

حل تمرینات درین ریاضی عمومی (2)

1- معنی های تراز $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (باید)

$$4x^2 + y^2 = k \Rightarrow \frac{4x^2}{k} + \frac{y^2}{k} = \frac{k}{k} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{k} = 1 \quad \text{حل: (مغز)}$$

2- معنی های تراز $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z$ (باید)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = k \Rightarrow x^2 + y^2 + \underbrace{(z^2 - 2z + 1 - 1)}_{(z-1)^2} = k \quad \text{حل}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \underbrace{k+1}_{k'} \quad \text{(کره)}$$

3- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

حل: (مختصاً مغز) $= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^3}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3 \theta = 0$

4- هر چه $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$ مطلوب است f_{xxyz}

حل: $f_x = 3 \cos(3x + yz) \Rightarrow f_{xx} = -9 \sin(3x + yz)$

$$\Rightarrow f_{xxy} = -9z \cos(3x + yz)$$

$$\Rightarrow f_{xxyz} = -9 \cos(3x + yz) + 9yz \sin(3x + yz)$$

5- $u = x^4 y + y^2 z^3$ بدان $\frac{\partial u}{\partial r}$ مطلوب است $\begin{cases} x = r s e^t \\ y = r s^2 e^{-t} \\ z = r^2 s \sin t \end{cases}$

90- مستقیم جهت تابع $f(x,y) = x^2 y^3 - 4y$ در نقطه $(2,-1)$ در جهت بردار $\vec{v} = 2i + 5j$

پایه

حل

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4)$$

$$\nabla f(2,-1) = (-4, 8)$$

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2i + 5j}{\sqrt{29}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right) \quad |v| = \sqrt{29} \text{ واحد بردار اول یکدستیم}$$

$$D_u f(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \vec{u} = (-4, 8) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right) = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

10- نوع نقاط بحرانی f را مشخص کنید:

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$$

$$f_x = 3 - 3x^2 - 3y^2 = 0 \quad (1)$$

حل

$$f_y = -6xy = 0 \quad (2)$$

از معادله دوم داریم: $-6xy = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $y = 0$

اگر $x = 0$ آن‌ها را جایگزین در (1) داریم: $3 - 0 - 3y^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$

اگر $y = 0$ آن‌ها را جایگزین در (1) داریم: $3 - 3x^2 - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$

نقاط بحرانی: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ داریم: $f_{xx} = -6x$, $f_{yy} = -6x$, $f_{xy} = -6y$

حال مقدار D (دترمینان) را به ازای این نقاط می‌یابیم: $D = (-6x)(-6x) - (-6y)^2$

$$D(0,1) < 0, \quad D(0,-1) < 0 \Rightarrow (0,1) \text{ و } (0,-1) \text{ نقطه سرجی هستند}$$

$$D(1,0) > 0, \quad f_{xx}(1,0) < 0 \Rightarrow (1,0) \text{ نقطه محلی است}$$

$$D(-1,0) > 0, \quad f_{xx}(-1,0) > 0 \Rightarrow (-1,0) \text{ نقطه محلی است}$$