انحنای خم

مختصات قطبی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
0935 210 4321
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

رابطه مقدار انحنای خم را در حالت قطبی اثبات کنید.

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: در حالت کلی رابطه انحنا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\kappa = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

مختصات قطبی در یک صفحه با پارامترهای r و θ مشخص می‌شوند. برای یک نقطه روی صفحه داریم:

$$\vec{x} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

با مشتق‌گیری از بردار مکان نسبت به زمان، بردار سرعت بدست می‌آید:

$$\vec{V} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, 0)$$

مشتق‌گیری زمانی از بردار سرعت منجر به تولید بردار شتاب می‌گردد:

$$\begin{aligned}\vec{a} = (&\ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta,\\ &\ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta, 0)\end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات، بردار سرعت و شتاب به صورت زیر خواهند بود:

$$\vec{V} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, 0)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta, 0)$$

برای نمایش ساده جهت تعیین ضرب خارجی دو بردار از عبارت زیر استفاده می‌شود:

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_1 & V_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = (V_1 a_2 - V_2 a_1)\hat{k}$$

از روابط فوق می‌دانیم

$$V_1 = \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta$$
$$V_2 = \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta$$
$$a_1 = \ddot r\cos\theta - 2\dot r\dot\theta\sin\theta - r\ddot\theta\sin\theta - r\dot\theta^2\cos\theta$$
$$a_2 = \ddot r\sin\theta + 2\dot r\dot\theta\cos\theta + r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\sin\theta$$

با انجام ضرب $V_1a_2 - V_2a_1$ و ساده‌سازی، مقدار عبارت صورت کسر انحنا تعیین می‌شود:

$$\vec V\times\vec a = \Big(\dot r(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) - r\dot\theta(\ddot r - r\dot\theta^2)\Big)\hat k$$
$$\Rightarrow\quad |\vec V\times\vec a| = r\dot r\ddot\theta + 2\dot r^2\dot\theta - r\ddot r\dot\theta + r^2\dot\theta^3$$

طبق تعریف می‌دانیم

$$\dot r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\qquad \ddot r = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$$
$$\dot\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\qquad \ddot\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

پس می‌توان عبارت $|\vec V\times\vec a|$ را به فرم زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}|\vec V\times\vec a| &= r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r^2(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^3\\ &= \frac{1}{\mathrm{d}t^3}\Big(r\mathrm{d}r\mathrm{d}^2\theta + 2(\mathrm{d}r)^2\mathrm{d}\theta - r\mathrm{d}^2r\mathrm{d}\theta + r^2(\mathrm{d}\theta)^3\Big)\end{aligned}$$

از طرفی برای مخرج کسر رابطه انحنا داریم:

$$\begin{aligned}|\vec V|^3 &= |(\dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta, \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta, 0)|^3\\ &= \Big(\sqrt{(\dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta)^2 + (\dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta)^2}\Big)^3\\ &= \Big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\Big)^{\frac32}\\ &= \Big((\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2 + r^2(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2\Big)^{\frac32}\\ &= \frac{1}{\mathrm{d}t^3}\Big((\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2\Big)^{\frac32}\end{aligned}$$

برای رابطه انحنای خم خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\frac{1}{\mathrm{d}t^3}\Big(r\mathrm{d}r\mathrm{d}^2\theta + 2(\mathrm{d}r)^2\mathrm{d}\theta - r\mathrm{d}^2r\mathrm{d}\theta + r^2(\mathrm{d}\theta)^3\Big)}{\frac{1}{\mathrm{d}t^3}\Big((\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}^2\theta + 2(\mathrm{d}r)^2\mathrm{d}\theta - r\mathrm{d}^2r\mathrm{d}\theta + r^2(\mathrm{d}\theta)^3}{\Big((\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر صورت و مخرج کسر بر $(\mathrm{d}\theta)^3$ تقسیم شوند ، آنگاه رابطه انحنای خم به صورت زیر خواهد بود.

