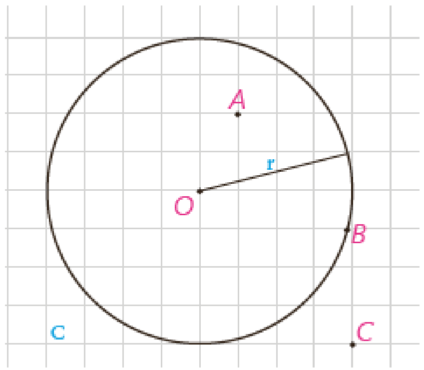
دایره: مجموعه نقاطی که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به یک فاصله ثابت (شعاع دایره) هستند.

دایره $C(O.R)$ دایره ی C به مرکز O و شعاع R

وضعیت یک نقطه نسبت به دایره

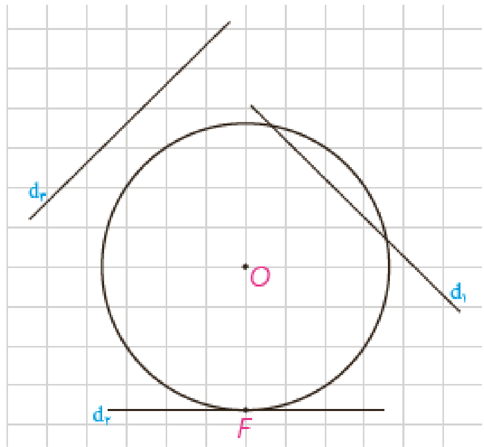


۱) نقطه ی B روی دایره ی $C(o.R)$ است اگر و تنها اگر $OB = R$ باشد.

۲) نقطه ی C بیرون دایره ی $C(o.R)$ است اگر و تنها اگر $OC > R$ باشد.

۳) نقطه ی A درون دایره ی $C(o.R)$ است اگر و تنها اگر $OA < R$ باشد.

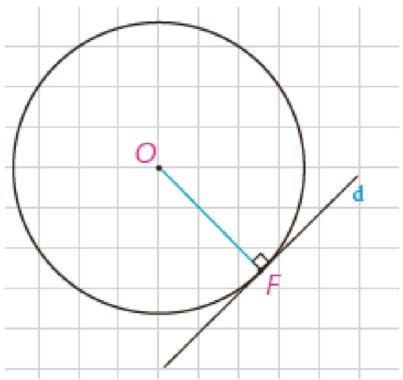
وضعیت خط و دایره



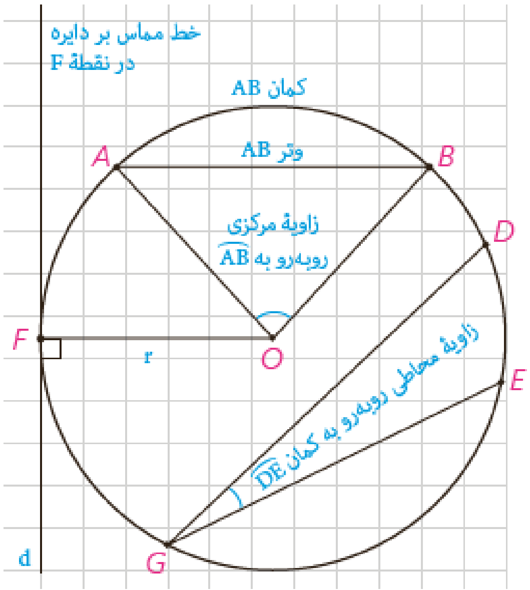
۱) خط و دایره یک نقطه اشتراک دارند. خط d بر دایره   است.

۲) خط و دایره دو نقطه ی اشتراک دارند. خط d و دایره

۳) خط و دایره هیچ نقطه اشتراکی ندارد. خط d



- یک خط بر یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه ی تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



مفاهیم و تعاریف اولیه دایره:

شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد.

وتر دایره: پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می گذرد.

زاویه ی مرکزی: زاویه ای که راس آن بر مرکز دایره واقع است.

زاویه ی محاطی: زاویه ای است که راس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشد.

کمان: کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. معمولا قسمت کوچکتری است که بین دو نقطه قرار دارد!

اندازه ی کمان: همان اندازه ی زاویه ی مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.

قطاع: ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است.

طول کمان

مقداری از محیط دایره که بین دو نقطه قرار دارد و واحد آن از جنس طول است.

نتیجه:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$

$$L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha \quad \text{و} \quad S = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$$

- کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.

نکات وتر دایره

۱) قطر عمود بر وتر آن وتر و کمان های نظیر آن را نصف می کند

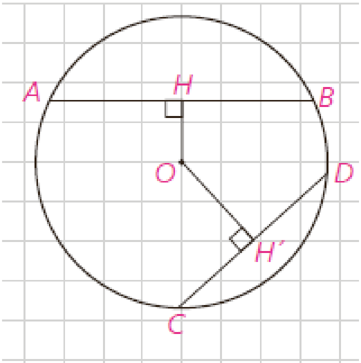
۲) خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می کند، بر آن وتر عمود است و کمان AB را نصف می کند.

۳) خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر وصل می کند بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند.

۴) خطی که وسط یک کمان و وسط وتر متناظر آن کمان را به هم وصل می کند از مرکز دایره می گذرد.

