# فصل ۴

# انتگرال

## ۴–۱ انتگرال نامعین

تعریف. فرض کنید $f(x)$ تابعی تعریف شده بر بازه $I$ و تابع $F(x)$ بر بازهٔ $I$ موجود است که $F'(x) = f(x)$. $F$ را یک تابع اولیهٔ $f$ (انتگرال نامعین، ضد مشتق) می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

**نکته ۱. اگر $F(x)$ و $G(x)$ بر بازه $I$ تابع اولیه‌ای برای $f(x)$ باشند $F(x) = G(x) + c$ و بنابراین تابع اولیه با تقریب یک ثابت منحصر به فرد است به این مفهوم که کافی است یکی از تابع اولیه‌های $f$ به صورت $F(x)$ مشخص باشد در این صورت تمام تابع اولیه‌های $f$ عبارتند از $F(x) + c$.**

تذکر۱. انتگرال نامعین خاصیت خطی دارد یعنی اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ عددی ثابت باشد:

$$\int \Big(\lambda f(x) + g(x)\Big)dx = \lambda \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

با توجه به فرمول‌هایی که برای محاسبه مشتق توابع مقدماتی داشتیم، فرمول‌های زیر برای انتگرال نامعین برخی توابع به‌دست می‌آید که درستی آن‌ها با مشتق گرفتن از طرف راست تساوی و به دست آوردن تابع تحت انتگرال در طرف چپ تساوی ثابت می‌شود.

۱) $\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}$ و $n \neq -۱$

۲) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

۳) $\int \sin x dx = -\cos x$

۴) $\int \cos x dx = \sin x$

۵) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$

۶) $\int \cot x dx = \ln|\sin x|$

۷) $\int \sec^۲ x dx = \tan x$

۸) $\int \csc^۲ x dx = -\cot x$

۹) $\int \sec x \tan x dx = \sec x$

۱۰) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$

۱۱) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = \ln|\tan(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴})|$

۱۲) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| = \ln|\tan(\frac{x}{۲})|$

۱۳) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ و $a > ۰\ ,\ a \neq ۱$

۱۴) $\int e^x dx = e^x$

۱۵) $\int \sinh x dx = \cosh x$

۱۶) $\int \cosh x dx = \sinh x$

۱۷) $\int \tanh x dx = \ln(\cosh x)$

۱۸) $\int \coth x dx = \ln|\sinh x|$

۱۹) $\int \text{sech}^۲ x dx = \tanh x$

۲۰) $\int \text{csch}^۲ x dx = -\coth x$

۲۱) $\int \text{sech}x \tanh x dx = -\text{sech}x$

۲۲) $\int \text{csch}x \coth x dx = -\text{csch}x$

۲۳) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = \sin^{-۱}(\frac{x}{a}) + c = -\cos^{-۱}(\frac{x}{a}) + c'$ و $a \neq ۰$

۲۴) $\int \frac{dx}{x^۲ + a^۲} = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}(\frac{x}{a}) + c = -\frac{۱}{a}\cot^{-۱}(\frac{x}{a}) + c'$ و $a \neq ۰$

۲۵) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲ - a^۲}} = \frac{۱}{a}\sec^{-۱}|\frac{x}{a}|$ و $a > ۰$

۲۶) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ + a^۲}} = \sinh^{-۱}(\frac{x}{a})$ و $a > ۰$

۲۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲ - a^۲}} = \cosh^{-۱}(\frac{x}{a})$ و $a > ۰$

۲۸) $$\int \frac{dx}{a^۲ - x^۲} = \begin{cases} \frac{۱}{a}\tanh^{-۱}(\frac{x}{a}) & |x| < |a| \\ \frac{۱}{a}\coth^{-۱}(\frac{x}{a}) & |x| > |a| \end{cases} = \frac{۱}{۲a}\ln|\frac{x+a}{x-a}|$$

**تست ۱** مطلوب است محاسبه $\int \sec\theta d\theta$ (مکانیک، انرژی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\ln\sqrt{\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin\theta}}+c$ ۲) $\ln\sqrt{\frac{۱+\cos\theta}{۱-\cos\theta}}+c$ ۳) $\ln\sqrt{۱+\sin\theta}+c$ ۴) $\ln\sqrt{۱-\sin\theta}+c$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. با توجه به فرمول (۱۱) حاصل برابر $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

$$\sec\theta + \tan\theta = \frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta)}{\cos\theta(۱-\sin\theta)} = \frac{\cos^۲\theta}{(۱-\sin\theta)\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{۱-\sin\theta}$$

$$\Longrightarrow I = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln\left|\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \ln\left|\frac{\cos\theta}{۱-\sin\theta}\right|$$

$$\Longrightarrow ۲I = I + I = \ln\left|\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + \ln\left|\frac{\cos\theta}{۱-\sin\theta}\right| = \ln\left|\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin\theta}\right| \Longrightarrow I = \ln\sqrt{\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin\theta}} + c$$

روش دوم. با توجه به فرمول (۱۱) حاصل برابر $\ln|\tan(\frac{\theta}{۲} + \frac{\pi}{۴})|$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد. با توجه به رابطه (الف ـ ۳) در صفحه ۲۳:

$$\tan(\frac{\theta}{۲}+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\frac{\theta}{۲}+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\frac{\theta}{۲}\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱+\tan\frac{\theta}{۲}}{۱-\tan\frac{\theta}{۲}}=\frac{\cos\frac{\theta}{۲}+\sin\frac{\theta}{۲}}{\cos\frac{\theta}{۲}-\sin\frac{\theta}{۲}}=\sqrt{\left(\frac{\cos\frac{\theta}{۲}+\sin\frac{\theta}{۲}}{\cos\frac{\theta}{۲}-\sin\frac{\theta}{۲}}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin\theta}}$$

$$\Longrightarrow \int \sec\theta\, d\theta=\ln|\tan(\frac{\theta}{۲}+\frac{\pi}{۴})|+c=\ln\sqrt{\frac{۱+\sin\theta}{۱-\sin\theta}}+c$$

## ۴–۲ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

استفاده از فرمولهای بالا برای محاسبه تابع اولیه محدود به تابعهای اشاره شده است. با توجه به تکنیکهای انتگرال گیری، تابع اولیهٔ توابع بیشتری را می‌توان محاسبه نمود.

### ۴–۲–۱ تغییر متغیر

در این روش با یک تغییر متغیر مناسب، به صورت $u=g(x)$ و دیفرانسیل گرفتن از دو طرف آن، کل عبارت تحت انتگرال را بر حسب متغیر جدید و دیفرانسیل آن می‌نویسیم. معمولاً قسمتی از عبارت تحت انتگرال را به عنوان متغیر جدید معرفی می‌کنیم به طوریکه مشتق آن نیز در تابع زیر علامت انتگرال موجود باشد. ضمناً پس از نوشتن انتگرال بر حسب $u$ باید به عبارتی برسیم که محاسبه آن با تکنیکهای انتگرال‌گیری امکان پذیر باشد.

مثال ۱. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۴}}$ ب) $\int\sqrt{۴x^۲+x^۴}dx \quad (x>۰)$ ج) $\int\frac{dx}{x^۲+۲x+۵}$

الف) کافی است از تغییر متغیر $u=x^۲$ و $du=۲xdx$ استفاده کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int\frac{\frac{۱}{۲}du}{\sqrt{۱-u^۲}}=\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}u+c=\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}(x^۲)+c$$

ب) اگر از $x^۲$ زیر رادیکال فاکتور بگیریم، انتگرال به صورت $\int x\sqrt{۴+x^۲}dx$ تبدیل می‌شود.

$$u=۴+x^۲ \Longrightarrow du=۲xdx \Longrightarrow \text{انتگرال}=\frac{۱}{۲}\int\sqrt{u}du=\frac{۱}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۱}{۳}(x^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

ج) در مواجه شدن با $x^۲+ax+b$ در مخرج کسر، آنرا مربع کامل می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int\frac{dx}{(x+۱)^۲+۴}\overset{u=x+۱}{=\!=}\int\frac{du}{u^۲+۴}=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{u}{۲}+c=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{x+۱}{۲}+c$$

$\boxed{\text{تست ۲}}$ تابع اولیه $\frac{\ln x}{x(۱+\ln x)}$ برابر است با: (سیستم ۷۸)

۱) $\ln\left(\frac{۱+\ln x}{x}\right)+c$ ۲) $\ln\left|\frac{x}{۱+\ln x}\right|+c$ ۳) $\ln\left(x(۱+\ln x)\right)+c$ ۴) $\ln(\ln x)+\ln x+۱$

حل: گزینه ۲ درست است. قرار دهید $۱+\ln x=u$ و لذا $\frac{dx}{x}=du$.

$$\int\frac{\ln x}{x(۱+\ln x)}dx=\int\frac{u-۱}{u}du=\int(۱-\frac{۱}{u})du=u-\ln|u|+c'=۱+\ln x-\ln|۱+\ln x|+c'$$

$$=\ln\left|\frac{x}{۱+\ln x}\right|+c$$

تست ۳ $\int \frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با:

۱) $\ln(1+e^x)$ ۲) $x-\ln(1+e^x)$ ۳) $e^x-\ln(1+e^x)$ ۴) $\ln(1+e^x)+e^x$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. با افزودن $\pm e^x$ در صورت کسر:

$$\text{انتگرال} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx = x-\ln(1+e^x)+c$$

روش دوم. باضرب صورت و مخرج در $e^{-x}$ و استفاده از $u=1+e^{-x}$ داریم:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + c = -\ln(1+e^{-x})+c$$

این جواب در گزینه‌ها موجود نیست اما:

$$-\ln(1+e^{-x}) = -\ln(1+\frac{1}{e^x}) = -\ln\frac{e^x+1}{e^x} = -\ln(e^x+1)+\ln e^x = x-\ln(1+e^x)$$

که همان پاسخ گزینه (۲) است.

تست ۴ اگر $\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+1}\,dx = a(x+1)^k + b(x+1)^{k-1}+c$، مقدار $a$ برابر است با:

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{3}{10}$

حل: گزینه ۴ درست است. قرار دهید $u=x+1$ و لذا $x=u-1$ و $du=dx$.

$$\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int ((u-1)^2+(u-1))u^{\frac{1}{3}}\,du = \int (u^{\frac{7}{3}}-u^{\frac{4}{3}})\,du$$

$$= \frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{10}(x+1)^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}} + c$$

نکته ۲. اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای و $\alpha \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، برای محاسبه $\int p(x)(ax+b)^\alpha$ می‌توانیم از $u=ax+b$ استفاده کنیم.

تست ۵ تابع اولیه $f(x)=\frac{(x+2)^5}{(2x-3)^7}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{42}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^6$ ۲) $-\frac{1}{6}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^6$ ۳) $-\frac{1}{42}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^6$ ۴) $-\frac{7}{6}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^6$

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $u=\frac{x+2}{2x-3}$ و $du=\frac{-7}{(2x-3)^2}dx$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^5 \times \frac{1}{(2x-3)^2} \Longrightarrow \int f(x)dx = -\frac{1}{7}\int u^5\,du = -\frac{1}{42}u^6+c = -\frac{1}{42}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^6+c$$

نکته ۳. برای محاسبه $\int \frac{(ax+b)^\alpha}{(cx+d)^{\alpha+2}}dx$ برای هر مقدار $\alpha$ از $u=\frac{ax+b}{cx+d}$ استفاده می‌کنیم.

تست ۶ اگر $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ حاصل $\frac{1}{2}\int \sqrt{1+\sin x}dx$ برابر است با:

۱) $-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ ۲) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ ۳) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ ۴) $-\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. با توجه به اتحاد $1+\sin x = \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2$ انتگرال به

صورت $\frac{۱}{۲}\int \left|\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right|dx$ تبدیل می‌شود و چون $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ پس $\frac{\pi}{۲}>\frac{x}{۲}>\frac{\pi}{۴}$ و لذا $\cos\frac{x}{۲}$ و $\sin\frac{x}{۲}$ و مجموع آنها مثبت است.

$$\text{انتگرال}=\frac{۱}{۲}\int\left(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right)dx=-\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}+c$$

روش دوم. عبارت را در $\sqrt{۱-\sin x}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+\sin x}=\frac{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}{۲\sqrt{۱-\sin x}}=\frac{|\cos x|}{۲\sqrt{۱-\sin x}}$$

با توجه اینکه $x$ در ربع دوم است، $|\cos x|=-\cos x$. حال از $u=\sin x$ و $du=\cos x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int\frac{-\cos x}{۲\sqrt{۱-\sin x}}dx=-\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{\sqrt{۱-u}}+c=\sqrt{۱-u}+c=\sqrt{۱-\sin x}+c$$

با اتحادی مشابه آنچه در روش اول دیدیم $۱-\sin x=(\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲})^۲$ و پاسخ انتگرال $|\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}|$ است. ولی چون $\frac{\pi}{۲}>\frac{x}{۲}>\frac{\pi}{۴}$ پس $\sin\frac{x}{۲}>\cos\frac{x}{۲}$ و می‌توان علامت قدرمطلق را حذف نمود.

**نکته ۴. برای محاسبه $\int\sqrt{۱\pm\sin x}\,dx$ استفاده از اتحاد $۱\pm\sin x=(\sin\frac{x}{۲}\pm\cos\frac{x}{۲})^۲$ و برای محاسبه $\int\sqrt{۱\pm\cos x}\,dx$ استفاده از اتحادهای $۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ و $۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$ می‌تواند مفید باشد.**

### ۲-۲-۴ انتگرال‌گیری از توابع مثلثاتی

**۱) محاسبه $\int\sin^m x\cos^n x dx$ وقتی** $m,n\geq ۰$

الف) برای محاسبه انتگرال در حالتی که حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد، از توان فرد یک واحد را جدا کرده و آنچه باقی می‌ماند را برحسب عامل دوم می‌نویسیم. یعنی از فرمول $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ یا $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

ب) در حالتی که هر دو توان زوج بوده و همزمان صفر نباشند، یکی از توابع را به تابع دیگر تبدیل کرده و از فرمول‌های زیر برای کاهش توان استفاده می‌کنیم.

$$\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\quad\text{و}\quad\sin^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

تذکر۲. توجه کنید که روشهای اشاره شده در حالتی که با $\int\sin^k x\,dx$ و $\int\cos^k x\,dx$ مواجه هستیم نیز قابل استفاده است.

تذکر۳. در حالتی که $m$ و $n$ هر دو فرد باشند، بهتر است محاسبه با کوچکترین توان فرد انجام شود.

تذکر۴. اگر $m=n$ بهتر است ابتدا از فرمول $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ استفاده کنیم.

**مثال ۲.** حاصل هر یک از انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int\cos^۳ x\sin^۴ x dx$ ب) $\int\cos^۴ x dx$

الف) کافی است $\cos^۳ x$ را به صورت $\cos^۳ x=\cos x(۱-\sin^۲ x)$ بنویسیم.

$$\int \cos^{3} x \sin^{4} x dx = \int \cos x(\sin^{4} - \sin^{6} x) dx$$

و با تغییر متغیر $u = \sin x$ داریم:

$$\text{انتگرال} = \int (u^{4} - u^{6}) du = \frac{1}{5}u^{5} - \frac{1}{7}u^{7} + c = \frac{\sin^{5} x}{5} - \frac{\sin^{7} x}{7} + c$$

ب) از روش کاهش توان استفاده می‌کنیم.

$$\int \cos^{4} x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^{2} dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^{2} 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

**۲) محاسبه انتگرال حاصلضرب سینوس و کسینوس**

برای محاسبه انتگرالهای به صورت $\int \sin mx \cos nx dx$ یا $\int \sin mx \sin nx dx$ یا $\int \cos mx \cos nx dx$ از فرمولهای تبدیل ضرب به جمع در صفحه ۲۴ کمک می‌گیریم.

**مثال ۳.** حاصل $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$ را محاسبه کنید.

با توجه به رابطه (د ـ ۴) در صفحه ۲۴ داریم:

$$\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}\big(\sin(3x + 5x) + \sin(3x - 5x)\big) = \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$$

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x) \, dx = -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

**۳) محاسبه $\int \tan^{m} x \sec^{n} x dx$ وقتی که $m, n \geq 0$**

این نوع انتگرال با تغییر متغیر $u = \sec x$ یا $u = \tan x$ قابل حل است.

الف) اگر $n \neq 0$ زوج باشد، از $\sec^{n} x$ تابع $\sec^{2} x$ را جدا کرده و از اتحاد $\sec^{2} x = 1 + \tan^{2} x$ باقیمانده را برحسب $\tan x$ می‌نویسیم و از $u = \tan x$ استفاده می‌کنیم. در این حالت اگر $n = 0$ و $m > 2$، $\tan^{2} x$ را جدا کرده، آن را به صورت $\sec^{2} x - 1$ می‌نویسیم تا توان $\tan x$ کاهش یابد.

ب) اگر $m$ فرد باشد، $\sec x \tan x$ را جدا می‌کنیم، سپس $\tan x$ که با توان زوج باقیمانده است را برحسب $\sec x$ نوشته و از $u = \sec x$ استفاده می‌کنیم.

ج) در حالتی که $n$ فرد و $m$ زوج باشد، $\tan x$ را به $\sec x$ تبدیل کرده تا به مجموع انتگرال‌های به صورت $\int \sec^{k} x dx$ که $k$ فرد است تبدیل شود و برای محاسبه آن از روش جزء به جزء استفاده می‌شود.

**تذکر۵.** روش های مورد بحث را می‌توان برای محاسبه $\int \cot^{m} x \csc^{n} x \, dx$ نیز بکار برد.

**مثال ۴.** حاصل هر یک از انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\int \tan^{5} x \sec^{4} x dx$  ب) $\int \sec^{3} x \tan^{3} x dx$  ج) $\int \cot^{3} x \csc x \, dx$

الف) روش اول. چون توان $\sec x$ زوج است، $\sec^{2} x$ را جدا کرده و $\sec^{2} x$ باقیمانده را به صورت $1 + \tan^{2} x$ می‌نویسیم و از $u = \tan x$ و $du = \sec^{2} x \, dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int \tan^{۵} x(\tan^{۲} x + ۱) \sec^{۲} x dx = \int (u^{۷} + u^{۵})du = \frac{۱}{۸}u^{۸} + \frac{۱}{۶}u^{۶} + c$$

$$= \frac{۱}{۸}\tan^{۸} x + \frac{۱}{۶}\tan^{۶} x + c$$

روش دوم. چون توان $\tan x$ فرد است، از $u = \sec x$ و $du = \sec x \tan x\ dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int \tan^{۴} x \sec^{۳} x(\sec x \tan x dx) = \int (\sec^{۲} x - ۱)^{۲} \sec^{۳} x(\sec x \tan x dx)$$

$$= \int (u^{۲} - ۱)^{۲} u^{۳} du = \int (u^{۷} - ۲u^{۵} + u^{۳})du = \frac{۱}{۸}u^{۸} - \frac{۱}{۳}u^{۶} + \frac{۱}{۴}u^{۴} + c$$

$$= \frac{۱}{۸}\sec^{۸} x - \frac{۱}{۳}\sec^{۶} x + \frac{۱}{۴}\sec^{۴} x + c$$

این جواب گر چه در ظاهر با جواب روش اول متفاوت است، اما با کمک اتحادهای مثلثاتی به جواب روش اول قابل تبدیل است.

ب) $\sec x \tan x$ را جدا کرده و از فرمول $\tan^{۲} x = \sec^{۲} - ۱$ و تغییر متغیر $u = \sec x$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int \sec x \tan x . \sec^{۲} x(\sec^{۲} x - ۱)dx = \int (u^{۴} - u^{۲})du = \frac{۱}{۵}u^{۵} - \frac{۱}{۳}u^{۳} + c$$

$$= \frac{\sec^{۵} x}{۵} - \frac{\sec^{۳} x}{۳} + c$$

ج) چون توان $\cot x$ فرد است، عبارت تحت انتگرال را به صورت $\cot x(\csc^{۲} x - ۱) \csc x dx$ نوشته و از تغییر متغیر $u = \csc x$ و $du = -\csc x \cot x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int (\csc^{۲} x - ۱) \cot x \csc x dx = -\int (u^{۲} - ۱)du = -\frac{۱}{۳}u^{۳} + u + c$$

$$= -\frac{۱}{۳}\csc^{۳} x + \csc x + c$$

**مثال ۵.** اگر $I_n = \int \tan^n x dx$ یک فرمول کاهشی برای $I_n$ $(n \geq ۳)$ بیابید و با استفاده از آن $I_۴$ را بیابید.

با توجه به (۳ ـ الف) در صفحه قبل:

$$I_n = \int \tan^{۲} x \tan^{n-۲} x\ dx = \int (\sec^{۲} x - ۱)\tan^{n-۲} x\ dx = \int \sec^{۲} x \tan^{n-۲} x dx - \int \tan^{n-۲} x\ dx$$

$$= \frac{۱}{n-۱}\tan^{n-۱} x - I_{n-۲} \implies I_n = \frac{۱}{n-۱}\tan^{n-۱} x - I_{n-۲}$$

بنابراین $I_۴ = \frac{۱}{۳}\tan^{۳} x - I_۲$ و $I_۲ = \int \tan^{۲} x dx = \int (\sec^{۲} x - ۱)dx = \tan x - x$ پس:

$$\int \tan^{۴} x dx = \frac{۱}{۳}\tan^{۳} x - \tan x + x + c$$

**تذکر ۶.** با محاسبه‌ای مشابه آنچه در مورد $I_۴$ انجام شد، داریم:

$$\int \tan^{۲n} x dx = \frac{۱}{۲n-۱}\tan^{۲n-۱} x - \frac{۱}{۲n-۳}\tan^{۲n-۳} x \pm \cdots + (-۱)^n x + c$$

$$\int \tan^{۲n+۱} x dx = \frac{۱}{۲n}\tan^{۲n} x - \frac{۱}{۲n-۲}\tan^{۲n-۲} x \pm \cdots + (-۱)^{n+۱}\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot^{2n} x dx = -\frac{1}{2n-1}\cot^{2n-1} x + \frac{1}{2n-3}\cot^{2n-3} x \mp \cdots + (-1)^n x + c$$

$$\int \cot^{2n+1} x dx = -\frac{1}{2n}\cot^{2n} x + \frac{1}{2n-2}\cot^{2n-2} x \mp \cdots + (-1)^n \ln|\sin x| + c$$

۴) انتگرال از توابع گویا برحسب سینوس و کسینوس

برای محاسبه این نوع انتگرال‌ها با استفاده از تغییر متغیر $z = \tan\frac{x}{2}$ و جایگذاری

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{و} \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{و} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

به انتگرال تابعی گویا برحسب $z$ خواهیم رسید.

مثال ۶. حاصل $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ را به دست آورید.

تابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$ است. پس از $z = \tan\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| + c = \ln|1+\tan\frac{x}{2}| + c$$

**نکته ۵. اگر تابع تحت انتگرال در این حالت را $f(\sin x, \cos x)$ بنامیم، تغییر متغیرهای زیر معمولاً مناسب‌تر هستند.**

**الف) اگر $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ یعنی اگر تابع بر حسب $\sin x$ فرد باشد، از تغییر متغیر $z = \cos x$ استفاده می‌شود.**

**ب) اگر $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ یعنی اگر تابع بر حسب $\cos x$ فرد باشد، از تغییر متغیر $z = \sin x$ استفاده می‌شود.**

**ج) اگر $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ از تغییر متغیر $z = \tan x$ استفاده می‌شود.**

**نکته ۶. برای محاسبه $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$ صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ تقسیم کرده و سپس از $z = \tan x$ استفاده می‌کنیم.**

مثال ۷. حاصل $\int \frac{\cos^3 x dx}{1+\sin^2 x}$ را به دست آورید.

