SUBJECT:
Year (۹۳) Month (۷) Date (۹)

ریاضی عمومی ۱ ← ریاضیات پایه ← انتشارات راه ← مولف استاد اصفهانی

۱- رابطه تابع ۲- حد و پیوستگی ۳- مشتق و کاربرد مشتق گیری

۴- انتگرال و روش‌های انتگرال گیری (دوم) ۵- معادلات دیفرانسیل

یادآوری :

a^b

* ضرب اعداد توان دار

فرمول ۱) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

فرمول ۲) $b^t \cdot c^t = (b\cdot c)^t$

* تقسیم اعداد توان دار

فرمول ۱) $a^b \div a^c = a^{b-c}$

فرمول ۲) $b^t \div c^t = \left(\frac{b}{c}\right)^t$

SUBJECT:
Year (　　) Month (　　) Date (　　)

یادآوری: معادلات

* معادله خطی درجه اول: $ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$ فرمول و راه حل

مثال 1) $2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$

مثال 2) $3x + 2 = 5 \rightarrow 3x = \underbrace{5 - 2}_{3} \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

مثال 3) $3x + 5 = 6x - 2 \rightarrow \underbrace{3x - 6x}_{-3x} = \underbrace{-2 - 5}_{-7} \rightarrow$

$\rightarrow -3x = -7 \rightarrow x = \frac{-7}{-3} \rightarrow x = \frac{7}{3}$

* معادله خطی درجه دوم:

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

حالت اول $\Rightarrow \Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

حالت دوم $\Rightarrow \Delta = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

حالت سوم $\Rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ ریشه نداریم

STAEDTLER

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

یادآوری: مجموعه های خاص

مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$

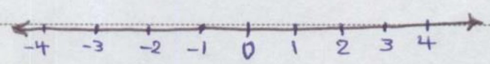
مجموعه اعداد حسابی $\mathbb{I} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

مجموعه اعداد کسری $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{Q}' = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots\}$

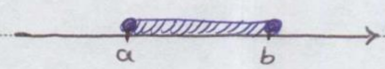
مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R} = \{$ اجتماع تمام مجموعه های فوق $\}$



محور اعداد حقیقی

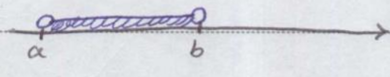
* بازه: اگر $a<b$ باشد داریم

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



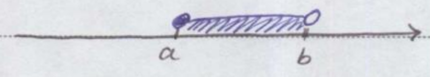
بازه بسته a تا b

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



بازه باز a تا b

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



بازه نیم باز

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

بازه نیم باز

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال1) $\overset{a}{x} + \overset{b}{3}x - \overset{c}{1} = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4(1)(-1) \rightarrow \Delta = 9 + 4 = 13$

$\Delta > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$\rightarrow x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

مثال2) $x - 2x + 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0$

$\Delta = 0 \longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \longrightarrow x = -\frac{-2}{2} = 1$

مثال3) $x^2 - x + 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$

$\Delta = -3$ $\Delta < -3$ معادله ریشه ندارد

فرمول $\rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

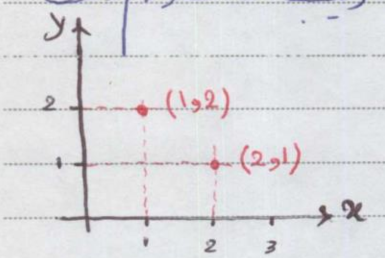
* منفی یا در صورت یا در مخرج ضرب می‌شود.

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: درباره بسته a تا b منظور تمام اعداد حقیقی می باشند که بین a تا b و شامل خود a و b نیز هستند و منظور از بازه باز تمام اعداد حقیقی که بین a تا b بوده و خود a و b را شامل نمی شود منظور از بازه نیم باز تمام اعداد حقیقی که بین a تا b بوده ولی یکی را شامل و دیگری را شامل نمی شود.

فصل اول : تابع

تعریف زوج مرتب : زوج (a,b) که در آن ترتیب عناصر مهم است زوج مرتب گویند.



حاصلضرب دکارتی دو مجموعه (A,B) : $A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}$

مثال : $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$

$A\times B=\{(1,4)(1,5)(2,4)(2,5)(3,4)(3,5)\}$

$B\times A=\{(4,1)(4,2)(4,3)(5,1)(5,2)(5,3)\}$

تمرین : اگر $A\{1,4,6\}$ و $B=\{a,b\}$ آنگاه $A\times B=?$, $B\times A=?$ بدست آورید ؟

$A\times B=\{(1,a)(1,b)(4,a)(4,b)(6,a)(6,b)\}$

$B\times A=\{(a,1)(a,4)(a,6)(b,1)(b,4)(b,6)\}$

SUBJECT:
Year (   ) Month (   ) Date(/)

تعریف رابطه: به هر زیر مجموعه از مجموعه حاصلضرب دکارتی یک رابطه گویند

$R_1=\{(1,a)(1,b)\}$ $R_2=\{(4,a)(6,b)(4,b)(6,b)\}$

تعریف دامنه یا قلمرو رابطه: به مولفه های اول زوج مرتب در رابطه، دامنه یا قلمرو گویند

و آن را با D_R نشان می دهند. $D_{R_1}=\{1\}$ $D_{R_2}=\{4,6\}$

طبق مثال بالا = R_2 و R_1

تعریف برد رابطه: به مولفه های دوم زوج مرتب در رابطه، برد گویند

$D_{R_1}=\{a,b\}$ $D_{R_2}=\{a,b\}$

تعریف تابع: فرض کنید دامنه رابطه f مجموعه A و برد آن مجموعه B باشد

رابطه f را یک تابع از a به b می نامیم $(f: A\to B)$

هرگاه در ۲ شرط صدق کند

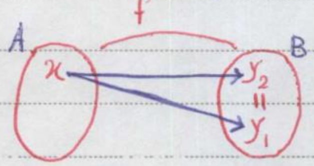
۱) برای هر عنصر $x\in A$ عنصر مانند $y\in B$ موجود باشد به طوریکه x و y عضو f باشند $(x,y)\in f$ به عبارت دیگر f باشد هر یک از عناصر A را به عنصری از B نسبت می دهیم

$A \quad x \xrightarrow{f} y \quad B$

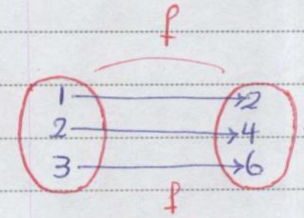
STAEDTLER®

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date (

۲) اگر $(x,y_1)\in f$ و $(x,y_2)\in f$ آنگاه $y_1=y_2$ باشد یعنی f هر یک از عناصر A را فقط به یک عنصر از B نسبت می‌دهیم.