۵) در یک دایره وتر اول از وتر دوم بزرگتر است، اگر و تنها اگر فاصله ی مرکز دایره از وتر اول، کوچکتر از فاصله ی مرکز دایره تا وتر دوم باشد.

$$AB > CD \leftrightarrow OH < OH'$$



نکته: در دو دایره ی هم مرکز اگر وتر AB در دایره ی بزرگ، دایره ی کوچکتر را در نقاط D و C قطع کند آنگاه داریم: $AC = BD$

انواع زاویه در دایره

زاویه ی مرکزی:

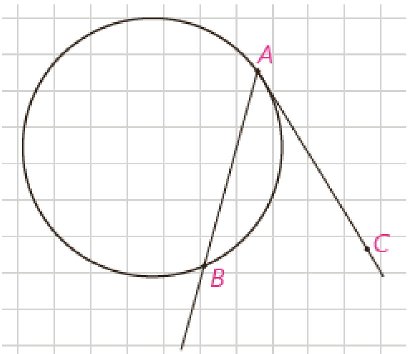
اندازه ی هر زاویه ی مرکزی برابراست با اندازه ی کمان مقابلش

زاویه ی محاطی:

اندازه ی هر زاویه ی محاطی برابراست با نصف اندازه ی کمان روبه رو به آن

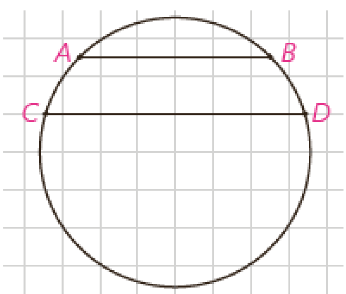
زاویه ظلی

زاویه ای است که راس آن روی محیط دایره و یک از اضلاع زاویه اش وتری از دایره و ضلع دیگر آن نیم خطی مماس بر دایره است.

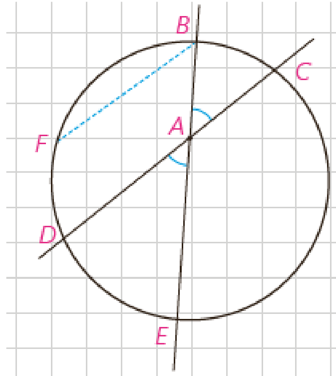


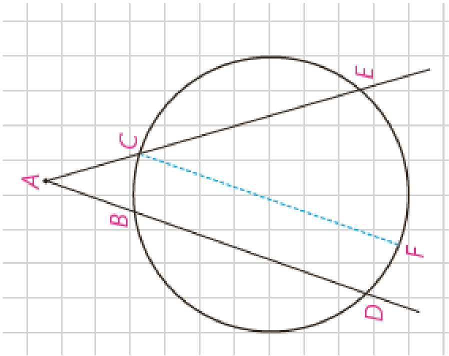
نکته: دو وتر از یک دایره موازی اند، اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشد.

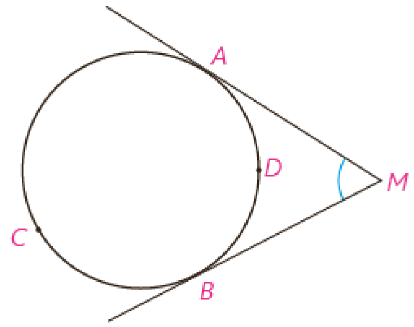
$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \mathrm{AC} = \mathrm{BD}$$

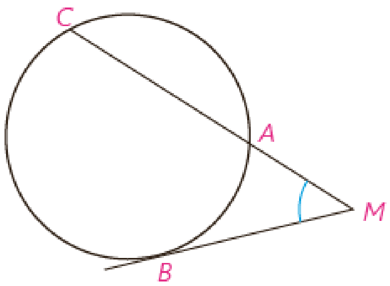


زاویه ی بین دو وتر در دایره

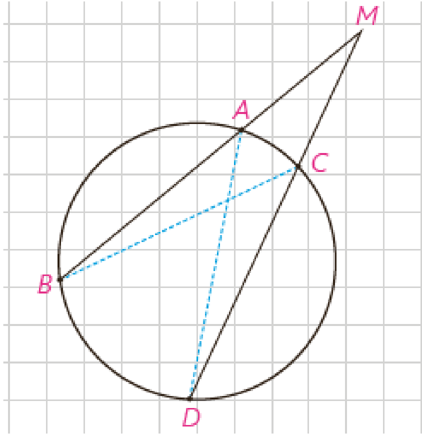


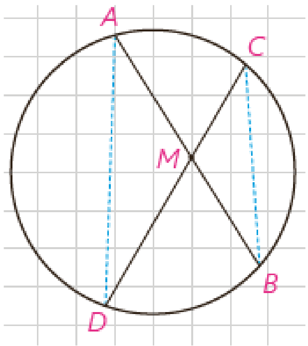




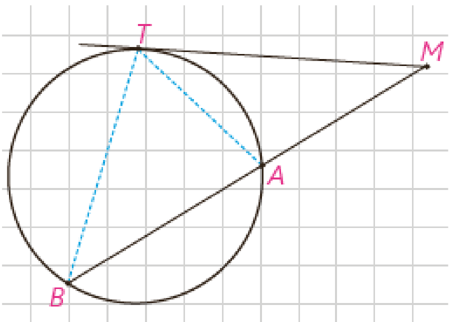


قضیه: هرگاه خط های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آنگاه $MA.MB = MC.MD$





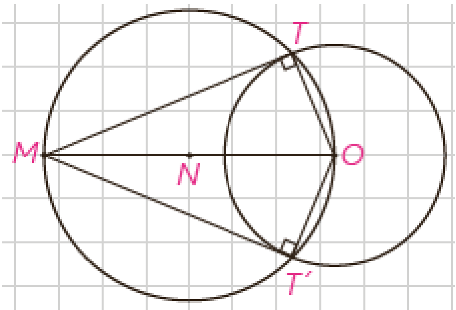
قضیه: اگر از نقطه ی M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایره ی مفروض رسم کنیم، آنگاه طول پاره خط مماس (MT) واسطه ی هندسی قطعات قاطع (MA و MB قطعات قاطع هستند) می باشد.



رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج دایره

نقطه ی M را خارج دایره ی $C(O.R)$ در نظر می گیریم O را به M وصل می کنیم، دایره ی به قطر OM رسم می کنیم. نقطه ی تلاقی آن با دایره ی (C) را T و T' می نامیم. زوایای OTM و $OT'M$ روبه رو به قطرند، پس قائمه اند. در نتیجه MT و MT' بر دایره ی (C) مماس اند.

خواص دو مماس رسم شده بر دایره ی معلوم از یک نقطه خارج آن:



۱) $MT = MT'$

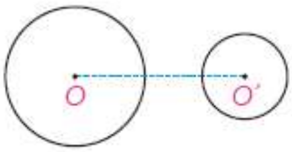
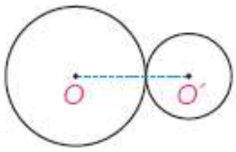
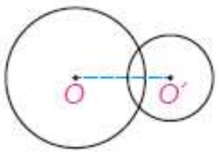
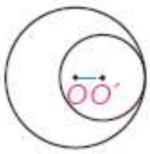
۲) OM نیمساز TMT' و TOT'

۳) OM عمود منصف TT'

۴) $TT' \times OM = ۲\,R \times MT$

۵) مثلث های MTO و MHT و THO متشابه هستند.

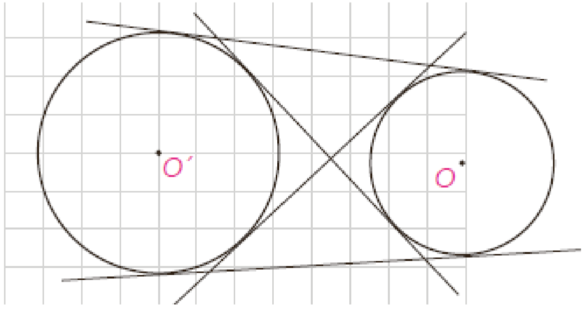
حالت های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک ها

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

مماس مشترک های دو دایره

اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آنگاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند.

اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آنگاه آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند.



طول مماس مشترک داخل و خارجی دو دایره

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

همرسی مماس مشترک های دو دایره و خط المرکزین

اگر شعاع های دو دایره نابرابر باشند، آنگاه مماس مشترک خارجی و خط المرکزین دو دایره همرس اند. هم چنین مماس مشترک های داخلی و خط المرکزین دو دایره همرس اند.

- نقطه ی همرسی مماس مشترک ها و خط المرکزین، خط المرکزین دو دایره را به نسبت شعاع ها تقسیم میکند:

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{R}{R'}$$

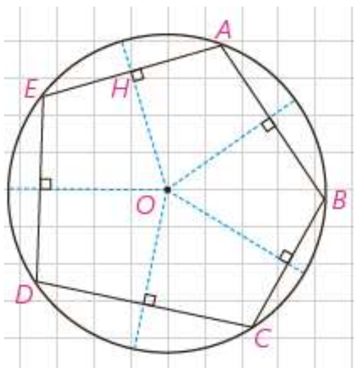
- اگر α زاویه ی بین مماس مشترک ها باشد، با فرض $R > R'$ داریم:

زاویه ی بین دو مماس مشترک خارجی: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R-R'}{OO'}$

زاویه ی بین دو مماس مشترک داخلی: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R+R'}{OO'}$

چند ضلعی محاطی

یک چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دایره ای وجود داشته باشد که از همه رئوس آن بگذرد. این دایره، دایره محیطی آن چند ضلعی است.

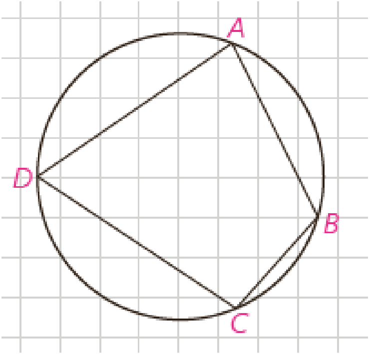


ویژگی چند ضلعی محاطی: یک چند ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر عمود منصف های اضلاعش همرس باشند.

- نقطه همرسی عمود منصف ها، مرکز دایره ی محیطی آن چند ضلعی است.
- می دانیم در هر مثلث عمود منصف های اضلاع همرس اند در نتیجه مثلث یک چند ضلعی محاطی است.

- n ضلعی های منتظم، مستطیل و ذوزنقه متساوی الساقین چند ضلعی های محاطی هستند.
- یک چهار ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه های روبرو مکمل باشند.

$A + C = ۱۸۰$ یا $B + D = ۱۸۰$ $\Leftrightarrow$ چهار ضلعی $ABCD$ محاطی است



چند ضلعی محیطی

یک چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر دایره ای بر همه ی اضلاع آن مماس باشد. این دایره، دایره محاطی آن چند ضلعی است.

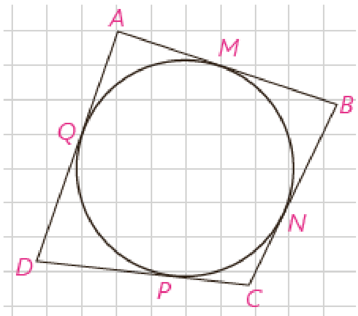
ویژگی: یک چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمساز های زاویه های آن همرس باشند.

- نقطه همرسی نیمساز ها، مرکز دایره ی محاطی آن چند ضلعی است.
- می دانیم در هر مثلث نیمساز های اضلاع همرس اند در نتیجه مثلث چند ضلعی محیطی است.
- در یک n ضلعی محیطی با مساحت s و محیط $۲p$ و شعاع دایره ی محاطی r رابطه ی زیر برقرار است.

$$s = rp$$

- یک چهار ضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

$AB + CD = AD + BC$ $\Leftrightarrow$ چهار ضلعی $ABCD$ محیطی است.

