه میانگین آن صفر است. (گاهی یک متغیر تصادفی وابسته را (منظورمان پارامیتر تصادفی وابسته است) را signal گویند.

با توجه به مطالب گفته شده بردار مشاهدات بصورت:

$$t = \hat{t} + p - v - s \quad (15)$$

سه‌شنبه، (روح‌الله کریمی) تقی یوسف‌زاده، دانشکده فنی

فصل اول:

مراحل انجام پروژه نقشه‌برداری:

1- شناخت مجهولات و تعیین دقت مورد نیاز برای مجهولات

2- کلیه راه حل‌های ممکن برای رسیدن به مجهولات مورد بررسی قرار گیرد. در حقیقت یک مدل ریاضی برای رسیدن به مجهولات تعیین می‌شود.

3- انتخاب بهترین راه حل از بین راه حل‌های ممکن

معیار بهینگی ← الف) دقت ب) زمان ج) هزینه

در این مرحله یک طرح مشاهداتی ریخته می‌شود ← چه مشاهداتی، چه دستگاهی، چگونه

4- جمع‌آوری اطلاعات و مشاهدات مورد نیاز

5- پردازش روی مشاهدات (پردازش‌های قبل از سه‌شنبه). در این مرحله مشاهداتی را می‌توان ست کرد که تکراری باشند. سازگاری مشاهدات مختلف با هم سنجیده نمی‌شوند. در این مرحله سازگاری مشاهداتی را می‌توان ست کرد که از یک جامعه باشند.

ست مشاهدات: الف) تصادفی بودن ب) نرمال بودن ج) وجود اشتباه د) وجود خطای سیستماتیک (systematic)

6- تشکیل مدل ریاضی و تعیین مجهولات و دقت مجهولات به مدل ریاضی (رابطه‌ای است بین مجهولات و مشاهدات)

کمیت‌های مختلف یک مدل ریاضی ← 1- مشاهدات: طول، زاویه، ارتفاع، اختلاف نقل، امتداد، مختصات ← L

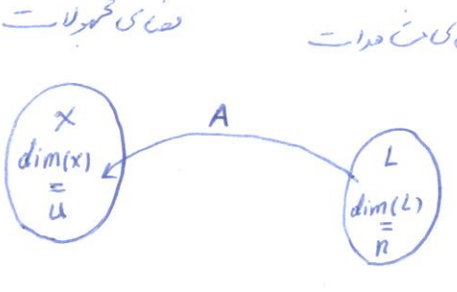
2- مجهولات: طول، زاویه و ... ← معمولاً مختصات و ارتفاع مجهولند ← X

3- ثابت‌ها ← C

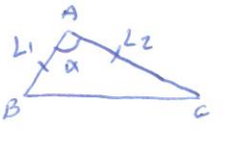
انواع مدل‌های ریاضی:

الف) مدل مستقیم: مدلی است که نسبت به مجهولات صریح است که می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد

(خطی) $X_{u\times1} = A_{u\times n} L_{n\times1}$ یا $X_{u\times1} = f_{u\times1}(L_{n\times1})$ (غیرخطی)



مدل مستقیم در فضای مجهولات نوشته می‌شود



$\rightarrow S = \frac{1}{2} L_1 L_2 \sin\alpha$

ب) مدل غیر مستقیم: مدلی است که نسبت به مشاهدات صریح است که میتواند خطی یا غیر خطی باشد (مدل معکوس هم میگویند)

$$L_{n\times 1} = A_{n\times u} X_{u\times 1} \quad (\text{خطی}) \qquad \text{یا} \qquad L_{n\times 1} = f_{n\times 1}(x_{u\times 1}) \quad (\text{غیر خطی})$$

مدل غیر مستقیم در فضای مشاهدات نوشته میشود

فضای مجهولات — فضای مشاهدات

طول پاره خط $= L = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$

2) مدل ترکیبی: که نه نسبت به مجهولات صریح است نه نسبت به مشاهدات که میتواند خطی یا غیر خطی باشد.

$$\begin{cases} \text{خطی} \rightarrow & A_{r\times u}\, x_{u\times 1} + B_{r\times n}\, L_{n\times 1} + C_{r\times 1} = 0 \\ \text{غیر خطی} \rightarrow & f_{r\times 1}(x_{u\times 1}, L_{n\times 1}) = 0 \end{cases}$$

u: تعداد مجهولات

n: تعداد مشاهدات

r: تعداد معادلات

د) مدلهای تلفیقی: توضیح این مدل بعداً داده خواهد شد

7) پردازش های بعد از سرشکنی

در این مرحله مجهولات ست میشوند که آیا نتایج قابل قبولند یا خیر

8- ارائه نتایج به صورتهای مناسب (گرافیکی، عددی و ...)

در صورت غیر قابل بودن نتایج عامل آن پیدا شده و پس از رفع سرشکنی تکرار شود

مروری بر جبر خطی:

تعریف رتبه ماتریس: (RANK):

فرض کنید A ماتریسی m×n باشد. رتبه ماتریس A بزرگترین زیرماتریس مربعی از A است که دترمینان آن مخالف صفر باشد

(ماکزیمم تعداد سطرها و یا ستونهای مستقل خطی ماتریس A رتبه ماتریس A نامیده میشود)

* ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی یک ماتریس همیشه با ماکزیمم تعداد ستونهای مستقل خطی ماتریس برابر می باشد

$$RANK(A) = R(A) = \text{رتبه ماتریس } A$$

سه شنبه

* فضایی که توسط سطرهای مستقل خطی یک ماتریس تنیده می شود، فضای سطری $R(A)$ و فضایی که توسط ستونهای مستقل خطی یک ماتریس تنیده می شود، فضای $C(A)$ نامیده می شود.

$$\dim(R(A)) = \dim(C(A))$$

اگر A ، $m\times n$ باشد $\rightarrow$ 1) $r(A) \leq \min\{m,n\}$

2) $r(A\times B) = r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

3) $r(A+B) < r(A) + r(B)$

4) $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

$A^T = A \rightarrow$ A متقارن است

$A = \bar{A}^T = A^* \rightarrow$ A هرمیتی است

نکته:

ماتریس A یک نگاشت و یک اپراتور خطی است.

$$A_{m\times n} : R^n \rightarrow R^m$$

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$$

اپراتور خطی حالت خاصی از نگاشت میباشد

$$\begin{cases} A(x+y) = A(x) + A(y) \\ A(\alpha x) = \alpha A(x) \end{cases}$$

$$A_{m\times n} : \begin{cases} r(A) = n \rightarrow & A \text{ یک به یک است} \\ r(A) = m \rightarrow & A \text{ پوشا است} \\ r(A) = m = n \rightarrow & A \text{ یک به یک و پوشا است} \end{cases}$$

$r(A) =$ m (مرتبه کامل سطری) یا $= n$ (مرتبه کامل ستونی) $\rightarrow$ A ماتریس fullrank است

$r(A) = m = n \rightarrow$ A ماتریس nonsingular است

وارون های معروف $A_{m\times n}$

1) $r(A) = m = n \rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I \rightarrow$ A^{-1} وارون حقیقی است که منحصر بفرد نیز می باشد

2) $r(A)=n \rightarrow A_L^{-1}A=I \rightarrow$ A دارای وارون چپ است که منحصر بفرد نمی باشد

یکی از این وارونها که منجر به جواب کمترین مربعات میشود از رابطهٔ زیر محاسبه میگردد

$$r(A)=n<m \rightarrow A_L^{-1}=(A^TA)^{-1}A^T$$

3) $r(A)=m<n$

A وارون راست دارد که منحصر بفرد نمی باشد

$$AA_r^{-1}=I$$

یکی از این وارونها که منحصر بفرد نمی باشد و منجر به جواب مینیمم نرم می شود از رابطهٔ زیر بدست می آید :

$$A_r^{-1}=A^T(AA^T)^{-1}$$

4) $r(A)<\min\{m,n\} \rightarrow$

در این صورت ماتریس A دارای وارونی خواهد بود به نام شبه وارون که :

1) $AA^+A=A$

2) $(A^+A)^T=A^+A$

3) $A^+AA^+=A^+$

4) $(AA^+)^T=AA^+$

شبه وارون هر ماتریس منحصر بفرد است . وارون حقیقی و وارون چپ و راست خاص ، خود حالتی خاص از شبه وارون هستند .

تعریف ماتریس معین مثبت :

ماتریس هرمیتی A معین مثبت است اگر و تنها اگر

(p.d)

$$\forall x\neq 0 \in \mathbb{C}^n \quad ; \quad x^HAx>0$$

if $A=A^T=A^H \rightarrow$ A is Hermitian

تعریف ماتریس معین منفی (n.d) :

$x^HAx<0 \rightarrow$ A معین منفی

ماتریس نیمه معین مثبت :

$\forall x\in\mathbb{C}^n \rightarrow x^HAx\geq 0 \rightarrow$ A نیمه معین مثبت

ماتریس نیمه معین منفی :

$\forall x\in\mathbb{C}^n \rightarrow x^HAx\leq 0 \rightarrow$ A نیمه معین منفی

قضیه :

اگر به ازای هر $x\in\mathbb{C}^n \leftarrow x^HAx\in R$ در این صورت حتماً A هرمیتین است و بالعکس

سه شکلی

قضیه :

ماتریس هرمیتی A معین مثبت است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه اش مثبت باشند.

ماتریس هرمیتی A معین منفی است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه اش منفی باشند.

ماتریس هرمیتی A نیمه معین مثبت است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه اش نامنفی باشند.

ماتریس هرمیتی A نیمه معین منفی است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه اش نامثبت باشند.

قضیه :

اگر ماتریسی p.d یا n.d باشد حتماً دارای وارون حقیقی است ولی عکس این قضیه صادق نمی باشد.

فرض :

$M_{m\times m}$: p.d , $N_{n\times n}$: p.d , $A_{n\times m}$

قضیه :

1) $r(A) = r(A^T) = r(AMA^T) = r(A^TNA)$

2) $A^T_{m\times n} N_{n\times n} A_{n\times m} \longrightarrow$ is p.d if $r(A)=m$

$\longrightarrow$ is p.s.d if $r(A)\neq m$ $(r(A)<m)$

3) $A_{n\times m} M_{m\times m} A^T_{m\times n} \longrightarrow$ is p.d if $r(A)=n$

$\longrightarrow$ is p.s.d if $r(A)\neq n$ $(<n)$

$A_{m\times n}$, $B_{p\times n} \rightarrow AB^T=0 \rightarrow r\begin{bmatrix} A \\ \hdashline B \end{bmatrix}_{(m+p)\times n} = r(A)+r(B)$

$(A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = 0 \longrightarrow x=0) \longleftrightarrow r(A)=n$

مشتقات ماتریس :

۱. مشتق بردار نسبت به اسکالر

$$x_{u\times 1} = \begin{bmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ \vdots \\ x_u(u) \end{bmatrix}_{u\times 1} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_u}{\partial u} \end{bmatrix}_{u\times 1}$$

2) مشتق تابع اسکالر نسبت به بردار

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

3) مشتق بردار نسبت به بردار

$$y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n} = J_{yx}$$

ژاکوبین

4) مشتق ماتریس نسبت به اسکالر:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}(v) & \cdots & a_{1n}(v) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(v) & \cdots & a_{mn}(v) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(v)}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(v)}{\partial v} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}(v)}{\partial v} & & \frac{\partial a_{mn}(v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

5) مشتق اسکالر نسبت به ماتریس:

$$y = f(A) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$y = tr(A) \rightarrow \frac{\partial y}{\partial A} = I_{n\times m}$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

6) مشتق حاصل ضرب ماتریس‌ها نسبت به اسکالر:

$$A = A(U)$$

$$B = B(U)$$

$$C = A \times B \longrightarrow \frac{\partial C}{\partial U} = \frac{\partial A}{\partial U} \times B + A \times \frac{\partial B}{\partial U}$$

7) مشتق فرم مربعی:

$$y = x^H_{1\times n} A_{n\times n} x_{n\times 1} \quad \{ (x^T A x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^H A + x^H A^H \quad \{ (x^T A + x^T A^T)$$

$$\text{if } A = A^H \quad \{ (A = A^T)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x^H A \quad \{ (2x^T A)$$

1) $y = A_{m\times n} x_{n\times 1} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = A$

مشتق

2) $y = x^T_{1\times n} A_{n\times m} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = A^T$

قوانین Trace :

1) $Trace(A_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \left[det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right]$

2) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

3) $Tr(KA) = K\, tr(A) \qquad (K = \text{ثابت})$

4) $Tr(AB) = Tr(BA)$

5) $Tr(A^TB) = Tr(B^TA) = Tr(AB^T) = Tr(BA^T)$

6) $Tr(R^{-1}AR) = Tr(RAR^{-1}) = Tr(A)$

7) $Tr(\underset{1\times n}{x^T} \underset{n\times n}{A} \underset{n\times 1}{x}) = x^TAx$

مشتقات Trace :

1) $\frac{\partial tr(A)}{\partial A} = \frac{\partial Tr(A^T)}{\partial A} = I$

2) $\frac{\partial Tr(A^TBA)}{\partial A} = (B+B^T)A$

3) $\frac{\partial Tr(AB)}{\partial A} = \frac{\partial Tr(BA)}{\partial A} = B^T$

4) $\frac{\partial Tr(ABA^T)}{\partial A} = A(B+B^T)$

5) $\frac{\partial Tr(ABA^TC)}{\partial A} = CAB + C^TAB^T$

خطی کردن با استفاده از بسط سری تیلور :

$$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

اگر بخواهیم تابع فوق را حول نقطه $x = x_0$ خطی نماییم داریم :

$$y = y_0 + \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots + \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad , y_0 = f(x_0)$$

در حالت کلی :

$$y_{m\times 1} = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{bmatrix} , x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow y_{m\times 1} = y_{0\, m\times 1} + \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

ژاکوبین

سرشکنی

بهینه سازی :

۱- مسائل بهینه سازی نامقید: هدف تعیین max یا min یک تابع اسکالر n متغیره است

2- الف) مسائل بهینه سازی مقید با قیدهای مساوی

ب) مسائل بهینه سازی مقید با قیدهای نامساوی

✓1) $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \begin{cases} \text{Max} \\ \text{min} \end{cases}$

سرشکنی

✓2- الف) $\begin{cases} \underset{n\times 1}{y = f(x)} = f(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \begin{cases} \text{Max} \\ \text{Min} \end{cases} \\ \underset{m\times 1}{g(x) = 0} \end{cases}$

*2- ب) $\begin{cases} y = f(x) \longrightarrow \begin{cases} \text{Max} \\ \text{Min} \end{cases} \\ \underset{m\times 1}{g(x) \geq 0 \ \text{یا} \ \leq 0} \end{cases}$

بهینه سازی نامقید:

هدف تعیین اکسترمم تابع $y = f(x)$ می باشد. شرط لازم برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه اکسترمم تابع y باشد این است که:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x=x^*} = \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x=x^*} = \dots = \left.\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{x=x^*} = 0$$

شرط کافی برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه Max باشد این است که ماتریس هسین تابع f معین منفی باشد.