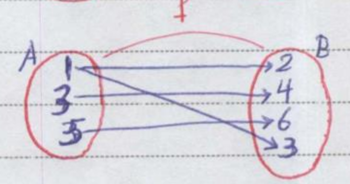


$f=\{(1,2)(3,4)(5,6)\}$



تابع است

$f=\{(1,2)(3,4)(5,6)(1,3)\}$



تابع نیست

مثال : کدامیک از روابط زیر تابع است ؟ $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$

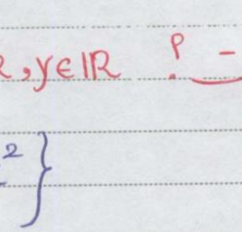
$f_1=\{(x,y)\mid y=x^2\}$

$f_1=\{(1,1)(2,4)(-1,1)(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),\dots\}$ تابع است

در مثال فوق برای تشخیص اینکه رابطه هست یا خیر به x مقدار دلخواه می‌دهیم (از دامنه) اگر برای y دو مقدار غیر مساوی به دست آمد آن رابطه تابع نیست در غیر این صورت

$f_2=\{(x,y)\mid y^2=x\}$ $\quad x=1 \rightarrow y^2=1 < \begin{matrix} y=+1 \\ y=-1 \end{matrix}$ تابع است

یعنی برای یک مقدار x، ۲ مقدار برای y



$x=2 \rightarrow y^2=2 \rightarrow y=\pm\sqrt{2} \xrightarrow{\text{طبق قانون}} u^2=a \Rightarrow u=\pm\sqrt{a}$

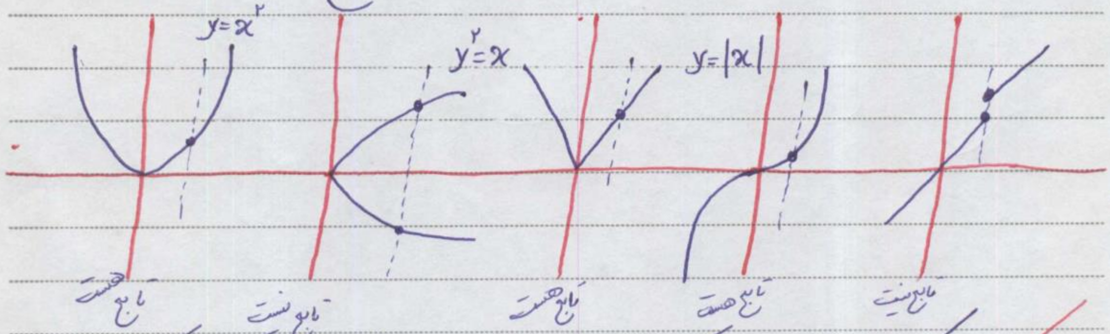
مثال: اگر $f(x)=x^2-1$ آنگاه مقادیر $f(0)$ و $f(2)$ و $f(a)$ و $f(-x)$ و $f(x-1)$ را بدست آورید.

$$f(x)=x^2-1 \longrightarrow f(0)=0^2-1 \Rightarrow f(0)=-1$$

$$f(x)=x^2-1 \longrightarrow f(2)=2^2-1 \Rightarrow f(2)=3 \rightarrow f(a)=a^2-1 \rightarrow f(x)=x^2-1$$

$$f(x-1)=(x-1)^2-1=x^2+1-1$$

* تشخیص تابع از روی نمودار: منحنی یک رابطه وقتی یک تابع است که هر خط موازی با محور yها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



نکته: اگر در محور xها یک نقطه وجود داشته باشد تابع هست و اگر ۲ یا ۳ نقطه باشد تابع نیست.

ترکیب توابع : ترکیب ۲ تابع را با نماد $fog(x)$ نمایش می دهند.

$$fog(x) = f(g(x))$$

مثال : اگر $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2$ آنگاه fog و gof را بدست آورید.

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$$

$$gof = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

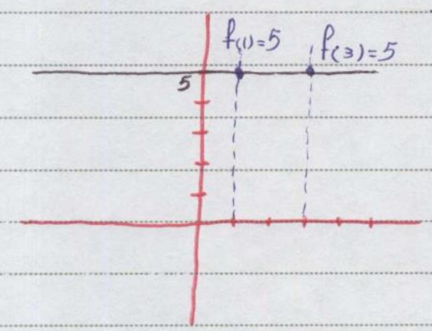
مثال : اگر $f(x)=x^3+1$, $g(x)=|x|$ آنگاه fog و gof را بدست آورید.

$$fog(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2+1$$

$$gof = g(f(x)) = g(x^3+1) = |x^3+1|$$

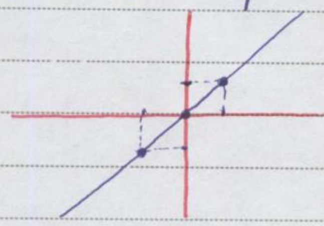
تابع ثابت : به ازای هر مقدار x مقدار $f(x)$ برابر عدد ثابت C است

$f(x) = C$
$f(x) = 5$
$f(1) = 5$
$f(3) = 5$



تابع همانی: اگر دامنه و برد تابع f مجموعه اعداد حقیقی باشد. یعنی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و
برای هر عدد حقیقی x را داشته باشیم $f(x)=x$ آنگاه f را تابع همانی گویند.

$f(x)=x$
$f(0)=0$
$f(1)=1$
$f(-1)=-1$

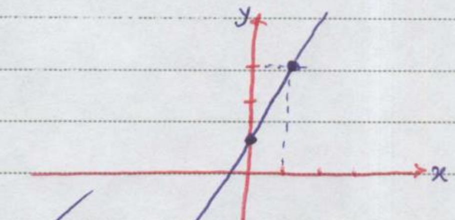


$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$
$f(x)=x$

تابع خطی: $f(x)=ax+b$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$

دامنه و برد f نیز مجموعه اعداد حقیقی است.

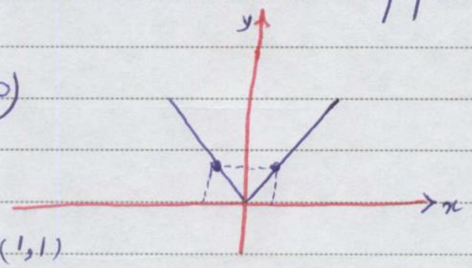
$f(x)=2x+1$
$f(0)=2(0)+1=1 \quad (0,1)$
$f(1)=2(1)+1=3 \quad (1,3)$



تابع قدر مطلق: با نماد | | نشان می دهند که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی و برد آن

$f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,\infty)$
$f(x)=|x|$

بازه $[0,\infty)$

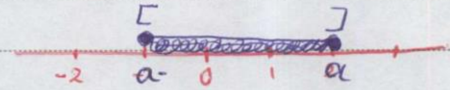


$f(1)=|1|=1 \quad (1,1)$
$f(-1)=|-1|=1 \quad (-1,1)$

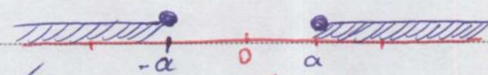
SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

خواص قدر مطلق :

1) $|x| < a \longrightarrow -a \leq x \leq a$



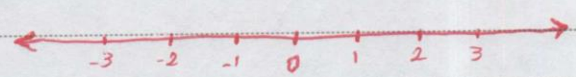
2) $|x| \longrightarrow x \geq a$ یا $x \leq -a$



تابع جزء صحیح یا براکت : تابعیست که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی R و بردآن مجموعه اعداد صحیح می باشد. به طوری که بنابر خاصیت اعداد برای هر عدد حقیقی دلخواه عدد صحیح n وجود دارد ($n \leq x \leq n+1$) بنابراین عدد صحیح n را جزء صحیح عدد x می نامیم و آن را با نماد $[x]$ نشان می دهیم.