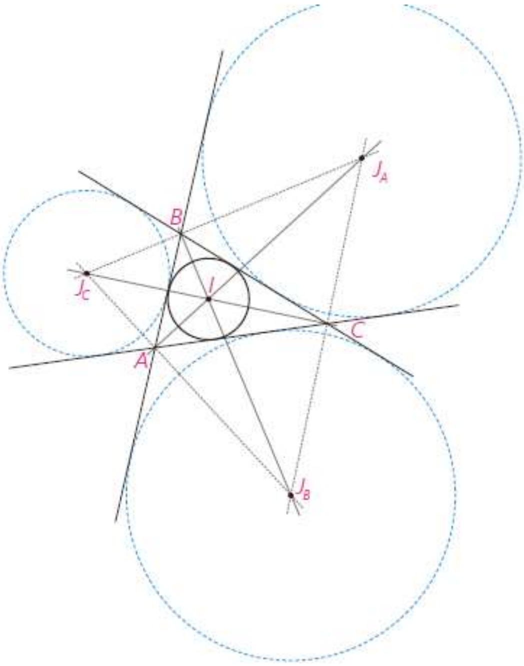


دایره های محیطی و محاطی مثلث

دایره محاطی مثلث

محل همرسی نیمساز های داخلی هر مثلث مرکز دایره ی محاطی داخلی مثلث است.

هر مثلث سه نیمساز زاویه ی خارجی دارد که دو به دو با یک نیمساز داخلی همرس اند . از همرسی هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی، مرکز یک دایره ی محاطی خارجی بوجود می آید.



- $r = \frac{s}{p}$ شعاع دایره محاطی داخلی
- شعاع های دایره محاطی خارجی از رابطه های زیر بدست می آید.

$$r_c = \frac{S}{P-c} \quad r_b = \frac{S}{P-b} \quad r_a = \frac{S}{P-a}$$

- رابطه ی بین اندازه ی شعاع های دایره های محاطی خارجی و داخلی مثلث:

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$$

- رابطه ی بین اندازه های ارتفاع های مثلث و شعاع دایره ی محاطی داخلی :

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

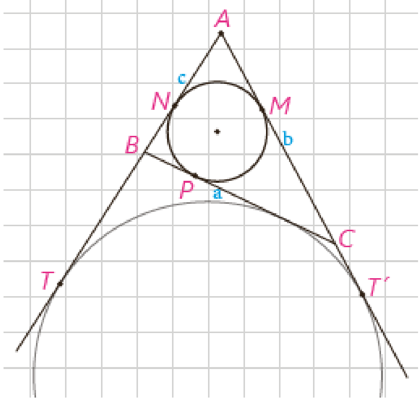
در مثلث قائم الزاویه ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایره ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازه ی وتر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵

۲) ۱۶

۳) ۱۷

۴) ۱۸

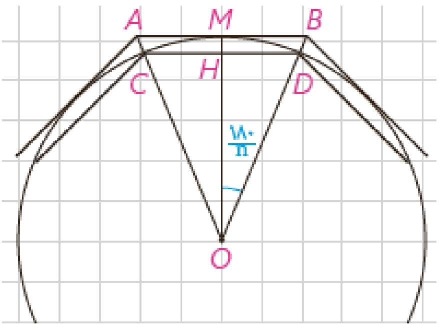


نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N،P باشند داریم:

$CM = CP = P - c$ و $BN = BP = P - b$ و $AM = AN = P - a$

- T و T' نقطه های تماس یک دایره ی محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع است داریم: $AT = AT' = \mathrm{P}$

چند ضلعی منتظم



یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

- هر چند ضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.
- اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند داریم:

$$\mathrm{CD} = ۲\mathrm{r}\sin\frac{۱۸۰}{\mathrm{n}} \text{ و } \mathrm{AB} = ۲\mathrm{r}\tan\frac{۱۸۰}{\mathrm{n}}$$

نکته:اگر ذوزنقه ای هم محاطی باشد و هم محیطی، مساحت آن برابراست با میانگین حسابی دو قاعده ضرب در میانگین هندسی آنها

در ذوزنقه $ABCD$، طول قاعده ها برابر با $BC = ۱۲$ و $AD = ۳$ است. اگر $ABCD$ هم چهارضلعی محیطی و هم چهارضلعی محاطی باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) ۴۵

۲) ۳۰

۳) ۲۲/۵

۴) ۶۰

تبدیل: تابعی مانند T از نقطه های یک صفحه به نقطه های همان صفحه است. به طوری که هر نقطه ی A از صفحه ی P، دقیقا یک نقطه مثل A' از صفحه ی P، نظیر می کند و بر عکس.

$$T: P \longrightarrow P$$
$$T(A)=A'$$

تبدیل همانی: تبدیل I یک تبدیل همانی است هرگاه به ازای هر نقطه ی A از صفحه ی P داشته باشیم

$$T(A) = A$$

تبدیل یافته ی یک خط: برای پیدا کردن تبدیل یافته ی یک خط، کافی است تبدیل یافته ی دو نقطه ی دلخواه از آن را پیدا کنیم و خط گذرنده از آن دو نقطه را رسم کنیم.