شرط کافی برای اینکه نقطه $x = x^*$ یک نقطه Min باشد این است که ماتریس هسین تابع f معین مثبت باشد.

$$\text{هسین} \quad H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{x=x^*}$$

* اگر ماتریس H نیمه معین مثبت یا نیمه معین منفی باشد راجع به $x = x^*$ چیزی نمی توان گفت. در غیر این حالت $x = x^*$ نقطه زینی است

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_1 = |a_{11}| \quad , A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

مسئله کمکی

* اگر تمامی A_i ها مثبت باشند در این صورت ماتریس A معین مثبت است و برعکس (بعضی A_i ها صفر باشند ← نیمه معین مثبت)

* اگر علامت A_i ها برابر $(-1)^i$ بود در این صورت ماتریس A معین منفی است و برعکس

بهینه سازی مقید با قیدهای مساوی:

$$y = f(x) \longrightarrow \begin{cases} \min \\ \max \end{cases}$$

$$\underset{m\times 1}{g(x)} = 0$$

روشهای مختلفی برای حل موجود است که یکی از آنها روش لاگرانژ است. برای تعیین اکسترمم تابع f با شرط $g(x)=0$، می توان از اکسترمم تابع لاگرانژ استفاده کرد.

$$\varphi = f(x) + \lambda^T g(x) \longrightarrow \text{اکسترمم} \quad , \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

لذا مسئله بهینه سازی با قیدهای مساوی تبدیل به مسئله بهینه سازی با قید با تابع لاگرانژ با (n+m) متغیر می شود.

$$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \longrightarrow \text{Max or min}$$

شرط لازم برای تعیین اکسترمم تابع φ این است که

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_m}\right] \overset{\text{همگی}}{=} 0$$

n+m معادله و n+m مجهول

مثال:

$$x + y = r$$

$$xy \longrightarrow \max \text{ or } \min$$

$$\varphi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - r)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \rightarrow y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \rightarrow x + \lambda = 0 \longrightarrow x = y \qquad \longrightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = -1 \\ H_3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow x + y - r = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{r}{2} \\ y = \frac{r}{2} \end{cases}$$

وارون ماتریس های پارتیشن بندی شده:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} \underset{m\times m}{A^{1\times 1}} & \underset{m\times(n-m)}{A^{1\times 2}} \\ \underset{(n-m)\times m}{A^{2\times 1}} & \underset{(n-m)\times(n-m)}{A^{2\times 2}} \end{bmatrix} \qquad B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

الف) if A, A_{11} noun singular

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \qquad B_{21} = -B_{22} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} \qquad B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{12} B_{21}$$

ب) if A, A_{22} noun singular

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21})^{-1} \qquad B_{12} = -B_{11} A_{12} A_{21}^{-1}$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21} B_{11} \qquad B_{22} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} A_{12}$$

$$(C^{-1} + A^T B^{-1} A)^{-1} = C - C A^T (B + A C A^T)^{-1} A C$$

فصل دوم :

علت نیاز به سرشکنی

دستگاه هایی که معمولاً در علوم ژئوماتیک هستند از نوع دستگاه های فراهمین می باشند دستگاه هایی که تعداد معادلاتشان از مجهولات بیشتر است و جواب ندارند $r(A) \neq r(D)$. به عبارت دیگر در معادلات $L_{n\times 1} = A_{n\times u} X_{u\times 1}$ با فرض اینکه بتوان به ازای هر مشاهده یک معادله نوشت افزودن تعداد معادلات نسبت به مجهولات در صورتی امکان پذیر است که تعدادی مشاهدات اضافی داشته باشیم . دلیل انجام مشاهدات اضافی در مدل های سرشکنی به صورت زیر می باشد :

1- امکان کنترل مشاهدات (از حیث وجود اشتباه، خطای سیستماتیک و ...) تنها زمانی امکان پذیر است که مشاهدات اضافی داشته باشیم

2- رسیدن به جواب بهتر در صورتی امکان پذیر است که مشاهدات اضافی داشته باشیم

3- امکان برآورد پارامترهای کیفی مجهولات و مشاهدات در صورتی امکان پذیر است که مشاهدات اضافی داشته باشیم

مشاهدات اضافی ← 1) تکرار یک مشاهده که مشاهدات از یک جامعه برداشت شده باشند

2) مشاهدات کمیت های دیگر

مقاصد انجام تکرار مشاهده :

تست وجود اشتباه، رسیدن به جواب بهتر، تست نرمال بودن،

مقاصد مشاهده کمیت های دیگر :

تست وجود خطای سیستماتیک، و رسیدن به جواب بهتر

بنابراین دستگاه‌هایی که با آنها سروکار خواهیم داشت از نوع دستگاه‌های ناسازگار می‌باشند و دلیل عدم وجود جواب می‌باشند.

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

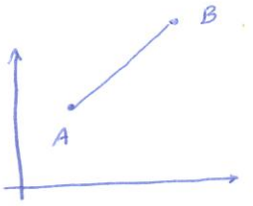
$$L_{n\times 1} = A_{n\times u}\, x_{u\times 1} \qquad n>u$$

$$r(A) \neq r(D)$$

ناسازگاری دیگر عدم تساوی سمت چپ و راست معادله قبل است.

$$\underbrace{L}_{\text{فضای فیزیکی (خطا دار)}} = \underbrace{A\,x}_{\text{فضای ریاضی}}$$

مثال:



$AB = 100\,m$ طول واقعی

$AB = 100{,}02\,m$ طول ترانشه شده

$$100{,}02 \neq \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

در دستگاه معادلات 1 ناسازگاری دیگری به چشم می‌خورد که عدم تساوی طرف چپ و راست می‌باشد که به علت وجود مشاهدات در فضای فیزیکی (آلوده به خطا) و معادلات در فضای ریاضی می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{ll} L_{n\times 1} \neq A_{n\times u}\, x_{u\times 1} & n>u \\ L_{n\times 1} + \underbrace{v_{n\times 1}}_{\text{مجهولات ظاهری (تصحیحات مشاهدات)}} = A_{n\times u}\, x_{u\times 1} & \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{ll} n+u & \text{مجهولات} \\ n & \text{معادلات} \end{array}$$

تبدیل عدم تساوی به تساوی و تبدیل دستگاه بیجواب به دستگاه با بی‌نهایت جواب

$$L = Ax - v = \underbrace{\left[A_{n\times u} \,\vdots\, -I_{n\times n}\right]}_{\text{ماتریس افزوده } A \text{ و } I} \begin{bmatrix} x_{u\times 1} \\ v_{n\times 1} \end{bmatrix} = A^{*}_{n\times(n+u)}\, x^{*}_{(n+u)\times 1}$$

$$D = \left[A^{*} \,\vdots\, L_{n\times 1}\right]_{n(n+u+1)}$$

$r(A^{*}) \leq n$ (min A^{*} ابعاد)

$r(A^{*}) \geq n$ (به دلیل وجود I در ساختار A^{*})

$\left.\begin{array}{l} r(A^{*}) \leq n \\ r(A^{*}) \geq n \end{array}\right\} \rightarrow r(A^{*}) = n$

$r(D) \leq n$ (به دلیل ابعاد Min)

$r(D) \geq n$ (به دلیل وجود A^{*} در ساختار D)

$\left.\begin{array}{l} r(D) \leq n \\ r(D) \geq n \end{array}\right\} \rightarrow r(D) = n$

$r(A^{*}) = r(D) = n < n+u$

دستگاه بی‌نهایت جواب

$$L = A^{*} x^{*}$$

سرشکنی

دستگاه معادلات $L = A^* x^*$ دستگاهی است با بی نهایت جواب، هدف این است که یک جواب از بی نهایت جواب انتخاب شود، به طوری که حاصل خصوصیات آماری خوبی داشته باشد، برای اینکه یک جواب از بی نهایت جواب انتخاب شود لازم است تابعی به صورت $f(x^*)$ به معادلات اضافه شود

$$\begin{cases} L = A^* x^* \\ f(x^*) \to \min \text{ or } \max \end{cases}$$

بنابراین با یک مسأله بهینه سازی سروکار خواهیم داشت. به تابع هدفی که معمولاً در علوم ژئوماتیک استفاده می گردد min کردن تابع نرم است. ثابت می شود اگر از min کردن تابع نرم استفاده شود، جواب حاصل خصوصیات آماری خوبی خواهد داشت که در تئوری تقریب فوق الذکر مهم است.

به جوابی که از دستگاه روبرو بدست می آید جواب مینیمم نرم گفته می شود زیرا

$$\begin{cases} L = A^* x^* \\ \|x^*\| \to \min \end{cases}$$

نرم جواب (مجهولات) min می شود.

نرم های متداول در سرشکنی: (نرم یک تابع اسکالر می باشد)

$$x_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1) $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \rightarrow$ نرم اقلیدسی یا L_2

2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \rightarrow$ نرم L_1 یا 1

3) $\|x\|_\infty = \max_{i=1 \to n} |x_i| \rightarrow$ نرم بی نهایت (چبیشف)

4) $\|x\|_q = \sqrt[q]{|x_1|^q + |x_2|^q + \cdots + |x_n|^q} \rightarrow$ نرم L_q

Min شدن x^* دو مشکل اساسی دارد:

1- قسمتی از x^* مجهولات واقعی هستند (x ها) که هر مقداری را می توانند اختیار کنند و min کردن آنها معنا ندارد. مثلاً در شبکه ای که مجهولات مختصات هستند min شدن مختصات معنا ندارد.

2- با توجه به اینکه ما تا حدودی به مشاهدات انجام شده اطمینان داریم پس هر مقداری برای x قابل قبول نیست و min کردن $\|x^*\|$ ممکن است باعث شود x ها اعداد بزرگی شوند که برای ما قابل قبول نباشد.

سه شکنی

تصحیح شده min کردن نرم :

$$\begin{cases} L = A^* x^* \\ \|v\| \to \min \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_2 \to \text{جواب کمترین مربعات} \\ L_1 \to \text{جواب پایدار} \\ L_\infty \to \text{نرم } L_\infty \end{cases}$$

معتبر است

هرگاه نرم مجهولات min شود به آن می‌نام نرم می‌گویند. و اگر تصحیحات را min کنیم به آن کمترین مربعات گویند. مرسوم‌ترین روش استفاده از نرم 2 می‌باشد (L_2).

مزایای روش L_2 :

1) اگر مشاهدات عاری از خطای sys و اشتباه باشند و همچنین از تابع توزیع نرمال تبعیت کنند، جوابهای حاصل از روش کمترین مربعات حاوی خصوصیات آماری است که تئوری تقریب فوق العاده مهم است.

2) در حالت دستگاه معادلات خطی و غیرخطی روش کمترین مربعات با تغییر جزئی قابل استفاده میباشد. عبارت دیگر روابط مورد نیاز برای تعیین مجهولات در حالت خطی و غیرخطی اختلاف جزئی دارند.

3) سادگی محاسبات

عیب روش L_2 :

اگر مشاهدات عاری از خطاهای sys و اشتباهات نباشند، جواب حاصل را به شدت تحت تأثیر قرار میدهند. (شدت بخش خطا در این روش زیاد است)

مزایای روش L_1 :

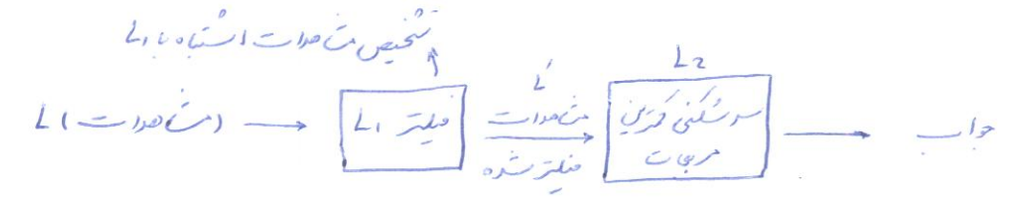
شدت بخش خطا در این روش کمتر میباشد. به عبارت دیگر اگر مشاهده‌ای خطایش بیشتر باشد، تصحیح مربوط به آن مشاهده نیز بیشتر است. به همین دلیل روش L_1 روش مناسبی برای کشف مشاهدات اشتباه میباشد. (مشاهدات اشتباه تأثیرش روی جواب به صورت محلی است)

معایب روش L_1 :

1) خصوصیات آماری روش L_2 (یا حداقل بعضی از آنها را) نخواهد داشت.

2) روابط مورد نیاز برای حل مجهولات در حالت خطی و غیرخطی اختلاف زیادی با هم دارند

3) پیچیدگی محاسبات.



1) روش L_1 2) پردازشهای قبل از سه شکنی (از حیث وجود خطای sys، اشتباه، نرمال بودن و ...)

$$\begin{cases} A^* x^* = L \\ \|v\|_2 \to \min \xrightarrow{\text{برای سادگی}} \|v\|_2^2 \to \min \ , \ \|v\|_2^2 = v^T v \end{cases}$$

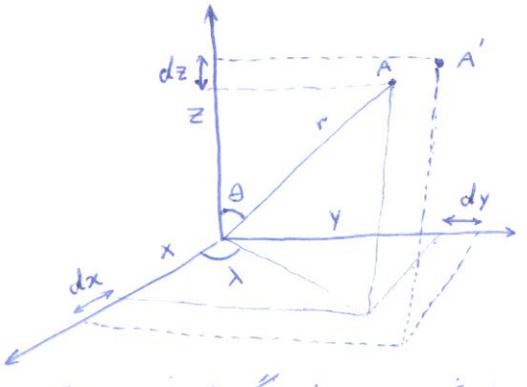
$$\to \begin{cases} A^* x^* = L \\ \|v\|_2^2 = v^T v \to \min \end{cases}$$

دلایل استفاده از ماتریس وزن:

1) منطق حکم میکند مشاهده‌ای که دقتش بیشتر است تأثیر بیشتری روی جواب بگذارد و تصحیح کمتری بگیرد. این موضوع در تابع هدف لحاظ شده است. زیرا تأثیر تمامی $\{v_i\}$ روی تابع به یک میزان میباشد.