با تبدیل $\cos x \to -\cos x$ تابع تحت انتگرال قرینه می‌شود پس از تغییر متغیر $z = \sin x$ استفاده می‌کنیم.

$$dz = \cos x dx \implies \cos^3 x dx = \cos^2 x(\cos x dx) = (1-z^2)dz$$

$$\text{انتگرال} = \int \frac{1-z^2}{1+z^2}dz = \int(-1+\frac{2}{1+z^2})dz = -z + 2\tan^{-1} z + c = -\sin x + 2\tan^{-1}(\sin x) + c$$

$\boxed{\text{تست ۷}}$ حاصل $I = \int \frac{dx}{2+\cos x}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}) + c$

۲) $2\sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}) + c$

۳) $2\sqrt{3}\tan^{-1}(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}) + c$

۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}) + c$

حل: گزینه ۴ درست است. از تغییر متغیر $z = \tan\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$I = \int \frac{\frac{۲dz}{۱+z^۲}}{۲+\frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}} = \int \frac{۲dz}{۳+z^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \tan^{-۱} \frac{z}{\sqrt{۳}} + c = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \tan^{-۱}(\frac{\tan \frac{x}{۲}}{\sqrt{۳}}) + c$$

**تست ۸** حاصل $I = \int \frac{dx}{۱+۳\cos^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\tan^{-۱}(\frac{\tan x}{۲})$ ۲) $\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{\tan x}{۲})$ ۳) $\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(۲\tan x)$ ۴) $۲\tan^{-۱}(\frac{\tan x}{۲})$

**حل:** گزینه ۲ درست است. با توجه به نکته ۶ در صفحه قبل صورت و مخرج کسر را بر $\cos^۲ x$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم $z = \tan x$.

$$I = \int \frac{\sec^۲ x dx}{\sec^۲ x + ۳} = \int \frac{\sec^۲ x dx}{\tan^۲ x + ۴} = \int \frac{dz}{z^۲+۴} = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{z}{۲} + c = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{\tan x}{۲}) + c$$

### ۴-۲-۳ انتگرال از توابع رادیکالی

۱) اگر تابع تحت انتگرال به صورت $\sqrt[n]{ax+b}$ باشد، معمولاً از تغییر متغیر $ax+b=u^n$ استفاده می‌کنیم و در صورتی که چندجمله رادیکالی با فرجه‌های مختلف موجود باشد $n$ کوچکترین مضرب مشترک فرجه‌ها است.

۲) در صورتی که تابع تحت انتگرال به صورت $\sqrt{x^۲+a^۲}$ یا $\sqrt{a^۲-x^۲}$ یا $\sqrt{x^۲-a^۲}$ باشد از تغییر متغیر مثلثاتی یا هیپربولیک استفاده می‌شود.

الف) برای $\sqrt{a^۲-x^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\sin\theta$ که $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$

ب) برای $\sqrt{x^۲-a^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\sec\theta$ و $\theta \in [۰,\pi] - \{\frac{\pi}{۲}\}$ یا برای حالت $x \ge a$ از تغییر متغیر $x = a\cosh t$ و $t \ge ۰$.

ج) برای $\sqrt{x^۲+a^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\tan\theta$ و $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ یا تغییر متغیر $t \in \mathbb{R}$ و $x = a\sinh t$.

تذکر۷. اگر تابع زیر رادیکال دارای جملهٔ درجه اول هم باشد، با مربع کامل کردن آن را به فرم (۲) تبدیل می‌کنیم.

مثال ۸. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int \frac{xdx}{\sqrt[۳]{۲x+۱}}$ ب) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۴+\sqrt[۳]{x})}$

ج) $\int \frac{x^۳dx}{\sqrt{۴+x^۲}}$ د) $\int \sqrt{۲x-x^۲}dx$

الف) از تغییر متغیر $۲x+۱=u^۳$ و $۲dx = ۳u^۲du$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int \frac{\frac{۱}{۲}(u^۳-۱)}{u} \times \frac{۳}{۲}u^۲du = \frac{۳}{۴}\int (u^۴-u)du = \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۵}u^۵ - \frac{۱}{۲}u^۲) + c$$

$$= \frac{۳}{۲۰}(۲x+۱)^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۳}{۸}(۲x+۱)^{\frac{۲}{۳}} + c$$

ب) با توجه به ظاهرشدن $\sqrt[۳]{\ }$ و $\sqrt{\ }$ ابتدا فرجه مشترک یعنی $\sqrt[۶]{\ }$ را در نظر می‌گیریم و $x = u^۶$ پس $dx = ۶u^۵du$.

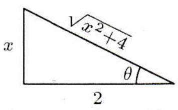
$$\text{انتگرال} = \int \frac{۶u^۵du}{u^۳(۴+u^۲)} = ۶\int \frac{u^۲du}{۴+u^۲} = ۶\int \left(۱ - \frac{۴}{u^۲+۴}\right)du = ۶u - ۱۲\tan^{-۱}\frac{u}{۲} + c$$

$$\Longrightarrow \text{انتگرال} = 6\sqrt[6]{x} - 12\tan^{-1}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + c$$

ج) از تغییر متغیر $x = 2\tan\theta$ استفاده می‌کنیم پس $dx = 2\sec^2\theta d\theta$.

$$\text{انتگرال} = \int \frac{8\tan^3\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}(2\sec^2\theta d\theta) = 8\int \tan^3\theta\sec\theta d\theta = 8\int \sec\theta\tan\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta$$
$$= 8\left(\frac{1}{3}\sec^3\theta - \sec\theta\right) + c$$

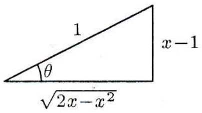
برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی ایجاد شده برحسب $x$ می‌توان از اتحادهای مثلثاتی استفاده کرد. اما بهتر است مثلثی قائم‌الزاویه رسم کنیم و یکی از زوایای غیر قائمه آنرا $\theta$ بنامیم. چون $\tan\theta = \frac{x}{2}$ پس ضلع روبرو به $\theta$ را $x$ و ضلع مجاور را ۲ قرار می‌دهیم. (همواره بایداضلاع را طوری نامگذاری کرد که نسبت مثلثاتی که در تغییر متغیر انتخاب کرده‌ایم ایجاد شود.) وتر این مثلث $\sqrt{x^2+4}$ است و لذا:




$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \Longrightarrow \text{انتگرال} = \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}} - 4\sqrt{x^2+4} + c$$

د) عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$ پس باید از تغییر متغیر $x - 1 = \sin\theta$ و $dx = \cos\theta d\theta$ استفاده کرد که $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\text{انتگرال} = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$
$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + c$$




$$\sin\theta = x - 1 \Longrightarrow \cos\theta = \sqrt{2x - x^2}$$
$$\text{انتگرال} = \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + c$$

**تست ۹** انتگرال $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln\left|1 + x^{\frac{1}{4}}\right| + c$

۲) $\sin^{-1}(x^2 - \sqrt{x}) + c$

۳) $\ln\left|\sin^{-1}\sqrt{x}\right| + c$

۴) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \ln\left|x^2 - \sqrt{x}\right| + c$

حل: گزینه ۱ درست است. فرجه مشترک ۴ است پس $x = u^4$ و $dx = 4u^3du$.

$$\text{انتگرال} = \int \frac{4u^5}{1+u}du = 4\int\left(\frac{u^5+1}{u+1} - \frac{1}{u+1}\right)du = 4\int(u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1})du$$
$$= \frac{4}{5}u^5 - u^4 + \frac{4}{3}u^3 - 2u^2 + 4u - 4\ln(u+1) + c$$
$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln(x^{\frac{1}{4}} + 1) + c$$

**تست ۱۰** مقدار $\int \frac{x^۳dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ برابر است با: (سیستم ۷۸)

۱) $-x^۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$ ۲) $x^۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$

۳) $x^۲\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$ ۴) $-x^۲\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. قرار دهید $u=۱-x^۲$ و $du=-۲xdx$

$$\text{انتگرال} = \int \frac{x.x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}dx = -\frac{۱}{۲}\int\frac{۱-u}{\sqrt{u}}du = -\frac{۱}{۲}\int(u^{-\frac{۱}{۲}}-u^{\frac{۱}{۲}})du = -\sqrt{u}+\frac{۱}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}+c$$

$$=\sqrt{u}(-۱+\frac{۱}{۳}u)+c=\sqrt{u}\Big((-۱+u)-\frac{۲}{۳}u\Big)+c=\sqrt{۱-x^۲}\big(-x^۲-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)\big)+c$$

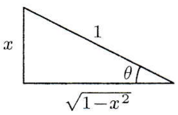
$$=-x^۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

روش دوم. از $x=\sin\theta$ و $dx=\cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int\frac{\sin^۳\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{۱-\sin^۲\theta}}=\int\frac{\sin^۳\theta\cos\theta d\theta}{\cos\theta}=\int\sin\theta(۱-\cos^۲\theta)d\theta=-\cos\theta+\frac{۱}{۳}\cos^۳\theta+c$$

$$=-\cos\theta\big(۱-\frac{۱}{۳}\cos^۲\theta\big)+c=-\cos\theta\big(\sin^۲\theta+\frac{۲}{۳}\cos^۲\theta\big)+c$$

و با توجه به مثلث روبرو $\cos\theta=\sqrt{۱-x^۲}$ و بنابراین:




$$\text{انتگرال}=-x^۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

روش سوم. با جزء به جزء $u=x^۲$ و $dv=\frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۲}}$ داریم $du=۲xdx$ و $v=-\sqrt{۱-x^۲}$

$$\text{انتگرال}=-x^۲\sqrt{۱-x^۲}+۲\int x\sqrt{۱-x^۲}\,dx=-x^۲\sqrt{۱-x^۲}-\frac{۲}{۳}(۱-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

### ۴-۲-۴ روش تجزیه به کسرهای جزئی

این روش برای محاسبهٔ انتگرال توابع گویا (حاصل تقسیم دو چند جمله‌ای) به‌کار می‌رود. به این ترتیب که با تقسیم کردن صورت بر مخرج (در صورت نیاز) تابع تحت انتگرال به عبارتی گویا تبدیل می‌شود که در آن درجهٔ صورت از مخرج کمتر است. حال مخرج کسر را به صورت ضرب عوامل درجه اول در عبارات درجه دوم فاقد ریشه ($\Delta<۰$) می‌نویسیم و سپس به جای هر یک از این عوامل، کسرهای جزئی را طبق قواعد زیر می‌نویسیم.

**الف)** بجای عبارت $(x-a)^k$ که $k\in\mathbb{N}$، مجموع $k$ کسر به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{A_۱}{x-a}+\frac{A_۲}{(x-a)^۲}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

**ب)** بجای عبارت $(x^۲+ax+b)^k$ که $\Delta<۰$، $k$ کسر زیر قرار می‌گیرد.

$$\frac{B_۱x+C_۱}{x^۲+ax+b}+\frac{B_۲x+C_۲}{(x^۲+ax+b)^۲}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^۲+ax+b)^k}$$

برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی را در مخرج کسر ضرب کرده و ضرایب چندجمله‌ایهای ایجاد شده در دو طرف را با هم مقایسه کنیم.

نکته ۷. اگر عبارت گویا، $f(x)$ باشد در حالت (الف) داریم $A_k=\lim_{x\to a}(x-a)^kf(x)$

**نکته ۸. اگر عبارت گویا، $f(x)$ باشد برای محاسبه $A_i$ ها در حالت (الف) می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.**

$$A_{k-۱}=\frac{d}{dx}\Big((x-a)^kf(x)\Big)\Big|_{x=a} \quad و \quad \dots \quad و \quad A_۱=\frac{۱}{(k-۱)!}\frac{d^{k-۱}}{dx^{k-۱}}\Big((x-a)^kf(x)\Big)\Big|_{x=a}$$

**توجه کنید که بنا به روابط بالا برای محاسبه $A_i$ در واقع دو طرف عبارت تجزیه کسرها را در $(x-a)^k$ ضرب می‌کنیم و به تعداد توان موجود برای $(x-a)$ پس از ضرب، از دو طرف در $x=a$ مشتق می‌گیریم تا $A_i$ به دست آید.**

**نکته ۹. همواره برای یافتن ارتباط بین برخی از ضرایب (در واقع ضرایب کسرهایی که اختلاف درجه صورت و مخرج برابر یک است) و در هر دو حالت، می‌توانید دو طرف عبارت را در $x$ ضرب کرده و $x$ را به بینهایت میل دهید.**

مثال ۹. حاصل هر یک از انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int\frac{dx}{x^۲(x-۱)}$     ب) $\int\frac{۲x^۵-۲x+۱}{x^۴-۱}dx$

الف) عبارات ظاهر شده در مخرج خطی هستند پس:

$$f(x)=\frac{۱}{x^۲(x-۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^۲}+\frac{C}{x-۱} \qquad (*)$$

$$\text{نکته ۷} \Longrightarrow B=\lim_{x\to ۰}x^۲f(x)=-۱ \quad و \quad C=\lim_{x\to ۱}(x-۱)f(x)=۱$$

با توجه به نکته ۸، $A$ را می‌توان با محاسبه مشتق اول $x^۲f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ در نقطه $x=۰$ به دست آورد. روش دیگر با توجه به اینکه اختلاف درجه صورت و مخرج در کسر شامل $A$ برابر یک است، استفاده از نکته ۹ می‌باشد. دو طرف تساوی $(*)$ را در $x$ ضرب کرده و در بینهایت حد می‌گیریم.

$$xf(x)=\frac{x}{x^۲(x-۱)}=A+\frac{Bx}{x^۲}+\frac{Cx}{x-۱}\xrightarrow{x\to+\infty}۰=A+C\Longrightarrow A=-۱$$

$$\int\frac{dx}{x^۲(x-۱)}=\int\left(-\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x-۱}\right)dx=-\ln|x|+\frac{۱}{x}+\ln|x-۱|+c=\ln\left|\frac{x-۱}{x}\right|+\frac{۱}{x}+c$$

ب) درجه صورت از مخرج بیشتر است پس صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم که خارج قسمت $۲x$ است.

$$\int\frac{۲x^۵-۲x+۱}{x^۴-۱}dx=\int(۲x+\frac{۱}{x^۴-۱})dx=x^۲+\int\frac{dx}{x^۴-۱}$$

برای محاسبه انتگرال ایجاد شده، مخرج کسر را به صورت $x^۴-۱=(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)$ می‌نویسیم.

$$f(x)=\frac{۱}{x^۴-۱}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}+\frac{Cx+D}{x^۲+۱}$$

$$\text{نکته ۷} \Longrightarrow A=\lim_{x\to ۱}(x-۱)f(x)=\frac{۱}{۴} \quad و \quad B=\lim_{x\to -۱}(x+۱)f(x)=-\frac{۱}{۴}$$

برای محاسبه $D$، بجای $x$ عددی دلخواه و مثلاً صفر را قرار می‌دهیم تا $-۱=-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}+\frac{D}{۱}$ و لذا $D=-\frac{۱}{۲}$ به دست آید. برای محاسبه $C$، حاصل $xf(x)$ را در بینهایت محاسبه می‌کنیم.

$$xf(x)=\frac{x}{x^4-1}=\frac{Ax}{x-1}+\frac{Bx}{x+1}+\frac{Cx^2+Dx}{x^2+1}\xrightarrow{x\to+\infty}0=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+C\implies C=0$$

$$\int\frac{2x^5-2x+1}{x^4-1}dx=x^2+\frac{1}{4}\int\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\Big)dx=x^2+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$$

**نکته ۱۰.** در دو حالت زیر می‌توانیم ضرایب تجزیه به کسرهای جزئی را سریعتر محاسبه کنیم.

الف) اگر با کسر $\frac{1}{f(x)g(x)}$ مواجه باشیم که در آن $f$ و $g$ دو چندجمله‌ای متمایز هستند، که اختلاف آنها عددی ثابت است. در این صورت:

$$\frac{1}{f(x)g(x)}=\frac{1}{g(x)-f(x)}\Big(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\Big)$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\Big(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\Big)$$

$$\frac{1}{(x^2+a)(x^2+b)}=\frac{1}{b-a}\Big(\frac{1}{x^2+a}-\frac{1}{x^2+b}\Big)$$

همواره معکوسِ اختلاف مخرج کسر دوم و اول یعنی $\frac{1}{b-a}$ را در تجزیه مشاهده می‌کنیم.

ب) اگر مخرج کسر به صورت $x(x^2+ax+b)$ باشد که $b\neq 0$ آنگاه:

$$\frac{1}{x(x^2+ax+b)}=\frac{1}{b}\Big(\frac{1}{x}-\frac{x+a}{x^2+ax+b}\Big)$$

توجه کنید که $\frac{1}{b}$ برابر معکوس ضریب ثابت جمله درجه دوم و همواره در تجزیه مشاهده می‌شود. صورت کسری که مخرج آن درجه دوم است، خارج قسمت تقسیم عبارت درجه دوم بر جمله دیگر یعنی $x$ است.

$\boxed{\text{تست ۱۱}}$ انتگرال $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ برابر است با: (ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{x^2}{x-1}+\ln\frac{x-1}{x}+c$

۲) $\frac{-x}{(x-1)^2}+\ln\frac{x+1}{x}+c$

۳) $\frac{-x}{(x+1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x}+c$

۴) $\frac{-x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x}+c$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به روش تجزیه به کسرهای جزئی و نکته ۸ در صفحه قبل:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

$$A=\lim_{x\to 0}xf(x)=-1\quad,\quad D=\lim_{x\to 1}(x-1)^3f(x)=2$$

$$C=\frac{d}{dx}\big((x-1)^3f(x)\big)\Big|_{x=1}=\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^3+1}{x}\Big)\Big|_{x=1}=\frac{d}{dx}\Big(x^2+\frac{1}{x}\Big)\Big|_{x=1}=\Big(2x-\frac{1}{x^2}\Big)\Big|_{x=1}=1$$

$$D=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\big((x-1)^3f(x)\big)\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}\Big(2+\frac{2}{x^3}\Big)\Big|_{x=1}=2$$

$$\int f(x)dx=\int\Big(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\Big)dx$$

$$=-\ln x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+c=\ln\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{x}{(x-1)^2}+c$$

**تست ۱۲** حاصل $I = \int \frac{dx}{x(x^5 - 1)}$ برابر است با: (راهنمایی: از تغییر متغیر $u = x^5$ استفاده نمایید.)

۱) $\ln\left|\frac{x^5 - 1}{x^5}\right| + c$ ۲) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5 - 1}{x^5}\right| + c$ ۳) $\ln\left|\frac{x^5}{x^5 - 1}\right| + c$ ۴) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5 - 1}\right| + c$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. اگر $u = x^5$ آنگاه $du = 5x^4 dx$ و لذا $\frac{dx}{x(x^5 - 1)} = \frac{\frac{du}{5x^4}}{x(u - 1)} = \frac{1}{5}\frac{du}{u(u - 1)}$. حال باید کسر را تجزیه کنیم. در واقع $\frac{1}{u(u - 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u - 1}$ که ضرایب را مانند سؤالات قبل می‌توان محاسبه نمود. اما چون اختلاف دو عامل $u$ و $u - 1$ برابر عددی ثابت است، از نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه قبل آنرا تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{1}{u(u - 1)} = \frac{1}{u - (u - 1)}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u}$$

$$I = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{5}\Big(\ln|u - 1| - \ln|u|\Big) + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u - 1}{u}\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5 - 1}{x^5}\right| + c$$

روش دوم. همین سؤال را با $u = \frac{1}{x}$ نیز می‌توان حل نمود. در این صورت $du = -\frac{1}{x^2}dx$ و لذا $dx = -x^2 du = -\frac{du}{u^2}$.

$$\frac{dx}{x(x^5 - 1)} = \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u^5} - 1\right)} = \frac{-\frac{1}{u}du}{\frac{1 - u^5}{u^5}} = \frac{u^4}{u^5 - 1}du$$

$$I = \int \frac{u^4}{u^5 - 1}du = \frac{1}{5}\ln|u^5 - 1| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{x^5} - 1\right| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5 - 1}{x^5}\right| + c$$

روش سوم. چون $\frac{1}{x(x^5 - 1)} = \frac{x^4}{x^5 - 1} - \frac{1}{x}$ پس:

$$I = \int\left(\frac{x^4}{x^5 - 1} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{5}\ln|x^5 - 1| - \ln|x| + c = \frac{1}{5}\Big(\ln|x^5 - 1| - \ln|x^5|\Big) + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5 - 1}{x^5}\right| + c$$

**تست ۱۳** یکی از تابع اولیه‌های $\frac{1}{e^{2x} + e^x}$ برابر است با:

۱) $\ln(1 + e^x) - e^{-x}$ ۲) $\ln(1 + e^{-x}) - e^{-x}$ ۳) $\ln(1 + e^{-x}) + e^{-x}$ ۴) $\ln\frac{e^x}{e^x + 1}$

حل: گزینه ۲ درست است. برای محاسبه $I = \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}$ از تغییر متغیر $u = e^x$ استفاده می‌کنیم.

$$du = e^x\,dx \implies dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u} \implies I = \int \frac{\frac{du}{u}}{u^2 + u} = \int \frac{du}{u^2(u + 1)}$$

تجزیه به کسرهای جزئی : $f(u) = \frac{1}{u^2(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u + 1}$

$B = \lim\limits_{u \to 0} u^2 f(u) = 1$ و $C = \lim\limits_{u \to -1}(u + 1)f(u) = 1$

با ضرب کردن دو طرف در $u$ و محاسبه حد در بینهایت داریم:

$$0 = A + 0 + C = A + 1 \implies A = -1 \implies \frac{1}{u^2(u + 1)} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u + 1}$$

$$I = \int\left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u + 1}\right)du = \ln\frac{u + 1}{u} - \frac{1}{u} + c = \ln(1 + e^{-x}) - e^{-x} + c$$

### ۴-۲-۵ روش جزء به جزء

فرمول محاسبه انتگرال با این روش به صورت $\int udv = uv - \int vdu$ است. به این صورت که تابعی که مشتق آن ساده‌تر است را $u$ می‌نامیم و تابعی که انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه باشد را $dv$ می‌گیریم به طوریکه درنهایت $\int vdu$ قابل محاسبه باشد. به جدول زیر ( که در آن آرگومان توابع بر حسب $x$ خطی هستند) توجه کنید.

| گروه ۳ | گروه ۲ | گروه ۱ |
| --- | --- | --- |
| توابع نمایی<br>توابع سینوس و کسینوس<br>مثلثاتی و هیپربولیک | چند جمله‌ای | توابع لگاریتمی<br>توابع معکوس مثلثاتی<br>توابع معکوس هیپربولیک |

در موارد زیر معمولاً از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

۱) در انتگرال‌گیری از توابع گروه (۱)

۲) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۲) در گروه (۱)

۳) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۲) در گروه (۳)

۴) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۳) در یکدیگر

۵) در انتگرال‌گیری از توانهای فرد $\sec x$ و $\csc x$

به خاطر داشته باشید که در موارد (۱) تا (۴) همواره $u$ را از گروه با شماره کمتر انتخاب می‌کنیم. (در مورد (۴) تفاوتی در انتخاب $u$ و $dv$ وجود ندارد و نیاز به دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم.) در مورد (۵) باید $\sec^۲ x$ یا $\csc^۲ x$ را به عنوان $dv$ و عبارت باقیمانده را $u$ فرض کنیم تا به رابطه‌ای بازگشتی برسیم.

تذکر۸. در محاسبه انتگرال به روش جزء به‌جزء اگر $u = f(x) \quad , \quad dv = g(x)dx$ فرمول انتگرال جزء به‌جزء به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)(\underbrace{\int g(x)\, dx}_{G(x)}) - \int f'(x)G(x)dx$$

**مثال ۱۰.** حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int x\ln x dx$ ب) $\int \sec^۳ x dx$ ج) $\int e^x \sin x dx$ د) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

الف) با انتخاب $u = \ln x$ و $dv = xdx$ داریم $du = \frac{dx}{x}$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$.

$$\int x\ln x dx = \frac{x^۲}{۲}\ln x - \int \frac{x^۲}{۲}.\frac{۱}{x}dx = \frac{x^۲}{۲}\ln x - \int \frac{x}{۲}dx = \frac{x^۲}{۲}\ln x - \frac{x^۲}{۴} + c$$

ب) با توجه به این که تابع اولیه $\sec^۲ x$ قابل محاسبه است، قرار دهید $u = \sec x$ و $dv = \sec^۲ x dx$ ولذا $du = \sec x \tan x dx$ و $v = \tan x$.

$$I=\int \sec^3 x dx=\int \sec x(\sec^2 x\ dx)=\sec x\tan x-\int \tan x\sec x\tan x dx$$

$$=\sec x\tan x-\int \sec x\tan^2 x dx=\sec x\tan x-\int \underbrace{\sec x(\sec^2 x-1)}_{\sec^3 x-\sec x} dx$$

$$\Longrightarrow I=\sec x\tan x-I+\int \sec x dx \Longrightarrow I=\frac{1}{2}\big(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|\big)+c$$

ج) در ضرب عبارت نمایی و مثلثاتی دو بار از جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u=e^x$ و $dv=\sin x dx$ ولذا $du=e^x dx$ و $v=-\cos x$.

$$I=\int e^x(\sin x dx)=-e^x\cos x-\int(-\cos x)e^x dx=-e^x\cos x+\int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{(\cos x dx)}_{dv}$$

$$=-e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int \sin x e^x dx\right)=e^x(\sin x-\cos x)-I$$

$$\Longrightarrow I=\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$$

د) ابتدا از تغییر متغیر $x=t^2$ و $dx=2tdt$ استفاده می‌کنیم.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{(e^t dt)}_{dv}=2te^t-2\int e^t dt=2te^t-2e^t+c=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$$

## یافتن دستور(فرمول) کاهش توان با روش جزء به جزء

با استفاده از روش جزء به‌جزء گاهی می‌توان فرمول کاهشی برای $I_n=\int f^n(x)dx$ به دست آورد به این ترتیب که توان عبارت تحت انتگرال را کاهش می‌دهیم و با به دست آوردن یک رابطه بازگشتی می‌توان مقدار $I_n$ را برای هر $n$ دلخواه محاسبه کرد. در این مسائل قاعده خاصی در مورد انتخاب $u$ و $dv$ وجود ندارد، اما معمولاً عبارت $f^n(x)$ یا قسمتی از آن (مثلاً $f^{n-1}(x)$) به عنوان $u$ انتخاب می‌گردد.

