پاسخنامه تشریحی مرحله دوم نهمین المپیاد نجوم و اخترفیزیک

توضیحات مهم :

1- این پاسخنامه به هیچ وجه جواب قطعی سوالات نمی باشد و فقط پاسخ پیشنهادی نویسندگان است .

2- برای حل سوالات می توانید از راه حل های گوناگونی استفاده کنید ، در اینجا سعی شده است تا راه حلی که شامل نکات آموزشی بیشتری است ارائه شود .

3- این پاسخنامه برای استفاده دانش پژوهان سراسر کشور و به منظور آموزش نکات و روش های حل مسئله تدوین شده است و استفاده و تکثیر آن بلامانع است .

نویسندگان :

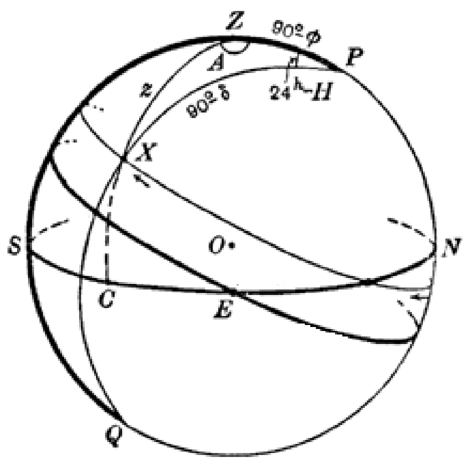
- محمد جواد شریعت زاده (دارنده مدال طلای المپیاد کشوری و مدال نقره المپیاد جهانی)
- عرفان بیات (دارنده مدال طلای المپیاد کشوری و مدال برنز المپیاد جهانی)

پاسخ سوال 1 :

ابتدا میل خورشید را در روز 19 تیر بدست می آوریم. برای این کار از رابطه داده شده در صورت سوال استفاده می کنیم .

$$t = 3 \times 31 + 19 = 112\ days$$
$$D = 23.5° \times \sin\left(\frac{360}{365.25} \times 112\right) = 22.03°$$

الف) برای محاسبه زمان طلوع آفتاب ابتدا زاویه ساعتی طلوع خورشید را بدست می آوریم .



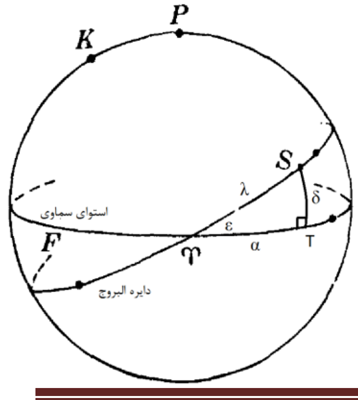
با قرار دادن z=90 در مثلث بالا داریم:

رابطه کسینوس ها در مثلث PZX :

$$\cos ZX = \cos PX . \cos PZ + \sin PX . \sin PZ . \cos(ZPX)$$
$$\cos H = -\tan\varphi \tan\delta$$
$$H = -\cos^{-1}(-\tan 35.7 \times \tan 22.03) = -106.9°$$

توجه داشته باشید که علامت منفی به این دلیل است که زاویه ZPX برابر قرینه H است .

برای محاسبه زمان ابتدا باید بعد خورشید را بدست آوریم . با نشان دادن مسیر حرکت خورشید بر روی دایره البروج در کره زمین مرکز به صورت زیر عمل می کنیم :



رابطه چهارجزئی :

$$\cos\alpha . \cos 90 = \sin\alpha \cot\delta - \sin 90 \cot\varepsilon$$
$$\sin\alpha = \tan\delta \cot\varepsilon$$
$$\alpha = \sin^{-1}(\tan 22.03 \times \cot 23.5) = 111.47°$$

دقت کنید که در جواب $\sin^{-1}$ ، ماشین حساب زاویه ای در ربع اول را تحویل می دهد . اما چون در اول تیر بعد خورشید 90 درجه است پس در 19 تیر باید مقداری در ربع دوم باشد .