2) لزوم اقلیدسی یک بردار چیزی جز اندازهٔ آن نمی‌باشد، در صورتی رابطهٔ $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ اندازه را میدهد که مشاهدات از هم مستقل باشند و نیز مقیاس آنها یکی می‌باشد. در غیر اینصورت تابع هدف باید تصحیح شود.

$$\|v_2\|^2 = s_1^2 v_1^2 + s_2^2 v_2^2 + \cdots + s_n^2 v_n^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} s_{ij} v_i v_j$$



کارتزین $\to ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

کروی $\to ds^2 \neq dr^2 + d\theta^2 + d\lambda^2$

$$\Rightarrow ds^2 = [dr \ d\theta \ d\lambda] \ G \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\lambda \end{bmatrix}$$

G: ماتریس تنسور متریک مطلب را از بین می‌برد و یک ماتریس معین مثبت می‌باشد. اگر سیستم مختصات متعامد باشد حتماً قطری است

$$\|v\|_2^2 = v^T P v \qquad P = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & s_{13} & \cdots & s_{1n} \\ s_{12} & s_2^2 & s_{23} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \cdots & s_n^2 \end{bmatrix}$$

به این ماتریس، ماتریس وزن میگویند که یک ماتریس P.D است. اگر مشاهدات مستقل باشند ماتریس وزن یک ماتریس قطری است مثل اینکه محورهای مختصات متعامدند. ثابت خواهیم کرد $P \propto \Sigma_{LL}^{-1}$ (Σ_{LL} ماتریس واریانس کوواریانس مشاهدات)

$$\begin{cases} A^* x^* = L \equiv L_{n\times 1} + v_{n\times 1} = A_{n\times u} x_{u\times 1} \\ \|v\|_2^2 = v^T P v \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} n > u \\ r(A) = u \end{matrix}\right\} \text{فرضیات}$$

روش اول:

$$L + v = Ax \to v = Ax - L \to v^T P v = (Ax-L)^T P (Ax-L) = (x^T A^T - L^T) P (Ax-L) = (x^T A^T P - L^T P)(Ax-L)$$

$$= x^T A^T P A x - x^T A^T P L - L^T P A x + L^T P L \Rightarrow v^T P v \longrightarrow \min$$

$$\rightarrow \frac{\partial (v^T P v)}{\partial x} = 0 \longrightarrow 2x^T A^T P A - 2L^T P A = 0 \longrightarrow x^T A^T P A = L^T P A \rightarrow$$ از طرفین معادله ترانسپوز می‌گیریم

$$A^T P A x = A^T P L \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L & \longrightarrow \text{برآوردی از جواب واقعی} \\ \hat{r} = A\hat{x} - L & \longrightarrow \text{برآوردی از تصحیحات واقعی} \\ \hat{L} = L + \hat{v} & \longrightarrow \text{برآوردی از مشاهدات واقعی} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (v^T P v)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^T A^T P A - 2L^T P A\right) = 2(A^T P A)^T = 2A^T P A$$

ماتریس $A^T P A$ یک ماتریس P.D است (چون P یک ماتریس P.D است و $r(A)=u$ می‌باشد) بنابراین جواب بدست آمده min کنندهٔ $v^T P v$ است.

انواع مدلهای سرشکنی:

انواع مدلهایی که در این درس مورد بررسی قرار میگیرند عبارتند از:

1- مدل پارامتریک

2- مدل ترکیبی

3- مدل شرط

4- مدلهای ثانویه ← الف) مدل کانسترین های تابعی functional constraint

ب) مدل کانسترین های داخلی Inner constraint

2) مدل کانسترین های وزن دار weight constraint

انواع مدل از لحاظ تعداد شرط:

1- Minimum constraint

2- over constraint

کلیه مدلهای فوق می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند

1- مدل پارامتریک:

اگر بتوان به ازای هر مشاهده یک معادله نوشت به گونه‌ای که رتبهٔ ماتریس ضرایب مجهولات برابر تعداد مجهولات باشد یا به عبارت دیگر ماتریس رتبهٔ کامل ستونی باشد در این صورت مدل پارامتریک خواهیم داشت که میتواند خطی یا غیرخطی باشد.

مدل پارامتریک
$$\begin{cases} \text{خطی} \quad \hat{L}_{n\times 1} = A_{n\times u}\,\hat{x}_{u\times 1} \\ \text{غیرخطی} \quad \hat{L}_{n\times 1} = f_{n\times 1}(\hat{x}_{u\times 1}) \end{cases}$$

u : تعداد مجهولات $\qquad r(A)=u$

n : تعداد مشاهدات $\qquad n \geq u$

A : ماتریس ضرایب (طرح)

- در مدل پارامتریک در هر معادله نباید بیشتر از یک مشاهده بکار رود.

$$\begin{cases} \hat{L} = A\hat{x} \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow \min \end{cases} \xrightarrow[\text{دستگاه}]{\text{جواب}} \begin{cases} \hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPL \\ \hat{v} = A\hat{x} - L = [A(A^TPA)^{-1}A^TP - I]L \\ \hat{L} = L + \hat{v} \end{cases}$$

ماتریس روابط فوق شامل مقادیر ثابت و مشاهده می باشد.

① $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = J_{\hat{x}L}\,\Sigma_{LL}\,J_{\hat{x}L}^T = (A^TPA)^{-1}A^TP\,\Sigma_{LL}\,PA(A^TPA)^{-1}$, $P = \sigma_0^2\Sigma_{LL}^{-1}$

$\rightarrow \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma_0^2(A^TPA)^{-1}\underbrace{A^TPA(A^TPA)^{-1}}_{=I} = \sigma_0^2(A^TPA)^{-1}$, $\hat{\Sigma}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2(A^TPA)^{-1}$

② $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = J_{\hat{v}L}\,\Sigma_{LL}\,J_{\hat{v}L}^T = [A(A^TPA)^{-1}A^TP - I]\,\Sigma_{LL}\,[A(A^TPA)^{-1}A^TP - I]^T = \sigma_0^2[A(A^TPA)A^T - P^{-1}]\times$

$[PA(A^TPA)^{-1}A^T - I] = \sigma_0^2[A\underbrace{(A^TPA)^{-1}(A^TPA)}_{I}(A^TPA)^{-1}A^T - A(A^TPA)^{-1}A^T + P^{-1}] = \sigma_0^2[P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T]$

$\hat{\Sigma}_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2(P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T)$

③ $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = J_{\hat{L}L}\,\Sigma_{LL}\,J_{\hat{L}L}^T = A(A^TPA)^{-1}A^TP\,\Sigma_{LL}\,PA(A^TPA)^{-1}A^T = \sigma_0^2 A(A^TPA)^{-1}A^TPP^{-1}PA(A^TPA)^{-1}A^T$

$= \sigma_0^2 A(A^TPA)^{-1}A^T \rightarrow \Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \sigma_0^2 A(A^TPA)^{-1}A^T$, $\hat{\Sigma}_{\hat{L}\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 A(A^TPA)^{-1}A^T$

با کمی دقت می توان دریافت که $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} - \Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$

چرا با وجود رابطه ی $\hat{L} = L + \hat{v}$ رابطه ی $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} - \Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$ دارای علامت منفی است؟

$\hat{L} = L + \hat{v} \longrightarrow \Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} + \Sigma_{\hat{v}\hat{v}} + 2\Sigma_{\hat{v}L}$ به دلیل وابستگی (کوواریانس) منفی بین مشاهدات و تصحیحات

انجام شده $\leftarrow$ $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} - \Sigma_{\hat{v}\hat{v}} \Leftarrow \Sigma_{\hat{v}L} = \Sigma_{L\hat{v}} = -\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$

تعاریف:

۱) درجه آزادی: $df = K + \text{تعداد مجهولات} - \text{تعداد معادلات}$

در مدل پارامتریک مقدار $K=0$ است. به دلیل اینکه ماتریس ضرایب مجهولات مرتبهٔ کامل سطری است (مرتبهٔ ماتریس برابر تعداد مجهولات است)

در مدل پارامتریک $df = n - u$

$$\hat{v} = A\hat{x} - L = [A(A^TPA)^{-1}A^TP - I]L = -RL \rightarrow R = I - A(A^TPA)^{-1}A^TP$$

ماتریس آزادی: $R = \Sigma_{\hat{v}\hat{v}}\Sigma_{LL}^{-1} = I - \Sigma_{\hat{L}\hat{L}}\Sigma_{LL}^{-1}$

عناصر روی قطر اصلی ماتریس آزادی را عدد آزادی گویند. منظور ما از مشاهده یک عدد آزادی خواهیم داشت. ثابت می‌شود که عدد آزادی هر مشاهده $0 \leq r_i \leq 1$ است. و $TR(R)$ که عبارت است از $tr = \sum_{i=1}^{n} r_i = df$ برابر درجهٔ آزادی است.

مثال:

در مدل پارامتریک خطی اگر $n=u$ ، $\hat{v}$ چه مقدار خواهد شد؟

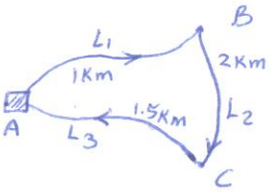
$$\hat{L}_{n\times1} = A_{n\times n}\, x_{n\times1} \rightarrow \begin{cases} \hat{x} = A^{-1}L \\ \hat{v} = 0 \\ \hat{L} = L \end{cases}$$

وقتی درجهٔ آزادی صفر شود، بردار $\hat{v}$ برابر صفر خواهد شد. مشاهداتی $\hat{v}$ صفر دارند که کنترلی روی آنها نباشد. در صورتی که تعداد مجهولات برابر معادلات باشد جواب مستقل از ماتریس وزن است. به عبارت دیگر به ازای تمامی مقادیر وزن مجاز داریم:

$$\begin{cases} \hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPL \\ \hat{v} = A\hat{x} - L \\ \hat{L} = L + \hat{v} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{x} = A^{-1}L \\ \hat{v} = 0 \\ \hat{L} = L \end{cases}$$

* P های مجاز هستند که وارون‌پذیر بودن A^TPA را با مشکل روبرو نکنند.

مثال:



$L_1 = 1m$

$L_2 = 2m$

$L_3 = -3.03\ m$

$h_A = 100$

الف) دقت مشاهدات یکسان است (وزن یکسان)

$df = 3 - 2 = 1$

مشاهدات دارای وزن یکسان‌اند $P = I$

$\hat{L}_1 = \hat{h}_B - h_A \rightarrow \hat{L}_1 + 100 = \hat{h}_B$

$\hat{L}_2 = \hat{h}_C - \hat{h}_B \rightarrow \hat{L}_2 = \hat{h}_C - \hat{h}_B \rightarrow$ بردار مشاهدات $= L = \begin{bmatrix} 101 \\ 2 \\ -103.03 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\hat{L}_3 = h_A - \hat{h}_C \rightarrow \hat{L}_3 - 100 = -\hat{h}_C$

$$\rightarrow \hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPL = \begin{bmatrix} 101.01 \\ 103.02 \end{bmatrix}$$

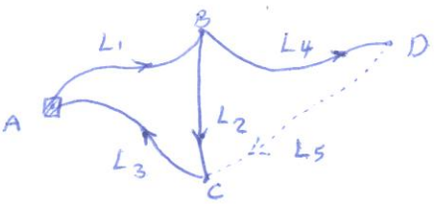
$$\hat{v} = A\hat{x} - L = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{df} = .0003$$

$$\hat{L} = L + \hat{v} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 2.01 \\ -3.02 \end{bmatrix}$$

ب) اگر اختلاف ارتفاع متناسب با طول ترازیابی باشد.

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{LL}^{-1} \quad , \quad \Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{0L_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{0L_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{0L_3}^2 \end{bmatrix} = K^2 \begin{bmatrix} L_{AB}^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_{BC}^2 & 0 \\ 0 & 0 & L_{AC}^2 \end{bmatrix} \rightarrow \Sigma_{LL}^{-1} = \frac{1}{K^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{AB}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{BC}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{AC}^2} \end{bmatrix}$$

مثال:



$L_1 = 1m$

$L_2 = 2m$

$L_3 = -3.03m$

$L_4 = 4m$

$h_A = 100m$

* درجه آزادی در هیچ شبکه‌ای صفر نمی‌شود و همیشه بزرگتر یا مساوی صفر است. $(df \geq 0)$

$$df_n = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

مدل پارامتر یک غیرخطی:

اکثر مدل‌های سرشکنی از این نوعند. فرم کلی این مدل‌ها به صورت $\hat{L} = f(\hat{x})$ می‌باشند.

$$\begin{cases} \hat{L}_{n\times 1} = L_{n\times 1} + \hat{v}_{n\times 1} = f_{n\times 1}(\hat{x}) \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow Min \end{cases}$$

یکی از روش‌های حل مسئله خطی کردن مدل $\hat{L} = f(\hat{x})$ می‌باشد. بنابراین برای خطی کردن نیاز به مقدار اولیه برای مجهولات می‌باشیم. این مقدار اولیه را x_0 می‌نامیم.

$$\hat{L} = f(\hat{x}) \xrightarrow{\text{خطی می‌کنیم}} \hat{L} = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{x}}\right|_{\hat{x}=x_0} (\hat{x} - x_0) \quad \text{(I)} \quad , \quad f(x_0) = L^c_{n\times 1} \quad \text{(مشاهدات محاسباتی)}$$

$$\text{فرض} \longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{x}}\right|_{\hat{x}=x_0} = A_{n\times u} \quad , \quad \delta\hat{L}_{n\times 1} = \hat{L} - f(x_0) = L - L^c \quad , \quad \hat{x} - x_0 = \delta\hat{x}_{n\times 1}$$

$$\hat{L} - f(x_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{x}}\right|_{\hat{x}=x_0} (\hat{x} - x_0) \longrightarrow \text{(II)} \quad \delta\hat{L} = A\delta\hat{x} \longrightarrow \delta_L + \hat{v} = A\delta\hat{x}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \delta\hat{L} = \delta_L + \hat{v} = A_{n\times u}\delta\hat{x} \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow min \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{\hat{L}} = A_{n\times u}\,\delta_{\hat{x}} \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow \min \end{cases} \longrightarrow$$

با توجه به مدل یا ماتریس خطی

$$\rightarrow \delta_{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P\, \delta_L$$

$$\rightarrow \hat{v} = A\,\delta_{\hat{x}} - \delta_L$$

$$\rightarrow \hat{L} = L + \hat{v} = A\,\delta_{\hat{x}} + L - \delta_L = A\,\delta_{\hat{x}} + L^c$$

$$\Rightarrow \hat{x} = x_0 + \delta_{\hat{x}}$$

① $\Sigma_{\delta_{\hat{x}}\delta_{\hat{x}}} = \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = J_{\delta_{\hat{x}}\delta_L}\, \Sigma_{\delta_L\delta_L}\, J^T_{\delta_{\hat{x}}\delta_L} = (A^TPA)^{-1}A^TP\,\Sigma_{\delta_L\delta_L}\,PA(A^TPA)^{-1}$, $\Sigma_{\delta_L\delta_L} = \Sigma_{LL}$

$= \delta_0^2 P^{-1} \longrightarrow \Sigma_{\delta_{\hat{x}}\delta_{\hat{x}}} = \delta_0^2 (A^TPA)^{-1}A^TPA(A^TPA)^{-1} = \delta_0^2 (A^TPA)^{-1}$

② $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = \delta_0^2 \left(P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T\right)$

③ $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \delta_0^2 A(A^TPA^{-1})A^T$, $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} - \Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$

برای بدست آوردن ماتریس ها برآورد δ_0^2 را به $\hat{\delta}_0^2$ تبدیل می کنیم.

