به نام خداوند

نام و نام خانوادگی: استاد درس : دکتر تقوی پور

شماره دانشجویی:

دانشکده مکانیک

تمرین سری ۱ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بخش سری فوریه

سوال ۱) اگر سری فوریه تابع f در بازه $|x| < \pi$ به صورت $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx$ باشد، ضریب b_3 در بسط فوریه $f(x)\sin x$ در بازه $|x| < \pi$ را به دست بیاورید.

سوال ۲) در صورتی که برای $0 < x < 2$ داشته باشیم:

$$x^2 = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(\frac{\pi n x}{2})$$

با استفاده از رابطه پارسوال مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را به دست آورید

سوال۳) با استفاده از سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$ در $0 < x < L$

سری فوریه سینوسی نیم دامنه تابع $x(L-x)$ در همان تناوب کدام است؟

سوال۴) اگر تابع $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} + \sin^2 \frac{5x}{2}$ مقدار انتگرال $A = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ کدام است؟(راهنمایی: جملات مثلثاتی را ساده کرده و از پارسوال استفاده کنید)

سوال امتیازی : ثابت کنید $\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ ؟ (این سوال جزو سوالات کتاب دکتر شیدفر است)

سؤال ۱)
روش ۱

$$f(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx \quad \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{1}{2} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \xrightarrow{L=\pi}$$

$$f(x)\sin x = \frac{a_0}{2}\sin(x) + \sum_{1}^{\infty} a_n \sin(x)\cos(nx) + b_n \sin(x)\sin(nx)$$

$$= \frac{a_0}{2}\sin(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) - \frac{b_n}{2}(\cos(x+nx) - \cos(x-nx))$$

math-teacher.blog.ir

$$f(x)\sin x = \frac{a_0}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} a_n \sin(n+1)x + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} a_n \cancel{\sin(1-n)x}^{-\sin(n-1)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} b_n \cos(n+1)x + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} b_n \cancel{\cos(1-n)x}^{\cos(n-1)}$$

یکی کردن توان:

$$f(x)\sin x = \frac{a_0}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty} a_{n-1}\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} a_{n+1}\sin(nx)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty} b_{n-1}\cos(nx) + \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} b_{n+1}\cos(nx)$$

یکی کردن پایه:

$$f(x)\sin x = \frac{a_0}{2}\sin(x) + \sum_{2}^{\infty}\left(\frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2}\right)\sin(nx) - \frac{1}{2}a_2\sin(x)$$

$$+ \sum_{2}^{\infty}\left(\frac{-b_{n-1} + b_{n+1}}{2}\right)\cos(nx) + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2\cos(x)$$

$$\to b_n = \frac{a_{n-1} - a_{n+1}}{2} \xrightarrow{n=3} b_3 = \frac{a_2 - a_4}{2} = \frac{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

سوال ۱)

روش ۲

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nx) \qquad f(x)\sin x \ ?$$

$\xrightarrow{\text{طرفین} \times \sin x}$

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(x)\cos(nx)$$

$$= \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\sin(1+n)x + \cancel{\sin(1-n)x}^{\,-\sin(n-1)}\right)$$

$$= \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(1+n)x - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n-1)x$$

یکی کردن اندیس:

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sin(nx)$$

یکی کردن پایه:

$$n=0 \longrightarrow 0$$

$$n=1 \longrightarrow -\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^2}{2}\sin(x)$$

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{2}\right) \sin(nx) + -\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$\rightarrow b_n = \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{2} \xrightarrow{n=3} b_3 = \frac{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه

@EShahebrahimi

ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل

ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

سؤال ۲)

$$x^2=\frac{4}{3}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \qquad 0<x<2$$

اتحاد پارسوال :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\begin{cases} f(x)=x^2 & 0<x<2 \\ a_0=\frac{8}{3} \\ a_n=\frac{16}{\pi^2 n^2}(-1)^n \\ b_n=0 \end{cases}$$