حال به محاسبه زمان نجومی محلی می پردازیم :

$$LST = H + \alpha = 4.57° = 18^m$$

زمان نجومی میانگین برابر است با :

$$LMT = 12 + HAMS = 12 + (LST - RAMS)$$
$$LMT = LST - \omega t + 12$$
$$LMT = 18^m - \frac{\left(\frac{360}{365.25} \times 112\right)}{15} + 12 = 4^h57^m$$

توجه داشته باشید که یک ساعت برابر 15 درجه است . و عدد 15 در مخرج کسر برای تبدیل واحد درجه به ساعت می باشد .

در صورت سوال ذکر شده که زمان را بر حسب ساعت رسمی کشور محاسبه کنیم ، یعنی اختلاف طول جغرافیایی تهران و طول جغرافیایی میانگین کشور ایران(52.5) را در نظر بگیریم .

$$LMT - ZT = l - 52.5$$
$$ZT = LMT - \frac{51.4 - 52.5}{15} = 5^h1^m$$

عدد بدست آمده زمان رسمی طلوع آفتاب در شهر تهران بدون در نظر گرفتن ساعت بهاری است . با در نظر گرفتن ساعت بهاری یک ساعت به زمان بدست آمده اضافه می شود و جواب 6^h1^{m} است .

ب)

با استفاده از اولین شکل سوال و باز هم رابطه کسینوس ها در همان مثلث قبلی ، برای اذان صبح z را 90+22 و برای اذان مغرب z را 90+5 قرار می دهیم . و اختلاف زاویه ساعتی ها را حساب می کنیم .

$$\cos z = \sin\varphi \,.\, \sin\delta + \cos\varphi \,.\, \cos\delta \cos H$$
$$H = \cos^{-1}\left(\frac{\cos z - \sin\varphi \,.\, \sin\delta}{\cos\varphi \,.\, \cos\delta}\right)$$
$$H_{\text{صبح}} = -142.034° = -9^h28^m$$
$$H_{\text{مغرب}} = 113.98° = 7^h36^m$$
$$\Delta H = 17^h4^m$$

ج) عرض جغرافیایی شهر زنجان با عرض جغرافیایی شهر تهران برابر است . پس زاویه ساعتی طلوع خورشید در هر دو شهر برابر است و اختلاف زمان طلوع فقط به خاطر اختلاف طول جغرافیایی آنها است که در محاسبه *ZT* وارد شده بود . پس برای زنجان داریم :

$$ZT = LMT - \frac{48.3 - 52.5}{15} = 5^h 14^m$$

که با در نظر گرفتن ساعت بهاری $6^h 14^m$ می شود .

د)عرض جغرافیایی شهر اصفهان با شهر تهران برابر نیست ، اما طول جغرافیایی آن با شهر تهران برابر است . پس اختلاف زمان طلوع در شهر تهران و اصفهان برابر با اختلاف زاویه ساعتی طلوع در این دو شهر است .

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\delta$$
$$H_s = -\cos^{-1}(-\tan 32.2 \times \tan 22.03) = -104.76°$$
$$ZT_s - ZT_t = H_s - H_t \implies ZT_s = 5^h 10^m$$

که با در نظر گرفتن ساعت بهاری $6^h 10^m$ می شود .

پاسخ سوال 2 :

در حل این سوال از بردارها کمک می گیریم .

دستگاه مختصاتی راستگرد روی دیوار می گذاریم به نحوی که محور x آن از نقطه غرب و محور z آن از قطب شمال سماوی (NCP) بگذرد . در این صورت محور y آن نیز از محل تقاطع استوای سماوی و نصف النهار مبدا می گذرد . در واقع صفحه x-y همان صفحه استوای سماوی است .