درجه آزادی : $df =$ معادلات $-$ مجهولات $+ K$

$$\hat{\delta}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{df}$$

مقدار K در این مدل نیز به دلیل اینکه $r(A) = u$ برابر صفر می باشد.

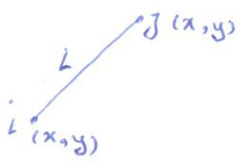
روند تکرار :

با استفاده از سرشکنی $\delta_{\hat{x}}$ معلوم میشود $\hat{x} = \delta_{\hat{x}} + x_0 \rightarrow x^0_{new} = \hat{x} \rightarrow$ دوباره سرشکنی

تغییرات در ΔL و A

انواع مشاهدات :

۱) طول : فرض کنید که مختصات نقاط i و j مجهول باشد و طول بین آنها مشاهده شده است.



$$\rightarrow \hat{L}_{ij} = \sqrt{(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_j - \hat{y}_i)^2} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \\ x_{0j} \\ y_{0j} \end{bmatrix}$$

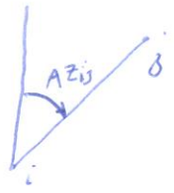
$$\left.\frac{\partial L_{ij}}{\partial \hat{x}_i}\right|_{\hat{x}=x_0} = \frac{-(x_{0j} - x_{0i})}{\sqrt{(x_{0j}-x_{0i})^2 + (y_{0j}-y_{0i})^2}} = \frac{-(x_{0j}-x_{0i})}{L_{ij_0}}$$

بقیه هم بطریق مشابه بدست می آیند $\leftarrow$

$$\left.\frac{\partial L_{ij}}{\partial \hat{y}_i}\right|_{\hat{x}=x_0} = ?$$

$$\left.\frac{\partial L_{ij}}{\partial \hat{x}_j}\right|_{\hat{x}=x_0} = ? \qquad \left.\frac{\partial L_{ij}}{\partial \hat{y}_j}\right|_{\hat{x}=x_0} = ?$$

2) آزیموت : مختصات ناوی مجهول و آزیموت امتداد ij مشاهده شده است .

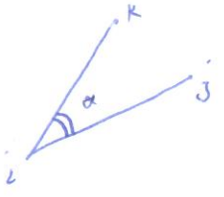


$$\hat{AZ} = tg^{-1}\frac{\hat{x}_j - \hat{x}_i}{\hat{y}_j - \hat{y}_i} \pm K\pi \quad , \; x_0 = \begin{bmatrix} x_{0i} \\ y_{0i} \\ x_{0j} \\ y_{0j} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

مشتقات هم باید به همین ترتیب باشند

$$\frac{\partial \hat{AZ}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{-(y_{0j} - y_{0i})}{(x_{0j} - x_{0i})^2 + (y_{0j} - y_{0i})^2} = \frac{-(y_{0j} - y_{0i})}{L_{ij_0}^2}$$

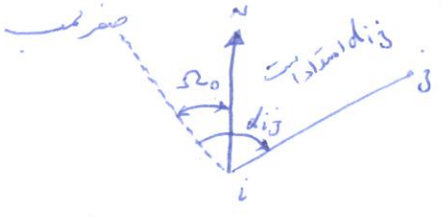
3) زاویه : فرض کنید مختصات نقاط ناوی و K مجهول است و زاویه بین آنها قرائت شده است .



$$\hat{\alpha} = tg^{-1}\frac{\hat{x}_K - \hat{x}_i}{\hat{y}_K - \hat{y}_i} - tg^{-1}\frac{\hat{x}_j - \hat{x}_i}{\hat{y}_j - \hat{y}_i} \pm K\pi$$

$$x_0 = [x_{0i} \;\; y_{0i} \;\; x_{0j} \;\; y_{0j} \;\; x_{0K} \;\; y_{0K}]^T$$

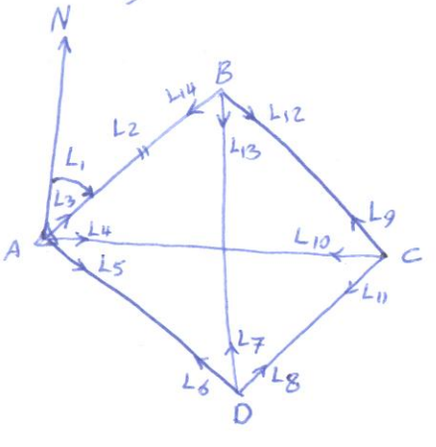
4) امتداد : مختصات ij ناوی مجهول و امتداد مشاهده شده است .



$$\hat{d}_{ij} = \hat{AZ}_{ij} + \hat{\Omega}_0 \pm K\pi$$

مثال :

طول و آزیموت AB و مختصات A معلوم است . نوشتن معادلات و درجه آزادی مطلوب میباشد



14 معادله و 6 مجهول مختصات و 4 تا Ω_0 به ازای 4 ایستگاه

$$df = 14 - 6 - 4 = 4$$

$$\hat{L}_1 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_B - \hat{x}_A}{\hat{y}_B - \hat{y}_A} \pm K\pi$$

$$\hat{L}_2 = \sqrt{(\hat{x}_B - \hat{x}_A)^2 + (\hat{y}_B - \hat{y}_A)^2}$$

$$\hat{L}_3 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_B - \hat{x}_A}{\hat{y}_B - \hat{y}_A} + \hat{\Omega}_0 \pm K\pi$$

$\hat{L}_4 = \ldots$

$\hat{L}_5 = \ldots$

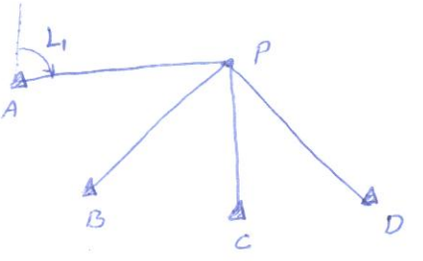
$\vdots$

$\hat{L}_{14} = \ldots$

سه‌شکلی

مثال:

برای تعیین مختصات نقطه P از چهار نقطه A, B, C, D مشاهدات به صورت زیر انجام شده است. درصورتی که مشاهدات مستقل و با انحراف معیار 5" اندازه‌گیری شده باشند، مختصات، صحت‌یات، مشاهدات تصحیح شده و فاکتور واریانس ثانویه را بیابید.



A (6091.13, 3631.61)

B (5973.88, 1561)

C (6947.21, 178.43)

D (7597.31, 2063.49)

$L_1 = 126^\circ\ 3'\ 26''$ $\qquad L_3 = 11^\circ\ 13'\ 10''$

$L_2 = 53^\circ\ 22'\ 37''$ $\qquad L_4 = 344^\circ\ 41'\ 38''$

تبدیل به رادیان $\longrightarrow$ $L_1 = 2.201$ $\quad L_2 = .931$ $\quad L_3 = .195$ $\quad L_4 = 6.016$

$$df = 4 - 2 = 2 \longrightarrow \begin{cases} x_{0P} = 7437 \\ y_{0P} = 2648 \end{cases}$$

$$\hat{L}_1 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_P - x_A}{\hat{y}_P - y_A} \pm K\pi \qquad \hat{L}_3 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_P - x_C}{\hat{y}_P - y_C} \pm K\pi$$

$$\hat{L}_2 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_P - \hat{x}_B}{\hat{y}_P - y_B} \pm K\pi \qquad \hat{L}_4 = tg^{-1}\frac{\hat{x}_P - x_D}{\hat{y}_P - y_D} \pm K\pi$$

$$\delta\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P\, \delta_L \quad , P = \delta_0^2 \Sigma_{LL}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} \quad , \delta_L = L - L^c = \begin{bmatrix} .35 \\ -.23 \\ .026 \\ .53 \end{bmatrix} \times 10^{-3}\ rad$$

$$\hat{V} = A\,\delta\hat{x} - \delta_L$$

$$A = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -35 & -48 \\ 32 & -44 \\ 28 & -7 \\ .59 & 43 \end{bmatrix} \longrightarrow \delta\hat{x} = \begin{bmatrix} .167 \\ .633 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{x} = x_0 + \delta\hat{x} = \begin{bmatrix} 7437.167 \\ 2648.623 \end{bmatrix} \quad , \hat{V} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0.097 \\ 0.105 \\ -0.098 \\ -0.019 \end{bmatrix}$$

مدل ترکیبی:

اگر نتوان به ازای هر مشاهده یک معادله نوشت به عبارت دیگر اگر معادلات زیادی به مجهولات صریح باشند نه نسبت به مشاهدات

در این صورت مدل ترکیبی خواهیم داشت

خطی $A\hat{x} + B\hat{L} + W = 0 \longrightarrow A_{r\times u}, \hat{x}_{u\times 1}, B_{r\times n}, \hat{L}_{n\times 1}, W_{r\times 1}$

غیرخطی $f(\hat{x}, \hat{L}) = 0 \longrightarrow f_{r\times 1}$, $u \le r \le n$

حل:

$$\begin{cases} f(\hat{x},\hat{L}) = 0 \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow \min \end{cases}$$

یکی از روشهای حل مسئله خطی کردن معادله $f(\hat{x},\hat{L})$ میباشد. بدلیل اینکه این معادله نه نسبت به مجهولات و نه نسبت به مشاهدات صریح است و غیرخطی میباشد نیاز به مقدار اولیه برای مجهولات و مشاهدات خواهیم داشت. این مقادیر را با (x_0, L_0) نمایش میدهیم. بهترین مقدار برای L همان مقدار مشاهدات یعنی L میباشد.

$$f(\hat{x},\hat{L}) = f(x_0, L) + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{x}}\right|_{(\hat{x},\hat{L})=(x_0,L)} (\hat{x} - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{L}}\right|_{(\hat{x},\hat{L})=(x_0,L)} (\hat{L} - L)$$

فرض $f(x_0, L) = w_{r\times 1}$, $\frac{\partial f}{\partial \hat{x}} = A_{r\times u}$, $\frac{\partial f}{\partial \hat{L}} = B_{r\times n}$, $\hat{x} - x_0 = \delta\hat{x}$, $\hat{L} - L = \hat{v}$

$$\longrightarrow \begin{cases} A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w = 0 \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow \min \end{cases} \qquad \begin{cases} r(A) = u \\ r(B) = r = \text{همواره برقرار باشد} \end{cases}$$

یکی از روش های حل این مسئله روش لاگرانژی باشد.

$$\Phi = \hat{v}^T P \hat{v} - 2\lambda^T (A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w) \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{v}} = 2\hat{v}^T P - 2\lambda^T B = 0 \qquad ① \; P\hat{v} - B^T\lambda = 0 \quad \text{معادله } n$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta\hat{x}} = -2\lambda^T A = 0 \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{ترانسپوز گیری}} ② \; A^T\lambda = 0 \quad \text{معادله } u$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -2(A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w)^T = 0 \qquad ③ \; A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w = 0 \quad \text{معادله } r$$

$\lambda_{r\times 1}$

$\hat{v}_{n\times 1}$

$(\delta\hat{x})_{u\times 1}$

تعداد مجهولات $= r + n + u$

تعداد معادلات $= r + n + u$

برای حل دستگاه فوق از روش جایگزینی مستقیم استفاده می کنیم.

$$① \rightarrow \hat{v} = P^{-1}B^T\lambda \; ④$$

$$④ \rightarrow ③ \Rightarrow A\,\delta\hat{x} + B(P^{-1}B^T\lambda) + w = 0 \Longrightarrow \lambda = -(BP^{-1}B^T)^{-1}(A\,\delta\hat{x} + w) = -M^{-1}(A\,\delta\hat{x} + w) \; ⑤$$

$$⑤ \rightarrow ② \Rightarrow -A^T M^{-1} A\,\delta\hat{x} - A^T M^{-1} w = 0 \longrightarrow \delta\hat{x} = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} w$$

که $w = f(x_0, L)$

$\delta\hat{x} = \hat{x} - x_0$

$\hat{v} = \hat{L} - L$

$$\lambda = -M^{-1}(A\delta_{\hat{x}} + w) = -M^{-1}(-A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w + w) = -M^{-1}(I - A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1})w$$

$$\hat{v} = P^{-1}B^T\lambda = -P^{-1}B^TM^{-1}(I - A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1})w$$

$$\Sigma_{\delta_{\hat{x}}\delta_{\hat{x}}} = \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = J_{\delta_{\hat{x}}w}\,\Sigma_{ww}\,J_{\delta_{\hat{x}}w}^T = -(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}\,\Sigma_{ww}\,(-M^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1})$$

$$w = f(x_0, L) \longrightarrow \Sigma_{ww} = \frac{\partial f}{\partial L}\Sigma_{LL}\frac{\partial f}{\partial L}^T = B\Sigma_{LL}B^T = \sigma_0^2 BP^{-1}B^T = \sigma_0^2 M$$

$$\Rightarrow \Sigma_{\delta_{\hat{x}}\delta_{\hat{x}}} = \sigma_0^2(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}MM^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1} = \sigma_0^2(A^TM^{-1}A)^{-1}$$

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = ? \quad , \quad \Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = ? \quad , \quad \Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \Sigma_{LL} - \Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$$

در چه صورت مدل ترکیبی تبدیل به پارامتریک غیرخطی می‌شود:

در مدل غیرخطی $\delta_{\hat{L}} = A\delta_{\hat{x}} \longrightarrow A\delta_{\hat{x}} - \delta_{\hat{L}} = 0 \longrightarrow A\delta_{\hat{x}} - \hat{v} - \delta_L = 0 \longrightarrow \begin{cases} B = -I \\ w = -\delta_L \end{cases}$

$df =$ تعداد معادلات $-$ تعداد مجهولات $+ K = 3 - 4 + 0 = 3 - 4$

$K \leftarrow r(A) = 4$ در مدل ترکیبی برابر صفر می‌باشد.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^TP\hat{v}}{df} = \frac{\hat{v}^TP\hat{v}}{3-4}$$

در روند تکرار $\delta_{\hat{x}} \longrightarrow \hat{x} = x_0 + \delta_{\hat{x}} \longrightarrow x_0^{new} = \hat{x}$

اگر مدل ترکیبی $f(\hat{x}, \hat{L}) = 0$ حول نقطهٔ (x_0, L) ـ (L مقدار مشاهدات و x_0 مقدار اولیه مجهولات) ـ خطی شده و بایستی لزومی برای update کردن مشاهدات نیست یعنی مشاهدات را در روند تکرار دخالت نمی‌دهیم.