**مثال ۱۱**. دستور کاهشی برای $I_n=\int(\ln x)^n dx$ به دست آورید و با استفاده از آن $\int(\ln x)^2 dx$ را محاسبه کنید.

اگر $u=(\ln x)^n$ و $dv=dx$ انتخاب شود داریم $v=x$ و $du=\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}dx$ پس:

$$I_n=x(\ln x)^n-\int\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}\cdot x dx=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}dx$$

پس دستور کاهشی به صورت $I_n=x\ln^n x-nI_{n-1}$ برای $n\geq 1$ است.

$$I_2=x\ln^2 x-2I_1=x\ln^2 x-2(x\ln x-I_0) \quad \text{و} \quad I_0=\int(\ln x)^0 dx=x$$

$$\Longrightarrow \int \ln^2 x dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$$

### تعمیم روش جزء به جزء

مانند قسمت ج در مثال ۱۰ گاهی لازم است از روش جزء به جزء چند بار استفاده کنیم در این صورت اگر:

$$G_1(x)=\int g(x)dx \quad , \quad G_2(x)=\int G_1(x)dx \quad ,\ldots$$

آن‌گاه فرمول جزء به‌جزء به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G_1(x)-f'(x)G_2(x)-\cdots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)G_n(x)+(-1)^n\int f^{(n)}(x)G_n(x)dx$$

این روش معمولاً وقتی $f(x)$ یک چندجمله‌ای است، استفاده می‌شود و تعداد مراحل یعنی $n$ برابر درجه چندجمله‌ای است. به خاطر سپردن فرمول بالا لازم نیست و می‌توان روند محاسبه را در جدول زیر(تعمیم روش جزء به جزء) خلاصه نمود.

برای محاسبه $\int f(x)g(x)\ dx$ از قسمتی از عبارت مشتق و از قسمتی انتگرال می‌گیریم. قسمتی که به عنوان مشتق محسوب شده را $f(x)$ نامیده و زیر مشتق نوشته و متوالیاً از آن مشتق می‌گیریم. همین عمل را برای قسمتی که قرار است از آن انتگرال بگیریم با نامگذاری آن به عنوان $g(x)$ انجام می‌دهیم. در این روش هر بار عبارت ستون مشتق در عبارت ستون انتگرال (که یک سطر پایین‌تر قرار دارد) ضرب می‌شود که این عمل معادل با یکبار استفاده از روش جزء به جزء می‌باشد. چون در روش جزء به جزء هر بار یک علامت منفی ایجاد می‌گردد، علامت سطر اول همواره مثبت و از آن به بعد یک در میان منفی می‌شود. عملیات جزء به جزء باید در یکی از سطرها متوقف شود، در این صورت ضرب موربهای ما قبل سطر توقف معادل $uv$ و عناصر روبروی هم در سطر توقف معادل با $vdu$ است. پس روند محاسبه با جدول به صورت زیر است:

| مشتق | انتگرال |
|---|---|
| $\oplus\ f(x)$ | $g(x)$ |
| $\ominus\ f'(x)$ | $G_1(x)$ |
| $\oplus\ f''(x)$ | $G_2(x)$ |
| $\ominus\ f'''(x)$ | $G_3(x)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

فرض کنید عملیات جزء به جزء در یک سطر و مثلاً سطر چهارم متوقف شود، برای نوشتن حاصل انتگرال عبارت ستون مشتق در عبارت ستون انتگرال (که یک سطر پایین‌تر قرار دارد) با رعایت علامت ضرب می‌شود تا به سطر توقف برسیم. در این سطر دو عبارت روبروی هم در یکدیگر ضرب شده و انتگرال آن‌ها محاسبه می‌شود و لذا فرمول زیر حاصل می‌شود.

$$\int f(x)g(x)dx = \underbrace{f(x)G_1(x)}_{\text{ضرب مورب اول}} - \underbrace{f'(x)G_2(x)}_{\text{ضرب مورب دوم}} + \underbrace{f''(x)G_3(x)}_{\text{ضرب مورب سوم}} - \underbrace{\int f'''(x)G_3(x)dx}_{\text{متناظر با سطر توقف}}$$

نکته ۱۱. **معمولاً عملیات جزء به جزء را در یکی از دو سطر زیر متوقف می‌کنیم.**

۱) **سطری که انتگرال حاصلضرب اعضای آن را بدون استفاده از جزء به جزء می‌توان محاسبه نمود.**

۲) **سطری که حاصلضرب اعضای آن، ضریبی از حاصلضرب اعضای سطر اول باشد.**

تذکر۹. این روش معمولاً وقتی با حاصلضرب چند جمله‌ای در نمایی یا مثلثاتی مواجه هستیم، استفاده می‌شود و بهتر است سطر توقف را سطری انتخاب کنیم که مشتق در آن صفر می‌شود.

**مثال ۱۲.** حاصل $\int (x^{۳}+۴x-۱)e^{۲x}dx$ را به دست آورید.

از $f(x)=x^{۳}+۴x-۱$ مشتق و از $g(x)=e^{۲x}$ انتگرال می‌گیریم. ستون مشتق را تا رسیدن به صفر ادامه می‌دهیم و لذا در سطر پنجم متوقف می‌شویم. مورب‌های ماقبل سطر توقف را با رعایت علامت در هم ضرب می‌کنیم. سپس از حاصلضرب اعضای سطر توقف انتگرال می‌گیریم که صفر می‌شود.

| | مشتق | انتگرال |
|---|---|---|
| $\oplus$ | $x^{۳}+۴x-۱$ | $e^{۲x}$ |
| $\ominus$ | $۳x^{۲}+۴$ | $\frac{۱}{۲}e^{۲x}$ |
| $\oplus$ | $۶x$ | $\frac{۱}{۴}e^{۲x}$ |
| $\ominus$ | $۶$ | $\frac{۱}{۸}e^{۲x}$ |
| $\oplus$ | $۰$ | $\frac{۱}{۱۶}e^{۲x}$ |

$$\text{انتگرال}=(x^{۳}+۴x-۱)\frac{e^{۲x}}{۲}-(۳x^{۲}+۴)\frac{e^{۲x}}{۴}+۶x\frac{e^{۲x}}{۸}-۶\frac{e^{۲x}}{۱۶}+c$$

**مثال ۱۳.** حاصل $I=\int e^{ax}\cos bx dx$ را برای $a,b\neq ۰$ محاسبه کنید.

از $e^{ax}$ مشتق و از $\cos bx$ انتگرال می‌گیریم. در سطر سوم، حاصلضرب اعضا، ضریبی از سطر اول است و لذا جزء به جزء را متوقف می‌کنیم.

| | مشتق | انتگرال |
|---|---|---|
| $\oplus$ | $e^{ax}$ | $\cos bx$ |
| $\ominus$ | $ae^{ax}$ | $\frac{۱}{b}\sin bx$ |
| $\oplus$ | $a^{۲}e^{ax}$ | $-\frac{۱}{b^{۲}}\cos bx$ |

$$I=e^{ax}\left(\frac{۱}{b}\sin bx+\frac{a}{b^{۲}}\cos bx\right)+\int -\frac{a^{۲}}{b^{۲}}e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{۱}{b^{۲}}e^{ax}\Big(b\sin bx+a\cos bx\Big)-\frac{a^{۲}}{b^{۲}}I$$

$$\Longrightarrow\ \left(۱+\frac{a^{۲}}{b^{۲}}\right)I=\frac{e^{ax}}{b^{۲}}(b\sin bx+a\cos bx)\ \Longrightarrow\ I=\frac{e^{ax}}{a^{۲}+b^{۲}}(b\sin bx+a\cos bx)$$

**تذکر ۱۰.** با محاسبه‌ای مشابه داریم:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^{۲}+b^{۲}}(a\sin bx-b\cos bx)$$

**تست ۱۴** انتگرال $I=\int \sin^{-۱}x dx$ برابر است با: (معدن ۷۳)

۱) $\sin^{-۱}x-(۱-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ ۲) $x\sin^{-۱}x-(۱-x^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$

۳) $x\sin^{-۱}x+(۱-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ ۴) $x\sin^{-۱}x-(۱-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$

**حل:** گزینه ۳ درست است. قرار می‌دهیم $u=\sin^{-۱}x$ و $dv=dx$ ولذا $du=\frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $v=x$.

$$\text{انتگرال}=x\sin^{-۱}x-\int x(۱-x^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\,dx=x\sin^{-۱}x+\sqrt{۱-x^{۲}}+c$$

**تست ۱۵** ضریب $\sin(\ln x)$ در حاصل $\int\sin(\ln x)dx$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{x}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $x$

**حل:** گزینه ۲ درست است. اگر $\ln x=t$ داریم $x=e^{t}$ و لذا $dx=e^{t}dt$ پس

$$\text{انتگرال}=\int e^{t}\sin tdt\overset{\text{مثال ۱۰}}{=\!=}\frac{e^{t}}{۲}(\sin t-\cos t)+c=\frac{x}{۲}\big(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\big)+c$$

**تذکر ۱۱.** با انجام تغییر متغیر و محاسبه‌ای مشابه:

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\big) + c$$

**تست ۱۶** اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای از $(\text{Arcsin}x)^2$ باشد که در رابطه $F(0) = 0$ صدق می‌کند، مقدار $F(1)$ چقدر است؟

۱) $-2 + \frac{\pi^2}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

حل: گزینه ۴ درست است. برای محاسبه $\int (\text{Arcsin}x)^2 dx$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$u = (\text{Arcsin}x)^2 \text{ و } dv = dx \implies du = 2\sin^{-1}x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ و } v = x$$

$$\implies F(x) = x(\sin^{-1}x)^2 - 2\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

برای محاسبه انتگرال ایجاد شده، بار دیگر از جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$u = \sin^{-1}x \text{ و } dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \implies du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ و } v = -\sqrt{1-x^2}$$

$$F(x) = x(\sin^{-1}x)^2 - 2\Big(-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + \int dx\Big) = x(\sin^{-1}x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + c$$

چون $F(0) = 0$ پس $c = 0$ و لذا $F(1) = (\sin^{-1}1)^2 + 0 - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

**تست ۱۷** انتگرال $\int x^2 \sin x\, dx$ را بیابید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $-x^2\cos x - 2x\sin x + 2\cos x + c$ ۲) $-x^2\cos x + 2x\sin x - 2\cos x + c$

۳) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$ ۴) $x^2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x + c$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به ظاهر شدن $x^2$ باید از تعمیم جزء به جزء استفاده کنیم. ستون مشتق را تا رسیدن به صفر ادامه می‌دهیم. با توجه به جدول:

| | مشتق | انتگرال |
|---|---|---|
| $\oplus$ | $x^2$ | $\sin x$ |
| $\ominus$ | $2x$ | $-\cos x$ |
| $\oplus$ | $2$ | $-\sin x$ |
| $\ominus$ | $0$ | $\cos x$ |

$$\text{انتگرال} = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

**تست ۱۸** جواب $\int \cos^n x\, dx$ برابر است با: (تکنولوژی نساجی ۸۲)

۱) $\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx$ ۲) $\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} - \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}xdx$

۳) $\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}xdx$ ۴) چنین انتگرالی غیرقابل محاسبه است.

حل: گزینه ۳ درست است. انتگرال مورد نظر را $I_n$ نامیده و عبارت تحت انتگرال را به صورت $\cos^n xdx = \underbrace{\cos^{n-1}x}_{u} \cdot \underbrace{\cos xdx}_{dv}$ می‌نویسیم.

$du = (n - ۱)\cos^{n-۲} x(-\sin x)dx$ و $v = \sin x$

$$I_n = \cos^{n-۱} x \sin x + (n-۱)\int \cos^{n-۲} x \sin^۲ x dx = \cos^{n-۱} x \sin x + (n-۱)\int \cos^{n-۲} x(۱-\cos^۲ x)dx$$

$$= \sin x \cos^{n-۱} x + (n-۱)\int \cos^{n-۲} x dx - (n-۱)\int \cos^n x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-۱} x + (n-۱)I_{n-۲} - (n-۱)I_n \implies nI_n = \sin x \cos^{n-۱} x + (n-۱)I_{n-۲}$$

$$\implies I_n = \frac{۱}{n}\sin x \cos^{n-۱} x + \frac{n-۱}{n} I_{n-۲} = \frac{۱}{n}\sin x \cos^{n-۱} x + \frac{n-۱}{n}\int \cos^{n-۲} x dx$$

$\boxed{\text{تست ۱۹}}$ چنانچه $I_n = \int e^{-x^۳} x^{۳n+۲} dx$ باشد، داریم: (معدن ـ آزاد ۷۶)

۱) $۳I_n - ۳nI_{n-۱} + e^{-x^۳}x^{۳n} = ۰$

۲) $I_n - ۳nI_{n-۱} + e^{-x^۳}x^{۳n} = ۰$

۳) $I_n + ۳nI_{n-۱} + e^{-x^۳}x^{۳n} = ۰$

۴) $I_n - ۳nI_{n-۱} - e^{-x^۳}x^{۳n} = ۰$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $I_n = \int x^{۳n}(x^۲ e^{-x^۳} dx)$ قرار می‌دهیم:

$$u = x^{۳n}\ ,\ dv = x^۲ e^{-x^۳} dx \implies du = ۳nx^{۳n-۱} dx\ ,\ v = -\frac{۱}{۳}e^{-x^۳}$$

$$I_n = -\frac{۱}{۳}x^{۳n}e^{-x^۳} + n\int x^{۳n-۱} e^{-x^۳} dx = -\frac{۱}{۳}x^{۳n}e^{-x^۳} + nI_{n-۱} \implies ۳I_n - ۳nI_{n-۱} + e^{-x^۳}x^{۳n} = ۰$$

## ۳ـ۴ انتگرال معین

فرض کنید $f$ بر بازه $[a,b]$ تابعی کراندار باشد. برای عدد ثابت $n$، بازه را به $n$ قسمت مساوی که طول هر یک $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ است افراز می‌کنیم. اگر نقاط تقسیم را $x_۱, x_۲, \dots, x_{n-۱}$ بگیریم که $x_k = a + k\Delta x$ و نقطه دلخواه $c_k$ را در بازه $k$ ام یعنی $[x_{k-۱}, x_k]$ در نظر بگیریم، حاصل جمع $f(c_۱)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$ که با نماد $\sum_{k=۱}^{n} f(c_k)\Delta x$ قابل نمایش است را **مجموع ریمان** وابسته به این افراز می‌نامیم.

اگر با افزایش مقدار $n$ یعنی وقتی $n \to +\infty$، این مجموع به عددی مشخص نزدیک شود، این عدد را با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نمایش می‌دهیم و آن را **انتگرال معین** تابع $f$ بر بازه $[a,b]$ نامیده و می‌گوییم $f$ بر $[a,b]$ **انتگرالپذیر** است. $b$ کران (حد) بالا و $a$ کران (حد) پایین انتگرال نامیده می‌شود.

اگر در تعریف مجموع ریمان، $c_k$ نقطه ماکزیمم $f$ در بازه $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد، مجموع به دست آمده را **مجموع بالای ریمان** و اگر $c_k$ نقطه می‌نیمم $f$ در $[x_{k-۱}, x_k]$ باشد، مجموع به دست آمده را **مجموع پایین ریمان** $f$ بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم.

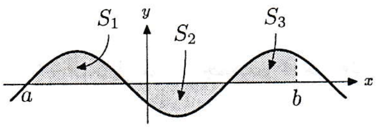
قضیه ۱. شرط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری یک تابع آن است که حد همه مجموعهای ریمان و خصوصاً حد مجموع پایین و بالای ریمان با هم برابر باشند.

قضیه ۲. اگر تابع $f$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، $f$ بر این بازه انتگرال‌پذیر است.

**نکته ۱۲.** اگر $f$ تابعی مثبت بر بازه $[a,b]$ باشد، تعبیر هندسی انتگرال معین، مساحت محدود توسط نمودار $f$، محور $x$ ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ است.

## تعبیر جبری انتگرال معین

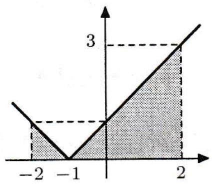
در حالت کلی $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر مساحت جبری محدود شده به نمودار $y=f(x)$ و محور $x$ ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. به این مفهوم که برای قسمتی از نمودار که بالای محور $x$ است مقدار انتگرال با مساحت محدود به نمودار برابر است اما برای قسمتی از نمودار که پایین محور $x$ است مقدار انتگرال با قرینه مساحت محدود به نمودار برابر است و حاصل انتگرال مجموع جبری مساحتها می‌باشد. در واقع در شکل روبرو داریم:




$$\int_a^b f(x)\,dx = S_۱ - S_۲ + S_۳$$

**مثال ۱۴.** مقدار $\int_{-۲}^{۲} |x+۱|dx$ را محاسبه کنید.

چون $|x+۱| \geq ۰$ انتگرال داده شده برابر مساحت زیر نمودار $y=|x+۱|$ و بالای محور $x$ ها بین دو خط $x=\pm ۲$ است و لذا برابر مجموع مساحت دو مثلث است.




$$\int_{-۲}^{۲} |x+۱|dx = \frac{۱}{۲}(۱)(۱) + \frac{۱}{۲}(۳)(۳) = ۵$$

$\boxed{\text{تست ۲۰}}$ برای $a>۰$ دلخواه مقدار $\int_۰^a \sqrt{a^۲-x^۲}dx$ برابر است با:

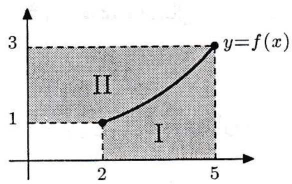
۱) $\frac{\pi a^۲}{۴}$ ۲) $\frac{\pi a^۲}{۲}$ ۳) $\frac{\pi a}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi a^۲}{۴}$

**حل: گزینه ۱ درست است.** انتگرال داده شده مساحت محدود به نمودار $y=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و محور $x$ ها و بین دو خط $x=۰$ و $x=a$ است. معادله نمودار به صورت $x^۲+y^۲=a^۲$ و معادله یک دایره است. با توجه به اینکه $x,y \geq ۰$ پس انتگرال موردنظر برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت دایره به شعاع $a$ و لذا برابر $\frac{\pi a^۲}{۴} = \frac{۱}{۴}(\pi a^۲)$ است.

تذکر۱۲. این انتگرال را با تغییر متغیر $x=a\sin\theta$ نیز می‌توان حل نمود.

$\boxed{\text{تست ۲۱}}$ اگر $f$ بر بازه $[۲,۵]$ پیوسته و اکیداً صعودی و $f(۲)=۱$ و $f(۵)=۳$ حاصل $\int_۲^۵ f(x)dx + \int_۱^۳ f^{-۱}(x)dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۹، آمار ۷۹)

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱




**حل: گزینه ۳ درست است.** مساحت ناحیه $I$ برابر $\int_۲^۵ f(x)dx$ است و چون نمودار $y=f(x)$ همان نمودار $x=f^{-۱}(y)$ است پس مساحت محدود توسط نمودار $x=f^{-۱}(y)$ و محور $y$ ها و دو خط $y=۱$ و $y=۳$ یعنی مساحت ناحیه II برابر $\int_۱^۳ f^{-۱}(y)dy = \int_۱^۳ f^{-۱}(x)dx$ بوده و لذا جواب تست برابر مساحت قسمت رنگ شده یعنی $۵\times۳ - ۲\times۱ = ۱۳$ است.

## خواص انتگرال معین

با فرض انتگرال‌پذیر بودن توابع $f$ و $g$ بر بازه $[a,b]$ داریم:

۱) انتگرال معین خطی است یعنی برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \Big(\lambda f(x) + g(x)\Big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

۲) انتگرال معین جمع‌پذیر است یعنی با فرض انتگرال‌پذیری $f$ بر $[a,c]$ و $[c,b]$ داریم:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

۳) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ و بنابراین $\int_a^a f(x)dx = ۰$

۴) اگر $f(x) \geq g(x)$ برای هر $x \in [a,b]$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

۵) **(نابرابری مثلث)** برای $a \leq b$ داریم $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

۶) **(تخمین زدن انتگرال)** اگر برای هر $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $m \leq f(x) \leq M$ آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

تعریف. **مقدار متوسط** تابع $f$ بر بازه $[a,b]$ به صورت $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ تعریف می‌شود و لذا بین کران بالا و پایین $f$ بر بازه $[a,b]$ قرار دارد.

۷) **قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها:** اگر تابع $f$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، عدد مناسب $c$ در بازه $(a,b)$ موجود است که $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

به عبارتی هر تابع پیوسته، مقدار متوسط خود را در نقطه‌ای از بازه اتخاذ می‌کند.

۸) اگر $f$ بر بازه $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر و فرد و $g$ بر همین بازه انتگرال‌پذیر و زوج باشد:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = ۰ \quad \text{و} \quad \int_{-a}^a g(x)dx = ۲\int_۰^a g(x)dx$$

۹) **(قاعده انتقال)** اگر $f$ بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد برای هر عدد ثابت $c$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$$

۱۰) برای $a,b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \quad \text{و} \quad \int_۰^a f(x)dx = \int_۰^a f(a-x)dx \, .$$

۱۱) اگر $f$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T$ باشد که بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است، برای هر عدد صحیح $n$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$$

۱۲) اگر $f$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T$ باشد، انتگرال آن بر تمام بازه‌هایی که طول آن برابر $T$ باشد با هم برابرند. مثلاً $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$.

۱۳) انتگرال توابع sin و cos و توانهای فرد آنها در بازه‌هایی که طول آن برابر دوره تناوب اصلی (یا ضریبی از آن) باشد، صفر می‌شود. به عنوان مثال برای $a > 0$ و $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{0}^{\frac{2\pi}{a}} \sin^{2n-1}(ax)\,dx = \int_{0}^{\frac{4\pi}{a}} \sin^{2n-1}(ax)\,dx = 0 \quad \text{یا} \quad \int_{x_0}^{\frac{2\pi}{a}+x_0} \cos^{2n-1}(ax)\,dx = 0$$

**تست ۲۲** اگر $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ آن‌گاه یک کران برای $I$ کدام است؟ (عمران ۷۸)

۱) $\frac{1}{3} < I < \frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2} < I < \frac{3}{2}$ ۴) $\frac{4}{9} < I < \frac{1}{2}$

**حل: گزینه ۲ درست است.** باید برای تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ بر بازه $[0,1]$ کران بیابیم. ساده‌تر است که ابتدا برای عبارت زیر رادیکال یعنی $g(x) = 2+x-x^2$ روی بازه $[0,1]$، کران محاسبه کنیم. از روش یافتن اکسترمم مطلق استفاده می‌کنیم.

$$g'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{2} \ : \ g(\tfrac{1}{2}) = \frac{9}{4} \ \text{و} \ g(0) = g(1) = 2 \implies 2 \le g(x) \le \frac{9}{4}$$

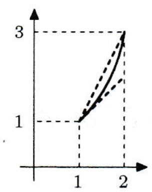
پس $\frac{2}{3} \le f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ و لذا $\frac{2}{3} < I < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**تست ۲۳** فرض کنید $f$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر است که همواره صعودی اکید بوده و تقعر آن رو به بالاست. چنانچه $f(1) = 1$ و $f'(1) = \frac{3}{2}$ و $f(2) = 3$. کدامیک از گزینه‌های زیر تخمین بهتری برای $I = \int_{1}^{2} f(x)\,dx$ است؟

۱) $1 < I < 3$ ۲) $\frac{7}{4} < I < 2$

۳) $\frac{7}{4} < I < \frac{37}{20}$ ۴) باید ضابطه $f$ مشخص باشد.