حالا از اتحاد پارسوال

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2)^2\,dx=\frac{\left(\frac{64}{9}\right)}{2}+\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2$$

$$\frac{2}{2}\int_0^2 x^4\,dx \qquad \frac{32}{9} \qquad \frac{16^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{32}{5}$$

$$\rightarrow \frac{32}{5}-\frac{32}{9}=\frac{16^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\rightarrow A$$

$$\frac{4\times 32}{45}\times\frac{\pi^4}{16^2}=A\rightarrow A=\frac{\cancel{4}\times\cancel{32}}{45\times\cancel{16}\times\cancel{16}}\pi^4$$

$$\rightarrow \boxed{A=\frac{\pi^4}{90}}$$

math-teacher.blog.ir

سوال ۳

$f(x)=x \xrightarrow{\text{بسط کسینوسی}} b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \xrightarrow{f(x)=x} a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$x \quad \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$\oplus \quad 1 \quad \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$\ominus \quad 0 \quad -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$=\frac{2}{L}\left[\frac{+xL}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\Bigg|_0^L$$

$$=\frac{2}{L}\left[\cancelto{0}{\frac{L^2}{n\pi}\sin(n\pi)}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)-0-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right]$$

$$=\frac{2}{L}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\right)=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ \frac{-4L}{n^2\pi^2} & \text{فرد } n\end{cases}$$

math-teacher.blog.ir

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx=\frac{2}{L}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right)=\frac{2}{L}\left(\frac{L^2}{2}\right)=\boxed{L}$$

$$f(x)=x=\frac{L}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با توجه به اینکه برای nهای زوج حاصل برابر صفر است می‌توانیم سری را برای nهای فرد بنویسیم

$$x=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)$$

$$\longrightarrow x-\frac{L}{2}=\frac{-4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)$$

با انتگرال گیری از طرفین به مقصود می‌رسیم:

$$\xrightarrow{\int} \frac{x^2}{2}-\frac{L}{2}x=\frac{-4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$

$$\xrightarrow{\times -2} Lx-x^2=\boxed{x(L-x)=\frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)}$$

سوال (۴)

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)$$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow[\text{اتحاد طلائی}]{}$ $f(x)=\frac{1-\cos x}{2}+\frac{1-\cos 3x}{2}+\frac{1-\cos 5x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 5x$