1) $\hat{L}$ ها (مشاهدات) به $\hat{x}$ ها (مجهولات) وابسته‌اند پس دخالت دادن یکی کافی است.

2) با توجه به اینکه تابع $\hat{v}^TP\hat{v}$ مینیمم می‌شود، مقادیر باقیمانده بسیار نزدیک به $\hat{L}$ می‌باشند و با توجه به اینکه $\hat{L}$ ها نقطهٔ همگرایی معادلات هستند بنابراین خطی کردن حول یک فاصلهٔ دیفرانسیلی صورت می‌گیرد. بنابراین نیازی به تکرار ندارند.

3) اگر مشاهدات را update کنیم نیاز به ماتریس وزن جدید است که این خود مسئله‌ساز است.

4) هدف ما تعیین مجهولات است با توجه به مشاهدات اصلی و چون تغییر مشاهدات مشکل را تغییر می‌دهد، هدف برآورده نخواهد شد، یعنی

سه شکلی

می‌خواهیم تنسور متریک شبکه را تعیین کنیم.

در مدل پارامتر تک خطی:

$$\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = \delta_0^2 A \underbrace{(A^T P A)^{-1}}_{P.D} A^T$$

if $n > u \rightarrow \Sigma_{\hat{L}\hat{L}}$ is singular

$r(\Sigma_{\hat{L}\hat{L}}) = r(A) = u < n$

if $n = u \rightarrow \Sigma_{\hat{L}\hat{L}}$ is not singuler ممکن است وارون پذیر باشد

$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} \longrightarrow$ است singular همواره

می‌خواهیم تست کنیم $E\left(\frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{r-u}\right) = \delta_0^2$:

$$\hat{v} = P^{-1} B^T \lambda = -P^{-1} B^T M^{-1} (I - A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w$$

$$\rightarrow \hat{v}^T P \hat{v} = w^T (I - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T) \underbrace{M^{-1} B P^{-1} \underbrace{P P^{-1}}_{I} B^T M^{-1}}_{I} (I - A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w =$$

$$w^T (I - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T) M^{-1} (I - A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w = w^T \Big[M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} -$$

$$M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} + M^{-1} A \underbrace{(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} A}_{I} (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \Big] w =$$

$$w^T \Big[M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} \Big] w$$

$$\Rightarrow Tr(\hat{v}^T P \hat{v}) = \hat{v}^T P \hat{v} = Tr\left[w^T (M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w \right] = Tr\left[(M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w w^T \right] \Rightarrow$$

امید گیری از طرفین $\Rightarrow E(\hat{v}^T P \hat{v}) = Tr\left[E\left[(M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) w w^T \right] \right] = Tr\left[(M^{-1} - M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1}) E(w w^T) \right]$ (I)

$$* \ \Sigma_{ww} = E\left[(w - E(w))(w - E(w))^T \right] = E(w w^T) - E(w) E(w^T)$$

$$\rightarrow \begin{cases} E(w w^T) = \Sigma_{ww} + E(w) E(w^T) \\ \Sigma_{ww} = \delta_0^2 M \end{cases}$$

$$A \delta_{\hat{x}} + B \hat{\gamma} + w = 0 \longrightarrow E(A \delta_{\hat{x}} + B \hat{\gamma} + w) = A E(\delta_{\hat{x}}) + B E(\hat{\gamma}) + E(w) = 0 \rightarrow A \delta_x + 0 + E(w) = 0$$

$$\rightarrow E(w) = -A \delta_x^* \quad , \longrightarrow E(w^T) = -\delta_x^T A^T$$

$\Rightarrow$ نتایج بدست آمده را در معادله (I) جایگذاری می‌کنیم

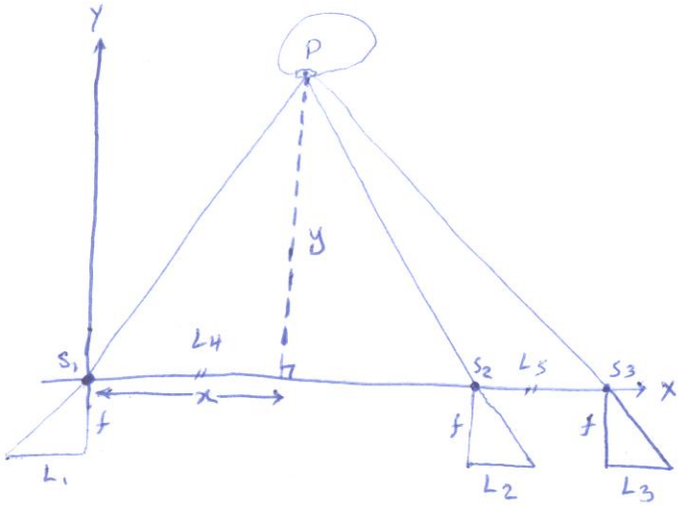
$$E[\hat{v}^T P \hat{v}] = Tr\left[\left[(M^{-1} - M^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}\right](\sigma_0^2 M + A\delta_x\delta_x^T A^T)\right] = Tr\Big[\sigma_0^2\underbrace{(M^{-1}M)}_{I} - \sigma_0^2 M^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^T\underbrace{M^{-1}M}_{I}$$

$$+M^{-1}A\delta_x\delta_x^TA^T - \underbrace{M^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}A}_{I}\delta_x\delta_x^TA^T\Big] = \sigma_0^2\, Tr\underbrace{(M^{-1}M)}_{I_{r\times r}} - \sigma_0^2\, Tr(M^{-1}A(A^TM^{-1}A)^{-1}A^T) =$$

$$\sigma_0^2 r - \sigma_0^2\, Tr(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}A = \sigma_0^2(r-u) \longrightarrow E(\hat{v}^TP\hat{v}) = \sigma_0^2(r-u) \rightarrow E\left(\frac{\hat{v}^TP\hat{v}}{r-u}\right) = \sigma_0^2$$

مثال:

شکل زیر حالت ساده‌ای از فتوگرامتری زمینی را نشان می‌دهد که از سه ایستگاه S_1, S_2, S_3 سه عکس از شیئی مورد نظر تهیه شده است. (ایستگاه‌ها طوری انتخاب شده‌اند که روی خط مستقیم قرار دارند و راستای نوری هر سه دوربین موازی هم و عمود بر ایستگاه‌گذاری فرض شود). برای تعیین مختصات نقطه‌ای مانند P مشاهدات زیر انجام شده‌اند. در صورتی که فاصله کانونی دوربین $f=100\ mm$ باشد مطلوبست مختصات P در سیستم مختصات شکل؟ (مشاهدات مستقلند)



$f = 100\ mm$

$L_1 = 16.5 \pm .1\ mm$

$L_2 = 3.8 \pm 0.1\ mm$

$L_3 = 20.4 \pm .0.1\ mm$

$L_4 = 10m \pm 5cm$

$L_5 = 8m \pm 5cm$

حل: با استفاده از تالس

$$\frac{\hat{L}_1}{\hat{x}} = \frac{f}{\hat{y}} \rightarrow \hat{L}_1\hat{y} - f\hat{x} = 0$$

$$\frac{\hat{L}_2}{\hat{L}_4 - \hat{x}} = \frac{f}{\hat{y}} \rightarrow \hat{L}_2\hat{y} - \hat{L}_4 f + f\hat{x} = 0$$

$$\frac{\hat{L}_3}{\hat{L}_4 + \hat{L}_5 - \hat{x}} = \frac{f}{\hat{y}} \rightarrow \hat{L}_3\hat{y} - f\hat{L}_4 - f\hat{L}_5 + f\hat{x} = 0$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \delta_{\hat{x}} = -(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w \quad , P = \sigma_0^2\Sigma_{LL}^{-1} = diag\left(\frac{1}{.1^2}, \frac{1}{.1^2}, \frac{1}{.1^2}, \frac{1}{50^2}, \frac{1}{50^2}\right)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \hat{L}}\Big|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{L}=L}} , A = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}}\Big|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{L}=L}} \rightarrow \begin{cases} y_0 = \dfrac{fL_4}{L_1+L_2} = \dfrac{100\times 10000}{20.3} \simeq 50000 \\ x_0 = \dfrac{L_1 y_0}{f} = 8250 \end{cases}$$

$$w = f(x_0, L) = \begin{bmatrix} L_1 y_0 - f(x_0) \\ L_2 y_0 - fL_4 + fx_0 \\ L_3 y_0 - fL_5 - fL_4 + fx_0 \end{bmatrix}_{3\times1 = r\times1}$$

انواع مجهولات :

۱- مجهولات قابل برآورد Estimatable

2- مجهولات غیرقابل برآورد inEstimatable

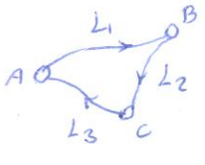
۱- مجهولاتی هستند که با استفاده از مدل ریاضی و معادلات آن بدست می آیند. بدون اینکه نیاز به تعریف قید یا کمیت دیگر باشد به عبارت دیگر مجهولات قابل برآورد به صورت ترکیب خطی از مشاهدات می توانند نوشته شوند. مثلاً در مدلهای پارامتریک و ترکیبی مجهولات قابل برآورد هستند.

$$\hat{L} = A\hat{x} \longrightarrow \hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

2- مجهولاتی هستند که با استفاده از مدل ریاضی و معادلات آن قابل برآورد نیستند و نیاز به اضافه کردن یک سری از کمیت ها یا قیود دیگر هستند تا بتوان مجهولات را بدست آورد. کمیتی که باعث میشود که در یک مدل ریاضی مجهولات غیرقابل برآورد داشته باشیم defect میباشد که انواع آن به شرح زیر می باشد :

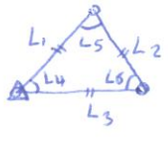
۱- datumdefect : (d.defect)

اگر برای شبکه‌ای با توجه به مجهولات سیستم مختصات تعریف نشده باشد در آن شبکه ما مجهولات غیرقابل برآورد خواهیم داشت. به عبارت دیگر عدم تعریف سیستم مختصات برای شبکه، شبکه را دچار defect خواهد کرد.



d.defect = 1

برای آن سیستم ارتفاعی تعریف نشده و آزادانه میتواند به بالا و پایین حرکت کند. برای رفع این مشکل لازم است ارتفاع یک نقطه را داشته باشیم.



datumdefect = 1

برای این سیستم مختصات جهت تعریف نشده است.

اگر شبکه‌ای دو بعدی و مجهولات مختصات باشند نیاز به ۴ پارامتر داریم :

۱- انتقال x 2- انتقال y 3) انتقال مقیاس 4- دوران

سه‌شکنی

اگر شبکه ما ارتفاعی باشد نیاز به تعریف یک پارامتر است ← انتقال z

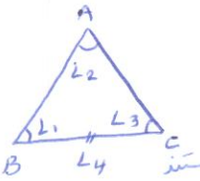
اگر شبکه ما 3 بعدی باشد و مجهولات مختصات، نیاز به تعریف 7 پارامتر داریم:

1- انتقال x　　4- دوران x　　7- مقیاس

2- انتقال y　　5- دوران y

3- انتقال z　　6- دوران z

تعداد پارامترهای لازم برای تعریف سیستم مختصات (تعداد متغیرها)، تعداد d.defect شبکه را نشان می‌دهد و اکثرا با d نشان می‌دهند.

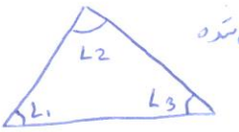


مصطحی → $d = 3$ → 0 = مقیاس

مجهولات مختصات هستند

1 = دوران

2 = انتقال



مجهولات زوایای پرشکل شده → $d = 0$

می‌باشد

درحقیقت defect های را در شبکه در نظر می‌گیریم که روی مجهولات ما تأثیر بگذارند.

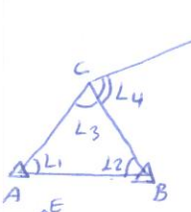
از نظر ریاضی ما وجود defect داریم:

$$r(A) = r(A^T P A) = r(A^T M^{-1} A) = U - d$$

پارامتریک خطی　　پارامتریک غیرخطی　　مدل ترکیبی

2- configuration defect (c.defect):

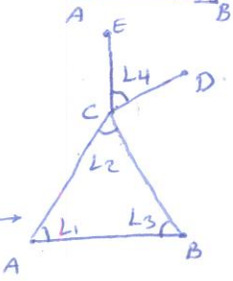
اگر شکل شبکه با توجه به مشاهدات ثابت نباشد به عبارت دیگر تغییر شکل دهد، شبکه دچار c.defect خواهد بود. در شبکه‌هایی که دچار c.defect هستند مشاهدات برای حل تمام مجهولات کافی نیستند. در شبکه‌ای که c دارد مجهولات غیرقابل برآورد خواهیم داشت. تعداد پارامترهای لازم برای ثابت کردن شبکه تعداد c.defect خواهد بود و با c نمایش می‌دهند.



مجهولات = مختصات C و D

$d = 0$

$c = 1$

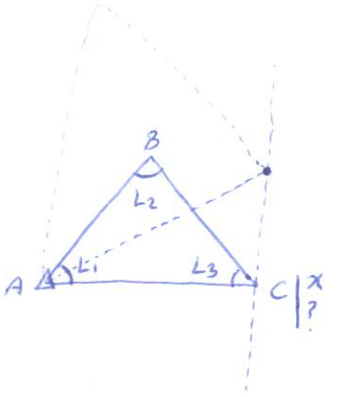


$c = 3$

$d = 4$

هدف محاسبه مختصات است →

سه‌شکلی



اگر لبه‌ی ؟ اضافه شود شکل حل می‌شود.

$d=1$

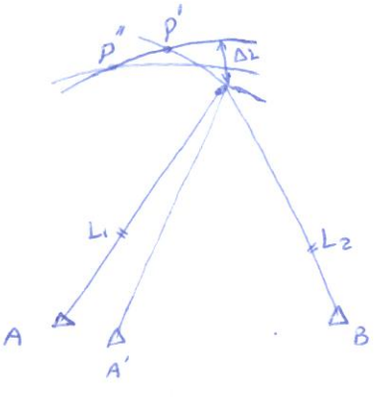
$c=0$

در c.defect از نظر ریاضی برای مقادیر اولیه دچار مشکل هستیم

$$df = \text{تعداد مجهولات} - \text{تعداد معادلات} + k \Longrightarrow k = c + d$$

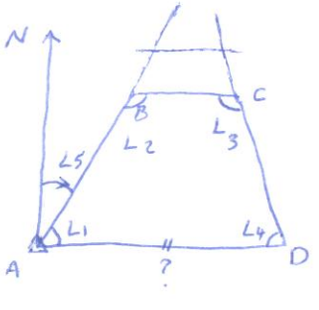
: I-defect 13

این defect در فضای مسطح ریاضی مطرح نمی‌شود و در فضای فیزیکی مطرح است. به عبارت دیگر اگر مشاهدات در فضای ریاضی باشند و بدون خطا i-defect نخواهیم داشت و d-defect i در جایی مطرح می‌شود که مشاهدات آلوده به خطا می‌باشند، اگر در شبکه‌ای مشاهدات اشتباه وجود داشته باشد یکی از عواملی که باعث می‌شود این خطا روی مجهولات اثر زیادی داشته باشد، شکل شبکه است.