$$\kappa = \frac{\frac{1}{\mathrm{d}\theta^3}\Big(r\mathrm{d}r\mathrm{d}^2\theta + 2(\mathrm{d}r)^2\mathrm{d}\theta - r\mathrm{d}^2r\mathrm{d}\theta + r^2(\mathrm{d}\theta)^3\Big)}{\frac{1}{\mathrm{d}\theta^3}\Big((\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\theta^2} + 2(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} - r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} + r^2}{\Big((\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2 + r^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

همان طور که در توابع با نمایش دکارتی $y = f(x)$ در نظر گرفته می‌شود، در نمایش قطبی $r = f(\theta)$ به عنوان تابع متداول است. پس مشتق r نسبت با θ را با r' نمایش می‌دهیم و مشتق دوم آن را با r''. در نتیجه رابطه فوق به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\kappa = \frac{rr'\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\theta^2} + 2r'^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} - rr''\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} + r^2}{\Big(r'^2 + r^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

از طرفی واضح است که $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} = 1$ و $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}) = 0$. در نهایت مقدار انحنای خم در مختصات قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۳ مسائل مشابه

می‌دانیم انحنای یک دایره به شعاع R برابر با $\frac{1}{R}$ می‌باشد. رابطه یک دایره در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$r = R$$

به کمک رابطه انحنا در مختصات قطبی داریم:

$$r' = 0,\ r'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

این همان نتیجه‌ای بود که انتظارش را داشتیم.

اکنون با آموزش این مسئله قادر به حل مسائلی به فرم زیر خواهید بود.

۱. انحنای منحنی $r = 3 + 2\cos\theta$ در نقطه $(\frac{\pi}{2}, 3)$ در مختصات قطبی کدام است؟

۱) $\frac{17}{13\sqrt{13}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ **(ارشد ریاضی ۱۴۰۰)**

۳) $\frac{13}{17}$ ۴) $\frac{17}{13}$

پاسخ: در نقطه داده‌شده که به فرم (r, θ) است، $r = 3$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. با توجه به رابطه انحنا در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r' = -2\sin\theta, \quad r'' = -2\cos\theta \quad \overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} r = 3,\ r' = -2,\ r'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{17}{13\sqrt{13}}$$

در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

۲. انحنای خم قطبی $r = \frac{1}{16}(1 + \tan^2\frac{\theta}{2})$ در نقطه متناظر با $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) 1 **(ارشد ژئوفیزیک ۱۳۹۶)**

۳) 2 ۴) 16

پاسخ: ابتدا می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی این تابع را ساده‌تر نمود.

$$r = \frac{1}{16}(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{16\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{8(1 + \cos\theta)}$$

اکنون با مشتق‌گیری نسبت به زاویه خواهیم داشت:

$$r' = \frac{\sin\theta}{8(1+\cos\theta)^2}$$
$$r'' = \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)^2 + 2\sin\theta^2(1+\cos\theta)}{8(1+\cos\theta)^4} = \frac{\cos\theta(1+\cos\theta) + 2\sin\theta^2}{8(1+\cos\theta)^3}$$

در نقطه داده‌شده $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$r = \frac{1}{4}, \quad r' = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad r'' = \frac{5}{4}$$

با توجه به رابطه انحنا در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

۳. هرگاه منحنی قطبی $r = f(\theta)$ در مبدأ بر محور xها مماس باشد، شعاع انحنا در مبدأ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}r(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r})$ ۲) $\frac{1}{2}(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})$ **(ارشد تاریخ و فلسفه علم ۱۳۹۱)**

۳) $2(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})$ ۴) $2r(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})$

پاسخ: هنگامی که یک نمودار در مبدأ باشد، مقدار شعاع (فاصله نمودار از مبدأ) آن برابر با صفر است یعنی $r = 0$. با توجه به رابطه انحنا در مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\kappa = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r'^2}{r'^3} = \frac{2}{r'}$$

طبق تعریف، شعاع انحنا، معکوس مقدار انحناست:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{r'}{2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$$

در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

هر موفقیت بزرگی نتیجه هزاران تلاش
کوچک و عادی است که مورد توجه و
ستایش دیگران قرار نمی‌گیرد.

برایان تریسی

AvaEducation16.blog.ir
@AvaEducation16
@AvaEducation16
0935 210 4321
AvaEducation16@gmail.com