سری فوریه: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

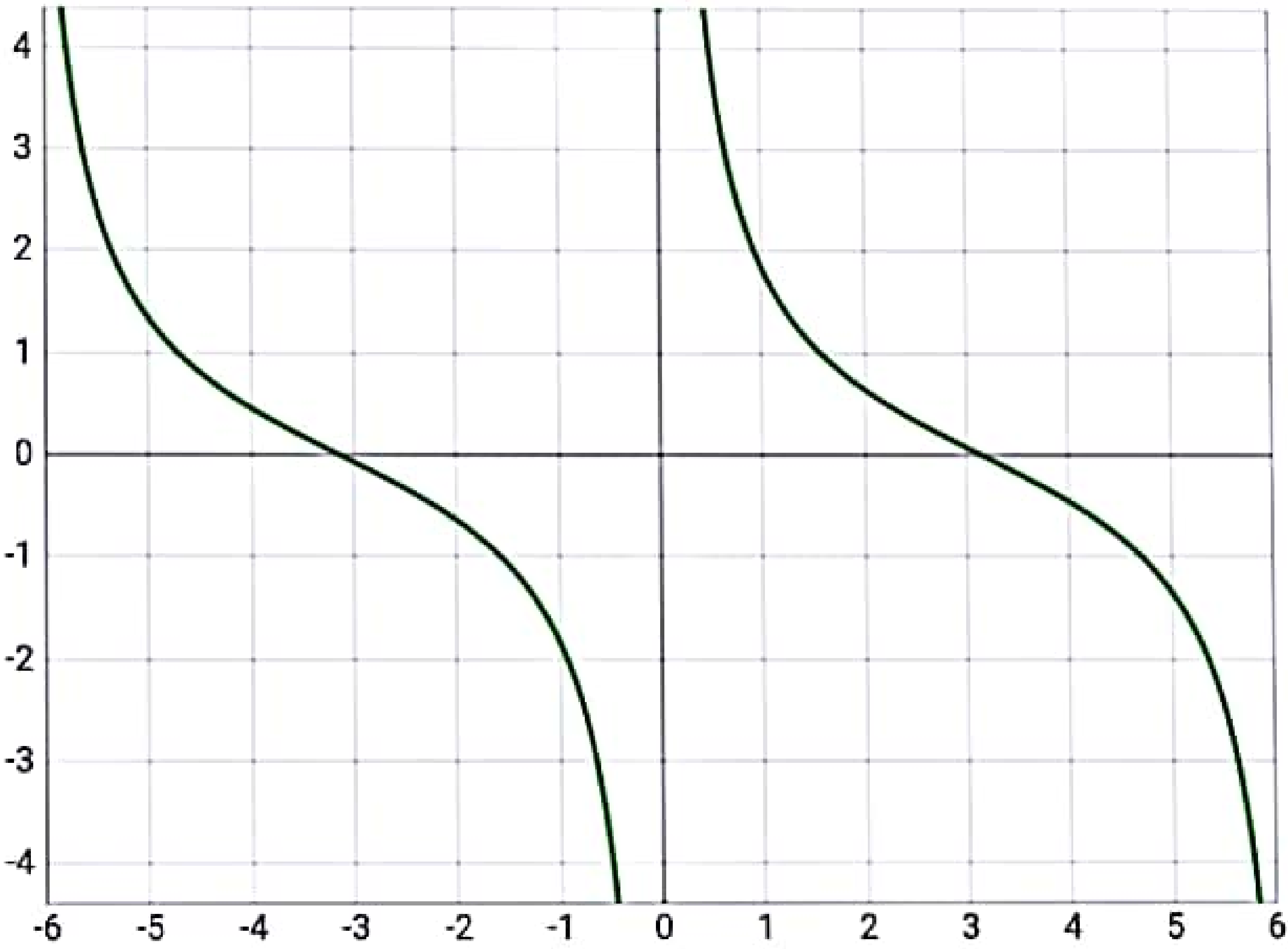
مقایسه با سری فوریه $\longleftarrow$ $(L=\pi)$ $\left\{\begin{array}{l} a_0=3 \\ a_n=-\frac{1}{2} \\ b_n=0 \end{array}\right.$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $a_1=a_2=a_3=-\frac{1}{2}$

اتحاد پارسوال:
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{9}{2}+\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$=\frac{9}{2}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$$