در این دستگاه طول مستطیل(L) در راستای محور z و ارتفاع آن(h) در راستای محور x است . این دو بردار به صورت زیر خواهند بود :

$$\vec{L} = \mathrm{L}\,\hat{k}$$
$$\vec{h} = \mathrm{h}\,\hat{\imath}$$

حال بردار یکه راستای خورشید (r) را می نویسیم . توجه کنید میل خورشید ، زاویه بین بردار r و صفحه استوا است . و زاویه ساعتی خورشید زاویه بین تصویر بردار r روی صفحه استوای سماوی و محور y است . پس مولفه های این بردار به صورت زیر است:

$$\hat{r} = \cos\delta\sin\mathrm{H}\ \hat{\imath} + \cos\delta\cos\mathrm{H}\ \hat{\jmath} + \sin\delta\ \hat{k}$$

حال بردار سایه(R) برداری است روی صفحه y-z یعنی عمود بر بردار h . پس شرط اول این است که ضرب داخلی بردار R و h صفر شود . و همچنین جمع بردار R و ضریبی از $\hat{r}$ مانند s برابر با بردار h می شود . پس :

$$\begin{cases} \vec{R}\,.\,\vec{h} = 0 \\ \vec{\mathrm{R}} + \mathrm{s}\,\hat{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{h}} \end{cases}$$

حال معادله دوم را در بردار h ضرب داخلی می کنیم .

$$\vec{\mathrm{R}}.\vec{\mathrm{h}} + \mathrm{s}\,\hat{\mathrm{r}}.\vec{\mathrm{h}} = \vec{\mathrm{h}}.\vec{\mathrm{h}} \quad \Longrightarrow \quad s(h\cos\delta\ \sin H) = h^2$$

$$s = \frac{h}{\cos\delta\ \sin H}$$

و در نهایت بردار R به دست می آید :

$$R = -h\,(\cot H\ \hat{\jmath} + \frac{\tan\delta}{\sin H}\ \hat{k}\,)$$

پارامتر X که در صورت سوال بیان شده است مولفه سایه عمود بر طول آن است . یعنی همان مولفه y بردار سایه . پس :

$$X = h\cot H \qquad \Longrightarrow \qquad H = \tan^{-1}\frac{h}{X}$$

ب) زاویه θ زاویه بین بردار سایه و محور z است . پس :

$$\cos\theta = \frac{R_z}{R}$$

اندازه بردار R برابر است با :

$$R = \sqrt{{R_y}^2 + {R_z}^2} = \frac{h}{\sin H}\sqrt{tan^2\,\delta + cos^2\,H}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\tan\delta}{\sqrt{tan^2\,\delta + cos^2\,H}}\right)$$

حال باید ماکزیمم و مینیمم تابع بالا را محاسبه کنیم .

بیشینه θ به ازای $H=\pi/2$ است . که θ برابر 180 درجه می شود و سایه به خطی در راستای محور z تبدیل می شود .

کمینه θ به ازای $H=0$ رخ می دهد . اما در این لحظه طول سایه بینهایت است و در واقع سایه تشکیل نمی شود . اما در مقادیر نزدیک به صفر سایه تشکیل می شود و با توجه به رابطه بالا در حد H به صفر مقدار تتا مینیمم خود یعنی 111.4 را کسب می کند .

پاسخ سوال 3 :

الف) ابتدا سرعت جسم در مدارش را به دست می آوریم:

$$-\frac{GM}{r^2} = -\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_m = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{40\times1.5\times10^{11}}} = 4715.22\ \frac{m}{s}$$
$$= 1.7\times10^{7}\ m/hour$$

چون جسم در مقابله است پس فاصله اش زمین برابر است با d= 39 AU . پس سرعت خاصه آن برابر است با :

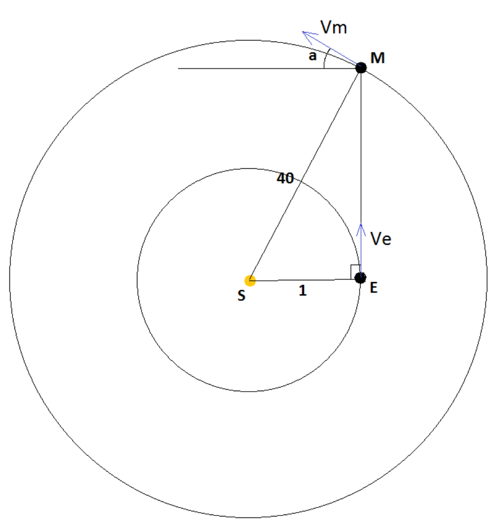
$$\mu_1 = \frac{v_m}{\mathrm{d}} = \frac{1.7\times10^{7}\ \mathrm{m/hour}}{39\times1.5\times10^{11}\mathrm{m}}\times\frac{206265\ \mathrm{arcsec}}{1\ \mathrm{rad}} = 0.6\ \mathrm{arcsec/hour}$$