$f: R \longrightarrow Z$

$f(x) = [x]$



$f(1.3) = [1.3] = 1$

$f(1.9) = [1.9] = 2$ یا $[1.9] = 1$

$f(1.9) = [1.9] = -2$

$[1.9] = 1$

اگر عدد داخل براکت اعشاری باشد آنرا به سمت بالا یا به سمت منفی گرد می کنیم

تابع نمایی :

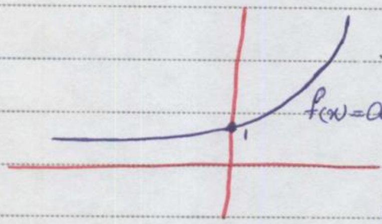
$f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$

$f(x) = a^x \longrightarrow (a \neq 1, a > 0)$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$x = 0 \to y = a^0 = 1 \longrightarrow (0, 1)$ به x صفر دادیم و y را بدست آوردیم

فقط اعدادی که جز R هستند را می توان به x جایگزین کرد.



حالت خاص تابع نمایی : $f(x) = e^x , a = e$

$e = 2,78$ این تابع را با نماد $f(x) = exp(x)$ نیز نشان می دهند

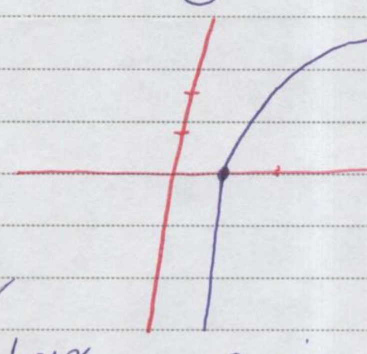
تابع لگاریتمی : $Log^{100} = 2$ $Log_2^8 = 3$ $Log_3^{27} = 3$

اگر مبنی نوشته نشده باشد در واقع عدد 10 است

$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = Log_a x$

$Log_a^a = 1 \Rightarrow Log_{10}^{10} = 1$



به لگاریتم در مبنی e ← $log_e x$ ، لگاریتم طبیعی گفته می شود و آن را

با نماد $Ln x$ نشان می دهند.

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

خواص تابع لگاریتمی :

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

مثال :

$\log_3 200 = \log_3 2\times100 \rightarrow \log_3 2 + \log_3 100$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

مثال :

$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

5) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$

$\log_{5^2} 3^4 = \frac{4}{2} \log_5 3 = 2\log_5 3$

تابع مثلثاتی :

مثال) $30^\circ \xrightarrow{\text{چند}} R = ?$ (رادیان)

مفهوم مثلثات :

فرمول محاسبه درجه به رادیان $\frac{30^\circ}{360} = \frac{R}{2\pi}$ (رادیان) $\rightarrow R = \frac{30^\circ \times 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$

* مثال یا معادل : مثال تبدیل درجه به رادیان است .

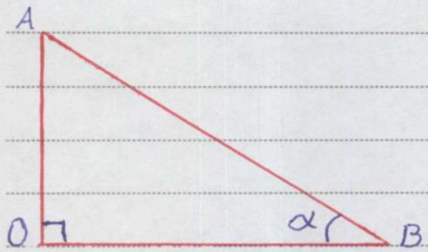
مثال) $45^\circ \xrightarrow{\text{چند}} R = ?$

$R = \frac{45^\circ \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{4}$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year (　　) Month (　　) Date (　　)



$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{OA}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{OB}{AB}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{OA}{OB}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{OB}{OA}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{AB}{OB} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{AB}{OA} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$$

روابط مثلثاتی :

1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

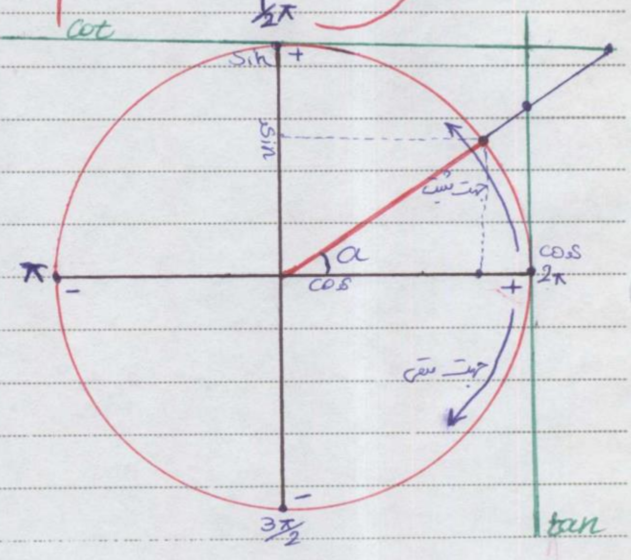
۲) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

۳) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

* نسبتهای مثلثاتی بعضی از زوایای مهم : دایره مثلثاتی دایره‌ایست به مرکز مبداء مختصات و شعاع 1



زاویه a برحسب درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
زاویه a برحسب رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
$\cot$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$	0	∞

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

توابع زوج و فرد : تابع زوج و فرد تابعی است که در ۲ شرط زیر صدق کند.

1) $\forall x, -x \in D_f$

2) $f(x) = f(x)$

۲ شرط اول برای توابع زوج

1) $\forall x, -x \in D_f$

2) $f(-x) = -f(x)$

۲ شرط برای توابع فرد

مثال : بررسی کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد یا هیچ کدام هستند.

1) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ $\quad f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$

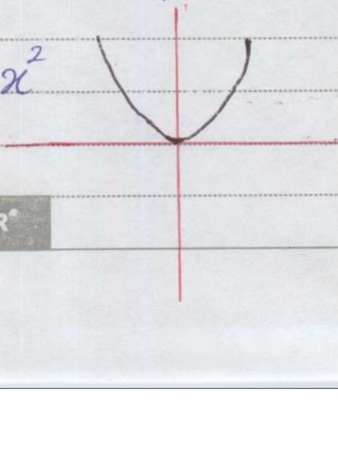
$\rightarrow f(-x) = f(x)$ $\quad$ f تابعیست زوج

2) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$ $\quad f(-x) = (-x^3) = -x^3 = -f(x)$ $\quad$ f تابعیست فرد

توابع زوج نسبت به محور yها و توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن هستند.