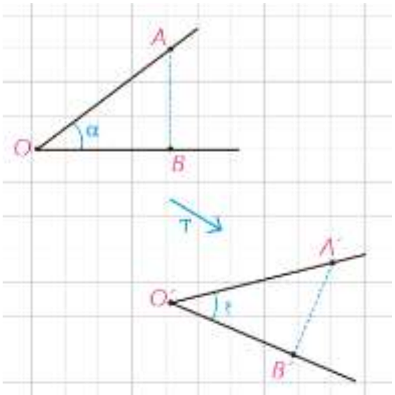
تبدیل ایزومتری(طولپا)

تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ میکنند، تبدیلات ایزومتری نامیده می شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

ویژگی های تبدیل ایزومتری:

ثابت کنید هر تبدیل طولپا اندازه ی زاویه را حفظ می کند و تصویر شکل با شکل اصلی همنهشت است.



۱) اگر شکلی توسط یک تبدیل طولپا تصویر شود، تصویر شکل با شکل اصلی همنهشت است.

۲) در تبدیل طولپا تبدیل یافته ی هر زاویه، زاویه ای هم اندازه ی آن است.

ترکیب تبدیل ها:

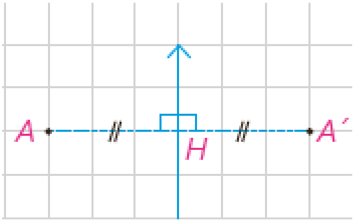
اگر $T_۱$ و $T_۲$ دو تبدیل در یک صفحه باشند ترکیب این دو تبدیل بصورت $T_۲OT_۱$ می باشد و برای هر نقطه ای مانند A در صفحه این طور تعریف می کنیم

$$(T_۲OT_۱)A = T_۲(T_۱(A))$$

نکته: ترکیب دو تبدیل طولپا، تبدیلی طولپاست.

بازتاب:

برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به d کافی است از نقطه ی A بر خط d عمود رسم کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه ی خودش امتداد می دهیم تا A' بدست آید.



$$S^{۱}(A) = A'$$

خط d عمود منصف AA' است و خط d محور بازتاب نامیده می شود.

نقطه ثابت تبدیل:

در هر تبدیل، نقطه ی را که تبدیل یافته ی آن بر خود آن نقطه منطبق می شود، نقطه ی ثابت تبدیل می گویند.

ویژگی های بازتاب:

۱)تصویر هر نقطه روی محور بازتاب بر خودش منطبق است پس بازتاب بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

۲)ثابت کنید بازتاب تبدیلی طولپا است. اندازه ی هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

الف) AB با خط d موازی است.

ب) یکی از نقاط انتهایی پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

پ) پاره خط AB با خط بازتاب d، نه موازی و نه متقاطع باشد.

پ) پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه ای مانند M قطع کند.

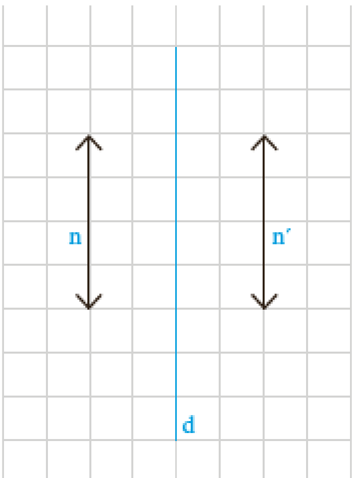
۳) بازتاب در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی کند.

در حالتیکه خط n موازی خط بازتاب d باشد شیب خط را حفظ می کند.

در حالتیکه خط بر محور بازتاب عمود باشد شیب خط را حفظ می کند.

۴) بازتاب نسبت به خط جهت شکل را عوض می کند.

مثال:



فرض کنید پاره خط AB به طول ۱۰ با خط بازتاب d نه موازی نه متقاطع باشد و امتداد پاره خط AB از سمت A خط d را در نقطه ی M با زاویه ی ۳۰ درجه قطع کند. اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و ۱۸ $= BB'$ باشد. نسبت $\frac{MA}{MB'}$ کدام است؟

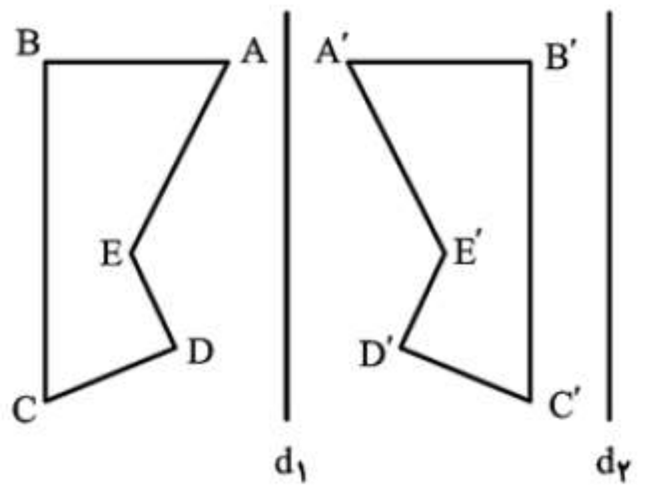
۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۲}{۷}$

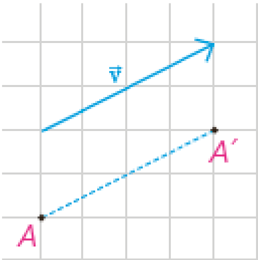
۴) $\frac{۱}{۳}$

نکته: در شکل زیر خط $d_۱$ موازی با $d_۲$ و به فاصله m واحد از آن قرار دارد. اگر پنج ضلعی $A'B'C'D'E'$ تصویر پنج ضلعی $ABCDE$ تحت بازتاب نسبت به خط $d_۱$ و $A''B''C''D''E''$ تصویر $A'B'C'D'E'$ تحت بازتاب نسبت به خط $d_۲$ باشد داریم:



انتقال:

تبدیلی است که با بردار معلوم $\vec{v}$ مشخص می شود اگر A' تصویر A باشد که با بردار $\vec{v}$ انتقال داده باشیم داریم:



$$\vec{V} = AA'$$

دقت »»»» بردار (جهت ، اندازه و راستا)

ویژگی های انتقال:

۱) ثابت کنید انتقال تبدیلی طولپاست. $T(AB) = A'B'$ در نتیجه $AB = A'B'$

الف) اگر پاره خط دلخواه AB با بردار v موازی نباشد.