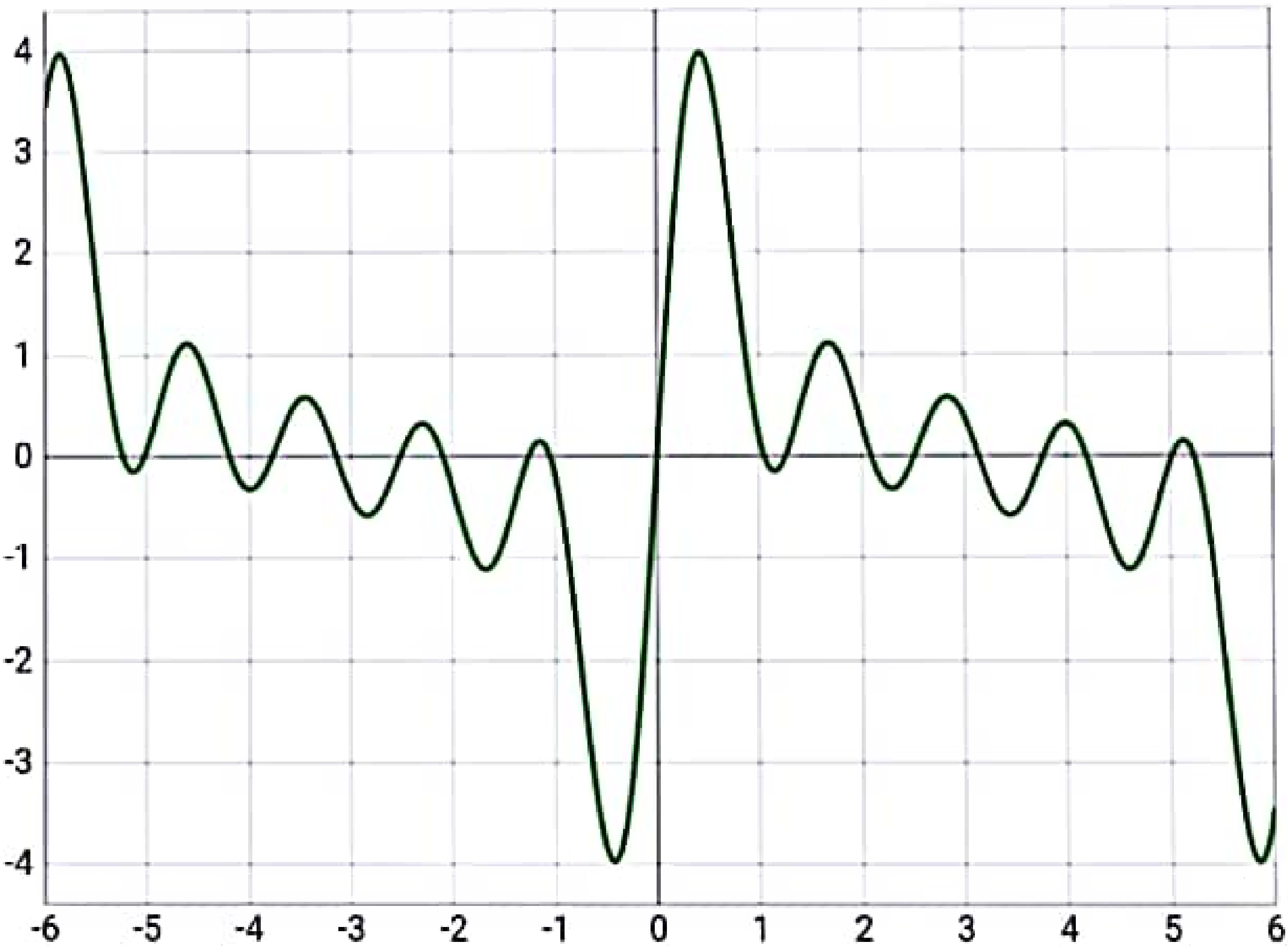
$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{21}{4} \longrightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{21}{4}\pi}$$