**حل: گزینه ۲ درست است.** با توجه به اینکه $f(x)$ در بازه $[1,2]$ مثبت است، $I$ برابر مساحت محدود زیر نمودار $f$ و بالای محور $x$ در بازه $1 \le x \le 2$ است. چون تقعر $f$ رو به بالاست، بنا به (۲) در صفحه ۱۵۵ خط واصل بین دو نقطه $(1,1)$ و $(2,3)$ بالای نمودار $f$ واقع است و لذا مساحت ناحیه محدود زیر خط مورد نظر و بالای محور $x$ از $I$ بزرگتر است.




$$I < \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع}}{2} \times (\text{مجموع دو قاعده}) = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

معادله خط مماس بر نمودار در نقطه $(1,1)$ به صورت $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ است. خط مماس در نقطه $(2, \frac{5}{2})$ با $x = 2$ تقاطع می‌کند و چون تقعر رو به بالاست، خط مماس همواره زیر نمودار است و لذا $I$ از مساحت ناحیه زیر خط مماس و بالای محور $x$ ها بزرگتر است.

$$I > \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع}}{2} \times (\text{مجموع دو قاعده}) = \frac{1}{2}(1+\frac{5}{2}) = \frac{7}{4}$$

**تست ۲۴** مقدار انتگرال $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}dx$ برابر است با: (ریاضی ۷۹، علوم‌کامپیوتر ۷۹)

۱) $1$ ۲) $0$ ۳) $+\infty$ ۴) $-1$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع تحت انتگرال فرد است زیرا:

$$f(-x) = \cos(-x)\ln\frac{1-x}{1+x} = \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\cos x \ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

و چون بازه انتگرال‌گیری متقارن است، حاصل انتگرال صفر می‌شود.

**قضیه ۳.** (اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

اگر تابع $f$ در نقطه $x$ پیوسته و $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ آن‌گاه $F'(x) = f(x)$ یعنی $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ است.

**نتیجه ۴.** اگر $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر و $f$ تابعی پیوسته باشد:

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = u'(x)f\big(u(x)\big) - v'(x)f\big(v(x)\big)$$

**نتیجه ۵.** اگر تابع تحت انتگرال در نتیجه قبل، تابعی از $x$ هم باشد، فرمول ارائه شده دارای یک جمله بیشتر خواهد بود. به این صورت که علاوه بر آن باید مشتق را به داخل انتگرال منتقل کرد.

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)dt = u'(x)f\big(u(x),x\big) - v'(x)f\big(v(x),x\big) + \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)dt$$

که $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ یعنی مشتق $f$ نسبت به متغیر $x$.

**مثال ۱۵.** اگر $g(x) = \int_0^{2x^2-x^4} \sqrt{t^2+1}dt$ نوع نقاط بحرانی تابع $g$ را مشخص کنید.

چون $f(t) = \sqrt{t^2+1}$ تابعی پیوسته است پس $g(x)$ مشتق‌پذیر است.

$$g'(x) = (4x - 4x^3)f(2x^2 - x^4) \quad \text{و} \quad g'(x) = 0 \implies x = 0, \pm 1$$

با توجه به این که $f$ تابعی مثبت است، جدول تغییرات $g$ به صورت زیر است.

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

**مثال ۱۶.** اگر $f(x) = \int_{\sin x}^{2} \sqrt[3]{\sin x - t}dt$ مقدار $f'(x)$ را بیابید.

$$f'(x) = -\cos x\sqrt[3]{\sin x - \sin x} + \int_{\sin x}^{2}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{\sin x - t}dt = \int_{\sin x}^{2}\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x - t)^2}}dt$$

**مثال ۱۷.** فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $f \neq 0$ تابعی مشتق پذیر باشد که در رابطه $f^2(x) = 2\int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}dt$ صدق می‌کند. ضابطه $f(x)$ را به دست آورید.

یک ایده مناسب برای حل این نوع معادلات که معادله انتگرال نامیده می‌شود، این است که با مشتق گرفتن از دوطرف رابطه نسبت به $x$ (متغیر مستقل) انتگرال را حذف نماییم.

$$2f(x)f'(x)=\frac{2f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow f(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}x+c$$

برای تعیین مقدار $c$ توجه کنید که با جایگذاری $x=1$ در رابطه صورت سؤال $f^2(1)=0$ و لذا $f(1)=0$ پس $c=-\sinh^{-1}1$ و $f(x)=\sinh^{-1}x-\sinh^{-1}1$.

**تست ۲۵** اگر $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ و $g(x)=\int_0^{\cos x}(1+\sin t^2)dt$ در این صورت $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $-1$ ۲) $0$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sin 1$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$f'(x)=g'(x)\frac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}} \quad \text{و} \quad g'(x)=-\sin x\left(1+\sin\left(\cos^2 x\right)\right) \Longrightarrow g'(\frac{\pi}{2})=-1$$

$$g(\frac{\pi}{2})=0 \Longrightarrow f'(\frac{\pi}{2})=-1\times\frac{1}{\sqrt{1+0}}=-1$$

**تست ۲۶** مقدار مشتق $\int_{3x}^{4x^2+3}\sqrt{\cos t}\,dt$ در $x=0$ برابر است با: (ریاضی ۸۱)

۱) $-3$ ۲) $-2$ ۳) $0$ ۴) $3$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر تابع مورد نظر را $f(x)$ بنامیم:

$$f'(x)=8x\sqrt{\cos(4x^2+3)}-3\sqrt{\cos(3x)} \Longrightarrow f'(0)=0-3=-3$$

**تست ۲۷** اگر $f(x)=\int_0^x\frac{2+e^{-t}}{1+\tan^2 t}dt$، مقدار $(f^{-1})'(0)$ برابر است با: (ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $3$ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(0)=0$ پس $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}$ و

$$f'(x)=\frac{2+e^{-x}}{1+\tan^2 x} \Longrightarrow f'(0)=3 \Longrightarrow (f^{-1})'(0)=\frac{1}{3}$$

ضمناً چون $f'(0)\neq 0$ پس $f$ حول $x=0$ وارون‌پذیر است.

**تست ۲۸** اگر $x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{2+3t^2}}$ آنگاه $\frac{d^2y}{dx^2}\times\frac{1}{y}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶)

۱) $6$ ۲) $3$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است. با مشتق گرفتن از تساوی داده شده نسبت به $x$:

$$1=y'\frac{1}{\sqrt{2+3y^2}} \Longrightarrow y'=\sqrt{2+3y^2} \Longrightarrow y''=\frac{3yy'}{\sqrt{2+3y^2}}=3y\frac{y'}{\sqrt{2+3y^2}}=3y$$

**تست ۲۹** اگر $f(x)=\int_{x^2+2x}^{0}(t+1)dt$ معادله خط قائم بر نمودار $f$ در نقطه‌ای به طول $-2$ کدام است؟

۱) $y+2x=-4$ ۲) $y-2x=4$ ۳) $y+\frac{1}{2}x=-1$ ۴) $y-\frac{1}{2}x=1$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f(-2)=\int_0^0=0$ پس نمودار $f$ از $(-2,0)$ می‌گذرد. باید شیب خط قائم را بیابیم.

$$f'(x) = -(2x+2)(x^2+2x+1) = -2(x+1)^3 \implies f'(-2) = 2 \implies m'_{\text{قائم}} = -\frac{1}{2}$$

$$\implies y - 0 = -\frac{1}{2}(x+2) \implies y = -\frac{1}{2}x - 1$$

تست ۳۰ اگر $F(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx)}{x}dx$ آنگاه $\frac{dF}{dt}$ برابر است با: (مکانیک ۷۱)

۱) $\int_0^t \cos(tx)dx$ ۲) $\frac{2\sin t^2}{t}$ ۳) $\frac{\sin tx}{x}$ ۴) $t\sin t$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع تحت انتگرال شامل متغیر مستقل است.

$$F'(t) = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \frac{x\cos(tx)}{x}dx = \frac{\sin t^2}{t} + \int_0^t \cos(tx)dx = \frac{\sin t^2}{t} + \frac{1}{t}\sin(tx)\Big|_0^t = \frac{2\sin t^2}{t}$$

**تست ۳۱** تابع $f$ با رابطه $f(x) = \int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{2}}dt$ برای $x \geq 0$ تعریف شده است و تابع $g$، معکوس تابع $f$ می‌باشد. کدام گزینه برقرار است؟ (عمران ۸۰)

۱) $g''(x) = g^2(x)$ ۲) $g''(x) = \frac{1}{2}g^2(x)$ ۳) $g''(x) = \frac{3}{2}g^2(x)$ ۴) $g''(x) = \frac{2}{3}g^2(x)$

حل: گزینه ۳ درست است. هدف محاسبه مشتق دوم تابع وارون است.

روش اول. از نکته ۱۹ در صفحه ۱۴۲ استفاده می‌کنیم.

$$f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \text{ و } f''(x) = -\frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}} \implies g''(\underbrace{f(x)}_{y}) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} = \frac{3}{2}x^2$$

چون $f^{-1}(x) = g(x)$ پس $y = f(x)$ نتیجه می‌دهد $x = f^{-1}(y) = g(y)$.

$$g''(y) = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}g^2(y) \implies g''(x) = \frac{3}{2}g^2(x)$$

روش دوم. با توجه به تذکر ۱۲ در صفحه ۱۳۴ و اینکه $g = f^{-1}$ داریم:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ و } f'(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} \implies g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \sqrt{1+g^3(x)}$$

$$\implies g''(x) = \frac{3g^2(x)g'(x)}{2\sqrt{1+g^3(x)}} = \frac{3}{2}g^2(x)$$

تست ۳۲ فرض کنید $g$ تابعی همه جا پیوسته باشد و $\int_0^1 g(t)dt = 1$. اگر $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$ مقدار $f''(1)$ کدام است؟ (عمران ۸۱)

۱) $f''(1) = -1$ ۲) $f''(1) = -2$ ۳) $f''(1) = 1$ ۴) $f''(1) = 2$

حل: گزینه ۴ درست است. با استفاده از نتیجه ۵ در صفحه ۲۶۸:

$$f'(x) = (x-x)^2 g(x) + \int_0^x 2(x-t)g(t)dt = 2\int_0^x (x-t)g(t)dt$$

$$\implies f''(x) = 2(x-x)g(x) + 2\int_0^x g(t)dt = 2\int_0^x g(t)dt \implies f''(1) = 2\int_0^1 g(t)dt = 2$$

تست ۳۳ حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{\int_{۲}^{x} \frac{t+۱}{t^۳-۵}dt}{x-\sqrt{۲x}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

حل: گزینه ۳ درست است. حالت مبهم $\frac{\circ}{\circ}$ رخ می‌دهد.

$$\text{حد} \overset{Hop}{=\!=} \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{x+۱}{x^۳-۵}}{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}} = \frac{\frac{۳}{۳}}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲$$

تست ۳۴ به ازای چه مقادیری از ثابت‌های $a$ و $b$، $\lim_{x\to\circ} \frac{۱}{bx-\sin x}\int_{\circ}^{x}\frac{t^۲dt}{\sqrt{a+t}} = ۱$ (عمران ۸۲)

۱) $b=۴$ و $a=۲$ ۲) $b=۱$ و $a=۴$

۳) $b=۴$ و $a=\circ$ ۴) $b=۱$ و $a=۲$

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت $\frac{\circ}{\circ}$ است. با توجه به قاعده هوپیتال حد برابر $\lim_{x\to\circ}\frac{\frac{x^۲}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$ است. حد صورت کسر صفر است بنابراین اگر مخرج کسر غیر صفر باشد، آنگاه حد کسر برابر صفر است که امکان ندارد. پس باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین $b=۱$.

$$\frac{\frac{x^۲}{\sqrt{a+x}}}{۱-\cos x} \sim \frac{\frac{x^۲}{\sqrt{a}}}{\frac{۱}{۲}x^۲} \to \frac{۲}{\sqrt{a}} = ۱ \Longrightarrow a=۴$$

تست ۳۵ اگر $y(x) = ۳+۲\int_{۱}^{x} ty(t)dt$، آنگاه تابع $y(x)$ کدام است؟ (سیستم ۸۰)

۱) $۳e^{x^۲-۱}$ ۲) $e^{۲x+۱}$ ۳) $e^{x^۲}-۳$ ۴) $۲e^{x}-۱$

حل: گزینه ۱ درست است. با قرار دادن $x=۱$ در معادله $y(۱) = ۳+۲\int_{۱}^{۱} ty(t)dt = ۳$ و فقط گزینه (۱) در این رابطه صدق می‌کند!!

برای حل این سؤال به طور کامل از دو طرف معادله نسبت به $x$ مشتق می‌گیریم.

$$y' = ۲xy \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = ۲xy \Longrightarrow \frac{dy}{y} = ۲xdx \Longrightarrow \ln y = x^۲+k \overset{\exp}{\Longrightarrow} y = e^{x^۲+k} = e^{x^۲}e^{k} = ce^{x^۲}$$

و با اعمال شرط $y(۱)=۳$ داریم $c = ۳e^{-۱}$ و لذا $y = ۳e^{-۱}\cdot e^{x^۲} = ۳e^{x^۲-۱}$.

تست ۳۶ ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در نقطه $(x,y)$ عبارتست از $۳x^۲y^۲$ و منحنی از نقطه $(۲,۱)$ می‌گذرد. عرض نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی چیست؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $-۸$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۸

حل: گزینه ۳ درست است. ضریب زاویه مماس $y'$ است پس:

$$y' = \frac{dy}{dx} = ۳x^۲y^۲ \Longrightarrow \frac{dy}{y^۲} = ۳x^۲dx \Longrightarrow -\frac{۱}{y} = x^۳+c$$

و چون منحنی از $(۲,۱)$ می‌گذرد پس $-۱ = ۸+c$ یعنی $c=-۹$ و معادله به صورت $\frac{۱}{y} = -x^۳+۹$ تبدیل می‌شود. در $x=۱$ داریم $\frac{۱}{y}=۸$ ولذا $y=\frac{۱}{۸}$.

## محاسبه انتگرال معین

یکی از نتایج مهم اولین قضیه اساسی، محاسبه انتگرال معین به کمک انتگرال نامعین است.

**قضیه ۶. (دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)**

اگر $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه آن باشد:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

تذکر۱۳. مقدار انتگرال معین، مستقل از انتخاب تابع اولیه است و معمولاً ثابت تابع اولیه را نمی‌نویسیم.

**مثال ۱۸.** حاصل $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ را محاسبه کنید.

تابع تحت انتگرال زوج و تابع اولیه آن $\sin^{-1}\frac{x}{2}$ است پس:

$$\text{انتگرال} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^1 = 2\sin^{-1}\frac{1}{2} - 2\sin^{-1}0 = \frac{\pi}{3}$$

تذکر۱۴. در محاسبه انتگرال معین، می‌توان تغییر متغیر را به صورت زیر اعمال کرد:

اگر $u = g(x)$ و $g(a) = \alpha$ و $g(b) = \beta$ آن‌گاه:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du$$

یعنی تغییر متغیر را روی کرانها هم تأثیر می‌دهیم. در اینصورت همواره کران بالا به کران بالای انتگرال جدید و کران پایین نیز به کران پایین انتگرال جدید فرستاده می‌شود.

**مثال ۱۹.** مقدار هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1 x(2-x)^4 dx$ ب) $\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$

ج) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ د) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+2x}$

الف) از تغییر متغیر $u = 2 - x$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_2^1 (2-u)u^4(-du) = \int_1^2 (2u^4 - u^5)du = \left(\frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6\right)\Big|_1^2 = \frac{57}{30}$$

ب) از تغییر متغیر $x = \sec\theta$ استفاده می‌کنیم و چون $x > 0$ پس $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\sec\theta = x = 1 \implies \theta = 0 \qquad \text{و} \qquad \sec\theta = x = 2 \implies \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2\theta - 1}(\sec\theta\tan\theta d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta\tan^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^3\theta - \sec\theta)d\theta$$

با توجه به قسمت (ب) از مثال ۱۰ در صفحه ۲۵۹ داریم:

$$\text{انتگرال} = \left(\frac{۱}{۲}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right) - \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۳}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\sec\theta\tan\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۳}} = \sqrt{۳} - \frac{۱}{۲}\ln(۲+\sqrt{۳})$$

ج) از روش جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم، $dv = xdx$ و $u = \tan^{-۱} x$ پس $du = \frac{dx}{۱+x^۲}$ و $v = \frac{x^۲}{۲}$.

$$\text{انتگرال} = \frac{x^۲}{۲}\tan^{-۱} x\Big|_{\circ}^{۱} - \int_{\circ}^{۱}\frac{\frac{۱}{۲}x^۲}{x^۲+۱}dx = \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۱}\left(۱ - \frac{۱}{x^۲+۱}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{۸} - \frac{۱}{۲}(x - \tan^{-۱} x)\Big|_{\circ}^{۱} = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}$$

د) با توجه به اینکه در $x(x+۲)$ اختلاف دو عامل، عددی ثابت است از نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷ داریم $\frac{۱}{x^۲+۲x} = \frac{۱}{x(x+۲)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۲}\right)$.

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۲}\int_{۲}^{۳}\left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۲}\right)dx = \frac{۱}{۲}\ln\frac{x}{x+۲}\Big|_{۲}^{۳} = \frac{۱}{۲}(\ln\frac{۳}{۵} - \ln\frac{۲}{۴}) = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۶}{۵}$$

**مثال ۲۰.** برای $I_n = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^n x dx$ یک دستور کاهشی بیابید و به کمک آن مقدار $I_۵$ را بیابید.

از روش جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u = \sin^{n-۱} x$ و $dv = \sin x\, dx$.

$$I_n = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{n-۱} x(\sin x dx) = -\sin^{n-۱} x\cos x\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} - \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(n-۱)\sin^{n-۲} x\cos x(-\cos x\, dx)$$

$$= (n-۱)\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{n-۲} x\underbrace{\cos^۲ x}_{۱-\sin^۲ x}\, dx = (n-۱)\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{n-۲} x dx - (n-۱)\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^n x dx$$

$$= (n-۱)I_{n-۲} - (n-۱)I_n \Longrightarrow I_n = \frac{n-۱}{n}I_{n-۲} \quad \text{و} \quad n \geq ۲$$

$$I_{\circ} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} dx = \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad I_۱ = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x dx = ۱ \Longrightarrow I_۵ = \frac{۴}{۵}I_۳ = \frac{۴}{۵}\times\frac{۲}{۳}I_۱ = \frac{۲\times۴}{۳\times۵}\times ۱ = \frac{۸}{۱۵}$$

**مثال ۲۱**

اگر $f$ تابعی یکنوای اکید و مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = \alpha$ و $f(b) = \beta$ مقدار $\int_a^b f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f^{-۱}(x)dx$ را بیابید.

از تغییر متغیر $x = f(t)$ برای محاسبه $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-۱}(x)dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-۱}(x)dx = \int_a^b f^{-۱}\big(f(t)\big)f'(t)dt = \int_a^b \underbrace{t}_{u}\underbrace{\big(f'(t)dt\big)}_{dv} = tf(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)dt$$

$$= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-۱}(x)dx = bf(b) - af(a) \qquad (۱ \text{ ـ } ۴)$$

تذکر۱۵. مهمترین کاربرد فرمول بالا که راه حل هندسی بدست آوردن آن در تست ۲۱ در صفحه ۲٦۵ بررسی شد، محاسبه انتگرال معین توابع معکوس(مثلثاتی و هیپربولیک) است. (تست ۵۵ در صفحه ۲۸۰ را ملاحظه کنید.)

**مثال ۲۲** اگر $a$ عددی حقیقی و مخالف صفر باشد مقدار انتگرال $I = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ را به دست آورید.

از تغییر متغیر $u = a - x$ استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_{0}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \int_{a}^{0} \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}(-du) = \int_{0}^{a} \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}du$$

چون مقدار انتگرال معین مستقل از نام‌گذاری متغیر است، پس در انتگرال بالا از تعویض نام $u$ به $x$ استفاده می‌کنم و لذا $I = \int_{0}^{a} \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$. (توجه کنید که با استفاده از خاصیت ۱۰ در صفحه ۲٦٦ می‌توانستیم این رابطه را بلافاصله با تبدیل $x \to a - x$ به دست آوریم.) حال دو مقدار $I$ را با هم جمع می کنیم.

$$2I = I + I = \int_{0}^{a} \Big(\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)} + \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\Big)dx = \int_{0}^{a} dx = a \implies I = \frac{a}{2}$$

$$\int_{0}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\, dx = \frac{a}{2} \qquad (۴-۲)$$

**مثال ۲۳** $I = \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx$ را برای تابع پیوسته $f$ محاسبه کنید.

مقدار انتگرال را $I$ می‌نامیم. ابتدا تغییر متغیری اعمال می‌کنیم که بازه انتگرال‌گیری را تغییر ندهد. اگر $u = \pi - x$ با انجام جزئیاتی شبیه مثال قبل یا با کمک تبدیل $x \to \pi - x$ و استفاده از خاصیت ۱۰ در صفحه ۲٦٦ داریم:

$$I = \int_{0}^{\pi} (\pi - x)f\big(\sin(\pi - x)\big)\, dx = \int_{0}^{\pi} (\pi - x)f(\sin x)dx$$

$I$ موجود در صورت سؤال را با مقدار به‌دست آمده جمع می‌کنیم.

$$I + I = \int_{0}^{\pi} \Big(xf(\sin x) + (\pi - x)f(\sin x)\Big)\, dx = \int_{0}^{\pi} \pi f(\sin x)\, dx \implies I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx$$

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx \qquad (۴-۳)$$

نکته ۱۳. اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد:

$$\int_{0}^{\pi} xf(\cos x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\cos x)\, dx$$

**مثال ۲۴** مطلوب است $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$.

از خاصیت ۱۰ در صفحه ۲٦٦ و با تبدیل $x \to \frac{\pi}{2} - x$ داریم $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(\frac{\pi}{2} - x)\big)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$

$$2I = I + I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\ln(\sin x) + \ln(\cos x)\Big)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\frac{1}{2}\sin 2x\big)dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln\frac{1}{2} + \ln\sin 2x\big)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x dx$$

$$\Longrightarrow \text{۲}I \xlongequal{t=\text{۲}x} -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_{\circ}^{\pi}\ln\sin t\,dt = -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\underbrace{\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\ln\sin t\,dt}_{I} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_{\frac{\pi}{\text{۲}}}^{\pi}\ln\sin t\,dt$$

$$\Longrightarrow \text{۲}I \xlongequal{t=\pi-u} -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲} + \frac{I}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_{\frac{\pi}{\text{۲}}}^{\circ}\ln\big(\sin(\pi-u)\big)(-du)$$

$$= -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲} + \frac{I}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\ln(\sin u)du = -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲} + I \Longrightarrow I = -\frac{\pi}{\text{۲}}\ln\text{۲}$$

**نکته ۱۴.** برای محاسبه انتگرال توابع چند ضابطه‌ای (مثلاً تابع قدر مطلق یا جزء صحیح) انتگرال داده شده را به صورت مجموع انتگرال‌هایی می‌نویسیم که بر هر بازه انتگرال گیری توابع مورد نظر دارای فقط یک ضابطه باشند. بنابراین کاندیدای شکستن بازه در مورد توابع براکتی، نقاطی هستند که تابع داخل جزء صحیح در آنها برابر عددی صحیح است. در مورد توابع قدرمطلقی، کاندیدای این کار ریشه‌ها یا نقاط ناپیوستگی عبارات داخل قدرمطلق هستند.

**مثال ۲۵.** حاصل $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}[\text{۴}\cos^{\text{۲}}x]dx$ را به دست آورید.

اگر $g(x) = \text{۴}\cos^{\text{۲}}x$ با توجه به ظاهر شدن جزء صحیح باید فاصله انتگرال گیری را به صورتی بنویسیم که عبارت داخل انتگرال شامل عدد صحیح نشود. به عبارتی چون برای $\circ \le x \le \frac{\pi}{\text{۲}}$ داریم $\circ \le g(x) \le \text{۴}$ پس $x$ هایی که در آن‌ها $g(x)$ اعداد صحیح می‌شوند را به عنوان کران‌های انتگرال انتخاب می‌کنیم.