ب) اگر پاره خط دلخواه AB با بردار v موازی باشد.

۲) انتقال شیب خط را حفظ می کند.

۳) ترکیب دو انتقال خودش هم انتقال است و بردار انتقال آن برابر با مجموع دو بردار انتقال های مفروض است.

۴) انتقال جهت شکل را تغییر نمی دهد.

۵) انتقال یافته ی هر دایره ، برابر با دایره اول است و بردار انتقال هم خط المرکزین دو دایره است.

مثلث ABC را با بردار AA' انتقال می دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر A' روی ضلع AB و $\frac{A'A}{A'B} = ۲$ باشد. اندازه ی مساحت ناحیه ی مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

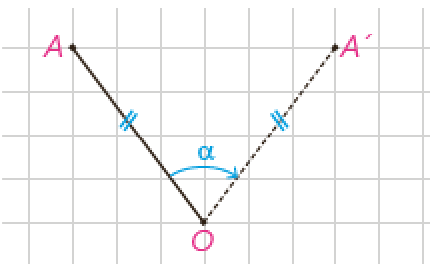
۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۹}$

دوران:

دوران به مرکز O و زاویه ی α تبدیلی است که هر نقطه A در صفحه را به نقطه ای مانند A' از آن صفحه نظیر می کند به طوری که



$OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

دوران جهت عقربه های ساعت و خلاف جهت عقربه های ساعت

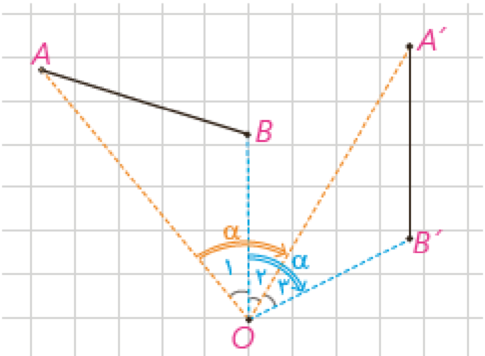
مرکز دوران:

برای یافتن مرکز دوران زمانی که شکل اولیه و دوران یافته را داریم بدین صورت است که اول نقاط نظیر را بین دو شکل به هم وصل کرده و عمود منصف این خطوط واصل را می کشیم. محل برخورد این عمود منصف ها مرکز دوران است.

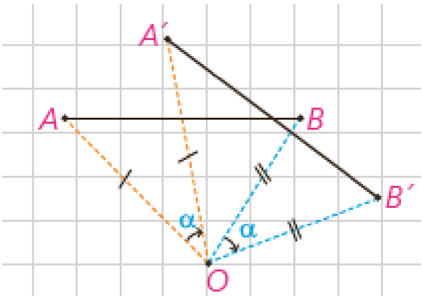
ویژگی های دوران:

۱)دوران یک تبدیل طولپاست.

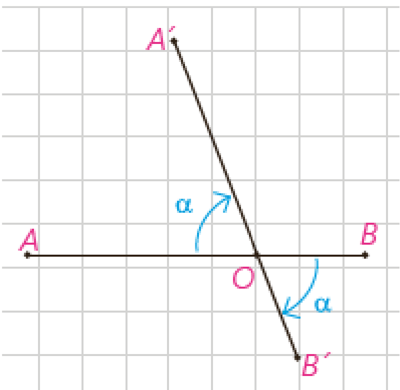
الف) مرکز دوران o بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه ی AOB بیشتر باشد



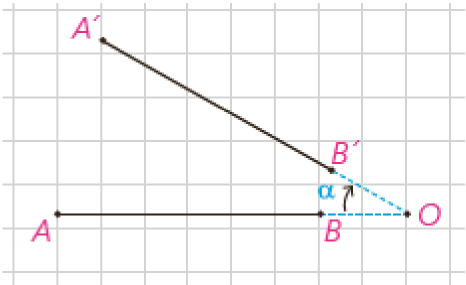
ب) به طور مشابه اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه ی AOB کمتر باشد



پ) اگر مرکز دوران O روی پاره خط AB باشد.



ت) اگر نقطه ی O روی امتداد پاره خط AB باشد.

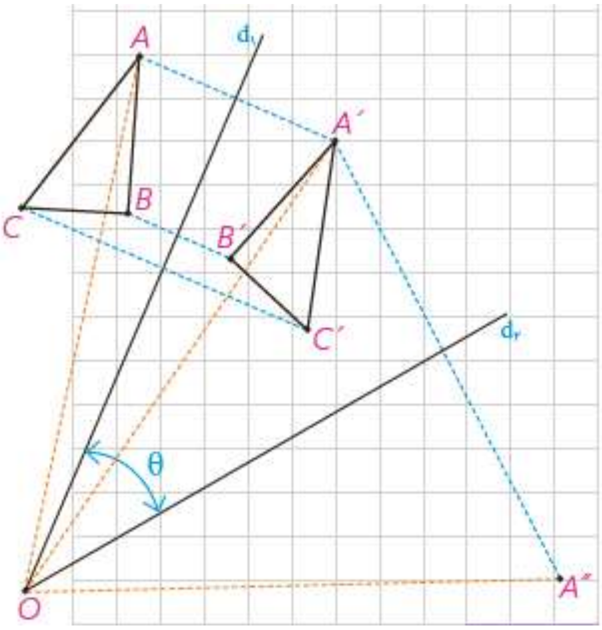


۲)زاویه ی بین یک خط و دوران یافته اش برابر زاویه ی دوران است.