ب) اگر جسم را ثابت فرض کنیم و زمین را در مدارش به حرکت درآوریم ، به طور نسبی می توان فرض کرد زمین ایستاده و جسم با سرعت زمین در حال حرکت است .

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{r_e}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{1.5\times10^{11}}} = 29821.7\ \frac{m}{s} = 1.07\times10^{8}\ m/hour$$

$$\mu_2 = \frac{v_e}{\mathrm{d}} = \frac{1.07\times10^{8}\ \mathrm{m/hour}}{39\times1.5\times10^{11}\mathrm{m}}\times\frac{206265\ \mathrm{arcsec}}{1\ \mathrm{rad}} = 3.78\ \mathrm{arcsec/hour}$$

ج)



$$\sin a = \frac{1}{40} \Rightarrow a = 1.43°$$

$$v_t = v_m \cos a = 4713.74\ m/s$$

$$d = \sqrt{40^2 - 1} = 39.98\ AU = 5.99 \times 10^{12}\ m$$

$$\mu_3 = \frac{v_t}{\mathrm{d}} = \frac{4713.74\ \mathrm{m/s}}{\mathrm{d}} \times \frac{3600\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{hour}} \times \frac{206265\ \mathrm{arcsec}}{1\ \mathrm{rad}} = 0.58\ \mathrm{arcsec/hour}$$

جواب سوال 4 :

الف) چون ناظر اول ثابت هابل را 50 و ناظر دوم ثابت هابل را 70 اندازه گرفته اند این دو ناظر فاصله های متفاوتی برای این کهکشان اندازه گرفته اند.از طرفی فرض می کنیم درخشندگی در باند B ثابت باشد و تنها تغییر در باند R رخ داده است.

ناظر 1 H1=70 ناظر2 H2=50

ابتدا باید نسبت فاصله هایی که دو ناظر اندازه گرفته اند را حساب کنیم(ناشی از ثابت های هابل متفاوت).

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\frac{V}{H_2}}{\frac{V}{H_1}}=\frac{H_1}{H_2}=\frac{70}{50}=\frac{5}{7} \qquad \text{و} \qquad \frac{L_{R1}}{L_{R2}}=1.1$$

سپس از آن جا که $B-R=M_{B2}-M_{R2}$ و $M_{B2}=-21.5$ پس $M_{R2}=-23$

حال با جایگذاری در رابطه M_{R1} را بدست می آوریم:

$$M_{R2}-M_{R1}=-2.5\log\left(\frac{\frac{L_{R2}}{4\pi {r_2}^2}}{\frac{L_{R1}}{4\pi {r_1}^2}}\right)=-2.5log\left(\frac{\frac{L_{R2}}{{r_2}^2}}{\frac{L_{R1}}{{r_1}^2}}\right)=-2.5\log(1.7818)=-0.627$$

M_{R1} =-22.373

با مقایسه با خورشید تابندگی در R را بدست می آوریم: $(B-R)_{SUN}=M_{B\ SUN}-M_{R\ SUN}=1\ M_{R\ SUN}=4.45$

$$M_{R1}-M_{R\ SUN}=-2.5\log\left(\frac{L_{1R}}{L_{SUN}}\right)\rightarrow\frac{L_{1R}}{L_{SUN}}=5.36*10^{10}w$$

ب)(این قسمت کمی مبهم است)باید درخشندگی در باندB الان را برحسب درخشندگی منجم قدیم به دست آورده و با جایگذاری در رابطه شیب جدید را به دست آوریم.پس شیب در صورتی عوض می شود که دو درخشندگی با هم رابطه ی توانی داشته باشند ولی می دانیم که روابط خطی است و چنین چیزی امکان ندارد پس شیب ثابت می ماند

$\log L_X=(C)\log\left(\frac{{L_{B1}}^C}{L_{BSUN}}\right)+\cdots$ است تناقض!