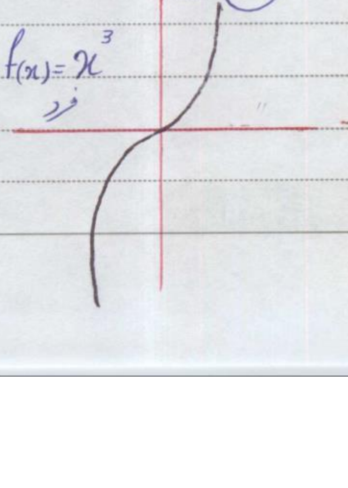
$f(x) = x^2$

زوج



$f(x) = x^3$

فرد



مثال) $f(x) = x^2 + x$

$f(-x) = (-x^2) + (-x) = x^2 - x$ تابع نه زوج و نه فرد است

مثال) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^5$

$f(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x^5) = -(\sqrt[3]{x} + x^5) = -f(x)$ تابع فرد است

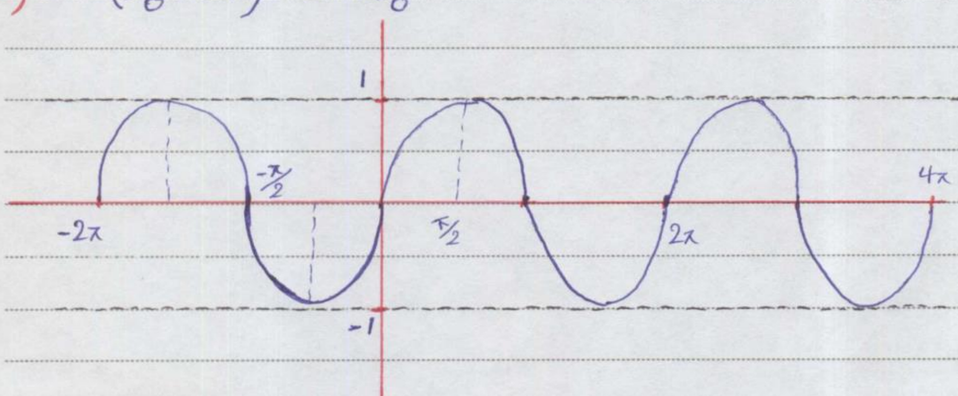
تابع متناوب: تابع f را متناوب گویند که هرگاه عددی مانند $T > 0$ موجود باشد

به طوریکه $f(x+T) = f(x)$ کوچکترین عدد T را دوره تناوب تابع f می‌نامند.

مثال: $f(x) = \sin x$ تابع متناوب است و دوره تناوب آن برابر $T = 2\pi$

است، چون $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x$

مثال) $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi) = \sin\frac{\pi}{6}$



SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: دوره تناوب برخی از تابع‌های معروف به صورت زیر است.

$(2n+1) \rightarrow$ توان فرد

۱) دوره تناوب توابع $\sin^{2n+1} ax$, $\cos^{2n+1} ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است

$n \rightarrow$ توان طبیعی ، $2n \rightarrow$ فقط توان‌های زوج

۲) دوره تناوب توابع $\tan^{n} ax$, $\cot^{n} ax$, $\cos^{2n} ax$, $\sin^{2n} ax$

برابر است با $T=\frac{\pi}{|a|}$

مثال: دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(x)=\sin^3(2x) \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

۲) $f(x)=\sin x \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{|1|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

۳) $f(x)=\cos^2(5x) \Longrightarrow T=\frac{\pi}{|5|}=\frac{\pi}{5}$

۴) $f(x)=\tan^3\left(\frac{x}{4}\right) \Longrightarrow T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=\frac{\frac{\pi}{1}}{\frac{1}{4}}=4\pi$

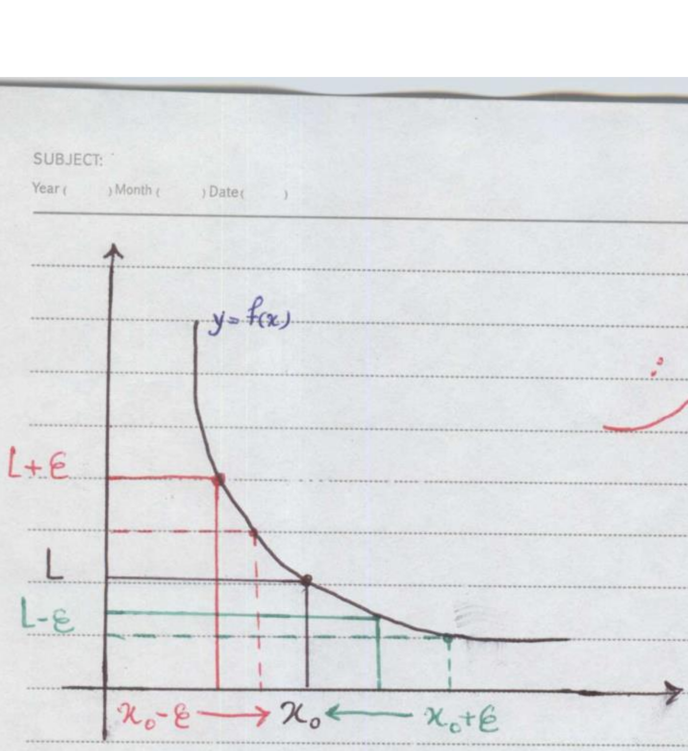
۵) $f(x)=\cot^6\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=\frac{\frac{\pi}{1}}{\frac{1}{2}}=2\pi$

تمرین منزل: دوره تناوب اصلی تابع $f(x)=\sin^2 3x$ برابر دوره تناوب اصلی تابع $g(x)=\cos\frac{x}{a}$ است. $|a|$ را بدست آورید.

$f(x)=\sin^2 3x \longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$

$g(x)=\cos\frac{x}{a} \longrightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 6\pi$

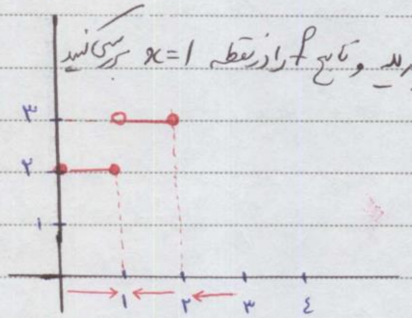
فصل دوم : حد و پیوستگی :



$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ حد تابع وقتی از سمت چپ به x_0 میل می‌کند

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ حد تابع وقتی از سمت راست به x_0 میل می‌کند

مثال : $f(x) = \begin{cases} 2 : 0 \leq x \leq 1 \\ 3 : 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید و تابع f را در نقطه $x=1$ بررسی کنید



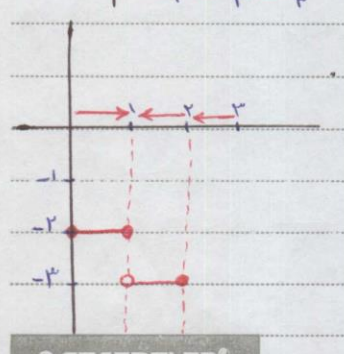
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

در واقع اگر حدها با هم مساوی نباشد حد نداریم

حد ۲ و ۳ با هم برابر نیستند

مثال : تابع $g(x) = \begin{cases} -2 : 0 \leq x \leq 1 \\ -3 : 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.