فرض کنید مختصات A و B معلوم است. اگر شبکه‌ای دچار d-def i باشد شبکه دارای مجهولات غیرقابل برآورد نیست ولی به واسطه‌ی وجود خطا در مشاهدات مجهولات با خطای زیادی محاسبه می‌شوند

مثال:



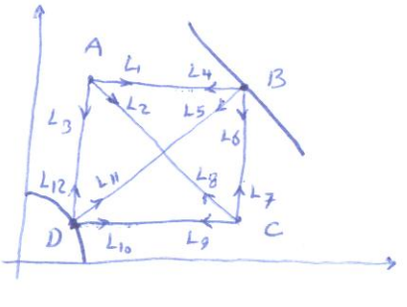
در شبکه‌ی مسطحاتی روبرو جهت تعیین مختصات B، C و D مشاهدات انجام شده مطلوبست c.defect و d-dect شبکه، df؟

$$\left.\begin{array}{l} d=1 \rightarrow \text{متقارن} \\ c=1 \end{array}\right\} df = 5 - 6 + 1 + 1 = 1$$

مثال:

نقطه‌ی D روی دایره و B روی خط است. مشاهدات L_1 و ... و L_{12} (۱۲ مورد) قرائت شده‌اند

مطلوبست تعیین درجه‌ی آزادی شبکه؟



اگر به D یا B یک x نسبت دهیم با توجه به روی خط و دایره بودن ؟ نیز مشخص می‌شود و شکل ثابت می‌شود

$$df = 14 - 8 - 4 + 2 = 4$$

Ω_0

سه شکنی

مدل شرط:

اگر هدف در شبکه‌ها محاسبهٔ مشاهدات برآورد شده ($\hat{L}$) باشد، می‌توانیم به جای اینکه ابتدا از ($\delta_{\hat{x}}$) $\hat{x}$ استفاده کنیم و سپس $\hat{L}$ را بدست آوریم، به طور مستقیم $\hat{L}$ را بدست آوریم. مدلی که برای این منظور استفاده می‌شود، مدل شرط نامیده می‌شود. مدلی که فقط بین مشاهدات است و هیچگونه مجهولی در آن به کار نرفته است.

یک حسن دیگری که این مدل دارد این است که برای تعیین $\hat{L}$ اگر شبکه‌ای دچار defect باشد دیگر نمی‌توانیم $\hat{x}, \delta_{\hat{x}}$ را بدست آوریم ولذا نمی‌توانیم $\hat{L}$ را محاسبه نماییم ولی با توجه به اینکه مدل شرط هیچ مجهولی در آن به کار نرفته است، نیاز به تعریف datum (سیستم مختصات) ندارد. لذا d.defect نخواهد داشت (d.d برای این مدل معنا ندارد)

مدل شرط می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد:

$$\begin{cases} B_{r\times n} L_{n\times 1} + w_{r\times 1} = 0 & \text{خطی} \\ f_{r\times 1}(L_{n\times 1}) = 0 & \text{غیرخطی} \end{cases}$$

برای مدل شرط مدل کلی $f(\hat{L})=0$ را در نظر می‌گیریم. یکی از راه‌های حل مدل $f(\hat{L})$ خطی کردن آن است.

$$f(\hat{L})=0 \longrightarrow f(\hat{L}) = f(\hat{L})\Big|_{\hat{L}=L} + \frac{\partial f}{\partial \hat{L}}\Big|_{\hat{L}=L}(\hat{L}-L) = 0 \quad ; \quad f(\hat{L})\Big|_{\hat{L}=L} = w_{r\times 1} \,,\ \frac{\partial f}{\partial \hat{L}}\Big|_{L=\hat{L}} = B_{r\times n}$$

$$,\ \hat{L}-L = \hat{v}_{n\times 1} \qquad \Rightarrow w + B\hat{v}_{n\times 1} = 0 \longrightarrow \boxed{r<n}$$

دستگاه فوق یک دستگاه ناقص است ولی بی‌نهایت جواب دارد. هدف تعیین یک جواب از بی‌نهایت جواب است

$$\begin{cases} B\hat{v} + w = 0 \\ \hat{v}^T P \hat{v} \longrightarrow \min \end{cases}$$

یکی از راه‌های حل معادلهٔ فوق استفاده از روش لاگرانژ است.

$$\Phi = \hat{v}^T P \hat{v} - 2\lambda^T (B\hat{v} + w)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \hat{v}} = 2\hat{v}^T P - 2\lambda^T B = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -2(B\hat{v}+w)^T = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ① \ P_{r\times n}\hat{v}_{n\times 1} - B^T_{n\times r}\lambda_{r\times 1} = 0 & \longrightarrow \text{مجهول } n+r \\ ② \ B_{r\times n}\hat{v}_{n\times 1} + w_{r\times 1} = 0 & \longrightarrow r \text{ معادله} \end{cases}$$

یکی از روش‌های حل جایگزینی مستقیم است

$$① \longrightarrow \hat{v} = P^{-1}B^T\lambda \ ③$$

$$③ \to ② \Rightarrow BP^{-1}B^T\lambda + w = 0 \longrightarrow \lambda = -(BP^{-1}B^T)^{-1}w = -M^{-1}w \longrightarrow \hat{v} = -P^{-1}B^T M^{-1} w$$

$$\hat{L} = L + \hat{v}$$

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = J_{\hat{v}w}\,\Sigma_{ww}\,J_{\hat{v}w}^T = P^{-1}B^TM^{-1}\Sigma_{ww}M^{-1}BP^{-1} = P^{-1}B^TM^{-1}(\sigma_0^2\underbrace{M}_{I})M^{-1}BP^{-1} =$$

$$\sigma_0^2 P^{-1}B^TM^{-1}BP^{-1}$$

با توجه به اینکه ماتریس های M^{-1} و P^{-1} p.d هستند (داریم $r(\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}) = r(B) = r$ ؛

و چون $r<n$ لذا $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$ همواره singular است.

نکته:

* $\hat{v}$ و $\hat{L}$ بدست آمده از مدل شرط با $\hat{v}$ و $\hat{L}$ بدست آمده از مدل های پارامتریک و ترکیبی برابر خواهد بود.
* $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$ و $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}}$ بدست آمده از مدل شرط با $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$ و $\Sigma_{\hat{L}\hat{L}}$ بدست آمده از مدل های پارامتریک و ترکیبی برابر خواهد بود
* همواره و بدون هیچ استثنایی به تعداد درجه آزادی میتوانیم مدل شرط تشکیل دهیم.

$df = r$ (تعداد معادلات شرط) = تعداد معادلات − تعداد مجهولات + $d + c$

* اگر مدل شرط حول مشاهدات خطی شد نیاز به تکرار نخواهد بود.

بعد از تکرار اول $\hat{L} = L_{new} \rightarrow w_{new} = f(L_{new}) \simeq 0 \rightarrow$ نیاز به تکرار نداریم.

پارامتریک خطی $\hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TPL$

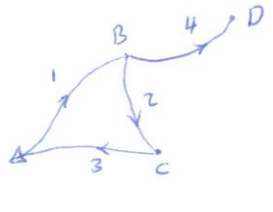
پارامتریک غیرخطی $\delta\hat{x} = (A^TPA)^{-1}A^TP\delta_L$

ترکیبی $\delta\hat{x} = -(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w$

$r(A) = u$ دارد نهای چپ A

مدل شرط $\hat{v} = -P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}w \rightarrow r(B) = r \rightarrow$ دارد نهای راست B

مثال:



در شبکه ترازیابی روبرو هدف تعیین ارتفاع نقاط B و C و D است $(P=I)$ مطلوبست مشاهدات سرشکن شده.

$H_A = 100$ معلوم

$L_1 = 1^m$

$L_2 = 2m$

$L_3 = -3.03$

$L_4 = 5$

$df = 4 - 3 + 0 + 0 = 1 \leftarrow$

$\rightarrow \hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 = 0 \rightarrow w = f(\hat{L})\big|_{\hat{L}=L} = 1 + 2 - 3.03 = -0.03$

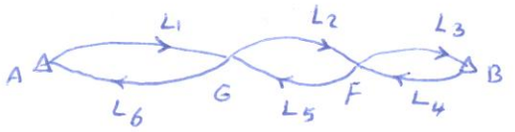
$$B = \frac{\partial f}{\partial \hat{L}} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

$$\hat{v} = \frac{0.03}{3} = .01 \rightarrow \hat{v} = \frac{0.03}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = [0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0]^T$$

$$\rightarrow \hat{L} = L + \hat{v} = [1.01 \quad 2.01 \quad -3.02 \quad 5]$$

سرشکنی

مثال :



شبکه ترازیابی روبرو به صورت رفت و برگشت مدنظر است مطلوبست مشاهدات سرشکن شده و مجهولات

$h_A = 100$ $\quad L_1 = 1m$ $\quad L_2 = 2m$ $\quad L_3 = 3.3\,m$

$h_B = 106$ $\quad L_4 = -3.2$ $\quad L_5 = -2.1$ $\quad L_6 = -1$

$\rightarrow df = 6 - 2 = 4$

$\rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

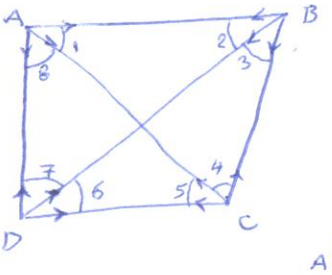
روش پارامتریک ← برای مجهولات

$$\hat{L}_1 = \hat{h}_G - h_A$$
$$\hat{L}_2 = \hat{h}_F - \hat{h}_G$$
$$\hat{L}_3 = h_B - \hat{h}_F$$
$$\hat{L}_4 = \hat{h}_F - h_B$$
$$\hat{L}_5 = \hat{h}_G - \hat{h}_F$$
$$\hat{L}_6 = h_A - \hat{h}_G$$

روش مشروط : ←

$$\begin{cases} \hat{L}_1 + \hat{L}_6 = 0 \\ \hat{L}_2 + \hat{L}_5 = 0 \\ \hat{L}_3 + \hat{L}_4 = 0 \\ \hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 - (h_B - h_A) = 0 \end{cases}$$

مثال : امتدادها مشخص شده اند



$$df = \underset{\text{امتدادها}}{12} - \underset{\Omega_0}{4} - \underset{\text{مختصات}}{8} + \underset{d.d}{4} + \underset{c.d}{0} = 4$$

$$A\overset{\triangle}{B}C : a_1 + \cdots + a_4 - 180 = 0$$

$$B\overset{\triangle}{C}D : a_3 + \cdots + a_6 - 180 = 0$$

$$A\overset{\triangle}{D}C : a_5 + \cdots + a_8 - 180 = 0$$

$$\frac{\sin a_1 \sin a_3 \sin a_5 \sin a_7}{\sin a_2 \sin a_4 \sin a_6 \sin a_8} - 1 = 0$$

مدل با کاستترین تابعی :

$$\begin{cases} \underset{r\times 1}{f}(\hat{x}, \hat{L}) = 0 & u \leq r \leq n \\ \underset{s\times 1}{g}(\hat{x}) = 0 & s \leq u \end{cases}$$

میخواهیم دو مدل روبرو را باهم سرشکن کنیم. فرض کنید مدل اول بدون نیاز به مدل دوم و بطور مستقل قابل حل باشد (مثل اندازه) قابل ذکر است که معادلات $g(\hat{x}) = 0$ برای رفع defect می باشد.

با استفاده از خطی سازی خواهیم داشت

$$\begin{cases} A_{r\times u}\,\delta\hat{x}_{u\times 1} + B_{r\times n}\,\hat{v}_{n\times 1} + w_{r\times 1} = 0 & u \le r \le n \quad , r(A)=u \quad , r(B)=r \\ A_{f\,s\times u}\,\delta\hat{x}_{u\times 1} + w_{f\,s\times 1} = 0 & s \le u \quad r(A_f)=s \end{cases}$$

معادلات فوق به مدل با کلاسترین تابعی مشهورند (functional constraint)

امکان سه‌شکلی مدل:

$$u \le r+s \le n+u$$

$$\begin{cases} A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w = 0 \\ A_f\,\delta\hat{x} + w_f = 0 \end{cases} \longrightarrow \underset{(r+s)\times u}{\begin{pmatrix} A \\ A_f \end{pmatrix}}\delta\hat{x} + \underset{(r+s)\times n}{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}\hat{v} + \underset{(r+s)\times 1}{\begin{pmatrix} w \\ w_f \end{pmatrix}} = 0 \longrightarrow A^{*}\delta\hat{x} + B^{*}\hat{v} + w^{*} = 0$$

حال باید $r(A^{*}) = u$ و $r(B^{*}) = r+s$ باشد تا بتوان از مدل فوق (به عنوان مدل ترکیبی) استفاده کرد.

$$r(A^{*}) = u \quad \checkmark$$

$$r(B^{*}) = r \ne r+s \quad \times$$

پس برای حل از روش لاگرانژ تعمیم یافته استفاده می‌کنیم.

$$\phi = \hat{v}^T P \hat{v} - 2\lambda^T(A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w) - 2\lambda_f^T(A_f\,\delta\hat{x} + w_f) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{v}} = 2\hat{v}^T P - 2\lambda^T B = 0 \qquad (1)\ P\hat{v} - B^T\lambda = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\delta\hat{x}} = -2\lambda^T A - 2\lambda_f^T A_f = 0 \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{ترانسپوزگیری}} (2)\ A^T\lambda + A_f^T\lambda_f = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} = -2(A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w)^T = 0 \qquad (3)\ A\,\delta\hat{x} + B\hat{v} + w = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_f} = -2(A_f\,\delta\hat{x} + w_f)^T = 0 \qquad (4)\ A_f\,\delta\hat{x} + w_f = 0$$