۳) دوران شیب خط را حفظ نمی کند مگر اینکه دوران مضرب صحیحی از ۱۸۰ درجه باشد.

۴) دوران جهت شکل را تغییر نمی دهد.

نکته: در شکل زیر، دو خط $d_۲$و$d_۱$ با زاویه ی θ یکدیگر را قطع کرده اند، مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_۱$ است بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید داریم:



نقطه ی A به فاصله ی ۱ از خط L قرار دارد. تصویر A تحت بازتاب نسبت به خط L را A' می نامیم و A را حول A' به اندازه ی ۱۲۰ درجه دوران می دهیم تا A'' بدست آید.طول پاره خط AA'' کدام است؟

۱)$\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) ۴

تجانس:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k\neq ۰$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k|.OM$

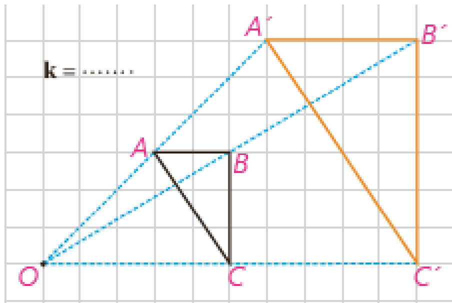
پ)
– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

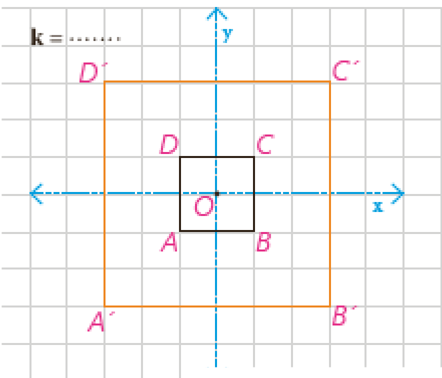
مثال: $OM' = ۲OM$  $k=۲$

$OM' = \frac{۱}{۲}OM$  $k=\frac{۱}{۲}$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

مثال: $OM' = ۲OM$  $k=-۲$





در تجانس به مرکز O و نسبت k:

اگر $k>۰$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k<۰$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k|<۱$ تصویر شکل .... می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر .... تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

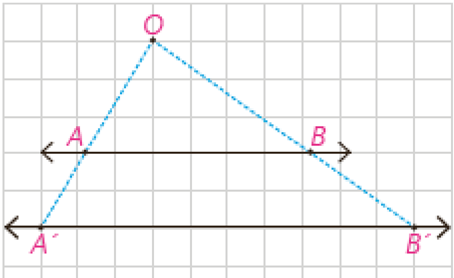
ویژگی های تجانس:

۱) تجانس تبدیلی طولپا نیست.

۲) تجانس شیب خط را حفظ می کند.

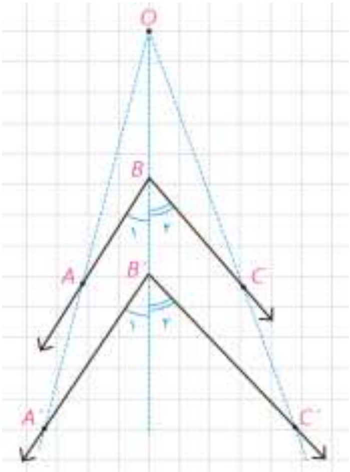
الف) نقطه ی O روی خط AB است.

ب) نقطه ی O غیر واقع بر خط AB است.



$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = ... \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{.....}{.....} = ...$$

$$\Rightarrow AB \| A'B' \qquad \text{(چرا؟)}$$



۲) ثابت کنید تجانس اندازه ی زاویه را حفظ می کند.

۳) مجانس هر پاره خط پاره خطی است موازی آن و نسبت طول این دو پاره خط همان نسبت تجانس است.

۴) تجانس جهت شکل را حفظ می کند.

۵) مجانس هر شکل با تصویرش متشابه است. (ددو شکل متشابه لزوما مجانس نیستند)

۶) خطوطی که نقاط تجانس را به هم وصل می کند در مرکز تجانس همرسند.

۸) تجانس در دایره:

تبدیل همانی:

در چه شرایطی انتقال دوران و تجانس، می توانند تبدیل تبدیل همانی باشند؟

آیا تبدیل همانی طولپاست؟

توضیح دهید در هر یک از تبدیل های زیر، آیا میتوان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

انتقال غیر همانی – دوران غیر همانی – تجانس غیر همانی

دو پاره خط موازی AB و $A'B'$ به ترتیب به طول های ۱۰ و ۱۵ واحد و به فاصله ی ۲۰ واحد از یکدیگر، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصله ی مراکز تجانس ها کدام است؟$AA' = BB'$

۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۴۸

۴) ۵۴

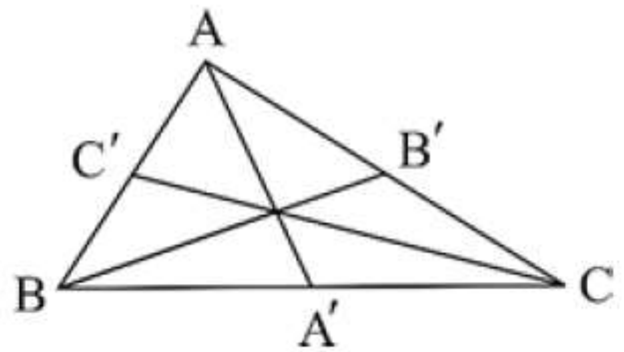
در مثلث ABC میانه های AA' و BB' و CC' را به اندازه ی $\frac{۲}{۳}$ طول آنها از طرف نقاط A' ، B' و C' به ترتیب تا نقاط A'' ، B'' و C'' امتداد می دهیم اگر مجانس ABC مثلث $A''B''C''$ باشد نسبت تجانس کدام است؟