حد تابع g را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -2$

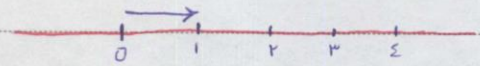
$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -3$

حد راست ≠ حد چپ

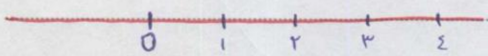
در نقطه $x=1$ حد ندارد

حد نداریم

مثال: بررسی کنید تابع $f(x)=[x]$ در نقطه $x=1$ حد دارد



$0 \le x < 1 \longrightarrow [x]=0$ $\qquad \lim_{x\to 1^-}[x]=0$ ← $x=1$ حد چپ در نقطه



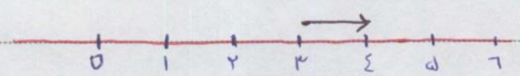
$1 \le x \le 2 \longrightarrow [x]=1$ $\qquad \lim_{x\to 1^+}[x]=1$ ← $x=1$ حد راست در نقطه

تابع حد ندارد

نکته: هر عدد اعشاری که در براکت قرار بگیرد برابر است با عدد صحیح قبلش

مثال: اگر $f(x)=[x]+[5-x]$ باشد. حد این تابع را در نقطه $x=4$ بررسی کنید.

$x=4$ حد چپ در نقطه



$3 \le x < 4 \longrightarrow [x]=3$

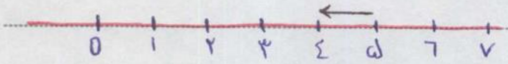
$\hookrightarrow -4 < -x \le -3 \xrightarrow{(+5)} 5-4 < 5-x \le 5-3$

$1 < 5-x < 2 \longrightarrow [5-x]=1$

$\lim_{x\to 4^-}\left([x]+[5-x]\right)=3+1=4$

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حد راست در نقطه $x=4$



$4<x<5 \longrightarrow [x]=4$

$\to -5 < -x < -4 \xrightarrow{(+5)} 5-5 < 5-x < 5-4 \to 0 < 5-x < 1$

$\to [5-x]=0 \qquad \lim_{x\to 4^+}\left([x]+[5-x]\right) = 4+0=4$

تابع در نقطه $x=4$ حد دارد ← حد چپ = حد راست

* قضیه: اگر a و b و m سه عدد حقیقی باشند $f(x)=mx+b$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b$$

کافیست بجای x در مسئله، a قرار دهیم

مثال) $\lim_{x\to 1}(2x+1)=2(1)+1=3$

مثال) $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{2x-1}=\frac{3(2)^2+1}{2(2)-1}=\frac{13}{3}$

مثال) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{x}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1+0}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)=\frac{e^0+1}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

نکته: هر عددی به توان ۰ برسد می‌شود ۱

مثال) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$

صفر حدی 0^- ← | → صفر حدی $+0$

0 صفر مطلق

نکته: صفر حدی یعنی یک اپسیلون به سمت یک مثبت یا یک منفی

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}=\infty$ $\qquad$ $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$ صفر مطلق

نکته: گاهی اوقات پس از محاسبه حد به موارد زیر می‌رسیم: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\times 0$, $0\times\infty$,

$\infty-\infty$ و ... که به اینها صور مبهم گویند و باید برای حل حد از روشهای زیر رفع ابهام می‌کنیم.

۱) روش هم ارزی در توابع جبری: هرگاه x به سمت صفر میل کند، چند جمله‌ای فاقد جمله

ثابت هم ارز جمله با کوچکترین توان خود است.

مثال) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+6x^4+3x^2}{6x^4+7x^5+6x^2}=\frac{3(0)^5+6(0)^4+3(0)^2}{6(0)^4+7(0)^5+6(0)^2}=\frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام → $\lim_{x\to 0}\frac{\text{جمله‌ای که کوچکترین توان دارد}}{\text{جمله‌ای که کوچکترین توان دارد}}=\frac{3\cancel{x^2}}{6\cancel{x^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

STAEDTLER

مثال) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10x^{9}+8x^{7}+5x^{6}}{12x^{20}+3x^{2}} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام → $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\cancel{x^{6}}^{\,x^4}}{3\cancel{x^{2}}} = \dfrac{5x^{4}}{3} = \dfrac{5(0)^{4}}{3} = 0$

مثال) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{13x^{5}+6x}{12x^{9}+2x^{2}} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام → $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6\cancel{x}}{2\cancel{x^{2}}} \Rightarrow \dfrac{6}{2x^{2}} = \dfrac{6}{2(0)^{2}} = \dfrac{6}{0} = \infty$

روش دوم) هم ارز توابع مثلثاتی:

هرگاه x به سمت صفر میل کند داریم:

1) $\sin x \sim x$

2) $\tan x \sim x$

3) $\mathrm{Arc}\sin x \sim x$

4) $\mathrm{Arc}\tan x \sim x$

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^{2}}{2}$

6) $x-\sin x \sim \dfrac{x^{3}}{6}$

7) $\tan x - x \sim \dfrac{x^{3}}{3}$

یادآوری: توابع معکوس مثلثاتی:

$$\begin{cases} \sin \pi/2 = 1 \\ \mathrm{Arc}\sin 1 = \pi/2 \\ \sin^{-1}(1) = \pi/2 \end{cases}$$

معکوس

$$\begin{cases} \cos \pi/2 = 0 \\ \mathrm{Arc}\cos(0) = \pi/2 \\ \cos^{-1}(0) = \pi/2 \end{cases}$$

SUBJECT:
Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{1} = 1$

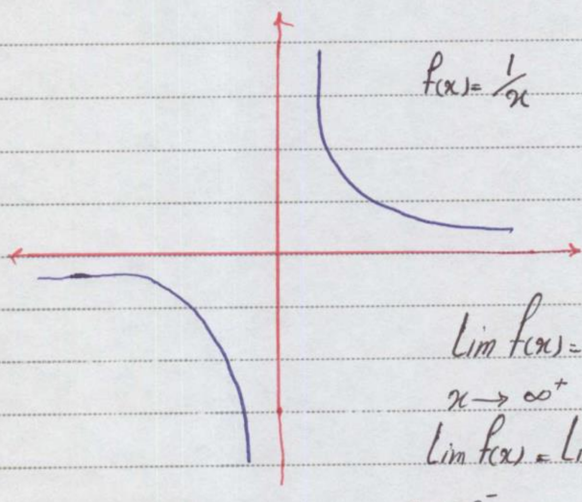
مثال) $\lim_{x \to 0} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

مثال) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\overbrace{\cos(0)}^{1}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\rightarrow \lim \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = 0$

حدود بی نهایت :



$f(x) = 1/x$

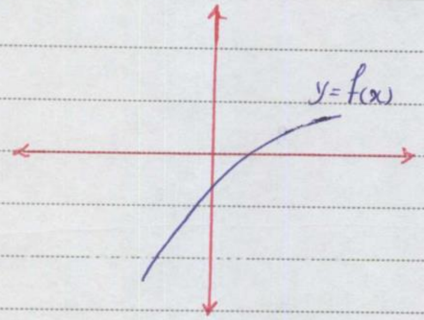
$$\lim_{x \to \infty^+} f(x) = \lim \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty^-} f(x) = \lim \frac{1}{x} = 0$$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$\lim_{x \to \infty^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty^-} f(x) = -\infty$$

نکته ۱:

$$\lim_{x \to \infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = \infty$$

نکته ۲:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{\infty}{\infty}$$

رفع ابهام:

$$\begin{cases} \infty & : n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & : n = m \\ 0 & : n < m \end{cases}$$