یکی از روشهای حل جایگذاری مستقیم است:

$$(1) \rightarrow \hat{v} = P^{-1}B^T\lambda \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow (3) \Rightarrow A\,\delta\hat{x} + BP^{-1}B^T\lambda + w = 0 \longrightarrow \lambda = -(BP^{-1}B^T)^{-1}(A\,\delta\hat{x} + w) \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (2) \Rightarrow -A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}(A\,\delta\hat{x} + w) + A_f^T\lambda_f = 0 \longrightarrow \delta\hat{x} = (A^TM^{-1}A)^{-1}(A_f^T\lambda_f - A^TM^{-1}w) = (A^TM^{-1}A)^{-1}A_f^T\lambda_f - (A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w \quad (7)$$

$$(7) \rightarrow (4) \Rightarrow A_f(A^TM^{-1}A)^{-1}A_f^T\lambda_f - A_f(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w + w_f = 0 \longrightarrow \lambda_f = (A_f(A^TM^{-1}A)^{-1}A_f^T)^{-1}(A_f(A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w - w_f) \quad (8)$$

$$(8) \rightarrow (7) \Rightarrow \delta\hat{x}_{12} = (A^TM^{-1}A)^{-1}A_f^T\,[(8)] - (A^TM^{-1}A)^{-1}A^TM^{-1}w$$

$$\delta\hat{x}_{12} = \delta\hat{x}_1 + \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 = (A^TM^{-1}A)^{-1}A_f^T\lambda_f \qquad , \Sigma_{\delta\hat{x}_{12}} = \Sigma_{\delta\hat{x}_1} + \Delta_2 \quad , \Delta_2 = ?$$

روش اینرکانسترین (Inner constraint): سرشکنی کانسترین های داخلی

اگر به دلیل وجود d.defect (فرض کنید c.defect نداریم) یا به عبارت دیگر به دلیل عدم وجود سیستم مختصات نتوانیم مجهولات را برآورد کنیم، می‌توانیم با تعریف سیستم مختصات مجهولات را برآورد کنیم. (d.d ها را بگیریم)

یکی از روش های تعیین سیستم مختصات و گرفتن d.d روش کانسترین های داخلی می باشد. در این روش در حقیقت معادلات شرطی به صورت $E\delta\hat{x}=0$ به دسته معادلات $A\delta\hat{x}+B\hat{v}+w=0$ ($\delta\hat{L}=A\delta\hat{x}$) اضافه می‌کنیم تا بتوانیم مجهولات را برآورد کنیم. ماتریس E این خاصیت را دارد که کمبود رتبهٔ ماتریس A را جبران می‌کند. لازم به ذکر است روش I.C حالت خاصی از روش M.C می باشد. زیرا به تعداد حداقل مورد نیاز، معادلات کانسترینت برای تعریف سیستم مختصات به معادلات $A\delta\hat{x}+B\hat{v}+w=0$ اضافه می‌کنیم. (معادلهٔ کانسترینت رابطه‌ای بین مجهولات است)

$$\begin{cases} A\delta\hat{x}+B\hat{v}+w=0 \\ E\delta\hat{x}=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\delta\hat{x}+\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}\hat{v}+\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}=0$$

$$A^*\delta\hat{x}+B^*\hat{v}+w^*=0$$

$$r(A^*)=r\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=r(A)+r(E)=u$$

اگر از روش I.C محاسبه شود دارای خاصیت $AE^T=0$ است.

فرض کنید شبکه ای p نقطه ای و سطحی داریم که مختصات آنها مجهول است.

1) اگر شبکه ای مشکل انتقال در جهت x داشته باشد (defect در جهت x) برای گرفتن آن و تعریف انتقال در جهت x برای سیستم مختصات فرض کنیم مختصات x مرکز ثقل شبکه (نقطه ای فرضی داخل شبکه) بعد از سرشکنی و قبل از آن ثابت باشد

$$1)\ \hat{x}_G = x_{G_0} \Rightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{x}_i = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_{0i}$$

مختصات نقطه ها بعد از سرشکنی — مختصات قبل از سرشکنی

$$\rightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\hat{x}_i-x_{0i})=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta\hat{x}_i=0$$

2) اگر شبکه ای مشکل انتقال y داشته باشد (defect در جهت y) برای گرفتن آن و تعریف انتقال در جهت y برای سیستم مختصات فرض کنیم y مرکز ثقل شبکه (نقطه ای فرضی در داخل شبکه) بعد از سرشکنی و قبل از آن ثابت است.

$$2)\ \hat{y}_G = y_{0G} \longrightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{y}_i = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}y_{0i}$$

$$\rightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\hat{y}_i-y_{0i})=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta\hat{y}_i=0$$

3) اگر شبکه مشکل دوران داشته باشد یعنی دوران یا توجیه سیستم مختصات تعریف نشده باشد و ما defect دوران داشته باشیم، برای حل فرض می‌کنیم میانگین آزیموت مرکز ثقل شبکه به نقاط شبکه بعد از سرشکنی و قبل از سرشکنی ثابت باشد.

$$3)\ \bar{\hat{\alpha}}_{Gi} = \bar{\alpha}_{Gio} \longrightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_{Gi} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\alpha_{Gio} \Rightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta\hat{\alpha}_{Gi} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{Gi} = tg^{-1}\frac{\hat{x}_i - \hat{x}_G}{\hat{y}_i - \hat{y}_G} \pm K\pi = tg^{-1}\frac{\hat{x}_i - x_{Go}}{\hat{y}_i - y_{Go}} \pm K\pi$$

$$\rightarrow \delta\hat{\alpha}_{Gi} = \frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{x}_i}\Big|_{\hat{x}=x_{oi}}(\hat{x} - x_{oi}) + \frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{y}_i}\Big|_{\hat{y}=y_{oi}}(\hat{y}_i - y_{oi}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{x}_i} = \frac{\hat{y}_i - y_{Go}}{(\hat{x}_i - x_{Go})^2 + (\hat{y}_i - y_{Go})^2} = \frac{\hat{y}_{oi} - y_{Go}}{(L_{Gio})^2}$$

$$\frac{\partial\hat{\alpha}_{Gi}}{\partial\hat{y}_i} = \frac{-(\hat{x}_{oi} - x_{Go})}{(L_{Gio})^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p}\frac{(y_{oi} - y_{Go})}{(L_{Gio})^2}\hat{\delta}x_i + \frac{-(x_{oi} - x_{Go})}{(L_{Gio})^2}\delta\hat{y}_i = 0 \longrightarrow (L_{Gio} = L_{Gjo} = L_o)$$

یک فرض غلط می‌کنیم ولی مشکلی ایجاد نمی‌کند

یعنی فرض می‌کنیم همه طولها مساوی هستند (فاصله نقاط تا مرکز ثقل برابر است)

$$\sum(y_{oi} - y_{Go})\delta\hat{x}_i - (x_{oi} - x_{Go})\delta\hat{y}_i = 0$$

$$\rightarrow \sum(y_{oi}\delta\hat{x}_i - x_{oi}\delta\hat{y}_i) - \sum \cancelto{0}{y_{Go}}\delta\hat{x}_i + \sum \cancelto{0}{x_{Go}}\delta\hat{y}_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} y_{oi}\delta\hat{x}_i - x_{oi}\delta\hat{y}_i = 0$$

4) اگر شبکه مشکل مقیاس داشته باشد (مقیاس تعریف نشده باشد) برای حل این مشکل فرض کنیم میانگین طول مرکز ثقل شبکه تا نقاط قبل و بعد از سرشکنی ثابت و برابر باشد

$$4)\ \bar{\hat{L}}_{Gi} = \bar{L}_{Gio} \longrightarrow \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\hat{L}_{Gi} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}L_{Gio} \longrightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta\hat{L}_{Gi} = 0$$

$$\longrightarrow \sum x_{io}\hat{\delta}x_i + y_{io}\delta\hat{y}_i = 0$$

$$\begin{cases} \delta L_{n\times 1} = A_{n\times u}\,\delta\hat{x}_{u\times 1} \longrightarrow r(A) = u - d \quad (u = p) \\ E_{d\times u}\,\delta\hat{x}_{u\times 1} = 0 \end{cases}$$

$$E\delta\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ y_{oi} & -x_{oi} & y_{o2} & -x_{o2} & \cdots & y_{op} & -x_{op} \\ x_{oi} & y_{oi} & x_{o2} & y_{o2} & \cdots & x_{op} & y_{op} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \vdots \\ \delta x_p \\ \delta y_p \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \delta\hat{x} = (A^TPA + E^TE)^{-1}A^TP\delta L = (A^TPA)^{+}A^TP\delta L$$

$$\Sigma_{\delta\hat{x}} = \delta_o^2(A^TPA)^{+} = \delta_o^2(A^TPA + E^TE)^{-1}A^TPA(A^TPA + E^TE)^{-1}$$

سرشکنی

شبکهٔ ارتفاعی با نقطه با ارتفاع مجهول :

$$\hat{H}_G = \hat{H}_{G0} \rightarrow \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\hat{H}_i = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}H_{i0} \rightarrow \sum_{i=1}^{P}\delta H_i = 0$$

$$\rightarrow E\,\delta\hat{x} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta H_1\\ \delta H_2\\ \vdots\end{bmatrix} = 0$$

شبکه کانسترین داخلی همیشه به روش غیرخطی حل میشود چون نیاز به بعد از اولیه داریم.

مزایای Inner constraint :

1) Norm : $\|\delta\hat{x}\|_2^2 = \delta\hat{x}^T\delta\hat{x} \longrightarrow \min$

2) $tr(\Sigma_{\delta\hat{x}}) \longrightarrow \min$

معایب :

۱- جواب حاصل از این روش شدیداً تحت تأثیر خطاهاست.

2- هیچ توجیه فیزیکی برای ثابت نگه داشتن مرکز ثقل شبکه نداریم.

ماتریس E در حالت سه بعدی

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & z_{01} & -y_{01} & 0 & z_{02} & -y_{02} & \cdots \\ z_{01} & 0 & -x_{01} & z_{02} & 0 & -x_{02} & \cdots \\ x_{01} & y_{01} & z_{01} & x_{02} & y_{02} & z_{02} & \cdots \end{bmatrix}$$

پردازش های بعد از سرشکنی :

در پردازش های قبل از سرشکنی نمونه های قابل پردازش هستند که از یک جامعه باشند (یکنواری). در پردازش های بعد از سرشکنی کنترل نتایج از نظر قابل قبول بودن می باشد. در ضمن این پردازش ها میتوانیم سازگاری مشاهدات مختلف (از یک جامعه نباشند) را هم سنجیده کنیم. هرگونه تصمیم گیری در مورد قابل قبول بودن نتایج باید با یکسری آزمونهای آماری انجام گیرد. یکی از این آزمونهای آماری، آزمون ماکسیمم واریانس نانویه است. اگر هیچ مشکلی در سرشکنی وجود نداشته باشد، انتظار میرود $\hat{\delta}_0^2 = \delta_0^2$ باشد. بنابراین می توانیم آزمون آماری به شکل زیر ترتیب دهیم:

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\delta}_0^2 = \delta_0^2 \longrightarrow \dfrac{\hat{\delta}_0^2}{\delta_0^2} = 1 & \text{قابل قبول} \\ H_1 : \hat{\delta}_0^2 \neq \delta_0^2 \longrightarrow \dfrac{\hat{\delta}_0^2}{\delta_0^2} \neq 1 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

برای رد یا قبول H_0 و یا قبول ریسک α برای خطای نوع اول میتوانیم فاصلهٔ بحرانی زیر را در نظر بگیریم:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{df} = \frac{\sigma_0^2 \hat{v}^T \Sigma_L^{-1} \hat{v}}{df} \Rightarrow \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \hat{v}^T \Sigma_L^{-1} \hat{v} \longrightarrow \chi^2_{df}$$

$$\rightarrow \chi^2_{df,\frac{\alpha}{2}} < \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{df,1-\frac{\alpha}{2}} \longrightarrow$$ قبول فرض H_0

else $\rightarrow$ H_0 غیرقابل قبول $\rightarrow$ H_1 قابل قبول

دلایل رد فرض H_0 :

*1) نرمال نبودن $\hat{v}_i$ ها یا w_i ها میباشد.

$$\hat{v}_i \rightarrow N(0, \sigma^2_{\hat{v}_i}) \quad \text{یا} \quad w_i = -\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \longrightarrow N(0,1)$$

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} \longrightarrow \sigma^2_{\hat{v}_i}$$

*2) اشتباه بودن مشاهدات که منظور ما اشتباه بودن $\hat{v}_i$ ها میباشد

معمولاً : $\frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{df,1-\frac{\alpha}{2}}$

3) وجود اشتباهات محاسباتی

**4) عدم صحیح بودن ماتریس وزن (عدم تناسب صحیح بین وزنهای مشاهدات)

5) خطای خطی کردن و مقدار اولیه (با تکرار حل میشود)

*6) وجود خطای sys (مدل ریاضی نادرست)

7) ضعف هندسی شبکه (قطعاً درجه آزادی بالا نباشد)

روش کشف مشاهدات اشتباه :

روش اول : الف) مقدار $\sigma_{\hat{v}_i}$ دقیق و $E(\hat{v}_i)=0$

ب) $\sigma_{\hat{v}_i}$ برآورد باشد و $E(\hat{v}_i)=0$

ج) $\sigma_{\hat{v}_i}$ برآورد باشد و $E(\hat{v}_i)=0$

$$w_i = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \longrightarrow N(0,1)$$

$\rightarrow t_{df}$

$\rightarrow \tau_{df}$

الف) $z_{\frac{\alpha}{2}} < w_i < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ب) $t_{df,\frac{\alpha}{2}} < w_i < t_{df,1-\frac{\alpha}{2}}$

ج) $\tau_{df,\frac{\alpha}{2}} < w_i < \tau_{df,1-\frac{\alpha}{2}}$

*در این روش به دلیل اینکه از L_2 استفاده می‌کنیم و خطا به صورت global تأثیر دارد لذا ممکن است مشاهده‌ی اشتباه نبوده ولی به دلیل دیگر اشتباهات در آزمون رد شود.

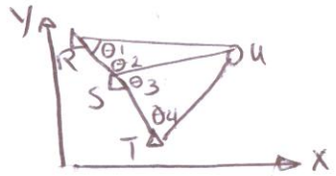
سرشکنی

این روند آنقدر ادامه می یابد تا آزمون قبول شود.

مشاهده ای را که در مرحلهٔ اول حذف شده بوده به لیست اضافه کرده، سرشکن میکنیم. اگر درست فاکتور واریانس نامنویه قبول شد، مشاهده اشتباه نبوده است و اگر رد شد مشاهده اشتباه بوده است. برای بقیه نیز همین کار را انجام داده و مشاهداتی را که اشتباه حذف شده اند به لیست برمی گردانیم.

* حذف مشاهده ممکن است باعث ضعف هندسی شبکه شود ← دلیلی برای رد آزمون ناکتور واریانس

با استفاده از متد کمترین مربعات، مختصات ایستگاه U را با توجه به شکل داده شده و قرائت های انجام شده بدست آورید.



