

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش  
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت

سوال ۱ ..... ۱۰ امتیاز

در یک مهمانی  $n$  نفر حضور دارند. هر یک از این افراد با  $k$  نفر از بقیه‌ی مهمان‌ها دست می‌دهد ( $k$  یک عدد ثابت بین ۱ و  $n - 1$  است). می‌دانیم که لااقل  $1 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفری با هم دست داده‌اند.

سوال ۲ ..... ۱۰ امتیاز

دو نفر با هم یک بازی را به این صورت انجام می‌دهند:  
دو نفر به طور متناوب ارقام یک عدد  $2k$  رقمی را روی کاغذ می‌نویسند، بدین معنی که ابتدا نفر اول رقم اول، سپس نفر دوم رقم دوم، سپس نفر اول رقم سوم، ... و در  $k$  امین دور بازی نفر اول رقم  $2k - 1$  ام و نفر دوم رقم  $2k$  ام این عدد را می‌نویسند. هر یک از این افراد در نوبت خود تنها می‌توانند یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، و یا ۵ را بنویسند.  
در صورتی که عدد  $2k$  رقمی حاصل بر ۹ بخش‌پذیر باشد، نفر دوم، و در غیر این صورت نفر اول برنده‌ی این بازی است.  
برای چه مقادیری از  $k$  نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که در این بازی برنده شود؟ ادعای خود را ثابت کنید.

### سوال ۳ ..... امتیاز ۱۰

سه میله با شماره‌های ۱، ۲، و ۳ و  $n$  مهره‌ی سوراخ‌دار با شماره‌های ۱ تا  $n$  داریم. مهره‌های زوج قرمز و مهره‌های فرد آبی هستند. هر مهره فقط می‌تواند روی مهره‌ی بزرگتر و غیرهمرنگ با خود قرار بگیرد. همچنین بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۱ و ۲ باید آبی و بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۳ باید قرمز باشد. با این قواعد به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را روی میله‌ها قرار داد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

موفق باشید.