$g(x) = \circ \Longrightarrow \cos x = \circ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{\text{۲}}$ و $g(x) = \text{۱} \Longrightarrow \cos x = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{\text{۳}}$

$g(x) = \text{۲} \Longrightarrow \cos x = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{\text{۴}}$ و $g(x) = \text{۳} \Longrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{\text{۶}}$

$g(x) = \text{۴} \Longrightarrow \cos x = \text{۱} \Longrightarrow x = \circ$

$$\Longrightarrow \text{انتگرال} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۶}}}\text{۳}dx + \int_{\frac{\pi}{\text{۶}}}^{\frac{\pi}{\text{۴}}}\text{۲}dx + \int_{\frac{\pi}{\text{۴}}}^{\frac{\pi}{\text{۳}}}\text{۱}dx + \int_{\frac{\pi}{\text{۳}}}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\circ dx$$

برای جایگذاری تابع، توجه کنید که وقتی $\circ < x \le \frac{\pi}{\text{۶}}$ داریم $\text{۳} \le g(x) < \text{۴}$ و لذا $[g(x)] = \text{۳}$ و هنگامی‌که $\frac{\pi}{\text{۶}} < x \le \frac{\pi}{\text{۴}}$ داریم $\text{۲} \le g(x) < \text{۳}$ و لذا $[g(x)] = \text{۲}$ و ....

$$\text{انتگرال} = \text{۳}(\frac{\pi}{\text{۶}} - \circ) + \text{۲}(\frac{\pi}{\text{۴}} - \frac{\pi}{\text{۶}}) + (\frac{\pi}{\text{۳}} - \frac{\pi}{\text{۴}}) = \frac{\text{۳}\pi}{\text{۴}}$$

**تست ۳۷** مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}dx$ کدام است؟ (حفاری ۷۹)

۱) $\circ$ ۲) $\frac{\pi}{\text{۴}}$ ۳) $\frac{\pi}{\text{۲}}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به رابطه(۴ ــ ۲) در صفحه ۲۷۴، اگر $f(x) = \sin^m x$ آنگاه $f(\frac{\pi}{\text{۲}} - x) = \cos^m x$ و لذا حاصل انتگرال $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\frac{\pi}{\text{۲}}) = \frac{\pi}{\text{۴}}$ است.

**نکته ۱۵.** با توجه به رابطه(۴ ـ ۲) در صفحه ۲۷۴ برای هر $n \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{\text{۲}}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{\text{۴}}$$

تست ۳۸ مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\pi} \frac{\sin^{۶} x}{\sin^{۶} x+\cos^{۶} x} dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\pi$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر تابع تحت انتگرال را $g(x)$ بنامیم، با توجه به نکته بالا:

$$\text{انتگرال} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} g(x)dx + \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} g(x)dx \stackrel{\text{انتقال}}{=\!=\!=} \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} g(x)dx + \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} g\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)dx$$

$$= \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} g(x)dx + \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^{۶} x}{\cos^{۶} x+\sin^{۶} x} dx = \frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

نکته ۱۶. با توجه به تقارن، برای $n \in \mathbb{N}$ و زوج و $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\int_{\circ}^{\frac{m\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\, dx = m\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\, dx = \frac{m\pi}{۴}$$

نکته ۱۷. اگر $f$ تابعی زوج باشد و $n \in \mathbb{N}$ بنا به تقارن:

$$\int_{\circ}^{\frac{n\pi}{۲}} f(\sin\theta)d\theta = n\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin\theta)d\theta \quad \text{و} \quad \int_{\circ}^{\frac{n\pi}{۲}} f(\cos\theta)d\theta = n\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos\theta)d\theta$$

تست ۳۹ حاصل $\int_{۴}^{۶} \frac{dx}{۹-x^{۲}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۶}\ln\frac{۷}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}\ln\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}\ln\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}\ln\frac{۳}{۵}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به فرمول انتگرال‌گیری ۲۸ در صفحه ۲۴۶:

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۶}\ln\frac{x+۳}{x-۳}\Big|_{۴}^{۶} = \frac{۱}{۶}\left(\ln\frac{۹}{۳}-\ln\frac{۷}{۱}\right) = \frac{۱}{۶}\ln\frac{۳}{۷} = -\frac{۱}{۶}\ln\frac{۷}{۳}$$

تست ۴۰ $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۲x-x^{۲}}}$ کدام است؟ (سیستم ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

حل: گزینه ۱ درست است. عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-(x-۱)^{۲}}} = \sin^{-۱}(x-۱)\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱} = \circ - \sin^{-۱}(-\frac{۱}{۲}) = \frac{\pi}{۶}$$

تست ۴۱ مقدار انتگرال معین $\int_{۱}^{e} \frac{dx}{x(\ln^{۲} x+\ln x+۱)}$ کدام است؟ (مدیریت نساجی ۸۰)

۱) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ۳) $\pi\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$

حل: گزینه ۲ درست است. از تغییر متغیر $u=\ln x$ و $du=\frac{dx}{x}$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{\circ}^{۱} \frac{du}{u^{۲}+u+۱} = \int_{\circ}^{۱} \frac{du}{(u+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\frac{u+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Big|_{\circ}^{۱} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\frac{۲u+۱}{\sqrt{۳}}\Big|_{\circ}^{۱}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt{۳}}(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}) = \frac{\pi}{۳\sqrt{۳}} = \frac{\pi\sqrt{۳}}{۹}$$

**تست ۴۲** حاصل $\int_{\ln ۳}^{\ln ۸} \sqrt{e^{۲x}+e^{۳x}}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) $\frac{۳۷}{۳}$ ۳) $\frac{۳۸}{۳}$ ۴) $e^{۸}-e^{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $e^{۲x}+e^{۳x}=e^{۲x}(۱+e^{x})$

$$\text{انتگرال} = \int_{\ln ۳}^{\ln ۸} e^{x}\sqrt{۱+e^{x}}dx \xlongequal{u=۱+e^{x}} \int_{۴}^{۹}\sqrt{u}du = \frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۴}^{۹} = \frac{۲}{۳}(۲۷-۸) = \frac{۳۸}{۳}$$

**تست ۴۳** مقدار متوسط تابع $f(x)=\sin^{۲}x\cos x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟ (آمار ۸۱)

۱) $\frac{۴}{۹\pi}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۹\pi}$ ۳) $\frac{۴-\sqrt{۲}}{۹\pi}$ ۴) $\frac{۴+\sqrt{۲}}{۹\pi}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲}x\cos x dx = \frac{۱}{۳}\sin^{۳}x\Big|_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۳}(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}) = \frac{۲\sqrt{۲}+۱}{۶\sqrt{۲}}$$

$$\text{طول بازه} = \frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} \Longrightarrow \text{مقدار متوسط} = \frac{۴}{۳\pi}\,\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{۶\sqrt{۲}} = \frac{۴+\sqrt{۲}}{۹\pi}$$

**تست ۴۴** مقدار $I=\int_{-۱}^{۱}\frac{۱-x}{۳^{x}+۳^{-x}}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\ln ۳}(\tan^{-۱}۳-\frac{\pi}{۴})$ ۲) $\ln ۳(\tan^{-۱}۳-\frac{\pi}{۴})$

۳) $\frac{۱}{\ln ۳}(\tan^{-۱}۳-\frac{\pi}{۴})$ ۴) $۲\ln ۳(\tan^{-۱}۳-\frac{\pi}{۴})$

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال را به صورت $I=\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{۳^{x}+۳^{-x}}-\int_{-۱}^{۱}\frac{xdx}{۳^{x}+۳^{-x}}$ می‌نویسیم. با توجه به اینکه $\frac{x}{۳^{x}+۳^{-x}}$ تابعی فرد است، پس دومین انتگرال صفر می‌شود. برای محاسبه اولین انتگرال، صورت و مخرج را در $۳^{x}$ ضرب کرده و از $u=۳^{x}$ و $du=۳^{x}\ln ۳dx$ استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{-۱}^{۱}\underbrace{\frac{dx}{۳^{x}+۳^{-x}}}_{\text{تابع زوج}} = ۲\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۳^{x}+۳^{-x}} = ۲\int_{۰}^{۱}\frac{۳^{x}dx}{(۳^{x})^{۲}+۱} = \frac{۲}{\ln ۳}\int_{۱}^{۳}\frac{du}{u^{۲}+۱} = \frac{۲}{\ln ۳}\tan^{-۱}u\Big|_{۱}^{۳}$$
$$= \frac{۲}{\ln ۳}(\tan^{-۱}۳-\frac{\pi}{۴})$$

**تست ۴۵** حاصل $\int_{-۲}^{۲}\frac{e^{\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. قرار دهید $u=-x$ در این صورت اگر مقدار انتگرال را $I$ بنامیم:

$$I=\int_{-۲}^{۲}\frac{e^{\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx = \int_{۲}^{-۲}\frac{e^{-\sin u}}{\cosh(-\sin u)}(-du) = \int_{-۲}^{۲}\frac{e^{-\sin u}}{\cosh(\sin u)}du$$

مقدار انتگرال معین به نام متغیر بستگی ندارد، پس $I=\int_{-۲}^{۲}\frac{e^{-\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx$ حال با جمع کردن $I$ با صورت سؤال:

$$۲I=I+I=\int_{-۲}^{۲}\frac{e^{\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx+\int_{-۲}^{۲}\frac{e^{-\sin x}}{\cosh(\sin x)}dx = \int_{-۲}^{۲}\frac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}}{\frac{۱}{۲}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})}dx$$
$$=\int_{-۲}^{۲}۲dx = ۸ \Longrightarrow I=۴$$

نکته ۱۸. با روش مشابه برای عدد $a > 0$ داریم $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}dx = a$.

**تست ۴۶** مقدار انتگرال $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۴)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $1-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2+\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $u^2 = e^x - 1$ و $u > 0$ استفاده می‌کنیم.

$$e^x = u^2 + 1 \Longrightarrow e^x dx = 2udu \Longrightarrow dx = \frac{2u\,du}{e^x} = \frac{2u}{u^2+1}du$$

$$x = 0 \Longrightarrow u = 0 \quad \text{و} \quad x = \ln 2 \Longrightarrow u = 1$$

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2+1}du = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right)du = 2\left(u - \tan^{-1} u\right)\Big|_0^1 = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

**تست ۴۷** مقدار $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ برابر کدام است؟ (آمار ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به رابطه (۴ ـ ۳) در صفحه ۲۷۴، و این موضوع که ضریب $x$ در انتگرال بالا یعنی $\frac{\sin x}{2-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ تابعی از $\sin x$ است داریم:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\tan^{-1}(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

**تست ۴۸** مقدار انتگرال معین $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{2}\text{Arccos}x\right)dx$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$، عبارت تحت انتگرال به $\frac{1}{2}(1-x)$ تبدیل می‌شود.

$$\text{انتگرال} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{4}$$

**تست ۴۹** مطلوب است محاسبه $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$. (صنایع ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{13}{15}+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{23}{15}-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{23}{15}+\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۱ درست است. برای محاسبه $\int \tan^n x dx$ باید در عبارت تحت انتگرال $\tan^{n-2} x$ را اضافه و کم کنیم تا مشتق $\tan x$ یعنی $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ را ایجاد کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا برای $n$ زوج به $\tan^2 x$ و برای $n$ فرد به $\tan x$ برسیم. (با توجه به مثال ۵ در صفحه ۲۵۱ این ایده یک رابطه بازگشتی ایجاد می‌کند.)

$$\tan^6 x = \tan^6 x + \tan^4 x - \tan^4 x = \tan^4 x(\tan^2 x + 1) - (\tan^4 x + \tan^2 x - \tan^2 x)$$

$$= \sec^2 x\tan^4 x - (1+\tan^2 x)\tan^2 x + \tan^2 x = \sec^2 x(\tan^4 x - \tan^2 x) + \sec^2 x - 1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^2 x(\tan^4 x - \tan^2 x) + \sec^2 x - 1\right)dx = \left(\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

**تست ۵۰** چنانچه $I_{mn}=\int_{0}^{2\pi}\sin mx\cos nx dx$ و $m,n\in\mathbb{N}$ باشد آنگاه: (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $I_{mn}=\pi$ وقتی که $m\neq n$ باشد. ۲) $I_{mn}=2\pi$ وقتی که $m\neq n$ باشد.

۳) $I_{mn}=(m+n)\pi$ وقتی که $m\neq n$ باشد. ۴) $I_{mn}=0$ به‌ازای تمام $n,m$ ها.

حل: گزینه ۴ درست است. از فرمول تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم.

$$I_{mn}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\Big(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\Big)dx$$

چون توابع ظاهر شده در انتگرال دارای دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{m\pm n}$ هستند پس $2\pi$ نیز دوره تناوب آنها است و لذا بنا به ۱۳ در صفحه ۲۶۷ انتگرال صفر است.

**تست ۵۱** حاصل $\int_{-2}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. از تغییر متغیر $x=\sec\theta$ و $dx=\sec\theta\tan\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\frac{|\tan\theta|}{\sec\theta}(\sec\theta\tan\theta)d\theta=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\tan^2\theta\, d\theta=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$=(\theta-\tan\theta)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

تذکر۱۶. به عنوان تمرین، این تست را با هر یک از تغییر متغیرهای $u=x^2-1$ و $u^2=x^2-1$ نیز حل نمایید.

**تست ۵۲** حاصل $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) $\ln\frac{5}{4}$ ۲) $2\ln\frac{5}{4}$ ۳) $\ln\frac{4}{5}$ ۴) $\ln\frac{5}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. از روش تجزیه به کسرها، استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$A=\lim_{x\to 0}xf(x)=-1 \quad \text{و} \quad 1=\lim_{x\to+\infty}xf(x)=A+B=-1+B\implies B=2$$

و با جایگذاری $x=1$ داریم $-1+\frac{2+C}{2}=0$ و بنابراین $C=0$، پس:

$$\text{انتگرال}=\int_{1}^{2}\Big(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\Big)dx=\ln\frac{x^2+1}{x}\Big|_{1}^{2}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$$

**تست ۵۳** انتگرال $\int_{0}^{1}\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)dx$ برابر است با: (معدن ۷۸، مکانیک ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۲) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}-1$ ۳) $\ln 2+\frac{\pi}{4}-1$ ۴) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $dv=dx$ و $u=\ln(1+x^2)$ آنگاه $v=x$ و $du=\frac{2x}{x^2+1}dx$:

$$\text{انتگرال}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\int_{0}^{1}\Big(1-\frac{1}{x^2+1}\Big)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\Big(x-\tan^{-1}x\Big)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$$

**تست ۵۴** مقدار انتگرال معین $I = \int_{۰}^{\sqrt{۳}} x\text{Arctan}x dx$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) $I = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $I = \frac{۳\pi}{۲} - \sqrt{۳}$ ۳) $I = \frac{\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $I = \frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. از روش جزء به جزء با انتخاب $u = \text{Arctan}x$ و $dv = xdx$ استفاده می‌کنیم.

$$du = \frac{dx}{۱ + x^{۲}} \quad \text{و} \quad v = \frac{x^{۲}}{۲}$$

$$I = \frac{x^{۲}}{۲}\tan^{-۱} x\Big|_{۰}^{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۳}} \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}dx = \frac{۳}{۲}\left(\frac{\pi}{۳}\right) - \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۳}}\left(۱ - \frac{۱}{۱ + x^{۲}}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}(x - \tan^{-۱} x)\Big|_{۰}^{\sqrt{۳}} = \frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

**تست ۵۵** حاصل $\int_{۰}^{۱} \tan^{-۱}\sqrt{x}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

۱) $۲ + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲} + ۱$ ۳) $\frac{\pi}{۲} - ۱$ ۴) $۲ - \frac{\pi}{۴}$

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. ابتدا تغییر متغیر $x = t^{۲}$ را اعمال می‌کنیم تا به $۲\int_{۰}^{۱} t\tan^{-۱} t\, dt$ برسیم. با محاسبه‌ای مشابه تست قبل حاصل برابر $\frac{\pi}{۲} - ۱$ است.

روش دوم. از رابطه (۴ ـ ۱) در صفحه ۲۷۳، به ازای $a = ۰$ و $b = ۱$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x) = \tan^{-۱}\sqrt{x}$ آن‌گاه $f^{-۱}(x) = \tan^{۲} x$ و بنابراین $\int_{۰}^{۱} \tan^{-۱}\sqrt{x}dx + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۲} xdx = \frac{\pi}{۴}$.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \tan^{۲} xdx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} (\sec^{۲} x - ۱)dx = (\tan x - x)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} = ۱ - \frac{\pi}{۴} \implies \int_{۰}^{۱} \tan^{-۱}\sqrt{x}dx = \frac{\pi}{۲} - ۱$$

**تست ۵۶** مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f''(x)dx$ کدام است؟($n$ عددی صحیح و $f''(x)$ روی $[۰, \pi]$ پیوسته است.) (مکانیک ۷۹)

۱) $nf(۰) + (-۱)^{n}nf'(\pi) - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۲) $nf(۰) + (-۱)^{n+۱}nf(\pi) - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۳) $nf(۰) + (-۱)^{n}nf(\pi) - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

۴) $nf(۰) + (-۱)^{n+۱}nf'(\pi) - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به گزینه‌ها باید دو بار از جزء به‌جزء استفاده کنیم.

| انتگرال | مشتق | |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\sin(nx)$ | $\oplus$ |
| $f'(x)$ | $n\cos(nx)$ | $\ominus$ |
| $f(x)$ | $-n^{۲}\sin(nx)$ | $\oplus$ |

$$\text{انتگرال} = f'(x)\sin(nx)\Big|_{۰}^{\pi} - nf(x)\cos(nx)\Big|_{۰}^{\pi} - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$$

$$= ۰ - nf(\pi)\cos(n\pi) + nf(۰) - n^{۲}\int_{۰}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx$$

و چون $\cos(n\pi) = (-۱)^{n}$ پس گزینه (۲) به دست می‌آید.

**تست ۵۷** اگر $J_m = \int_1^e (\ln x)^m dx$ آنگاه $J_{1380}$ برابر است با: (آمار ۸۱)

۱) $e - 1380 J_{1379}$ ۲) $e + 1380 J_{1379}$ ۳) $e - 1380 J_{1381}$ ۴) $e + 1380 J_{1381}$

حل: گزینه ۱ درست است. مانند مثال ۱۱ صفحه ۲۶۰، باید یک دستور کاهشی با روش جزء به جزء بیابیم.

$$u = \ln^m x \text{ و } dv = dx \Longrightarrow du = m(\ln^{m-1} x)\frac{dx}{x} \text{ و } v = x$$

$$J_m = x\ln^m x\Big|_1^e - m\int_1^e \ln^{m-1} x dx = e - mJ_{m-1} \Longrightarrow J_{1380} = e - 1380 J_{1379}$$

**تست ۵۸** می‌دانیم برای $a > 1$ داریم $\int_0^\pi \frac{dx}{a - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$ حاصل $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(x) = \frac{1}{(2 - \cos x)^2}$ تابع متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است پس بنا به ویژگی ۱۲ در صفحه ۲۶۷ داریم $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$ و چون $f(x)$ زوج است، حاصل انتگرال برابر $I = 2\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$ می‌باشد پس کافی است از عبارت داده شده در سؤال نسبت به $a$ مشتق بگیریم. با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a - \cos x}\right)dx = \frac{d}{da}\left(\pi(a^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow \int_0^\pi \frac{-1}{(a - \cos x)^2}dx = -\frac{\pi}{2}(2a)(a^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow \int_0^\pi \frac{dx}{(a - \cos x)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Longrightarrow I = 2\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2(2\pi)}{(4 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

**تست ۵۹** $\int_0^{\sqrt{3}} [x^2]dx$ ($[x]$: جزء صحیح $x$) برابر است با: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) $5 - 2\sqrt{3}$ ۲) $5 - \sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$ ۴) $5 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$

حل: گزینه ۳ درست است. در بازه انتگرال‌گیری داریم $0 \le x^2 \le 3$ و لذا اعداد صحیح $x^2 = 0, 1, 2, 3$ در این بازه قرار دارند، پس $x = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ پس:

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 0dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2dx = \sqrt{2} - 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1$$

**تست ۶۰** مقدار $\int_1^{n+1} \ln[x]dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $\ln(n!)$ ۲) $\ln(n+1)!$ ۳) $\ln\frac{n}{n+1}$ ۴) $\ln\frac{n+1}{n}$

حل: گزینه ۱ درست است. اعداد صحیح $x = 1, 2, \cdots, n+1$ در بازه انتگرال‌گیری قرار دارند.

$$\text{انتگرال} = \int_1^2 (\ln 1)dx + \int_2^3 (\ln 2)dx + \cdots + \int_n^{n+1} (\ln n)dx = \ln 2 + \cdots + \ln n$$

$$= \ln(2 \times \cdots \times n) = \ln(n!)$$

**تست ۶۱** انتگرال $\int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathsf{r}}} |\sin x - \cos x| dx$ برابر است با: ( معدن ۸۲)

۱) $\mathsf{r}\sqrt{\mathsf{r}}$ ۲) $\mathsf{r}\sqrt{\mathsf{r}} - \mathsf{r}$ ۳) $\mathsf{r}\sqrt{\mathsf{r}} + \mathsf{r}$ ۴) $\sqrt{\mathsf{r}} - \mathsf{r}$

**حل: گزینه ۲ درست است.** باید ریشه عبارت داخل قدر مطلق را به دست آوریم.

$$\sin x - \cos x = \circ \implies x = \frac{\pi}{\mathsf{f}}$$

بنابراین باید دو بازه $I_{\mathsf{1}} = [\circ, \frac{\pi}{\mathsf{f}}]$ و $I_{\mathsf{r}} = [\frac{\pi}{\mathsf{f}}, \frac{\pi}{\mathsf{r}}]$ را در نظر بگیریم. برای بررسی علامت $f(x) = \sin x - \cos x$ در هر بازه، کافی است یک نقطه از آن بازه را تعیین علامت کنیم. مثلاً چون $f(\circ) = -\mathsf{1} < \circ$ پس $f(x)$ در $I_{\mathsf{1}}$ منفی است. با امتحان کردن $x = \frac{\pi}{\mathsf{r}}$ مشخص می‌شود که در $I_{\mathsf{r}}$ تابع مثبت است و لذا:

$$\text{انتگرال} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathsf{f}}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{\mathsf{f}}}^{\frac{\pi}{\mathsf{r}}} (\sin x - \cos x) dx = (\sin x + \cos x)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathsf{f}}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{\mathsf{f}}}^{\frac{\pi}{\mathsf{r}}}$$

$$= (\frac{\sqrt{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}} + \frac{\sqrt{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}} - \mathsf{1}) + (-\mathsf{1} + \frac{\sqrt{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}} + \frac{\sqrt{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}}) = \mathsf{r}\sqrt{\mathsf{r}} - \mathsf{r}$$

**تست ۶۲** اگر $f(t) = \max\{\mathsf{1}, t^{\mathsf{r}}\}$ به ازای هر عدد حقیقی $t$، $F(x) = \int_{\circ}^{x} f(t)dt$ آنگاه

(مکانیک ۷۲)

۱) $F(\mathsf{r}) = \frac{\mathsf{8}}{\mathsf{r}}$ ۲) $F(\mathsf{r}) = \frac{\mathsf{1}\circ}{\mathsf{r}}$ ۳) $F(\mathsf{r}) = \mathsf{9}$ ۴) هیچکدام

**حل: گزینه ۲ درست است.** با توجه به گزینه‌ها، هدف محاسبه $\int_{\circ}^{\mathsf{r}} f(t)dt$ است پس ضابطهٔ $f(t)$ در بازه $[\circ, \mathsf{r}]$ باید مشخص شود. برای مشخص شدن اینکه تابع max یا min در چه نقاطی تغییر ضابطه می‌دهند، کافی است دو ضابطه را برابر قرار دهیم. پس از تساوی $t^{\mathsf{r}} = \mathsf{1}$ نقاط $t = \pm \mathsf{1}$ حاصل می‌شود که فقط $t = \mathsf{1}$ داخل بازه قرار دارد. برای مشخص شدن ضابطه توجه کنید که به ازای یک $t$ دلخواه از $[\circ, \mathsf{1})$ و مثلاً $t = \circ$ داریم $t^{\mathsf{r}} < \mathsf{1}$ و لذا در کل بازه این رابطه برقرار است و بنابراین $\max\{\mathsf{1}, t^{\mathsf{r}}\} = \mathsf{1}$. به طور مشابه برای $\mathsf{1} < t < \mathsf{r}$ داریم $t^{\mathsf{r}} > \mathsf{1}$ پس:

$$f(t) = \begin{cases} \mathsf{1} & \circ \leq t \leq \mathsf{1} \\ t^{\mathsf{r}} & \mathsf{1} < t \leq \mathsf{r} \end{cases} \implies F(\mathsf{r}) = \int_{\circ}^{\mathsf{1}} \mathsf{1} dt + \int_{\mathsf{1}}^{\mathsf{r}} t^{\mathsf{r}} dt = \mathsf{1} + \frac{t^{\mathsf{r}}}{\mathsf{r}}\Big|_{\mathsf{1}}^{\mathsf{r}} = \frac{\mathsf{1}\circ}{\mathsf{r}}$$

## محاسبه حد یک مجموع به کمک انتگرال معین

یکی از موارد استفاده انتگرال معین، محاسبه حد برخی مجموع‌ها است. با توجه به اینکه ما انتگرال معین را به عنوان حد یک مجموع ریمان معرفی کردیم، با مشخص شدن تابع و حدود انتگرال‌گیری می‌توان مقدار مجموع داده شده (به شرط آن که به شکل مجموع ریمان یک تابع باشد) را محاسبه کرد. در تمام این نوع مسائل می‌توان بازه انتگرال گیری را $[\circ, \mathsf{1}]$ فرض نمود. در این صورت اگر تعداد عوامل ظاهر شده در مجموع برابر $n$ باشد، بازه $[\circ, \mathsf{1}]$ را به $n$ قسمت مساوی که طول هر یک $\Delta x = \frac{\mathsf{1}}{n}$ است تقسیم کرده و با توجه به توضیحات صفحه ۲۶۴ داریم $x_k = \frac{k}{n}$ و $\frac{k-\mathsf{1}}{n} \leq c_k \leq \frac{k}{n}$. باید تابع $f$ را طوری یافت که مجموع داده شده مجموع ریمان تابع $y = f(x)$ یعنی $\sum_{k=\mathsf{1}}^{n} \frac{\mathsf{1}}{n} f(c_k)$ باشد و در این صورت حاصل حد برابر $\int_{\circ}^{\mathsf{1}} f(x)dx$ خواهد بود.