$\theta_1 = 50^\circ\ 06'\ 50''$

$\theta_2 = 101^\circ\ 30'\ 47''$

$\theta_3 = 98^\circ\ 41'\ 17''$

$\theta_4 = 59^\circ\ 17'\ 01''$

$X_R = 865.40$ $\quad X_S = 2432.55$ $\quad X_T = 2865.22$

$Y_R = 4527.15$ $\quad Y_S = 2047.25$ $\quad Y_T = 27.15$

① محاسبه مقدار تقریبی برای U

① $RS = \sqrt{(2432.55 - 865.40)^2 + (4527.15 - 2047.25)^2} = 2933.58$

② $Az_{RS} = 147^\circ\ 42'\ 34'' \Rightarrow Az_{RU_0} = 147^\circ\ 42'\ 34'' - 50^\circ\ 06'\ 50'' = 97^\circ\ 35'\ 44''$

③ $RU_0 = \dfrac{RS\ \sin(\theta_2)}{\sin(180 - \theta_1 - \theta_2)} = 6049.00$

④ $X_{U_0} = X_r + RU_0 \sin(Az_{RU_0}) = 6861.35$

$Y_{U_0} = Y_r + RU_0 \cos(Az_{RU_0}) = 3727.59$

⑤ $SU_0 = \sqrt{(X_{U_0} - X_S)^2 + (Y_{U_0} - Y_U)^2} = 4736.83$

$TU_0 = \sqrt{(X_{U_0} - X_T)^2 + (Y_{U_0} - Y_T)^2} = 5446.29$

② فرمول بندی برای انجام سرشکنی و خطی کردن فرمول، در اینجا نقاط کنترل را fix فرض می کنیم لذا dx و dy مربوط به آن ها صفر خواهد شد.

لذا مشاهدات که 4 زاویه افقی هستند بصورت زیر فرمول بندی می شوند

$$\frac{y_R - y_{U_0}}{(RU_0)^2}\, dx_U + \frac{x_{U_0} - x_R}{(RU_0)^2}\, dy_U = \theta_1 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{x_S - x_R}{y_S - y_R}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_{U_0} - x_R}{y_{U_0} - y_R}\right) + 0 \right\} + V_1$$

$$\frac{y_{U_0} - y_S}{(SU_0)^2}\, dx_U + \frac{x_S - x_{U_0}}{(SU_0)^2}\, dy_U = \theta_2 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{x_{U_0} - x_S}{y_{U_0} - y_S}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_R - x_S}{y_R - y_S}\right) + 0 \right\} + V_2$$

$$\frac{y_S - y_{U_0}}{(SU_0)^2}\, dx_U + \frac{x_{U_0} - x_S}{(SU_0)^2}\, dy_U = \theta_3 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{x_T - x_S}{y_T - y_S}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_{U_0} - x_S}{y_{U_0} - y_S}\right) + 180 \right\} + V_3$$

$$\frac{y_{U_0} - y_S}{(TU_0)^2}\, dx_U + \frac{x_T - x_{U_0}}{(TU_0)^2}\, dy_U = \theta_4 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{x_{U_0} - x_T}{y_{U_0} - y_T}\right) - tg^{-1}\left(\frac{x_S - x_T}{y_S - y_T}\right) + 0 \right\} + V_4$$

$$\ddot{J} = \rho \rightarrow 206264.8''$$

ست دوم معادله

$$\begin{bmatrix} \frac{4527.15-3727.59}{(6049.00)^2} & \frac{6861.35-865.40}{(6049.00)^2} \\ \frac{3727.59-2047.25}{(4736.83)^2} & \frac{2432.55-6861.35}{(4736.83)^2} \\ \frac{2047.25-3727.59}{(4736.83)^2} & \frac{6861.35-2432.55}{(4736.83)^2} \\ \frac{3727.59-27.15}{(5446.29)^2} & \frac{2865.22-6861.35}{(5446.29)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.507 & 33.800 \\ 15.447 & -40.713 \\ -15.447 & 40.713 \\ 25.732 & -27.788 \end{bmatrix}$$

ست راست معادله

$$K = \begin{bmatrix} 50\ 06\ 50 - \left\{ tg^{-1}\left(\frac{2432.55-865.40}{2047.25-4527.15}\right) - tg^{-1}\left(\frac{6861.35-865.40}{3727.59-4527.15}\right) + \pi \right\} \\ 101\ 30\ 47 - \{ \\ 98\ 41\ 17 - \{ \\ 59\ 17\ 01 - \{ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.00'' \\ 0.00'' \\ -0.69'' \\ -20.23'' \end{Bmatrix}$$

$$J^T J = \begin{bmatrix} 1159.7 & -1820.5 \\ -1820.5 & 5229.7 \end{bmatrix} \qquad Q_{xx} = (J^T J)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.001901 & 0.000662 \\ 0.000662 & 0.000422 \end{bmatrix}$$

$$J^T K = \begin{bmatrix} -509.9 \\ 534.1 \end{bmatrix} \qquad X = [J^T J]^{-1} [J^T K] = \begin{bmatrix} 0.001901 & 0.000662 \\ 0.000662 & 0.000422 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -509.9 \\ 534.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix}$$

$$dx_u = -0.62 \qquad x_u = X_0 + dx_u = 6860.73$$

$$dy_u = -0.11 \qquad y_u = Y_0 + dy_u = 3727.48$$

$$\hat{V} = JX - K = \begin{bmatrix} 4.507 & 33.800 \\ 15.447 & -40.713 \\ -15.447 & +40.713 \\ 25.732 & -27.788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.62 \\ -0.11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00'' \\ 0.00 \\ -0.69 \\ -20.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.5'' \\ -5.1 \\ 5.8 \\ 7.3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}^T \hat{V} = \begin{bmatrix} -6.5 & -5.1 & 5.8 & 7.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.5 \\ -5.1 \\ 5.8 \\ 7.3 \end{bmatrix} = [155.2''^2]$$

$\hat{S}_0^2$ فاکتور واریانس ثانویه

$$\hat{S}_0 = \sqrt{\frac{\hat{V}^T \hat{V}}{m-n}} = \sqrt{\frac{155.2}{4-2}} = \pm 8.8''$$

محاسبه خطای مختصات برای ایستگاه u

$$\hat{S}_{x_u} = \hat{S}_0 \sqrt{Q_{x_u x_u}} = \pm 8.8 \sqrt{0.001901} = \pm 0.38''$$

$$\hat{S}_{y_u} = \hat{S}_0 \sqrt{Q_{y_u y_u}} = \pm 8.8 \sqrt{0.000442} = \pm 0.18''$$

$$\hat{S}_u = \sqrt{S_{x_u}^2 + S_{y_u}^2} = \pm 0.42''$$

where $\Sigma\, wv^2$ in matrix form is V^TWV.

Since these standard deviations of unit weight relate to the overall adjustment and not a single quantity, they are referred to as *reference standard deviations*. Computation of the reference standard deviations for both unweighted and weighted examples are illustrated below.

11.5.1 Unweighted Example

In the example of Section 11.3, there were 7 − 3 or 4 degrees of freedom. Using the residuals given in Equation (11.7), the system's reference standard deviation is determined using the algebraic expression of Equation (11.14) as:

$$S_o = \sqrt{\frac{(0.041)^2 + (0.019)^2 + (-0.062)^2 + (-0.058)^2 + (0.022)^2 + (-0.017)^2 + (0.005)^2}{7-3}}$$

$$= \pm 0.05 \text{ ft} \tag{11.16}$$

This can be computed using the matrix expression of Equation (11.14) as

$$S_0 = \sqrt{\frac{V^TV}{r}}$$

$$V^TV = [0.041 \quad 0.019 \quad -0.062 \quad -0.058 \quad 0.022 \quad -0.017 \quad 0.005] \times \begin{bmatrix} 0.041 \\ 0.019 \\ -0.062 \\ -0.058 \\ 0.022 \\ -0.017 \\ 0.005 \end{bmatrix} = 0.010$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{0.010}{4}} = \pm 0.05 \text{ ft} \tag{11.17}$$

11.5.2 Weighted Example

Notice that the weights are used when computing the reference standard deviation in Equation (11.15). That is, each residual is squared and multiplied

by its weight, and thus the reference standard deviation, computed using no matrix methods, is

$$S_o = \sqrt{\frac{3(0.050)^2 + 4(0.010)^2 + 6(-0.053)^2 + 4(-0.067)^2 + 6(0.019)^2 + 6(-0.011)^2 + 6(0.010)^2}{7-3}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.04598}{4}} = \pm 0.107 \tag{11.1}$$

It is left as an exercise to verify this result by solving the matrix expressio of Equation (11.15).

11.6 ANOTHER WEIGHTED ADJUSTMENT

Example 11.1 The level net shown in Figure 11.3 was measured with th following results (the elevation differences and standard deviations are give in meters, and the elevation of A is 437.596 m):

From:	To:	ΔElev	σ	From:	To:	ΔElev	σ
A	B	10.509	0.006	D	A	−7.348	0.003
B	C	5.360	0.004	B	D	−3.167	0.004
C	D	−8.523	0.005	A	C	15.881	0.012

What are the most probable values for the elevations of B, C, and D?

SOLUTION

Step 1: Write the observation equations without their weights:

(1) $+B = A + 10.509 + v_1 = 448.105 + v_1$

(2) $-B + C = 5.360 + v_2$

(3) $-C + D = -8.523 + v_3$

(4) $-D = -A - 7.348 + v_4 = -444.944 + v_4$

(5) $-B + D = -3.167 + v_5$

(6) $+C = A + 15.881 + v_6 = 453.477 + v_6$

Step 2: Rewrite observation equations in matrix form $AX = L + V$ as:

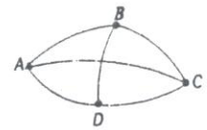


Figure 11.3 Level net.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448.105 \\ 5.360 \\ -8.523 \\ -444.944 \\ -3.167 \\ 453.477 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \tag{11.19}$$

Step 3: In accordance with Equations (9.4) and (9.6), form the weight matrix as

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.006^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.004^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.005^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.003^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.004^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0.012^2} \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

from which

$$W = \begin{bmatrix} 27{,}778 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62{,}500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 111{,}111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 62{,}500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6944 \end{bmatrix} \tag{11.21}$$

Step 4: Compute the normal equations using Equation (10.34):

$$(A^T WA)X = NX = A^T WL \tag{11.22}$$

This gives

$$N = \begin{bmatrix} 152{,}778 & -62{,}500 & -62{,}500 \\ -62{,}500 & 109{,}444 & -40{,}000 \\ -62{,}500 & -40{,}000 & 213{,}611 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

$$A^T WL = \begin{bmatrix} 12{,}310{,}298.611 \\ 3{,}825{,}065.833 \\ 48{,}899{,}364.722 \end{bmatrix}$$

Step 5: Solve for the X matrix using Equation (10.35), which yields

$$X = \begin{bmatrix} 448.1087 \\ 453.4685 \\ 444.9436 \end{bmatrix} \tag{11.23}$$

Step 6: Compute the residuals using the matrix expression $V = AX - L$.

$$V = \begin{bmatrix} 448.1087 \\ 5.3598 \\ -8.5249 \\ -444.9436 \\ -3.1651 \\ 453.4685 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 448.105 \\ 5.360 \\ -8.523 \\ -444.944 \\ -3.167 \\ 453.477 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0037 \\ -0.0002 \\ -0.0019 \\ 0.0004 \\ 0.0019 \\ -0.0085 \end{bmatrix} \tag{11.24}$$

Step 7: Calculate the reference standard deviation for the adjustment using the matrix expression of Equation (11.15).

$$V^T WV = [0.0037 \quad -0.0002 \quad -0.0019 \quad 0.0004 \quad 0.0019 \quad -0.0085]W$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.0037 \\ -0.0002 \\ -0.0019 \\ 0.0004 \\ 0.0019 \\ -0.0085 \end{bmatrix} = [1.26976] \tag{11.25}$$

Since the number of system redundancies is the number of observations minus the number of unknowns, $r = 6 - 3 = 3$, and thus S_0 is

١١٥

$$S_0 = \sqrt{\frac{1.26976}{3}} = \pm 0.6575 \text{ m} \tag{11.26}$$

Step 8: Tabulate the results showing the adjusted elevation differences, their residuals, and the final adjusted elevations.

From	To	Adjusted ΔElev	Residual	Station	Adjusted Elevation
A	*B*	10.513	0.004	*A*	437.596
B	*C*	5.360	0.000	*B*	448.109
C	*D*	−8.525	−0.002	*C*	453.468
D	*A*	−7.348	0.000	*D*	444.944
B	*D*	−3.165	0.002		
A	*C*	15.872	−0.009		

PROBLEMS

Note: For problems below requiring least-squares adjustment, if a computer program is not distinctly specified for use in the problem, it is expected that the least-squares algorithm will be solved using the program MATRIX which is included within the diskette supplied with the book.

11.1 For the leveling network shown in Figure 11.4, calculate the most probable elevations for *X* and *Y*. Use an unweighted least-squares adjustment with the observed values given in the accompanying table.

Line	ΔElev
1	+1.00
2	+0.08
3	+0.92
4	−1.00
5	+0.08

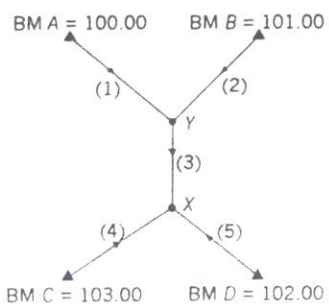


Figure 11.4

11.2 For Problem 11.1, compute the reference standard deviation and tabulate the adjusted observations and their residuals.

11.3 Do Problem 11.1 using Program ADJUST.

11.4 For the leveling network shown in Figure 11.5, calculate the most probable elevations for *X*, *Y*, and *Z*. The observed values and line lengths are given in the table. Apply appropriate weights in the computations.

Line	Length	ΔElev	Line	Length	ΔElev
1	4	+1.05	4	2	−1.95
2	4	−0.95	5	1	+0.10
3	2	+2.10	6	3	+0.05

11.5 For Problem 11.4, compute the reference standard deviation, and tabulate the adjusted observations and their residuals

11.6 Use Program ADJUST to solve Problem 11.4.

11.7 A line of differential levels was run from benchmark Oak (elevation 753.01) to station 13+00 on a proposed road alignment. It continued along the alignment to 19+00. Rod readings were taken on stakes set at each full station. The circuit then closed on benchmark Bridge having an elevation of 764.95 ft. The observed elevation differences, in order, are −3.03, 4.10, 4.03, 7.92, 7.99, −6.00, −6.02, and 2.98 ft. A check measurement between benchmark Rock (elevation = 772.39 ft) and station 16+00 gives an elevation difference of −6.34 ft.

(a) What are the most probable values for the adjusted elevation differences?

(b) What is the reference standard deviation for the adjustment?

(c) Tabulate the adjusted observations and their residuals.

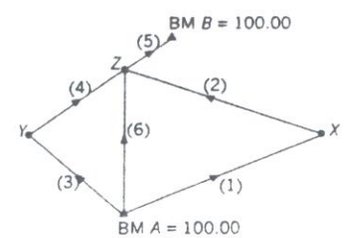


Figure 11.5

١١٦