$f(x) =$ $\cot(x/2)$



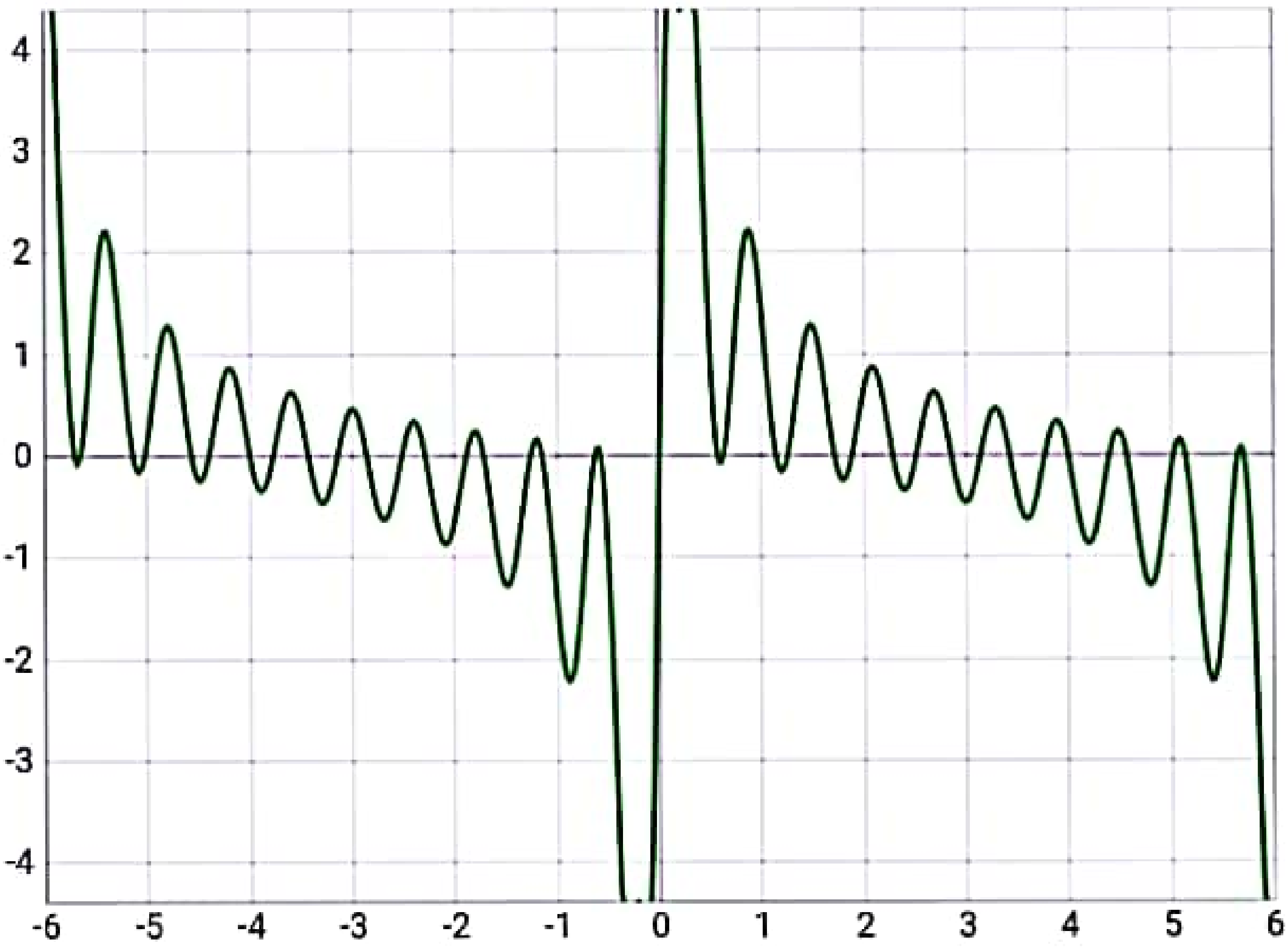
math-teacher.blog.ir

$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



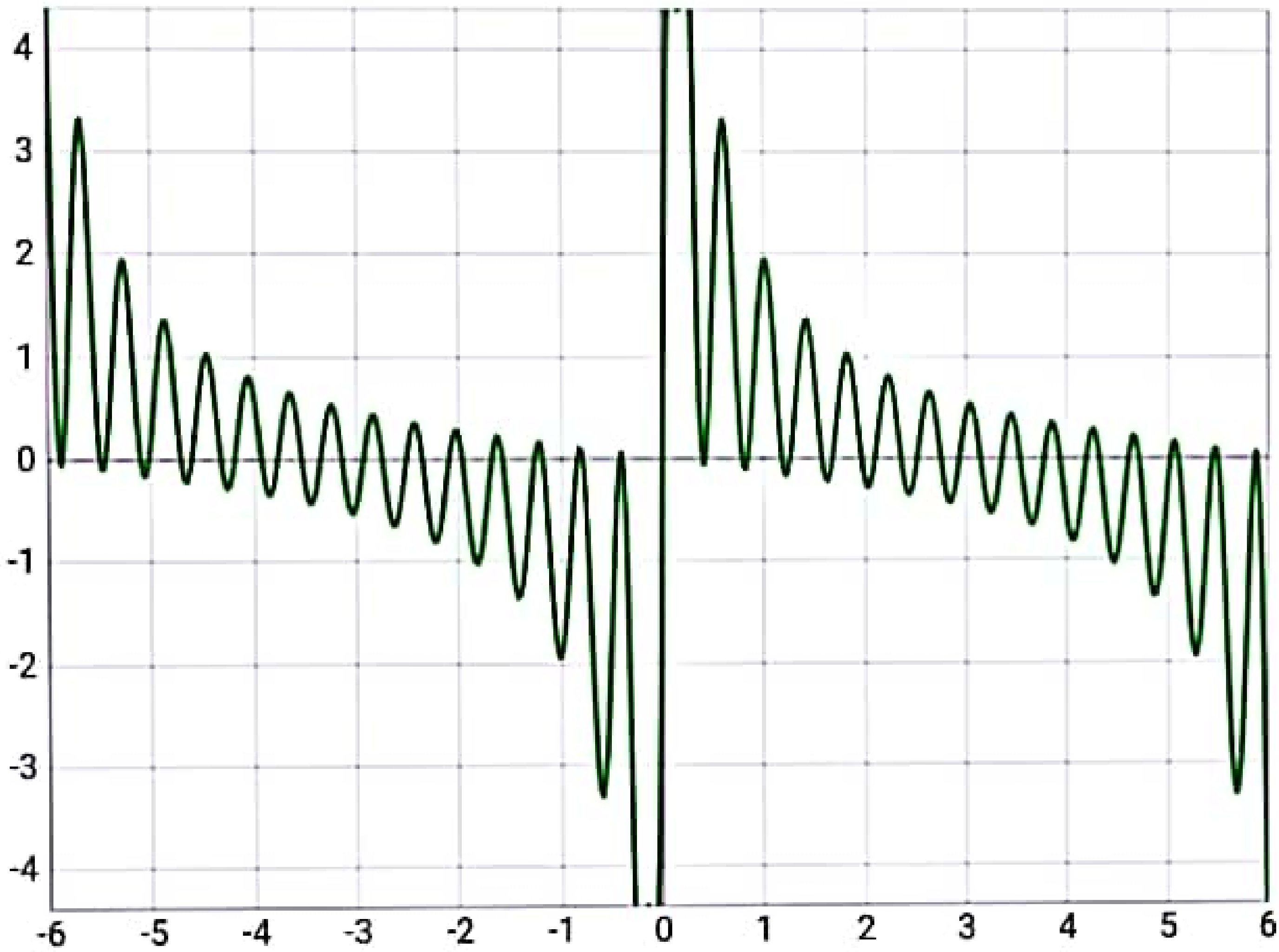
math-teacher.blog.ir

$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si

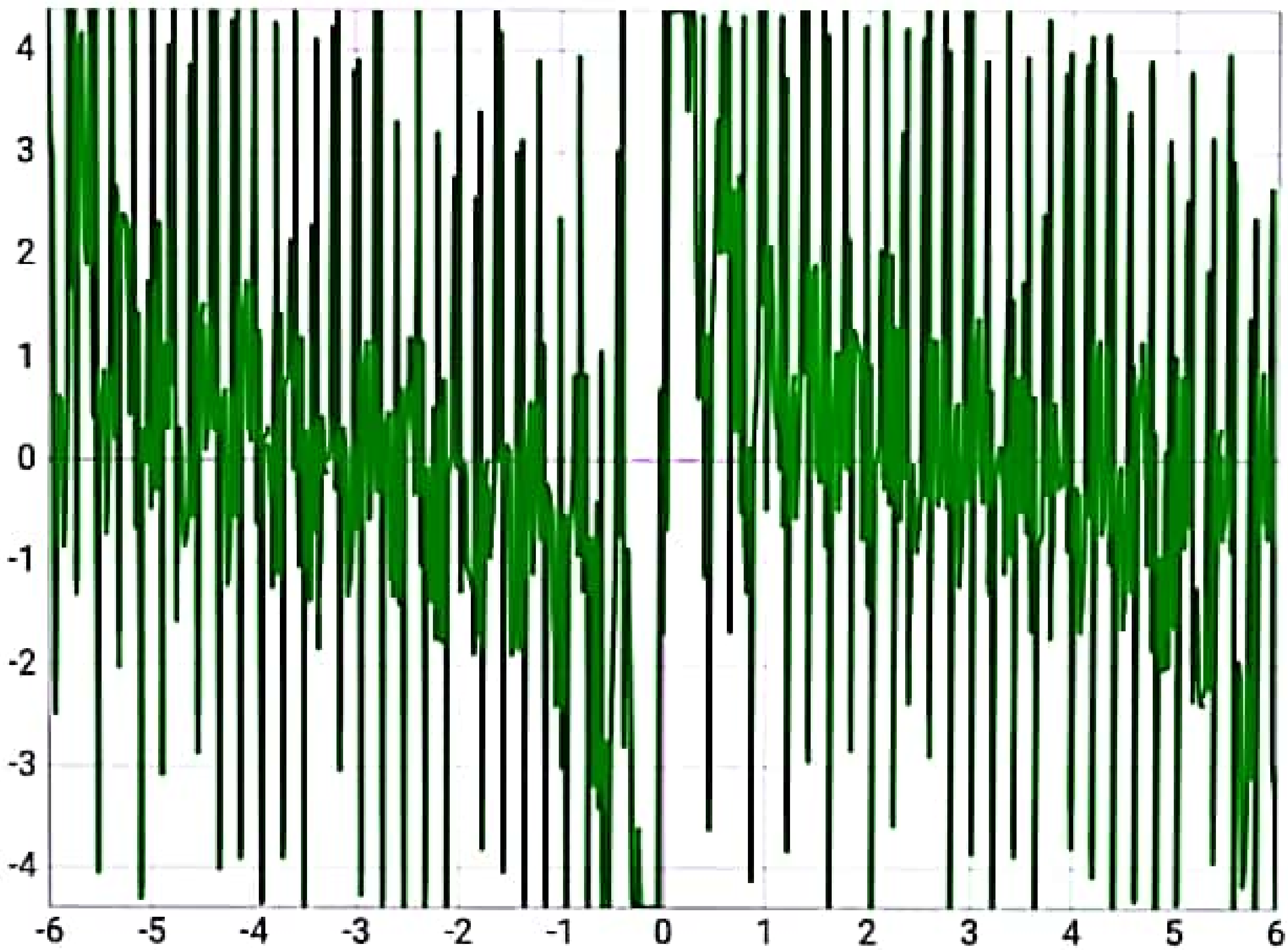


math-teacher.blog.ir

$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



math-teacher.blog.ir

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$$ (امتیازی)

با توجه به اینکه عبارت $\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ انتگرال عبارت $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ است به این نتیجه می رسیم که سری داده شده حاصل انتگرال گیری از سری فوریه $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ است.

پس باید سری فوریه $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ را یافته و از آن انتگرال گیری کنیم

$f(x) = {}^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad T = 2\pi$ و $L = \pi$ $\quad \xrightarrow{\text{تابع فرد}} a_0 = a_n = 0$

(که حتی اینم هم از لحاظ ریاضی مشکل داره !)

$b_n = {}^{*}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = {}^{*}+1$ $\boxed{\text{چرا؟}}$ $\longleftarrow$ این انتگرال قابل محاسبه نیست

$$f(x) = \cancel{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\cancel{a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\sin(nx)} \xrightarrow{\int} \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$$

ص۷ ص۱۱

نمودارهای صفحات قبل

این مفهوم را نمایش میدهند

*

ضریب یک دوم فراموش شده

البته در روند حل تغییر خاصی ایجاد نمیکنه