تذکر ۱۷. معمولاً سؤالات طوری مطرح می‌شوند که $c_k = x_k = \frac{k}{n}$ اما $c_k$ می‌تواند هر عددی در بازه $[\frac{k-۱}{n}, \frac{k}{n}]$ انتخاب شده باشد.

نکته ۱۹. برای محاسبه مجموع ریمان (وقتی تعداد جملات مجموع برابر $n$ است)، کافی است جمله عمومی عبارت داده شده را برابر $\frac{۱}{n}f(c_k)$ قرار دهیم. جمله عمومی را در $n$ ضرب کرده و در آن $\frac{k}{n}$ ایجاد کنیم. پس از شناسایی $c_k$ که معمولاً برابر $\frac{k}{n}$ انتخاب می‌شود و تبدیل $x \leftarrow c_k$ تابع $f(x)$ حاصل می‌شود و پاسخ سؤال $\int_{\circ}^{۱} f(x)dx$ می‌باشد.

تذکر ۱۸. اگر تعداد جملات مجموع ضریبی از $n$ و مثلاً $۲n$ باشد، در تمامی توضیحات بالا به جای $n$ همان ضریب $n$ (یعنی $۲n$) را قرار می‌دهیم. (مثال ۲۹ در صفحه بعد را ملاحظه کنید.)

مثال ۲۶. حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{n^۲}\left(\sqrt{n^۲-۱^۲}+\sqrt{n^۲-۲^۲}+\cdots+\sqrt{n^۲-n^۲}\right)$ را محاسبه کنید.

عبارت تحت حد برابر $\frac{۱}{n^۲}\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{n^۲-k^۲}$ و بنابراین جمله عمومی آن $\frac{۱}{n^۲}\sqrt{n^۲-k^۲} = \frac{۱}{n}f(c_k)$ می‌باشد. پس $f(c_k) = \frac{۱}{n}\sqrt{n^۲-k^۲} = \sqrt{۱-(\frac{k}{n})^۲}$ که با توجه به ظاهر شدن $\frac{k}{n}$ قرار می‌دهیم $c_k = \frac{k}{n}$ و با تبدیل $x \leftarrow c_k = \frac{k}{n}$ داریم $f(x) = \sqrt{۱-x^۲}$. پس حاصل $\int_{\circ}^{۱}\sqrt{۱-x^۲}dx$ است. انتگرال اخیر از نظر هندسی مساحت ربع دایره $x^۲+y^۲=۱$ یعنی برابر $\frac{\pi}{۴}$ است. (تست ۲۰ در صفحه ۲۶۵ را ملاحظه کنید.)

**مثال ۲۷** حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\left(\sqrt{n-۱}+\sqrt{\frac{n-۲}{۲}}+\sqrt{\frac{n-۳}{۳}}+\cdots+\sqrt{\frac{۱}{n-۱}}\right)$ را بیابید.

مجموع را برابر مجموع ریمان تابع $f(x)$ بر بازه $[۰, ۱]$ می‌گیریم.

$$\frac{۱}{n}f(c_k) = \text{جمله عمومی} = \frac{۱}{n}\sqrt{\frac{n-k}{k}} \implies f(c_k) = \sqrt{\frac{n-k}{k}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}}$$

$$c_k = \frac{k}{n} \implies f(x) = \sqrt{\frac{۱-x}{x}} \implies \text{حد} = \int_{\circ}^{۱}\sqrt{\frac{۱-x}{x}}\,dx$$

برای محاسبه انتگرال با استفاده از تغییر متغیر $x = \sin^۲\theta$ و $dx = ۲\sin\theta\cos\theta d\theta$:

$$\text{حد} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\frac{۱-\sin^۲\theta}{\sin^۲\theta}}(۲\sin\theta\cos\theta d\theta) = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^۲\theta}}(۲\sin\theta\cos\theta d\theta) = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} ۲\cos^۲\theta d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲\theta)d\theta = (\theta+\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۲}$$

ضمناً برای محاسبه مقدار این انتگرال با تابع بتا به تست ۱۳۹ در صفحه ۳۶۰ مراجعه کنید.

مثال ۲۸. مقدار $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\tan^{-۱}\left(\frac{۲k-۱}{۲n}\right)$ را بیابید.

مجموع داده شده را مجموع ریمان $f(x)$ بر بازه $[۰, ۱]$ می‌گیریم.

$$\frac{۱}{n}f(c_k) = \text{جمله عمومی} = \frac{۱}{n}\tan^{-۱}\left(\frac{۲k-۱}{۲n}\right) \implies f(c_k) = \tan^{-۱}\left(\frac{k-\frac{۱}{۲}}{n}\right)$$

چون باید $\frac{k-۱}{n} = x_{k-۱} \le c_k \le x_k = \frac{k}{n}$، با فرض $c_k = \frac{k-\frac{۱}{۲}}{n}$، تابع $f(x) = \tan^{-۱}x$ به‌دست می‌آید و حد

برابر $A=\int_0^1 \tan^{-1} x dx$ است. برای محاسبه انتگرال داریم:

روش اول. روش جزء به جزء:

$$dv=dx \text{ و } u=\tan^{-1}x \implies v=x \text{ و } du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$A=x\tan^{-1}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$$

روش دوم. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱) در صفحه ۲۷۳ و با انتخاب $f(x)=\tan^{-1}x$ و $a=0$ و $b=1$ داریم:

$$\int_0^1\tan^{-1}xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{4}\implies A=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi}{4}+\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$$

**مثال ۲۹** حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{2}{3n+2}+\cdots+\frac{3n}{3n+3n}\right)$ را محاسبه کنید.

تعداد جملات مجموع بالا برابر $3n$ است و لذابا توجه به تذکر ۱۸ در صفحه قبل:

$$\frac{1}{3n}f(c_k)=\text{جمله عمومی}=\frac{1}{n}.\frac{k}{3n+k}\implies f(c_k)=\frac{3k}{k+3n}=\frac{3(\frac{k}{3n})}{\frac{k}{3n}+1} \text{ و } c_k=\frac{k}{3n}$$

$$\implies f(x)=\frac{3x}{x+1}\implies \text{حد}=\int_0^1\frac{3x}{x+1}dx=3\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx=3\big(x-\ln(x+1)\big)\Big|_0^1=3-3\ln 2$$

**تست ۶۳** مقدار $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ کدام است؟

(ریاضی ۷۷، تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) $2\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $4\pi$

حل: گزینه ۳ درست است. تعداد جملات مجموع برابر $n$ است.

$$\frac{1}{n}f(c_k)=\frac{n}{n^2+k^2}\implies f(c_k)=\frac{n^2}{n^2+k^2}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\implies f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{حد}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

**تست ۶۴** مقدار $I=\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{n}\left(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right)$ را به دست آورید.

(ریاضی ۷۹)

۱) $I=-\ln 2$ ۲) $I=\ln 2$ ۳) $I=1-2\ln 2$ ۴) $I=2\ln 2-1$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ پس عبارت مورد نظر مجموع $\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n})$ است.

$$\frac{1}{n}f(c_k)=\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n})\implies f(c_k)=\ln(1+\frac{k}{n})\implies f(x)=\ln(1+x)$$

$$\implies \text{حد}=\int_0^1\underbrace{\ln(1+x)}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=x\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\ln 2-\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})dx$$

$$=\ln 2-\big(x-\ln(x+1)\big)\Big|_0^1=2\ln 2-1$$

## ۴—۴ انتگرال‌های ناسره (مجازی، غیر عادی)

در انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ اگر وضعیت‌های زیر رخ دهد، آنگاه انتگرال $f(x)$ روی $[a,b]$ را ناسره (غیرعادی) می‌نامیم.

۱) یک یا دو حد بالا و پایین انتگرال برابر بینهایت باشد. (دامنه انتگرال گیری نامحدود باشد.)

۲) تابع تحت انتگرال در بازه $[a,b]$ بی‌کران باشد. (برد تابع در فاصله $[a,b]$ نامحدود باشد.)

در این صورت ایده کلی تعریف انتگرال این است، که به جای نقطه ناسرگی یک پارامتر قرار داده و سپس حد انتگرال را وقتی پارامتر به سمت نقطه ناسرگی میل می‌کند، محاسبه نماییم. به صورت دقیق تر:

**الف) انتگرال ناسره نوع اول**

انتگرال‌های به شکل $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ یا $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ را که تابع $f$ بر بازه انتگرال‌گیری کراندار و انتگرال‌پذیر باشد را **ناسره نوع اول** می‌نامیم و مقدار آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$$

در این صورت اگر حد سمت راست تساوی موجود باشد انتگرال را **همگرا** و در غیراین صورت آنرا **واگرا** می‌نامیم.

**ب) انتگرال ناسره نوع دوم**

اگر تابع $f$ در بازهٔ $(a,b)$ کراندار و انتگرال‌پذیر بوده و فقط در $x=a$ یا $x=b$ برابر بینهایت شود $\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال **ناسره نوع دوم** می‌نامیم. در حالتی که $f(a)=\pm\infty$ مقدار انتگرال به صورت:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

و اگر $f(b)=\pm\infty$ مقدار انتگرال به صورت:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

تعریف می‌شود. در صورتی که حدود سمت راست تساویها موجود باشد، انتگرال را همگرا و در غیر این صورت واگرا می‌نامند.

**ج) ترکیبی از ناسرگی‌ها**

اگر انتگرالی دارای بیش از یک ناسرگی باشد، برای بررسی همگرایی یا واگرایی، آن را به صورت مجموع انتگرال‌هایی می‌نویسیم که هر یک فقط یک ناسرگی داشته باشند. در این صورت

**اگر همه انتگرال‌هایی که در مجموع ظاهر می‌شوند، همگرا باشند انتگرال موردنظر نیز همگراست.**

معروفترین مثال در مورد انتگرالهای ناسره، $p$ انتگرالها هستند.

**مثال ۳۰.** ($p$ انتگرال‌ها)

الف) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ برای $a>0$ ثابت، ناسره از نوع اول است و داریم:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c x^{-p}dx \overset{p\neq 1}{=\!=\!=} \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{1-p}(c^{1-p}-a^{1-p})$$

حد اخیر موجود است هرگاه $1-p<0$ و لذا $p>1$. برای $p=1$ نیز انتگرال داده شده به صورت

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c\frac{dx}{x}=\lim_{c\to+\infty}(\ln c-\ln a)$$

تبدیل می‌شود که واگرا است.

ب) $\int_0^a\frac{dx}{x^p}$ برای $a>0$ ثابت و $p>0$ ناسره نوع دوم است.

$$\int_0^a\frac{dx}{x^p}=\lim_{c\to0^+}\int_c^a x^{-p}dx \overset{p\neq 1}{=\!=\!=} \lim_{c\to0^+}\frac{1}{1-p}(a^{1-p}-c^{1-p})$$

شرط وجود حد $1-p>0$ ولذا $p<1$ است. مشابه حالت قبل برای $p=1$ نیز انتگرال واگراست.

نتیجه ۷. انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (که $a>0$ می‌باشد) برای $p>1$ همگرا و برای $p\leq 1$ واگراست.

نتیجه ۸. انتگرال ناسره $\int_0^a\frac{dx}{x^p}$ (که $a>0$ می‌باشد) برای $p<1$ همگرا و برای $p\geq 1$ واگراست.

**نکته ۲۰. انتگرال ناسره $\int_{x_0}^a\frac{dx}{(x-x_0)^p}$ ($a>x_0$) برای $p<1$ همگرا و برای $p\geq 1$ واگراست.**

**مثال ۳۱.** مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx$ ب) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ج) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3}$

الف) انتگرال ناسره نوع اول است و **انتگرال نمایی** نامیده می‌شود.

$$\text{انتگرال}=\lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-\alpha x}dx=\lim_{c\to+\infty}\frac{e^{-\alpha c}-1}{-\alpha}$$

حال اگر $\alpha\leq 0$، حد بالا موجود نیست ولی برای $\alpha>0$ حد موجود و برابر $\frac{1}{\alpha}$ است.

ب) انتگرال موردنظر در انتهای بازه یعنی $x=2$ ناسره است.

$$\text{انتگرال}=\lim_{c\to2^-}\int_0^c\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{c\to2^-}\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^c=\lim_{c\to2^-}\sin^{-1}\frac{c}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ج) تابع تحت انتگرال در داخل بازه یعنی $x=0$ بی‌کران می‌شود یعنی ترکیبی از دو ناسرگی نوع دوم را دارد. پس آنرا به صورت مجموع انتگرالهایی که هر یک فقط یک ناسرگی دارند، می‌نویسیم.

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^3}=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^3}+\int_0^1\frac{dx}{x^3}$$

چون $\int_0^1\frac{dx}{x^3}$ یک $p$ انتگرال برای $p=3>1$ است، واگراست و لذا انتگرال موردنظر نیز واگراست.

توضیح: یک راه حل نادرست برای محاسبه انتگرال $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ این است که استدلال کنیم، چون تابع $f(x) = \frac{1}{x^3}$ فرد و بازه متقارن است، انتگرال صفر می‌شود. توجه کنید که استدلال فرد بودن در مورد توابع انتگرالپذیر درست است و استفاده از آن برای انتگرالهای ناسره می‌تواند نادرست باشد. ممکن است با توجه به اینکه تابع اولیه $\frac{1}{x^3}$ برابر $-\frac{1}{2x^2}$ است، بنویسیم $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-1}^{1} = 0$ که چون تابع تحت انتگرال در بازه انتگرال‌گیری یعنی $[-1, 1]$ ناپیوسته است، نادرست است. ممکن است استدلال کنید که انتگرال مورد نظر به صورت $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3}$ و جمع دو انتگرال واگراست و در نتیجه حکمی در مورد آن نمی‌توان صادر کرد. اما در واقع با توجه به تعریف ارائه شده در صفحه ۲۸۵، شرط همگرایی آن است که همه انتگرالهای ناسره همگرا باشند و لذا وقتی انتگرال را با شکستن بازه به صورت جمع انتگرالها می‌نویسیم، مجموع دو انتگرال واگرا، واگرا خواهد بود.

در این مثال دلیل این تعریف را بررسی می‌کنیم. توجه کنید که:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\delta\to 0^-} \int_{-1}^{\delta} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^-} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\delta^2}\right) + \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\epsilon^2}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0^-} \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^2}$$

حد بالا با انتخابهای متفاوت برای سرعت میل کردن $\epsilon$ و $\delta$ به صفر، به اعداد متفاوتی میل می‌کند و لذا وجود ندارد. مورد دیگری که ممکن است، ایجاد اشکال کند، آن است که از دو متغیر متفاوت برای محاسبه انتگرال بالا استفاده نکنیم و با توجه به ناسرگی در $x = 0$ بنویسیم:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} \right) \qquad (*)$$

که معادل با آن است که در روش اول $\delta = \epsilon$ فرض شود که حاصل را صفر به دست می‌آورد ولی نادرست است. به مقداری که در $(*)$ تعریف کردیم، **مقدار اصلی کوشی** برای انتگرال گفته می‌شود و با نماد $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ (CPV) نمایش داده می‌شود. به انتگرال ناسره $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ **انتگرال کوشی** گفته می‌شود. واضح است که در صورت همگرایی مقدار آن با مقدار اصلی کوشی برابر است.

تذکر ۱۹. در عمل برای محاسبه انتگرال ناسره بجز در حالتی که نقطه ناسرگی داخل بازه است، نیازی به توجه به ناسرگی و نوشتن انتگرال ناسره برحسب حد نیست و آنرا مانند انتگرال معین محاسبه می‌کنیم. ولی در جایگذاری ناسرگی در تابع اولیه در صورت نیاز باید حد را جایگزین مقدار نماییم. اما برای محاسبه انتگرال ناسره در حالتی که نقطه ناسرگی داخل بازه است، قبل از محاسبه باید وضعیت همگرایی را مورد بررسی قرار دهیم. (تست ۸۰ در صفحه ۲۹۸ را ملاحظه کنید.)

**نکته ۲۱. انتگرال $\int_{a}^{b} \frac{dx}{|x - x_0|^p}$ که $a < x_0 < b$ برای $p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست.**

تذکر ۲۰. توجه کنید که علامت قدرمطلق در نکته بالا برای اطمینان از این مطلب است که $(x - x_0)^p$ تعریف شده باشد. بنابراین برای مقادیری از $p$ که $(x - x_0)^p$ تعریف شده باشد، می‌توانیم علامت قدرمطلق را حذف نماییم.

بررسی همگرایی و واگرایی انتگرال ناسره با استفاده از تعریف ساده نیست به همین دلیل آزمون‌هایی برای بررسی همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره مطرح می‌کنیم.

## آزمون‌های همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسره

۱) آزمون مقایسه

اگـر $\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^b g(x)dx$ فقط در یک نقطه ناسره بوده و آن نقطه مشترک بین دو انتگرال باشد و در همسایگی نقطه ناسرگی داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq 0$ در این صورت:

الف) همگرایی $\int_a^b f(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\int_a^b g(x)dx$ همگراست.

ب) واگرایی $\int_a^b g(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\int_a^b f(x)dx$ واگراست.

۲) آزمون نسبت حدی

انتگرال توابع $f$ و $g$ بر بازه $[a,b]$ فقط در نقطه $x_0$ دارای ناسرگی هستند ($x_0$ می‌تواند بینهایت هم باشد) و در همسایگی این نقطه هم علامت بوده و $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

الف) اگر $L \neq 0$ و $+\infty$ همگرایی و واگرایی آنها مشابه است.(هر دو همگرا یا هر دو واگرا)

ب) اگر $L = 0$، همگرایی $\int_a^b g(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست.

ج) اگر $L = +\infty$، واگرایی $\int_a^b g(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\int_a^b f(x)dx$ نیز واگراست.

تذکر۲۱. در آزمون مقایسه یا نسبت عموماً تابع تحت انتگرال با $p$ انتگرال‌ها یا انتگرال نمایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پر کاربردترین قسمت آزمون بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنم.

**نکته ۲۲. (آزمون هم ارزی) اگر $f(x)$ فقط در $x_0$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim g(x)$ آنگاه $\int_a^b fdx$ و $\int_a^b gdx$ از لحاظ وضع همگرایی یکسان هستند.**

با استفاده از $p$ انتگرالها به عنوان هم‌ارزی داریم:

نکته ۲۳.

**الف) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ فقط در بینهایت ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \frac{1}{x^p}$ چنانچه $p > 1$ انتگرال همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.**

**ب) اگر $\int_a^b f(x)\ dx$ فقط در $x = x_0$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \frac{1}{(x-x_0)^p}$ چنانچه $p < 1$ انتگرال همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست.**

۳) آزمون دیریکله [۱]

فرض کنید $f(x)$ برای $x \geq a$ پیوسته و $\int_a^c f(x)dx$ برای هر مقدار $c \geq a$ کراندار و $g(x)$ در بینهایت همگرا به صفر و نزولی باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ همگراست.

نتیجه ۹. اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگرا و $g(x)$ در بینهایت همگرا به صفر و نزولی باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ همگراست.

۴) همگرایی مطلق

اگر تابع تحت انتگرال حول نقطه ناسرگی تغییر علامت دهد، قدرمطلق تابع تحت انتگرال را درنظر می‌گیریم.

قضیه ۱۰. اگر $\int_a^b f(x)dx$ ناسره و $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرا باشد آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx$ نیز همگراست.

در این حالت بنا به تعریف می‌گوییم، انتگرال همگرای مطلق است.

**تعریف.** اگر $\int_a^b f(x)dx$ ناسره بوده و $\int_a^b |f(x)|dx$ همگرا باشد، می‌گوییم $\int_a^b f(x)dx$ **همگرای مطلق** است ولی اگر $\int_a^b f(x)dx$ همگرا و $\int_a^b |f(x)|dx$ واگرا باشد، می‌گوییم انتگرال **همگرای مشروط** است.

مثال ۳۲. مشخص کنید انتگرالهای زیر همگرا یا واگرا است.

الف) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ ب) $\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^3+x^2+1}dx$ ج) $\int_0^1 \frac{(x-2)dx}{x^2+\sqrt{\sin x}}$

د) $\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{x^3+x+\sqrt[3]{x}}$ هـ) $\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

الف) انتگرال ناسره نوع اول است و چون در بینهایت رشد لگاریتم از چندجمله‌ای کمتر است، هم‌ارزی قابل استفاده نمی‌باشد. اما:

$$\ln x < x \implies \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} > 0$$

و چون $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ بنا بر نتیجه ۷ در صفحه ۲۸۶ واگراست پس انتگرال موردنظر نیز بنا به آزمون مقایسه واگراست.

ب) چون در نقطه ناسرگی یعنی بینهایت داریم $\frac{x\sqrt{x}-1}{x^3+x^2+1} \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ و نکته (۲۳ ـ الف) در صفحه قبل، $p = \frac{3}{2} > 1$ انتگرال موردنظر همگراست.

ج) ناسرگی در $x = 0$ است و در این نقطه داریم:

$$\frac{x-2}{x^2+\sqrt{\sin x}} \sim \frac{-2}{x^2+\sqrt{x}} \sim \frac{-2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

---

[۱] در کتابهای استاندارد و مرجع ریاضی عمومی به آزمون دیریکله و نتیجه آن اشاره‌ای نشده است و در کنکورها هم به صورت مستقیم مورد سؤال نبوده است ولذا می‌توانید از آنها صرفنظر نمایید. دانستن این موارد برای حل سریع تر برخی سؤالات مانند مثال ۳۳ در صفحه بعد می‌تواند مفید باشد.

توجه کنید که علامت منفی تأثیری در وضعیت همگرایی یا واگرایی ندارد و لذا آنرا حذف می‌کنیم. چون $p = \frac{1}{2} < 1$ پس $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ همگرا و بنا به آزمون هم‌ارزی انتگرال مورد نظر نیز همگراست.

د) ناسرگی در $0$ و $+\infty$ است پس انتگرال را به صورت حاصلجمع نوشته و هر یک را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{x^3+x+\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}}dx$$

در $x = 0$ داریم $\frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}$ و چون $p = \frac{1}{3} < 1$ بنا به نکته (۲۳ ـ ب) در صفحه ۲۸۸، $\int_0^1 \frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}}dx$ همگراست. در $x = +\infty$ داریم $\frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ و چون $p = 2 > 1$ پس $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x+\sqrt[3]{x}}dx$ همگراست. پس انتگرال داده شده در سؤال نیز همگرا خواهد بود.

ه) ناسرگی در $x = 0$ است و چون در اطراف این نقطه $\sin\frac{1}{x}$ علامت ثابتی ندارد، باید از همگرایی مطلق استفاده کنیم. پس هدف ما بررسی وضعیت $\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$ است. با توجه به نابرابری $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ و اینکه $\int_0^\pi \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ همگراست، بنا به آزمون مقایسه $\int_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$ همگراست و لذا $\int_0^\pi \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ همگرا(همگرای مطلق) می‌باشد.

**مثال ۳۳** برای مقادیر مختلف $p > 0$ بررسی کنید که $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ و $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ همگرای مشروط یا مطلق یا واگرا هستند. [2]

برای بررسی همگرایی $I$ با توجه به اینکه این انتگرال فقط در بینهایت ناسره است، از یکی از روشهای زیر استفاده می‌کنیم.