بزرگترین توان صورت ← n ؛ بزرگترین توان مخرج ← m

n ← بزرگترین توان صورت

m ← 〃 〃 مخرج

مثال)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^5 + 6x^2 + 2}{6x^3 + 2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

رفع ابهام: ← ∞ طبق جدول بالا ← $4x^5 > 6x^3 \to \infty$

$n > m$

مثال)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^7 + 3x^5 + 2x}{7x^7 + 4x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

حاصل حد ← $\dfrac{6}{7}$

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3+4x^2+2}{9x^5+3x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty}$

حاصل حد $= 0$

نکته ۳) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[p]{ax^p+bx^{p-1}+\dots+k}$

$\lim_{x\to\infty} \pm\sqrt[p]{a}\left(x+\frac{b}{ap}\right) :\longrightarrow$ p زوج

$\lim_{x\to\infty} \sqrt[p]{a}\left(x+\frac{b}{ap}\right) :\longrightarrow$ p فرد

اگر در حد به $-\infty$ و $+\infty$ رسیدیم به روش بالا عمل می‌کنیم.

مثال) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2-4x+5} = \infty-\infty$

p a b

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{ap}\right) = \lim \pm\sqrt{3}\left(x+\frac{-4}{3(2)}\right)$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3}\left(x-\frac{4}{6}\right) = \pm\sqrt{3}\left(\infty-\frac{4}{6}\right) = \infty$

تذکر ۱- نکته ۳) در این نکته بزرگترین توان چند جمله‌ای داخل رادیکال یعنی p با فرجه رادیکال (p) باید برابر شود.

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تذکر ۲ نکته ۳) بی نهایت با هر عددی جمع و تفریق و ضرب شود بی نهایت می شود

واگر بی نهایت تقسیم بر عدد شود حاصل بی نهایت می شود ولی اگر بی نهایت

عدد تقسیم بر بی نهایت شود حاصل آن صفر می شود.

عدد $+ \infty = \infty$

عدد $- \infty = -\infty$

عدد $\times \infty = \infty$

" منفی $\times \infty = -\infty$

$\frac{\infty}{\text{عدد مثبت}} = +\infty$

$\frac{\infty}{\text{عدد منفی}} = -\infty$

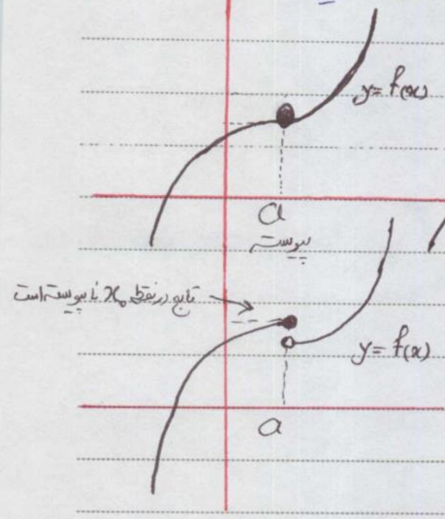
مثال) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+4x-1} - x\right) = \infty - \infty$ مبهم

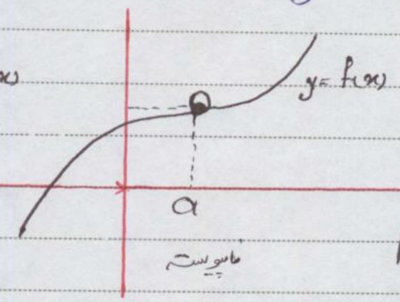
رفع ابهام $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \pm\sqrt{a}\left(x-\frac{b}{ap}\right) = \sqrt{1}\left(\infty - \frac{3}{3}\right) - \infty$

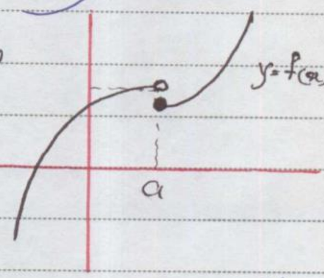
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1}\left(x-\frac{3}{3}\right) - x \longrightarrow \lim \sqrt[3]{1}\,(-1) = -1$

$\lim_{x\to\infty} 1(x-1) - x = -1 \rightarrow \lim 1(-1) = -1$

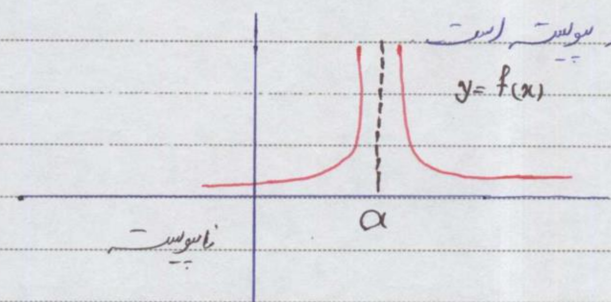
مثال: پیوستگی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ نشان دهید.







نکته: اگر داخل دایره توخالی باشد ناپیوسته است اگر توپر باشد پیوسته است



$y=f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است، هرگاه: ۱- تابع $y=f(x)$ در $x=a$ حدود داشته باشد، یعنی حد چپ مساوی با حد راست باشد ← $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)\right)$

۲- مقدار تابع در نقطه a یعنی $f(a)$ با حد برابر باشد یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

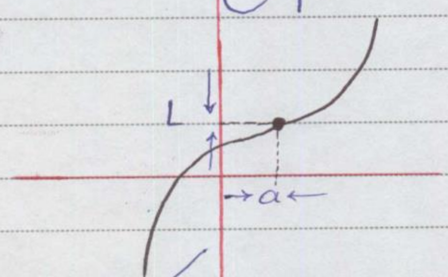
مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & : x\neq 0\\ 0 & : x=0\end{cases}$ مفروض است. پیوستگی تابع $y=f(x)$ را در $x=0$ بررسی کنید

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$ مبهم

رفع ابهام $\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \longrightarrow$ حد $=1$

مقدار تابع $x=0$: $f(0)=0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ تابع در $x=0$ پیوسته نیست

مفهوم حد: تابع f در نقطه a حد دارد اگر روی محور xها از سمت راست یا چپ به سمت a میل یا حرکت کنیم. روی محور yها نیز از سمت بالا یا پایین به یک نقطه نزدیک شویم مانند (L) و اگر به ۲ نقطه برسیم، تابع در نقطه a حد ندارد



مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & : 0<x<1\\ -1 & : x=0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید

① $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(2x^2-1)=-1$

② مقدار تابع در نقطه $x=0$: $f(0)=-1$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Longrightarrow x=0$ تابع پیوسته است

یعنی (مقدار تابع در $x=0$) = (حد تابع در $x=0$)

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

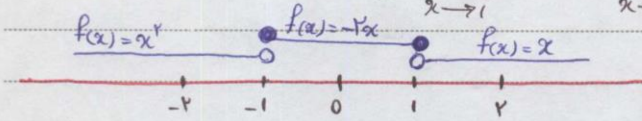
مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 : x<-1 \\ -2x : -1\leq x\leq 1 \\ x : x>1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

بررسی شرط اول

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-2x) = -2(1) = -2$$ ← محاسبه حد چپ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x) = 1$$ ← محاسبه حد راست

$\Rightarrow$ حد چپ $\neq$ حد راست یا $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ تابع در $x=1$ ناپیوسته است



فصل سوم: مشتق

تعریف اول: مشتق تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=x_0$ را با نماد $f'(x_0)$ یا $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ نشان می‌دهند.