پاسخ سوال 5 :

الف)جرم و درخشندگی خوشه به صورت ترکیبی از دو ستاره ی X و Y می باشد و برابر است با:

$$M_{\text{خوشه}} = N_X M_X + N_Y M_Y \qquad M_X = 0.5M_{SUN} \quad M_Y = 5M_{SUN}$$

$$L_{\text{خوشه}} = N_X L_X + N_Y L_Y$$

از طرفی طبق گفته ی سوال داریم $\frac{M_{\text{خوشه}}}{L_{\text{خوشه}}} = 2\frac{M_{sun}}{L_{sun}}$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{N_X M_X + N_Y M_Y}{N_X L_X + N_Y L_Y} = 2\frac{M_{sun}}{L_{sun}}$$

با استفاده از رابطه ی جرم-درخشندگی داریم:

$$L_X = L_{sun}\left(\frac{M_X}{M_{sun}}\right)^3 \qquad L_y = L_{sun}\left(\frac{M_y}{M_{sun}}\right)^3$$

$$L_X = \frac{1}{8}L_{sun} \qquad L_Y = 125L_{sun}$$

با جایگذاری در معادله بالا خواهیم داشت:

$$\frac{N_X 0.5M_{sun} + N_Y 5M_{sun}}{N_X \frac{1}{8}L_{sun} + N_Y 125L_{sun}} = 2\frac{M_{sun}}{L_{sun}}$$

$$\rightarrow \frac{N_X 0.5 + N_Y 5}{N_X \frac{1}{8} + N_Y 125} = 2 \rightarrow 245N_Y = \frac{N_X}{4} \rightarrow$$

$$\frac{N_X}{N_Y} = 980$$

ب) هدف سوال به دست آوردن نسبت زیر است:

$$\frac{N_X L_X}{N_Y L_Y} = ?$$

$\frac{N_{\mathrm{X}}}{N_Y}$ را که از قسمت اول به دست آوردیم . حالا باید $\frac{L_{\mathrm{X}}}{L_Y}$ را بدست آوریم .بدین منظور از رابطه ی جرم–درخشندگی استفاده می کنیم.

$$\frac{L_{\mathrm{X}}}{L_Y} = \frac{\frac{1}{8}\mathrm{L}_{\mathrm{sun}}}{250\mathrm{L}_{\mathrm{sun}}} = \frac{1}{2000}$$

$$\rightarrow \frac{N_{\mathrm{X}}\mathrm{L}_{\mathrm{X}}}{N_Y\mathrm{L}_Y} = \frac{1}{2000} * 980 = \frac{98}{200} = 0.49$$

ج)با استفاده از رابطه ی داده شده داریم:

$$N_{\mathrm{X}} = CM_X{}^{-\alpha} \qquad\qquad N_{\mathrm{Y}} = CM_Y{}^{-\alpha}$$

$$\frac{N_{\mathrm{X}}}{N_Y} = 980 = \frac{M_X{}^{-\alpha}}{M_Y{}^{-\alpha}} = \left(\frac{M_X}{M_Y}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-\alpha} \rightarrow \log(980) = \alpha\log(10) \rightarrow$$

$$\alpha \cong 3$$

پاسخ سوال 6 :

می دانیم برای سیستم های پایدار قضیه ویریال برقرار است :

$$2K + U = 0$$

سیستمی که در حال پایداری است را در نظر بگیرید ، اگر انرژی جنبشی ذرات آن افزایش یابد سیستم شروع به منبسط شدن می کند در این حالت سمت راست قضیه ویریال مثبت می شود و اگر انرژی پتانسیل گرانشی آن زیاد شود ، شروع به رمبش می کند که در این حالت سمت راست قضیه ویریال منفی می شود . اما در حالت حدی قضیه ویریال برقرار است .