**روش اول.** چون $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ برای $p > 1$ همگراست، پس $I$ برای $p > 1$ بنا به آزمون مقایسه همگرای مطلق است. برای $0 < p \le 1$ از استدلال بالا نمی‌توان استفاده نمود اما با انتخاب $u = \frac{1}{x^p}$ و $dv = \sin x dx$ داریم:

$$v = -\cos x \quad \text{و} \quad du = -\frac{p}{x^{p+1}}dx \implies I = -\frac{\cos x}{x^p}\Big|_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx$$

چون $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^p} = 0$ پس فقط باید وضعیت $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx$ را بررسی کنیم. با توجه به $\left|\frac{\cos x}{x^{p+1}}\right| \le \frac{1}{x^{p+1}}$ و $p+1 > 1$ پس انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx$ و لذا $I$ همگرا می‌باشد.

به طور خلاصه برای $p > 0$ انتگرال $I$ همگرا و برای $p > 1$ همگرای مطلق است.(توجه کنید که در حالت $0 < p \le 1$ همگرایی مطلق و مشروط را فعلاً نمی‌توانیم تعیین کنیم.)

---

[2] روش به کار رفته برای حل این مثال، خصوصاً بررسی همگرایی در حالت $0 < p \le 1$ روشی خاص برای حل این مثال و دور از ذهن است و می‌توانید از آن صرفنظر نمایید.

روش دوم. واضح است که برای هر $c \geq 1$ انتگرال $\int_1^c \sin x dx = \cos 1 - \cos c$ کراندار است و چون برای $p > 0$ تابع $g(x) = \frac{1}{x^p}$ نزولی و همگرا به صفر است، بنا به آزمون دیریکله انتگرال مورد نظر نیز همگراست.

بررسی مطلق بودن برای $p > 1$ را در روش اول انجام دادیم، اما در حالت $0 < p \leq 1$ توجه کنید که نقاط $x = k\pi$ ریشه‌های $\sin x$ هستند و برای $n \in \mathbb{N}$ دلخواه:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx \geq \int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$$

اما در هر بازه $[k\pi, (k+1)\pi]$ داریم $\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{|\sin x|}{((k+1)\pi)^p}$

$$I_1 \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{((k+1)\pi)^p} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{((k+1)\pi)^p} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{((k+1)\pi)^p}$$

حال اگر $n \to +\infty$ آنگاه $I_1 = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx \geq \frac{2}{\pi^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^p} = \frac{2}{\pi^p} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ و چون $p \leq 1$ سری سمت راست نابرابری بنا به (۳) در صفحه ۵۰۰ واگراست و لذا $I$ همگرای مشروط است.

خلاصه بحث: انتگرال ناسره $I$، برای $p > 1$ همگرای مطلق و برای $0 < p \leq 1$ همگرای مشروط است.

برای $J$ توجه کنید که در $x = 0$ و $+\infty$ ناسرگی دارد.

$$J = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + I$$

چون در $x = 0$ داریم $\frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$ پس برای $p - 1 \geq 1$ یا $p \geq 2$ انتگرال اول و لذا $J$ واگراست پس برای $0 < p < 2$ انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ همگراست و لذا فقط باید به وضعیت $I$ توجه کرد، که با توجه به بحث بالا برای $1 < p < 2$ همگرایی مطلق و برای $0 < p \leq 1$ همگرایی مشروط است.

**مثال ۳۴** ابتدا حاصل $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax \, dx$ را برای عدد حقیقی و دلخواه $a$ و $s > 0$ محاسبه کنید. سپس با کمک آن مقدار $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ را به دست آورید.

در صورتیکه با درس معادلات دیفرانسیل آشنایی داشته باشید، می‌دانید که $F(s)$ برابر تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \sin ax$ و لذا $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ است. قصد داریم بدون استفاده از فرمولها درس معادلات دیفرانسیل این فرمول را با روشهای ریاضی عمومی محاسبه نماییم. از جزء به جزء تعمیم یافته استفاده می‌کنیم.

| | مشتق | انتگرال |
|---|---|---|
| $\oplus$ | $\sin ax$ | $e^{-sx}$ |
| $\ominus$ | $a\cos ax$ | $-\frac{1}{s}e^{-sx}$ |
| $\oplus$ | $-a^2 \sin ax$ | $\frac{1}{s^2}e^{-sx}$ |

$$F(s) = e^{-sx}\left(-\frac{1}{s}\sin ax - \frac{a}{s^2}\cos ax\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{s^2}F(s)$$

$$\Longrightarrow (1 + \frac{a^2}{s^2})F(s) = \frac{a}{s^2} \Longrightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

توجه کنید که مقدار $e^{-sx}(-\frac{1}{s}\sin ax - \frac{a}{s^2}\cos ax)$ در بینهایت برابر حد آن برای $x \to +\infty$ و لذا برابر صفر در کراندار و صفر می‌شود. حال برای محاسبه $I$ تعریف می‌کنیم $G(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-sx} \, dx$ که در واقع تبدیل

لاپلاس $g(x)=\frac{\sin ax}{x}$ است. اگر از $G(s)$ نسبت به $s$ مشتق بگیریم، با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$G'(s)=\int_{\circ}^{+\infty}(-xe^{-sx})\frac{\sin ax}{x}\,dx=-\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}\sin ax\,dx=-F(s)=-\frac{a}{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}}$$

$$\Longrightarrow\ G(s)=\int_{\circ}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}e^{-sx}\,dx=-\int F(s)\,ds=-\int\frac{a}{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}}\,ds=-\tan^{-\text{۱}}\frac{s}{a}+c$$

برای محاسبه $c$ توجه کنید که به ازای $a=\circ$ داریم $G(s)=\circ$ و چون حد $\tan^{-\text{۱}}\frac{s}{a}$ در $a=\circ$ برابر $\frac{\pi}{\text{۲}}$ است، پس $c=\frac{\pi}{\text{۲}}$ و بنابراین $G(s)=\frac{\pi}{\text{۲}}-\tan^{-\text{۱}}\frac{s}{a}$ است. با توجه به اتحاد (د ـ ۵) در صفحه ۲۹ آنرا به صورت $\cot^{-\text{۱}}\frac{s}{a}$ و با توجه به (د ـ ۴) در صفحه ۲۹ آنرا به صورت $\tan^{-\text{۱}}\frac{a}{s}$ نیز می‌توان نوشت و لذا:

$$\int_{\circ}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}e^{-sx}\,dx=\tan^{-\text{۱}}\frac{a}{s}=\frac{\pi}{\text{۲}}-\tan^{-\text{۱}}\frac{s}{a}=\cot^{-\text{۱}}\frac{s}{a}$$

حال با قرار دادن $s=\circ$ داریم $I=\frac{\pi}{\text{۲}}$.

تذکر۲۲. توجه کنید که در درس معادلات دیفرانسیل، تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ با رابطه

$$F(s)=\mathcal{L}(f(x))=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

تعریف می‌شود. در این صورت با محاسبه‌ای مشابه آنچه در این تست انجام شد، می‌توان ثابت کرد:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\int_{s}^{+\infty}\mathcal{L}(f(x))\,ds=\int_{s}^{+\infty}F(s)\,ds\Longrightarrow\int_{\circ}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_{\circ}^{+\infty}\mathcal{L}(f(x))\,ds$$

با کمک تبدیل لاپلاس برخی از انتگرالهای ناسره را ساده‌تر می‌توانیم محاسبه کنیم. (به فصل «تبدیل لاپلاس» در کتاب معادلات دیفرانسیل مراجعه کنید.)

نکته ۲۴. فرمولهای زیر را به خاطر بسپارید.

$$\mathcal{L}(\sin ax)=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}\sin ax\,dx=\frac{a}{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}}\qquad(\text{۴ ـ ۴})$$

$$\mathcal{L}(\cos ax)=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}\cos ax\,dx=\frac{s}{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}}\qquad(\text{۵ ـ ۴})$$

$$\mathcal{L}(x^{n})=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}x^{n}\,dx=\frac{n!}{s^{n+\text{۱}}}\quad \text{و}\quad n\in\mathbb{N}\qquad(\text{۶ ـ ۴})$$

$$\int_{\circ}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{\text{۲}}\quad \text{و}\quad a>\circ\qquad(\text{۷ ـ ۴})$$

**مثال ۳۵** حاصل $I=\int_{\circ}^{+\infty}xe^{-\text{۳}x}\cos x\,dx$ را محاسبه نمایید.

محاسبه مستقیم این انتگرال نیاز به چند بار استفاده از جزء به جزء دارد و ساده نیست. اما توجه کنید که $F(s)=\mathcal{L}(\cos ax)=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-sx}\cos ax\,dx=\frac{s}{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}}$ حال اگر نسبت به $s$ از این رابطه مشتق بگیریم، با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$F'(s)=\int_{\circ}^{+\infty}-xe^{-sx}\cos ax\,dx=\frac{s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}}-\text{۲}s^{\text{۲}}}{(s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}})^{\text{۲}}}\Longrightarrow\int_{\circ}^{+\infty}xe^{-sx}\cos ax\,dx=\frac{s^{\text{۲}}-a^{\text{۲}}}{(s^{\text{۲}}+a^{\text{۲}})^{\text{۲}}}$$

$$a=\text{۱}\ \text{و}\ s=\text{۳}\Longrightarrow I=\frac{\text{۹}-\text{۱}}{(\text{۹}+\text{۱})^{\text{۲}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۲۵}}$$

تذکر۲۳. در درس معادلات دیفرانسیل ثابت می‌شود که اگر $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$ آنگاه $\mathcal{L}(xf(x)) = -F'(s)$ که اثبات آنرا در حالت خاص در مثال بالا انجام دادیم. با ادامه روند مشتق گیری نسبت به $s$ داریم:

$$\mathcal{L}\Big(x^n f(x)\Big) = (-۱)^n F^{(n)}(s) \implies \int_۰^{+\infty} x^n f(x) e^{-sx}\, dx = (-۱)^n F^{(n)}(s)$$

و به عنوان حالت خاص:

$$\int_۰^{+\infty} x e^{-sx} \cos ax\, dx = \frac{s^۲ - a^۲}{(s^۲ + a^۲)^۲} \qquad (۸\_۴)$$

$$\int_۰^{+\infty} x e^{-sx} \sin ax\, dx = \frac{۲as}{(s^۲ + a^۲)^۲} \qquad (۹\_۴)$$

مثال ۳۶. ثابت کنید تابع $f(x) = \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{\ln t}{۱ + t^۲}\, dt$ تابعی ثابت است و سپس $\int_۰^{+\infty} \frac{\ln t}{۱ + t^۲}\, dt$ را محاسبه نمایید.
با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$f'(x) = \Big(-\frac{۱}{x^۲}\Big).\frac{\ln \frac{۱}{x}}{۱ + (\frac{۱}{x})^۲} - \frac{\ln x}{۱ + x^۲} = \frac{\ln x}{۱ + x^۲} - \frac{\ln x}{۱ + x^۲} = ۰$$

پس $f$ تابعی ثابت است و چون $f(۱) = \int_۱^۱ \frac{\ln t}{۱ + t^۲}\, dt = ۰$ پس به ازای هر $x$ داریم $f(x) = ۰$. از جمله $f(۰^+) = \int_۰^{+\infty} \frac{\ln t}{۱ + t^۲}\, dt = ۰$.

مثال ۳۷. برای $a > ۱$ مقدار $I = \int_۰^{\pi} \frac{dx}{a - \cos x}$ را محاسبه کنید.
از تغییر متغیر $z = \tan \frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم. با جایگذاری $x = \pi$ به $z = \tan \frac{\pi}{۲} = +\infty$ می‌رسیم.

$$I = \int_۰^{+\infty} \frac{\frac{۲dz}{۱+z^۲}}{a - \frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}} = ۲\int_۰^{+\infty} \frac{dz}{(a+۱)z^۲ + a - ۱} = \frac{۲}{a+۱}\int_۰^{+\infty} \frac{dz}{z^۲ + \frac{a-۱}{a+۱}}$$

$$= \frac{۲}{a+۱}.\frac{\sqrt{a+۱}}{\sqrt{a-۱}} \tan^{-۱} \frac{z\sqrt{a+۱}}{\sqrt{a-۱}}\Big|_۰^{+\infty} = \frac{۲}{\sqrt{a^۲-۱}}\Big(\frac{\pi}{۲} - ۰\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{a^۲-۱}}$$

تذکر۲۴. با محاسبه‌ای مشابه برای $a > ۱$ داریم $\int_۰^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^۲-۱}}$.

**تست ۶۵** اگر $F(x) = \int_۰^x \frac{dt}{\cosh t}$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ کدام است؟ (مواد ۷۸)

۱) $\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲\pi$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. در واقع هدف محاسبه $\int_۰^{+\infty} \frac{dt}{\cosh t}$ است. با نوشتن تعریف $\cosh t$:

$$\text{انتگرال} = \int_۰^{+\infty} \frac{۲dt}{e^t + e^{-t}} = \int_۰^{+\infty} \frac{۲e^t dt}{e^{۲t} + ۱} \overset{u=e^t}{=\!=} ۲\tan^{-۱}(e^t)\Big|_۰^{+\infty} = ۲\Big(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}\Big) = \frac{\pi}{۲}$$

**تست ۶۶** حاصل $\int_۳^{+\infty} \frac{dx}{x^۲ - ۱}$ کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $۲\ln ۲$ ۳) $۲$ ۴) $\frac{۱}{۲}\ln ۲$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\text{انتگرال} = -\int_{۳}^{+\infty} \frac{dx}{۱-x^{۲}} = -\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|\Big|_{۳}^{+\infty} = -\frac{۱}{۲}(\circ - \ln\frac{۴}{۲}) = \frac{۱}{۲}\ln ۲$$

توجه کنید که برای جایگذاری بینهایت (نقطه ناسرگی ) در $\ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|$ باید حالت حدی را در نظر بگیریم که حاصل آن برابر صفر می‌شود.

**تست ۶۷** مقدار $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{n+۱}}dx$ برابر است با:$(n > \circ)$ (ریاضی ۷۵)

۱) $\frac{۱}{n}$ ۲) $\frac{۱}{n^{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{n+۱}$ ۴) $\frac{۱}{n^{۲}+۱}$

**حل:** گزینه ۲ درست است. با انتخاب $dv = \frac{dx}{x^{n+۱}}$ و $u = \ln x$ داریم $v = -\frac{۱}{nx^{n}}$ و $du = \frac{dx}{x}$ پس:

$$\text{انتگرال} = -\frac{\ln x}{nx^{n}}\Big|_{۱}^{+\infty} + \int_{۱}^{+\infty}\frac{dx}{nx^{n+۱}} \overset{\text{قوانین رشد}}{=\!=\!=} \circ + \int_{۱}^{+\infty}\frac{۱}{n}x^{-n-۱}dx = -\frac{۱}{n^{۲}x^{n}}\Big|_{۱}^{+\infty} = \frac{۱}{n^{۲}}$$

توجه کنید که شرط $n > \circ$ برای همگرایی انتگرال بالا لازم و کافی است.

**تست ۶۸** حاصل انتگرال $I = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})(x^{۲}+b^{۲})}$ برای $a \neq b$ برابر است با: (آمار – آزاد ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{۲ab(a-b)}$ ۲) $\frac{۲\pi}{ab(a-b)}$ ۳) $\frac{\pi}{۲ab(a+b)}$ ۴) $\frac{۲\pi}{ab(a+b)}$

**حل:** گزینه ۳ درست است. چون $\frac{۱}{(x^{۲}+a^{۲})(x^{۲}+b^{۲})} = \frac{۱}{b^{۲}-a^{۲}}\left(\frac{۱}{x^{۲}+a^{۲}} - \frac{۱}{x^{۲}+b^{۲}}\right)$

$$I = \frac{۱}{b^{۲}-a^{۲}}\int_{\circ}^{+\infty}\left(\frac{۱}{x^{۲}+a^{۲}} - \frac{۱}{x^{۲}+b^{۲}}\right)dx = \frac{۱}{b^{۲}-a^{۲}}\left(\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a} - \frac{۱}{b}\tan^{-۱}\frac{x}{b}\right)\Big|_{\circ}^{+\infty}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{۲}}{(b-a)(b+a)}\left(\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}\right) = \frac{\pi}{۲ab(b+a)}$$

**تست ۶۹** فرض کنید $f$ تابعی مشتق‌پذیر و دارای مشتق پیوسته $f'$ باشد به طوریکه به ازای $\alpha < x < \beta$ داریم $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{s-۱}f(x) = \lim\limits_{x\to\circ} x^{s-۱}f(x) = \circ$ اگر $M[f(x)](s) = \int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۱}f(x)dx$ آنگاه $M[f'(x)]$ برای $\alpha < x < \beta$ کدام است؟ (عمران ۷۸)

۱) $-sM[f(x)](s-۱)$ ۲) $-(s-۱)M[f(x)](s)$

۳) $-(s-۱)M[f(x)](s-۱)$ ۴) $-sM[f(x)](s)$

**حل:** گزینه ۳ درست است. نخست توجه کنید که تابع (عملگر) $M$ تابع $f(x)$ را به عنوان ورودی می‌پذیرد و حاصل آن بر حسب $s$ به دست می‌آید. یعنی با تغییر $f(x)$ مقدار $M$ نیز بر حسب $s$ تغییر می‌کند.(می‌توانیم بگوییم $M$ دو متغیر $f(x)$ و $s$ را می‌پذیرد.) حال چون سؤال مقدار $M[f'(x)]$ را می‌خواهد پس بجای $f(x)$ قرار می‌دهیم $f'(x)$ و لذا $M[f'(x)] = \int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۱}f'(x)dx$ با انتخاب $dv = f'(x)dx$ و $u = x^{s-۱}$ داریم $v = f(x)$ و $du = (s-۱)x^{s-۲}dx$.

$$M[f'(x)] = x^{s-۱}f(x)\Big|_{\circ}^{+\infty} - (s-۱)\int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۲}f(x)dx$$

با توجه به صورت سؤال، $x^{s-۱}f(x)\Big|_{\circ}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{s-۱}f(x) - \lim\limits_{x\to\circ+} x^{s-۱}f(x) = \circ$ و حاصل برابر $-(s-۱)\int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۲}f(x)dx$ است. اما $\int_{\circ}^{+\infty} x^{s-۲}f(x)dx$ در واقع همان $M[f(x)](s)$ است که به‌جای $s$ قرار

داده‌ایم $s-1$ و لذا حاصل برابر $-(s-1)M[f(x)](s-1)$ است.

**تست ۷۰** مقدار انتگرال $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

**حل:** گزینه ۱ درست است. چون $\cos\theta$ متناوب با دوره تناوب $2\pi$ است بنا به ویژگی ۱۲ در صفحه ۲۶۷ کافی است انتگرال را بر بازه $[-\pi,\pi]$ محاسبه کنیم.

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}=2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}$$

حال با تغییر متغیر $z=\tan\frac{\theta}{2}$ پاسخ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ است. (جزئیات مشابه مثال ۳۷ در صفحه ۲۹۳ است.)

تذکر ۲۵. توجه کنید که اگر برای محاسبه $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+3}$ بدون بحث بالا از تغییر متغیر $z=\tan\frac{\theta}{2}$ استفاده کنیم، به ازای $\theta=0$ و $\theta=2\pi$ داریم $z=0$ و لذا حاصل انتگرال صفر می‌شود که نادرست است. در واقع وقتی $0\le\theta\le2\pi$ داریم $0\le\frac{\theta}{2}\le\pi$ و لذا نقطه ناپیوستگی $\theta=\pi$ برای $z=\tan\frac{\theta}{2}$ در بازه انتگرال‌گیری قرار می‌گیرد و تغییر متغیر مناسب نیست. اما با توضیحات بالا این مشکل رفع شده و نقطه ناپیوستگی به انتهای بازه تبدیل شد که اشکالی ایجاد نمی‌کند.

**تست ۷۱** چنانچه $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ باشد آنگاه: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $I_n=2n(I_n-a^2I_{n+1})$ ۲) $I_n=4n(I_n-a^2I_{n+1})$

۳) $I_n=4n^2(I_n-a^2I_{n+1})$ ۴) $I_n=2n^2(I_n-a^2I_{n+1})$

**حل:** گزینه ۱ درست است. از روش جزء به جزء با $dv=dx$ و $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ استفاده می‌کنیم.

$$v=x \quad \text{و} \quad du=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\Big|_0^{+\infty}+2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=0+2n\int_0^{+\infty}\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$
$$=2n\Big(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\Big)=2n(I_n-a^2I_{n+1})$$

**تست ۷۲** حاصل $\int_0^{\infty}e^{-3t}\sin^2 2t\,dt$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{3}{75}$ ۲) $\frac{21}{75}$ ۳) $\frac{8}{75}$ ۴) $\frac{12}{49}$

**حل:** گزینه ۳ درست است. با توجه به اینکه $\sin^2 2t=\frac{1-\cos 4t}{2}$ پس:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3t}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3t}dt-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 4t\,dt$$
$$=-\frac{1}{6}e^{-3t}\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 4t\,dt=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-3t}\cos 4t\,dt$$

برای محاسبه دومین انتگرال در رابطه (۴ ــ ۵) در صفحه ۲۹۲ قرار دهید $s=3$ و $a=4$ و لذا پاسخ $\frac{1}{6}-\frac{3}{50}=\frac{8}{75}$ است.

**تست ۷۳** مطلوب است مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} ۲^{-t}\sin t\,dt$. (برق – آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۱-(\ln ۲)^{۲}}$ ۲) $\frac{۲}{۱+(\ln ۲)^{۲}}$ ۳) $\frac{۲}{۱-(\ln ۲)^{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۱+(\ln ۲)^{۲}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. از تعمیم جزءبه‌جز استفاده می‌کنیم. اگر حاصل انتگرال را $I$ بنامیم:

| | مشتق | انتگرال |
|---|---|---|
| $\oplus$ | $۲^{-t}$ | $\sin t$ |
| $\ominus$ | $-۲^{-t}\ln ۲$ | $-\cos t$ |
| $\oplus$ | $۲^{-t}(\ln ۲)^{۲}$ | $-\sin t$ |

$$\Longrightarrow I = ۲^{-t}(-\cos t - \ln ۲\sin t)\Big|_{\circ}^{+\infty} - (\ln ۲)^{۲}\int_{\circ}^{+\infty} ۲^{-t}\sin t dt$$

چون $\lim\limits_{t\to+\infty} ۲^{-t}(-\cos t - \ln ۲\sin t)$ به صورت حاصلضرب صفر در کراندار است، صفر می‌شود.

$$I = ۱-(\ln ۲)^{۲}I \Longrightarrow I = \frac{۱}{۱+(\ln ۲)^{۲}}$$

روش دوم. انتگرال را به صورت $\int_{\circ}^{+\infty} e^{-t\ln ۲}\sin t dt$ می‌نویسیم. در رابطه (۴ ـ ۴) در صفحه ۲۹۲ قرار دهید $a = ۱$ و $s = \ln ۲$.

**تست ۷۴** مقدار انتگرال $I = \int_{\circ}^{+\infty} te^{-۲t}\sin t dt$ برابر کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶، مدیریت نساجی ۸۲)

۱) $\frac{۳}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۲۵}$

حل: گزینه ۴ درست است. مانند مثال ۳۵ در صفحه ۲۹۲ قرار می‌دهیم:

$$F(s) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-st}\sin t dt = \frac{۱}{s^{۲}+۱} \overset{\frac{d}{ds}}{\Longrightarrow} F'(s) = \int_{\circ}^{+\infty}(-t)e^{-st}\sin t dt = \frac{-۲s}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$\int_{\circ}^{\infty} te^{-st}\sin t dt = \frac{۲s}{(s^{۲}+۱)^{۲}} \overset{s=۲}{\Longrightarrow} I = \frac{۴}{(۴+۱)^{۲}} = \frac{۴}{۲۵}$$

توجه کنید که می‌توانیم مستقیماً از رابطه (۴ ـ ۹) صفحه ۲۹۳ نیز استفاده کنیم.

**تست ۷۵** حاصل انتگرال ناسره $I = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{۱-e^{-۴x}}{xe^{x}}dx$ کدام است؟(راهنمایی: ابتدا قرار دهید $I(s) = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{۱-e^{-sx}}{xe^{x}}dx$ و با مشتق گرفتن نسبت به $s$ مقدار $I(s)$ را بیابید.)