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ ← تعریف دوم

مثال: با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید تابع ثابت برابر با صفر است

$$f(x)=C \longrightarrow f'(x)=0$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim\frac{0}{\Delta x}=\lim(0)=0$$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

برای مشتق کاربردهای متفاوتی وجود دارد.

۱- محاسبه شیب تابع در هر نقطه دلخواه

۲- محاسبه سرعت با مشتق گیری از معادله مسیر در هر زمان دلخواه

۳- محاسبه شتاب با ۲ بار مشتق گیری از معادله مسیر در هر زمان دلخواه

مثال: با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید. $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

فرمول مشتق $\rightarrow f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cancel{x^n}+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots+\Delta x^n)-\cancel{x^n}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x^2+\dots+\Delta x^n}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\dots+\Delta x^{n-1}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=nx^{n-1}+\underbrace{\frac{n(\cancel{n-1})}{\cancel{2}}x^{n-2}(0)}_{0}+\cancel{\dots}+\cancel{0^{n-1}}=n.x^{n-1}$$

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

فرمولهای مشتق:

1) $f(x) = C \longrightarrow f'(x) = 0$

مثال: $f(x) = 2 \longrightarrow f'(x) = 0$ و $f(x) = 1000 \longrightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

مثال: $f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x^{2-1} \to 2x^1$ و $f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$

قضیه: اگر $f(x)$ و $g(x)$ ۲ تابع دلخواه باشند، C نیز عددی دلخواه باشد، داریم:

3) $[C\, f(x)]' = C \cdot f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ در عدد ثابت C

مثال: $f(x) = 2x^3 \longrightarrow f'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2$, $f(x) = 3x \longrightarrow f'(x) = 3 \times 1 = 3$

4) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

توجه: بین ۲ تابع یا ۲ عبارت وقتی + یا - می آید. عملیات را جز ۲ قسمت و دو طرف + یا - می بایست جداگانه مشتق گیری شود.

مثال: $f(x) = 4x^5 + 6x^2 \longrightarrow f'(x) = 20x^4 + 12x$

$f(x) = x^3 - 1 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 0 = 3x^2$

(تابع عدد ثابت)

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

5) $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$ مشتق ضرب دو تابع

مثال: $f(x) = x^3 \cdot x^2 \longrightarrow f'(x) = (3x^2)(x^2) + (2x)(x^3)$

مشتق f × عبارت g + مشتق g × عبارت f

6) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$ مشتق تقسیم دو تابع

مثال: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{(2x-0)(x)-(1)(x^2-1)}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{(1+0)(x-1)-(1-0)(x+1)}{(x-1)^2}$

$f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^3} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{\left[1\overset{1-0}{(x-1)} + 1\overset{1+0}{(x+1)}\right]x^3 - 3x^2(x+1)(x-1)}{(x^3)^2}$

$f(x) = \dfrac{1}{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{0(x)-1(1)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{x\cdot(x^2+1)}{x^3} + \dfrac{1}{x+1} \longrightarrow$ مشتق تابع یک + مشتق تابع دو

مشتق صورت، مخرج، مشتق مخرج، عبارت صورت، عبارت مخرج، مشتق صورت، مشتق مخرج، عبارت صورت

$f'(x) = \dfrac{\left[1\cdot(x^2+1) + (2x+0)\cdot x\right]\cdot x^3 - 3x^2\cdot x\cdot(x^2+1)}{(x^3)^2} + \dfrac{0(x+1) - 1(1)}{(x+1)^2}$

7) نکته: اگر u تابعی از x باشد یعنی $u = u(x)$ داریم:

$y = u^n \longrightarrow y' = n\cdot u'\cdot u^{n-1}$

مثال: $y = (x^2+1)^5 \longrightarrow y' = 5\times(2x+0)\times(x^2+1)^4$

مثال: $y = (x^4+x+1)^{10} \longrightarrow y' = 10\times(4x^3+1+0)\times(x^4+x+1)^9$

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$y=(x^3+x)^5(x^6-1) \longrightarrow y'=\underbrace{5(3x^2+1)(x^3+x)^4}_{\text{مشتق عبارت اول}} \times \underbrace{(x^6-1)}_{\text{عبارت دوم}}+\underbrace{(6x^5-0)}_{\text{مشتق عبارت دوم}}\underbrace{(x^3+x)}_{\text{عبارت اول}}$$

$$y=\frac{(x^4+1)^3(x-1)}{(x+1)^2} \longrightarrow y'=\frac{\left[3(4x^3+0)\cdot(x-1)+(1)(x^4+1)^3\right]\times(x+1)^2-(1+0)(x+1)^1\times(x^4+1)^3(x-1)}{(x+1)^4}$$

نکته: اگر u تابعی از x باشد یعنی $u=u(x)$ داریم:

8)
$$y=|u| \longrightarrow y'=\frac{u'\cdot u}{|u|}$$

مثال: $|x^3| \longrightarrow y'=\frac{3x^2\cdot x^3}{|x^3|}$

$$y=|x^4+x^2+1| \longrightarrow y'=\frac{\overbrace{(4x^3+2x+0)}^{u'}\overbrace{(x^4+x^2+1)}^{u}}{x^4+x^2+1}$$

$$y=|(x^2+1)(x-1)| \longrightarrow y'=\frac{\overbrace{2x(x-1)+(1)(x^2+1)}^{u'}\overbrace{(x^2+1)(x-1)}^{u}}{\underbrace{|(x^2+1)(x-1)|}_{|u|}}$$

$$y=|x| \longrightarrow y'=\frac{(1)\cdot x}{|x|}=\frac{x}{|x|}$$

9)
$$y=\sqrt[n]{u^m} \longrightarrow y'=\frac{m\cdot u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

مشتق توابع رادیکالی

مثال: $y=\sqrt[4]{(x^2-1)^3} \longrightarrow y'=\frac{3\times(2x-0)}{4\times\sqrt[4]{(x^2-1)}}$

مشتق تو در تو

$$y=\sqrt{|x^3+x^2+1|} \longrightarrow y'=\frac{1\times\frac{(3x^2+2x+0)\times(x^3+x^2+1)}{|x^3+x^2+1|}}{2\times\sqrt{|x^3+x^2+1|}}$$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$y=|x^5+x|\cdot\sqrt{x+1} \longrightarrow y'=\overbrace{\frac{(5x^4+1)(x^5+x)}{(x^5+x)}}^{\text{مشتق اولی}}\times\overbrace{\sqrt{x+1}}^{\text{عبارت دوم}}+\overbrace{\frac{1\times(1)}{2\times\sqrt{x+1}}}^{\text{مشتق جزء دوم}}\times\overbrace{(x^5+x)}^{\text{عبارت اول}}$$

$$y=\frac{|x^2+1|}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow y'=\frac{\frac{(2x+0)(x^2+1)\times\sqrt{x^2+1}}{|x^2+1|}-\frac{1\times 2x}{2\times\sqrt{(x^2+1)}}\times|x^2+1|}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی :

10) $y=e^u \longrightarrow y'=u'.e^u$

مثال: $y=e^{x^2} \longrightarrow y'=\overbrace{(2x)}^{u'}\cdot e^{x^2} \to e^u$

$y=e^x \longrightarrow y'=(1)\cdot e^x=e^x$

$$y=e^{|x^2+1|} \longrightarrow y'=\underbrace{\frac{(2x)(x^2+1)}{|x^2+1|}}_{\text{مشتق قدرمطلق } u'}\times\underbrace{e^{|x^2+1|}}_{e^u}$$

$y=|e^{x^2+1}| \longrightarrow$ ابتدا از فرمول ۸ $\longrightarrow \frac{\text{فرمول ۸} \times \text{فرمول ۱۰}}{\text{فرمول ۸}}$

$$y'=\frac{u'\times u}{|u|}=\frac{(2x).e^{x^2+1}\times e^{x^2+1}}{|e^{x^2+1}|}$$

11) $y=\ln u \longrightarrow y'=\frac{u'}{u}$

$y=\ln(\underbrace{x^3}_{u}) \longrightarrow y'=\frac{3x^2}{x^3}$

$y=\ln x \longrightarrow y'=\frac{1}{x}$

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

u جدید

$y = e^{\ln x^3} \longrightarrow y' = u' \cdot e^u = \frac{u'_{\text{جدید}}}{u_{\text{جدید}}} \times e^{\ln x^3}$ ابتدا از فرمول ۱۰ و بعد از فرمول ۱۱

$\frac{3x^2}{x^3} \times e^{\ln x^3}$

$y = \ln(e^{x^3}) \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} = \frac{u'_{\text{جدید}} \times e^u}{e^{x^3}} = \frac{3x^2 \times e^{x^3}}{e^{x^3}}$

u

ابتدا از فرمول ۱۱ و بعد از فرمول ۱۰

۱۲) $y = a^u \longrightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

مثال: $y = 2^{(x^3+x)} \longrightarrow y' = (3x^2+1) \times 2^{(x^3+x)} \times \ln 2$

$y = 10^x \longrightarrow y' = 1 \times 10^x \times \ln 10$

۱۳) $y = \log_a^u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$

مثال: $y = \log x^4 \longrightarrow y' = \frac{4x^3}{x^4} \times \frac{1}{\ln a}$

$y = \log_3 x \longrightarrow y' = \frac{(1)}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3}$

$y = 2^{\sqrt{x}} \longrightarrow$ فرمول ۱۲ $\longrightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$

$y' = u' \times 2^{\sqrt{x}} \times \ln 2$

$y' =$ برای حل مشتق $(\sqrt{x})$ از این فرمول ۹ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ حل می‌کنیم $\times 2^{\sqrt{x}} \times \ln 2$

$y' = \frac{(1) \cdot u'}{2\sqrt{(2^x)^{2-1}}} = \frac{(1)\ v\ u'_{\text{جدید}} \times 2^{u_{\text{جدید}}} \times \ln 2}{2 \times \sqrt{2^x}} =$

STAEDTLER®

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date ( )

۱۴) $y=\sin^m u \longrightarrow y'=m\cdot u'\cdot \cos u \cdot \sin^{m-1} u$ مشتق توابع مثلثاتی

مثال: $y=\sin^{2} x \longrightarrow y'=(2)\times(1)\times \cos x \times \sin^{2-1} x$

$y=\sin x \longrightarrow y'=(1)(1)\times \cos x$

۱۵) $y=\cos^m u \longrightarrow y'=-m\cdot u'\cdot \sin u\cdot \cos^{m-1} u$

مثال: $y=\cos^4(x^3+x^2+1) \longrightarrow y'=-4\times(3x^2+2x)\cdot \sin(x^3+x^2+1)\times \cos^3(x^3+x^2+1)$

$y=\cos x \longrightarrow y'=-(1)\times(1)\times \sin x$

$y=\cos^{1}\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow y'=-1\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times \sin\frac{1}{x}\times \underbrace{\cos^{1-1}\frac{1}{x}}_{1}$

با فرمول ۶ حل شود

۱۶) $y=\tan^m u \longrightarrow y'=m\cdot u'\cdot \sec^2 u\cdot \tan^{m-1} u$

$y=\tan^2 x \longrightarrow y'=1\times 1\times \sec^2 x\cdot \tan^{1-1} x$

۱۷) $y=\cot^m u \longrightarrow y'=-m\cdot u'\cdot \operatorname{cosec}^2 u\cdot \cot^{m-1} u$

مثال: $y=\cot^2(|x|) \longrightarrow y'=-2\left(\frac{1\times x}{|x|}\right)\cdot \csc^2|x|\cot^{(1-1)}|x|$

$\frac{u'\cdot u}{|u|}$

STAEDTLER

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

۱۸) $Sec^{m}u \longrightarrow y' = m \cdot u' \cdot (\sec u \cdot \tan u) \cdot Sec^{m-1} \cdot u$

مثال: $y = Sec(\sqrt{x}) \longrightarrow y' = 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (Sec\sqrt{x} \times \tan\sqrt{x}) \cdot Sec^{1-1} \cdot (\sqrt{x})$

با فرمول ۱۸

$\frac{m \cdot u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

۱۹) $y = csc^{m}u \longrightarrow y' = -m \cdot u' \cdot (csc\, u \cdot \cot u) \cdot csc^{m-1} \cdot u$

۲۰) $y = \sin^{-1}u \longrightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \sin^{-1}x \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲۱) $y = \cos^{-1}u \longrightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \cos^{-1}(x^2+1) \longrightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$ $u' = (|x^2+1|)' = \frac{2x(x^2+1)}{|x^2+1|}$

۲۲) $y = \tan^{-1}u \longrightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

$y = \tan^{-1}(|x^2+1|) \longrightarrow y' = \frac{\overbrace{\frac{2x(x^2+1)}{|x^2+1|}}^{u'}}{\underbrace{1+|x^2+1|^2}_{u}}$

۲۳) $y = \cot^{-1}u \longrightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

۲۴) $y = Sec^{-1}u \longrightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

۲۵) $y = csc^{-1} \longrightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تمرین :

$$y = \frac{1+\sin x}{\tan x} \longrightarrow y' = \frac{1+\cos x}{1\times \sec x} = \frac{۲\times \cos x}{\sec x}$$

$$y = e^{\sin x} \longrightarrow y' = u' \cdot e^{u} = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$y = \ln(\cos x) \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y = \sin^{-1}(\tan x) \longrightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^{۲}}} = \frac{\sec x}{\sqrt{1-(\tan)^{۲}}}$$

$$y = \log_{۱۰}(۵x^{۳}+۴x^{۲}+1) \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{۱۵x+۸x}{۵x^{۳}+۴x^{۲}+1} \times \frac{1}{\ln ۱۰}$$

SUBJECT:

Year (   ) Month (   ) Date (   )

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

STAEDTLER®

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

STAEDTLER®