طبق صورت سوال برای انرژی پتانسیل گرانشی داریم :

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

همچنین انرژی جنبشی ابر برابر است با :

$$K = \frac{3}{2} N K_B T$$

که در آن N تعداد ذرات ابر است که می توانیم آن را برابر با جرم ابر تقسیم بر میانگین جرم ذرات ابر در نظر بگیریم . یعنی $N = M/m_H$

برای رمبش داریم :

$$2K < -U \quad \Longrightarrow \quad 3\frac{M}{m_H} K_B T < \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

ابر کروی به صورت یکنواخت است ، یعنی می توان چگالی آن را ثابت فرض کرد و نوشت :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$$

با جایگذاری R در معادله قبل داریم :

$$\left(\frac{3}{4\pi M^2}\right)\left(\frac{5K_B T}{Gm_H}\right)^3 < \rho$$

پس چگالی آستانه برابر است با :

$$\rho_c = \left(\frac{3}{4\pi M^2}\right)\left(\frac{5K_BT}{Gm_H}\right)^3 = \left(\frac{3}{4\pi(2\times10^{30})^2}\right)\left(\frac{5(1.38\times10^{-23})\times20}{G(2\times10^{-27})}\right)^3 = 6.6\times10^{-14}\ kg/m^3$$

ب) انرژی لازم برای تفکیک ویونیده کردن تمام هیدروژن موجود در پیش ستاره به جرم M برابر است با :

$$\Delta E = \frac{M}{2m_H}E_d + \frac{M}{m_H}\ E_i = 2.54\times10^{39}\ j$$

این انرژی از رمبش ستاره حاصل می شود . پس تغییر انرژی پتانسیل ابر باید باید برابر با ΔE باشد . پس :

$$\Delta E = \frac{3}{5}\ \frac{GM^2}{R_2} - \frac{3}{5}\ \frac{GM^2}{R_1}$$

شعاع اوله ابر را با استفاده از جرم و چگالی بحرانی که از قسمت قبل به دست آمد ، محاسبه می کنیم :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = 1.9\times10^{14}m$$

حال شعاع نهایی ابر به دست می آید :

$$R_2 = 6.3\times10^{10}\mathrm{m}$$

ج) انرژی جنبشی یون های هیدروژن و الکترون ها در پیش ستاره ، در دمای T برابر است با :

$$K = \frac{3}{2}\ NK_BT = \frac{3}{2}\ \frac{M}{m_H}\ K_BT$$

چون ستاره در نهایت به پایداری می رسد می توانیم از قضیه ویریال استفاده کنیم :

$$2K = -U = \Delta E$$

$$3\frac{M}{m_H}\ K_BT = \Delta E$$

$$T = \frac{m_E\Delta E}{3M\ K_B} = 61300\ K$$

جواب سوال 7 :

الف)

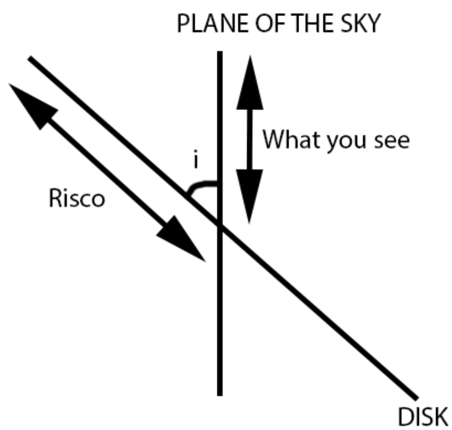
شار رسیده از قرص به ما عبارت است از:

$$F = \frac{Luminosity}{4\pi d^2} = \frac{1}{2}\frac{2\sigma T^4 A}{4\pi d^2}$$

قرص دو رو دارد به خاطر همین عبارت σT^4 در یک 2 ضرب شده است. از طرفی ما تنها یک سمت قرص را می بینیم پس یک ضریب $\frac{1}{2}$ نیز ضرب می شود.

فرض می کنیم که دیسک کاملا دایروی باشد.