۱) $\ln ۶$ ۲) $\ln ۵$ ۳) $\ln ۳$ ۴) $\ln ۴$

حل: گزینه ۲ درست است. از رابطه $I(s)$ نسبت به $s$ مشتق می‌گیریم.

$$I'(s) = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{xe^{-sx}}{xe^{x}}dx = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-(s+۱)x}dx = -\frac{۱}{s+۱}e^{-(s+۱)x}\Big|_{\circ}^{+\infty}$$

حال با فرض $s > -۱$ داریم $s+۱ > \circ$ و لذا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(s+۱)x} = e^{-\infty} = \circ$.

$$I'(s) = \frac{۱}{s+۱} \Longrightarrow I(s) = \ln(s+۱)+c$$

با قرار دادن $s = \circ$ در $I(s)$ داریم $I(\circ) = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{۱-e^{\circ}}{xe^{x}}dx = \circ = \ln(۱+\circ)+c$ و لذا $c = \circ$

$$I(s) = \int_{\circ}^{+\infty}\frac{۱-e^{-sx}}{xe^{x}}dx = \ln(s+۱) \Longrightarrow I = I(۴) = \ln ۵$$

**تست ۷۶** حاصل $\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx$ کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) $\frac{1}{1+\alpha^2}$ ۲) $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ ۳) $\ln(1+\alpha^2)$ ۴) $\mathrm{Arctan}\alpha$

حل: گزینه ۴ درست است. تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \tan^{-1}\frac{\alpha}{s}$$ (با توجه به مثال ۳۴ در صفحه ۲۹۱)

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = F(1) = \tan^{-1}\alpha$$

**تست ۷۷** حاصل $I = \int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\cos^2 x}$ عبارت است از:

۱) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$ ۳) $\pi^2\sqrt{2}$ ۴) $2\pi^2\sqrt{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به رابطه (۴ ــ ۳) در صفحه ۲۷۴ حاصل برابر $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$ است.
برای محاسبه این انتگرال باید صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ تقسیم کرده و از $t = \tan x$ استفاده کنیم.

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x\,dx}{\sec^2 x+1} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 xdx}{2+\tan^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,dx}{2+\tan^2 x} + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2 x\,dx}{2+\tan^2 x}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2} + \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$$

تذکر ۲۶. با توضیحات مشابه تذکر ۲۵ در صفحه ۲۹۵ اگر بدون شکستن بازه انتگرال گیری از تغییر متغیر $t = \tan x$ استفاده کنیم ، نقطه ناپیوستگی $t$ یعنی $x = \frac{\pi}{2}$ در بازه انتگرال‌گیری قرار می‌گیرد و تغییر متغیر مناسب نیست. اما با شکستن بازه این مشکل رفع شده و نقطه ناپیوستگی به ابتدا و انتهای بازه منتقل شد که اشکالی ایجاد نمی‌کند.

**تست ۷۸** فرض می‌کنیم $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\beta x dx$ تابعی از پارامتر حقیقی $\beta$ باشد، در این صورت $I'(2)$ برابر کدام است؟ (عمران ۷۶)

۱) $-I(2)$ ۲) $I(2)$ ۳) $2$ ۴) $2\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است. با مشتق گرفتن از تابع تحت انتگرال نسبت به $\beta$:

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin\beta x dx$$

با انتخاب $u = \sin\beta x$ و $dv = -xe^{-x^2}dx$ داریم $du = \beta\cos\beta x dx$ و $v = \frac{1}{2}e^{-x^2}$ پس:

$$I'(\beta) = \frac{1}{2}(\sin\beta x)e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\beta x dx = -\frac{\beta}{2}I(\beta) \Longrightarrow I'(2) = -I(2)$$

**تست ۷۹** اگر $f(p+1)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^p}\,dx$ حاصل $\int_0^1\frac{dx}{1-\ln x}$ برابر است با:

۱) $f(0)$ ۲) $ef(2)$ ۳) $f(2)$ ۴) $ef(0)$

حل: گزینه ۲ درست است. قرار دهید $t=1-\ln x$. توجه کنید که اگر $x\to 0^+$ داریم $t\to 1-\ln(0^+)=+\infty$ و در $x=1$ داریم $t=1$ و چون $x=e^{1-t}$ پس $dx=-e^{1-t}dt$ و لذا:

$$\int_0^1\frac{dx}{1-\ln x}=\int_{+\infty}^1\frac{-e^{1-t}}{t}\,dt=\int_1^{+\infty}e\cdot\frac{e^{-t}}{t}dt=e\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=ef(2)$$

**تست ۸۰** انتگرال $\int_0^3\frac{dx}{x^2-2x+1}$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) واگراست

حل: گزینه ۴ درست است. مخرج کسر به صورت $(1-x)^2$ است و لذا انتگرال در $x=1$ ناسره می‌باشد. اما بنا به نکته ۲۱ در صفحه ۲۸۷ واگراست. توجه کنید که اگر ناسرگی در $x=1$ را مورد بررسی قرار نمی‌دادیم آنگاه به $-\frac{1}{x-1}\Big|_0^3=-\frac{3}{2}$ می‌رسیدیم که نادرست است.(عدد $-\frac{3}{2}$ برابر مقدار اصلی کوشی برای انتگرال است.)

**تست ۸۱** می‌توان ثابت کرد با شرط $0<p<1$ داریم $\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}$. حاصل $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4}$ کدام است؟ (برق ۷۸)

۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. قرار دهید $t=x^4$ پس $x=t^{\frac{1}{4}}$ و لذا $dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$ پس:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\,dt$$

با قرار دادن $p=\frac{1}{4}$ در رابطه داده شده در صورت سؤال، حاصل برابر $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$ می‌باشد.

**تست ۸۲** به ازای چه مقدار $c$، انتگرال $\int_1^{+\infty}\left(\frac{cx}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$ همگراست؟ (عمران ۸۱)

۱) $c=2$ ۲) $c=1$ ۳) $c=-2$ ۴) $c=-1$

حل: گزینه ۱ درست است. ناسرگی در بینهایت است.

روش اول. ابتدا هم ارز تابع را در بینهایت محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{cx}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{cx^2+cx-2x^2-1}{(2x^2+1)(x+1)}\sim\frac{(c-2)x^2+cx}{2x^3}$$

چنانچه $c\neq 2$ آنگاه کسر با ضریبی از $\frac{1}{x}$ هم‌ارز می‌شود و لذا انتگرال واگرا خواهد بود. اما با فرض $c=2$ کسر هم ارز $\frac{1}{x^2}$ و لذا انگرال همگراست.

روش دوم. توجه کنید که شرط همگرایی آن است که عواملی که ایجاد واگرایی می‌کنند، در عبارت حذف گردند. $c$ را طوری می‌یابیم که عبارت واگرا حذف گردد، چون $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست:

$\frac{cx}{2x^2} - \frac{1}{x} = \frac{c}{2x} - \frac{1}{x} = 0 \implies c = 2$ = عامل‌های ایجادکننده واگرایی

**تست ۸۳** به ازای کدام مقدار $n$ و $m$، $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ همگراست؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) $m>0$ و $n>1$
۲) $m>1$ و $n>1$
۳) $m>0$ و $n>0$
۴) $m>1$ و $n>0$

**حل:** گزینه ۳ درست است. انتگرال در $x = 0, 1$ ناسره است.

$$x=0:\ x^{m-1}(1-x)^{n-1} \sim x^{m-1} = \frac{1}{x^{1-m}} \xRightarrow{\text{شرط همگرایی}} 1-m<1 \implies m>0$$

$$x=1:\ x^{m-1}(1-x)^{n-1} \sim (1-x)^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^{1-n}} \xRightarrow{\text{شرط همگرایی}} 1-n<1 \implies n>0$$

تذکر ۲۷. تابع اخیر تابع بتا نام دارد که در صفحه ۳۰۱ و ۳۰۲ در مورد خواص آن بحث شده است.

**تست ۸۴** با فرض آنکه $\alpha > \beta$ باشد برای آن که $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ همگرا باشد، باید داشته باشیم:

(شیمی نساجی ۸۲)

۱) $\alpha>1$ و $\beta<1$
۲) $\alpha>1$ و $\beta>1$
۳) $\alpha<-1$ و $\beta<-1$
۴) $\alpha>-1$ و $\beta<-1$

**حل:** گزینه ۱ درست است. انتگرال در $x=0$ و بینهایت ناسره است پس آن را به صورت $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ می‌نویسیم.

چون $\alpha > \beta$ پس در $x = 0$ داریم $\frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \sim \frac{1}{x^\beta}$ و بنا به نکته (۲۳ ــ ب) در صفحه ۲۸۸ انتگرال اول برای $\beta < 1$ همگراست. چون $\beta < \alpha$ پس در بینهایت داریم $\frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ و لذا شرط همگرایی انتگرال دوم آن است که $\alpha > 1$.

**تست ۸۵** انتگرال $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ که به تابع گاما معروف است: (مکانیک ۷۱)

۱) فقط برای $s > 0$ همگراست.
۲) فقط برای $s > 1$ همگراست.
۳) فقط برای $s > -1$ همگراست.
۴) برای هر مقدار $s$ همگراست.

**حل:** گزینه ۱ درست است. این انتگرال همواره در بینهایت ناسره و برای $s < 1$ در $x = 0$ نیز ناسره است. آنرا به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

اولین انتگرال در $x = 0$ ناسره و چون $e^{-x}x^{s-1} \sim x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}}$ پس این انتگرال برای $1 - s < 1$ یعنی $s > 0$ همگراست. در مورد دومین انتگرال توجه کنید که از قوانین رشد داریم $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^{s+1} = 0$ و لذا برای $x$ های بزرگ $e^{-x}x^{s+1}$ نزدیک صفر و لذا از یک کمتر است پس $e^{-x}x^{s+1} = x^2.e^{-x}x^{s-1} < 1$ و لذا $e^{-x}x^{s-1} < \frac{1}{x^2}$ و چون انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست پس دومین انتگرال نیز همگراست. بنابراین تابع گاما برای $s > 0$ همگراست.

## ۴ــ۵ تابع گاما و بتا

برای محاسبه برخی انتگرال‌ها استفاده از توابع گاما و بتا می‌تواند مفید باشد.

### تابع گاما

تابع گاما برای $p > -1$ به صورت $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ تعریف می‌شوند که با توجه به تست ۸۵ در صفحه قبل برای $p > -1$ همگراست. ویژگی‌های این تابع عبارتند از:

۱) رابطه بازگشتی $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

۲) $\Gamma(1) = 1$ و لذا $\Gamma(n+1) = n!$. پس برای $p \neq -1, -2, \cdots$ گاهی $\Gamma(p+1)$ را با $p!$ نمایش می‌دهیم.

۳) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

تذکر۲۸. تابع گاما برای $p > -1$ با انتگرال $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ تعریف می‌شود، اما برای $p < -1$ که $p \neq -2, -3, \cdots$ مقدار $\Gamma(p+1)$ با استفاده از رابطه بازگشتی، تعریف و محاسبه می‌گردد. در حقیقت برای $p \leq -1$ انتگرال واگرا خواهد بود و لذا تعریف گاما بر حسب انتگرال نادرست است.

مثال ۳۸. مقدار $\Gamma(\frac{5}{2})$ و $\Gamma(-\frac{3}{2})$ را بیابید.

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{4}\Gamma(-\frac{3}{2}) \implies \Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

برخی از انتگرالها را می‌توان با کمک تغییر متغیر به تابع گاما تبدیل نمود و حاصل آنها را محاسبه کرد.

مثال ۳۹. حاصل $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$ را محاسبه نمایید.

با مقایسه انتگرال با تابع گاما، تغییر متغیر $t = x^4$ یا $x = t^{\frac{1}{4}}$ را پیشنهاد می‌دهیم در اینصورت $dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}} dt$.

$$\text{انتگرال} = \int_0^{+\infty} (t^{\frac{1}{4}})^5 e^{-t} (\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}} dt) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{8}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

**مثال ۴۰** فرض کنید $m, n, a$ اعداد حقیقی و مثبت هستند. حاصل $\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n} dx$ را بر حسب تابع گاما به دست آورید.

با توجه به تعریف تابع گاما از تغییر متغیر $t = ax^n$ یا $x = (\frac{t}{a})^{\frac{1}{n}}$ و $dx = \frac{1}{na}(\frac{t}{a})^{\frac{1}{n}-1} dt$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_0^{+\infty} \left((\frac{t}{a})^{\frac{1}{n}}\right)^m e^{-t}\frac{1}{na}(\frac{t}{a})^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1-n}{n}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(1 + \frac{m+1-n}{n}\right) = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

اگر در این رابطه قرار دهیم $a = s$ و $m = p$ و $n = 1$ فرمول زیر نتیجه می‌شود که حالت خاص آنرا در رابطه (۴ ــ ۶) در صفحه ۲۹۲ مطرح کردیم.

**نکته ۲۵.** برای هر عدد حقیقی $p > -1$ داریم:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}t^p\,dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

**مثال ۴۱.** اگر $m, n > -1$ حاصل $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx$ را محاسبه کنید.

برای استفاده از تابع گاما، قرار می‌دهیم $t = -\ln x$:

$$x = e^{-t} \implies dx = -e^{-t}dt \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 \implies t = -\ln 1 = 0 \\ x = 0 \implies t = -\ln 0^+ = +\infty \end{cases}$$

$$\text{انتگرال} = \int_{+\infty}^{0}(e^{-t})^m(-t)^n(-e^{-t}dt) = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-(m+1)t}\,dt = \frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

با محاسبات مشابه، فرمولهای زیر به دست می‌آیند که بهتر است آنها را به خاطر بسپارید.

**نکته ۲۶.**

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2p+1}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(p+1) \tag{۴ ـ ۱۰}$$

$$\int_0^1 (-\ln x)^p\,dx = \Gamma(p+1) \tag{۴ ـ ۱۱}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad \text{و} \quad 0 < p < 1 \tag{۴ ـ ۱۲}$$

**مثال ۴۲**

فرض می‌کنیم $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\beta x dx$ تابعی از پارامتر حقیقی $\beta$ باشد. مقدار $I(\beta)$ را بیابید.

با توجه به تست ۷۸ در صفحه ۲۹۷، $I'(\beta) = -\frac{\beta}{2}I(\beta)$. این معادله را حل می‌کنیم.

$$I' = -\frac{\beta}{2}I \implies \frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2}I \implies \frac{dI}{I} = -\frac{\beta}{2}d\beta \implies \ln(I) = -\frac{\beta^2}{4} + k \implies I(\beta) = ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

ولی $c = I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ و با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۰) به ازای $p = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{۴ ـ ۱۳}$$

پس $I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}$.

## تابع بتا

تابع بتا به صورت $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ تعریف می‌شود که با توجه به تست ۸۳ در صفحه ۲۹۹ به ازای $x, y > 0$ این انتگرال همگراست.

تابع بتا با توجه به تابع گاما قابل محاسبه است و برای $x, y > 0$ داریم $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ پس:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{۴ ـ ۱۴}$$

با توجه به این رابطه $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

با جایگذاری $t=\sin^2\theta$ در تعریف تابع بتا، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} \tag{۴ ـ ۱۵}$$

و برای اعداد حقیقی و دلخواه $a<b$ با جایگذاری $t=\frac{u-a}{b-a}$ در رابطه (۴ ـ ۱۴) داریم:

$$\int_a^b (u-a)^{x-1}(b-u)^{y-1}du=(b-a)^{x+y-1}\beta(x,y)=(b-a)^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{۴ ـ ۱۶}$$

**مثال ۴۳.** حاصل $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ را محاسبه و سپس $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^3}$ را به دست آورید.

از تغییر متغیر $x=a\tan\theta$ و $dx=a\sec^2\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sec^2\theta}{(a^2\sec^2\theta)^n}d\theta=\frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}\theta\, d\theta$$

اگر انتگرال اخیر را با تابع بتا مقایسه کنیم نتیجه می‌شود:

$$2x-1=0 \text{ و } 2y-1=2n-2 \Longrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ و } y=\frac{2n-1}{2}=n-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow I_n=\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{2\Gamma(n)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n-\frac{1}{2})}{2a^{2n-1}(n-1)!}$$

انتگرال دوم یعنی $I$ برابر $I_n$ به ازای $a=2$ و $n=3$ و حاصل آن برابر است با:

$$I=I_3=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{5}{2})}{64\times 2!} \quad \text{و} \quad \Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\Longrightarrow I=\frac{3\pi}{512}$$

**مثال ۴۴**

حاصل $I=\int_0^a x^n(2a-x)^n dx$ برای $a>0$ را محاسبه کنید.

روش اول. قرار می‌دهیم $u=a-x$ در این صورت:

$$I=\int_a^0 (a-u)^n(a+u)^n(-du)=\int_0^a(a^2-u^2)^n du \overset{u=a\sin\theta}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-a^2\sin^2\theta)^n(a\cos\theta d\theta)$$

$$=a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\, d\theta=a^{2n+1}\times\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{2},n+1)=\frac{1}{2}a^{2n+1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}$$

با جایگذاری $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ و $\Gamma(n+1)=n!$ و با توجه به رابطه بازگشتی:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}+1)=(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(2n+1)\Gamma(n-\frac{1}{2}+1)$$

$$=\frac{1}{4}(2n+1)(2n-1)\Gamma(n-\frac{1}{2})=\cdots=\frac{1}{2^{n+1}}(2n+1)\cdots(5)(3)\sqrt{\pi}$$

$$\Longrightarrow I=\frac{2^n n!\,a^{2n+1}}{3\times5\times\cdots\times(2n+1)}=\frac{2^n n!\,a^{2n+1}.(2\times4\times\cdots\times 2n)}{2\times3\times4\cdots\times(2n)\times(2n+1)}=\frac{2^n n!\,a^{2n+1}\times 2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n}(n!)^2a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

روش دوم. با توجه خاصیت ۱۰ در صفحه ۲۶۶ و با تبدیل $x\to a-x$ داریم:

$$I=\int_0^a(a-x)^n(a+x)^n\, dx=\int_0^a\underbrace{(a^2-x^2)^n}_{\text{تابع زوج}}\, dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^a(a^2-x^2)^n\, dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^a(a-x)^n(a+x)^n\, dx$$

با استفاده ار رابطه (۴ ـ ۱۶) داریم:

$$I = \frac{۱}{۲}\left(a-(-a)\right)^{(n+۱)+(n+۱)-۱}\frac{\Gamma(n+۱)\Gamma(n+۱)}{\Gamma(۲n+۲)} = \frac{۲^{۲n}a^{۲n+۱}(n!)^۲}{(۲n+۱)!}$$

**تست ۸۶** چنانچه $\Gamma(x) = \int_۰^\infty u^{x-۱}e^{-u}du$ آنگاه $\frac{\Gamma(\frac{۳}{۲})\Gamma(۴)}{\Gamma(\frac{۱۱}{۲})}$ برابر است با: (برق ـ آزاد۸۲)

۱) $\frac{۳۲}{۳۱۵}$ ۲) $\frac{۳۲}{۳۱۵}\sqrt{\pi}$ ۳) $\frac{۸}{۳۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۳۱۵}\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به رابطه بازگشتی در صفحه ۳۰۰:

$$\Gamma(۴) = ۳! = ۶ \quad \text{و} \quad \Gamma(\frac{۱۱}{۲}) = \Gamma(\frac{۹}{۲}+۱) = \frac{۹}{۲}\Gamma(\frac{۹}{۲}) = \cdots = \frac{۹}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲})$$

$$\text{عبارت} = \frac{۶}{\frac{۳\times۵\times۷\times۹}{۱۶}} = \frac{۳۲}{۳۱۵}$$

**تست ۸۷** حاصل $\int_۰^{+\infty} x^۳e^{-x}dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۲)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) ۲۴ ۴) $۲\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است. با جایگذاری $p = ۴$ در تابع گاما، حاصل انتگرال $\Gamma(۴) = ۳! = ۶$ است.

**تست ۸۸** در صورتی که $f(x) = \frac{۱}{۵}e^{-\frac{x}{۵}}$ باشد، مقدار $\sum_{k=۱}^{۲}(-۱)^{k+۱}\left(\int_۰^{+\infty} x^{۳-k}f(x)dx\right)^k$ کدام است؟ (سیستم ۷۸)

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۱۲۵

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\text{مجموع} = \frac{۱}{۵}\int_۰^{+\infty} x^۲e^{-\frac{x}{۵}}\,dx - \frac{۱}{۲۵}\left(\int_۰^{+\infty} xe^{-\frac{x}{۵}}\,dx\right)^۲$$

از نکته ۲۵ در صفحه ۳۰۱ استفاده می‌کنیم. انتگرال اول به ازای $s = \frac{۱}{۵}$ و $p = ۲$ و انتگرال دوم به ازای $s = \frac{۱}{۵}$ و $p = ۱$ به دست می‌آید پس:

$$\text{مجموع} = \frac{۱}{۵}\frac{\Gamma(۳)}{(\frac{۱}{۵})^۳} - \frac{۱}{۲۵}\left(\frac{\Gamma(۲)}{(\frac{۱}{۵})^۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۵}\times۲۵۰ - \frac{۱}{۲۵}\times(۲۵)^۲ = ۲۵$$

**تست ۸۹** مقدار $\int_۰^۱ (\ln x)^n dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) $n!$ ۲) $(-۱)^n(n-۱)!$ ۳) $(n-۱)!$ ۴) $(-۱)^n n!$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. انتگرال موردنظر را $I_n$ می‌نامیم با استفاده از روش جزء به جزء با انتخاب $dv = dx$ و $u = \ln^n x$ داریم $v = x$ و $du = n\ln^{n-۱}x\frac{dx}{x}$ پس:

$$I_n = x\ln^n x\Big|_۰^۱ - n\int_۰^۱ \ln^{n-۱}xdx = -nI_{n-۱} \qquad (\lim_{x\to۰^+} x\ln^n x = ۰)$$

ضمناً $I_۰ = ۱$ پس $I_n = (-۱)^n n!$.

روش دوم. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۱) در صفحه ۳۰۱:

$$\text{انتگرال} = (-۱)^n\int_۰^۱(-\ln x)^n\,dx = (-۱)^n\Gamma(n+۱) = (-۱)^n n!$$

**تست ۹۰** مقدار انتگرال $\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-x^{2}}dx$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{16}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۰) در صفحه ۳۰۱ داریم $2p+1=2$ و لذا $p=\frac{1}{2}$ پس پاسخ $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ است.

**تست ۹۱** حاصل $\int_{0}^{\infty}\sqrt{y}e^{-y^{3}}dy$ برابر است با: (مهندسی پزشکی ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $2\sqrt{\pi}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. برای تبدیل انتگرال به تابع گاما از تغییر متغیر $t=y^{3}$ استفاده می‌کنیم.

$$y=t^{\frac{1}{3}} \implies dy=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt \implies \sqrt{y}e^{-y^{3}}dy=t^{\frac{1}{6}}e^{-t}.\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

$$\text{انتگرال}=\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

**تست ۹۲** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{6}\theta d\theta$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $\frac{3\pi}{16}$ ۲) $\frac{5\pi}{16}$ ۳) $\frac{3\pi}{32}$ ۴) $\frac{5\pi}{32}$

حل: گزینه ۴ درست است. از رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲ استفاده می‌کنیم.

$$2x-1=0 \text{ و } 2y-1=6 \implies x=\frac{1}{2} \text{ و } y=\frac{7}{2} \implies \text{انتگرال}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{2\Gamma(4)}=\frac{\sqrt{\pi}(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi})}{2\times 3!}=\frac{5\pi}{32}$$

**تست ۹۳** اگر $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$ باشد، جواب انتگرال $I=\int_{0}^{\pi}\cos^{4}\theta d\theta$ برابر کدامیک از پاسخ‌های داده شده است؟ (پلیمر ۷۴)

۱) $\frac{3}{4}\pi$ ۲) $\frac{1}{2}\pi$ ۳) $\frac{3}{8}\pi$ ۴) $\frac{5}{8}\pi$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۱۷ در صفحه ۲۷۶ داریم $I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4}\theta d\theta$ حال از رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲ با توجه به $2y-1=4$ و $2x-1=0$ پس $y=\frac{5}{2}$ و $x=\frac{1}{2}$ و لذا:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4}\theta d\theta=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{2\Gamma(3)}=\frac{(\sqrt{\pi})(\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi})}{4}=\frac{3\pi}{16} \implies I=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4}\theta d\theta=\frac{3\pi}{8}$$

**تست ۹۴** با فرض اینکه $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p}}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{\pi p}{2})}$ برای $0<p<1$ حاصل $\int_{0}^{+\infty}\cos x^{2}dx$ برابر است با:

۱) $2\sqrt{2\pi}$ ۲) $-\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ ۴) واگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. قرار دهید $t=x^{2}$ یا $x=t^{\frac{1}{2}}$ پس $dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$ و لذا:

$$\int_{0}^{+\infty}\cos x^{2}dx=\int_{0}^{+\infty}\cos t(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt)=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{\pi}{4\Gamma(\frac{1}{2})\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$