شعاعی که ما از قرص می بینیم مانند شکل زیراست:



طبق گفته ی سوال تابش اصلی قرص از فاصله ی $RISCO<r<2RISCO$ می آید.

پس A یا همان مساحت روشن قرص عبارت است از:

$$\pi\,(2R_{\text{ISCO}})^2 - \pi {R_{\text{ISCO}}}^2 = 3\pi {R_{\text{ISCO}}}^2$$

از طرفی طبق شکل بالا چون انحراف صفحه نسبت به ما i می باشد یک cos i نیز در A ضرب می شود.(فرض کنید به طور نسبی صفحه ای که ما از آن انرژی در یافت می کنیم زاویه ی i نسبت به ناظر روی دیسک داشته باشد پس انرژی رسیده از دیسک در یک cos i نیز ضرب می شود)

پس روشنایی رسیده از دیسک به صورت زیر می شود:

$$F = \frac{Luminosity}{4\pi d^2} = \frac{3\sigma T^4 {R_{\text{ISCO}}}^2 \cos i}{4d^2}$$

و R_{ISCO} برابر مقدار زیر می شود:

$$R_{\text{ISCO}} = \sqrt{\frac{4Fd^2}{3\sigma T^4 \cos i}}$$

ب) با استفاده از رابطه ی وین دما برابر مقدار زیر می شود:

$$\lambda_{max}.\mathrm{T} = 0.0029 \ \rightarrow T = \ 994002\mathrm{K}$$

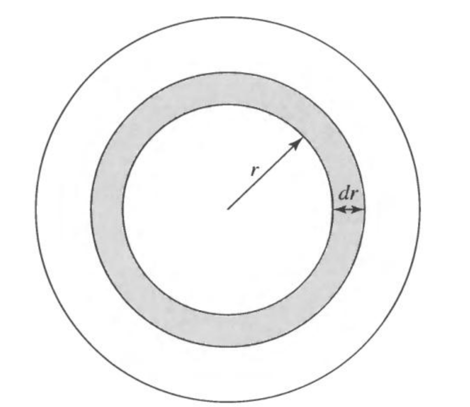
با جایگذاری در رابطه ی قسمت الف خواهیم داشت:

$$R_{\text{ISCO}} = 15.8\ km$$

ج) طبق گفته های سوال برای سیاهچاله های غیر چرخان $R_{\text{ISCO}} = 6R_{\text{G}}$ و برای سیا هچاله های چرخان $R_{\text{ISCO}} = R_{\text{G}}$.
حالا با استفاده از رابطه $R_{\text{G}} = \frac{\text{GM}}{\text{c}^2}$ مقدار R_{G} برابر 14.82 کیلومتر می شود وبا استفاده از قسمت قبل داریم $R_{\text{ISCO}} = 1.07R_{\text{G}}$ پس سیاهچاله چرخان می باشد.

د)ابتدا باید درخشندگی قرص را بدست آوریم:

دیسک زیر را در نظر بگیرید:



انرژی گاز به جرم m که در حال چرخش است عبارت است از:

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

هنگامی که گاز در حال سقوط باشد انرژی بیشتر منفی می شود.

مقدار انرژی که توسط قرص تابش می شود عبارت است از:

$$dE = \frac{dE}{dr}dr = \frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{2r}\right)dr = dL_{ring}dt \qquad m = \frac{dM}{dt}dt$$

با انتگرال گیری برای L خواهیم داشت:

$$dL_{ring} = \frac{GM\dot{M}}{2r^2}dr \quad \rightarrow \quad L = \frac{GM\dot{M}}{2R_{\text{ISCO}}}$$

با جایگذاری L از قسمت الف خواهیم داشت:

$$2\sigma T^4(3\pi {R_{\text{ISCO}}}^2) = \frac{GM\dot{M}}{2R_{\text{ISCO}}} \qquad \rightarrow \dot{M} = \frac{12\sigma T^4\pi {R_{\text{ISCO}}}^3}{GM}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه خواهیم داشت:

$$\dot{M} = 9.7 * 10^{-14}\frac{M_{sun}}{year}$$