۱) ۱-

۲) ۴-

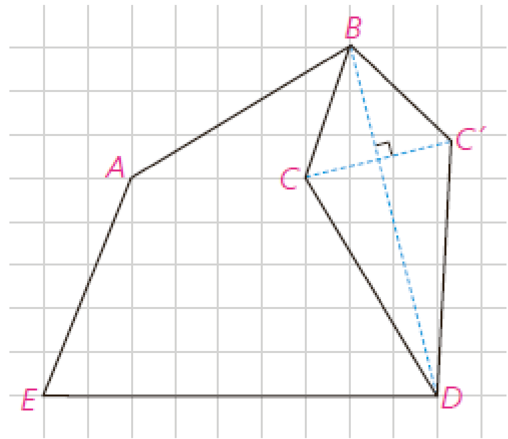
۳) $-\frac{۳}{۲}$

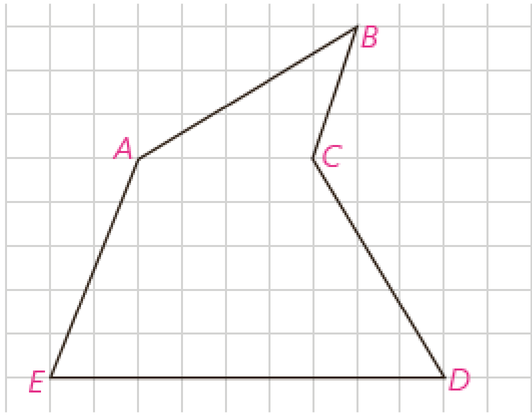
۴) ۳-



هم پیرامونی و هم محیطی:

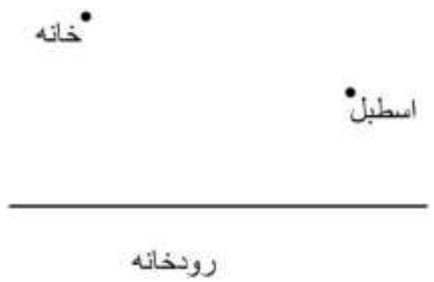
کاربرد بازتاب در این مسائل بدین صورت است که می خواهیم بدون این که محیط یک چند ضلعی تغییر کند، مساحت آن را تغییر دهیم.



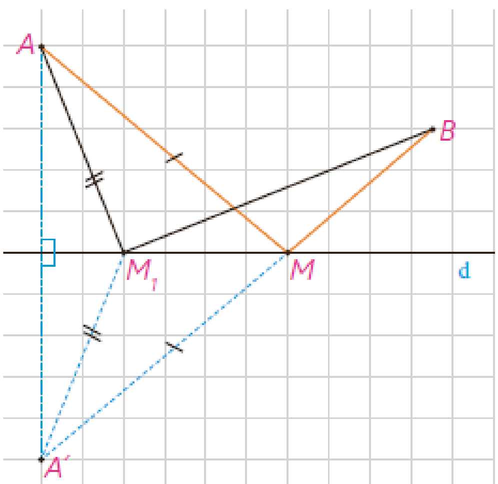


مسئله هرون:

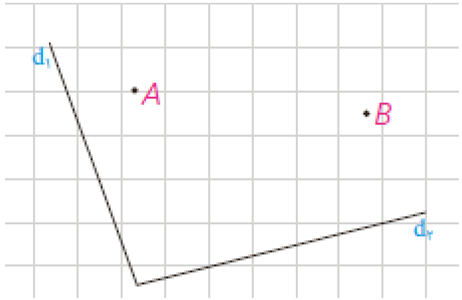
۱) مردی می خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه ی مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می کند، کمترین حالت ممکن باشد؟

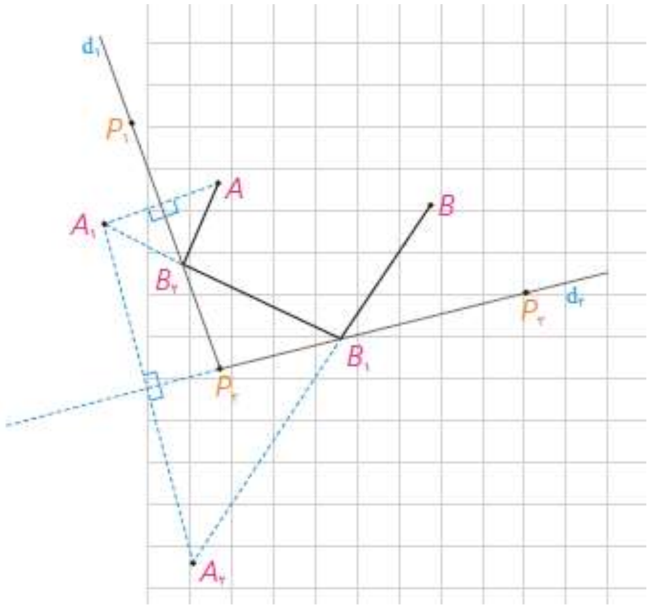


هرون ابتدا بازتاب نقطه ی A نسبت به خط d را A' نامیده و A' را به B وصل میکنیم محل تلاقی $A'B$ با خط d جواب است.

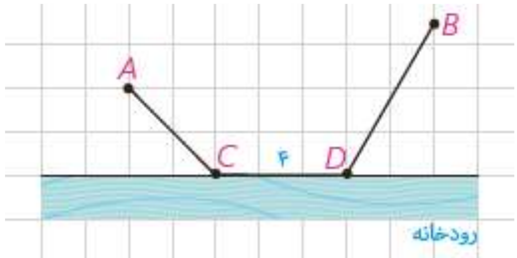


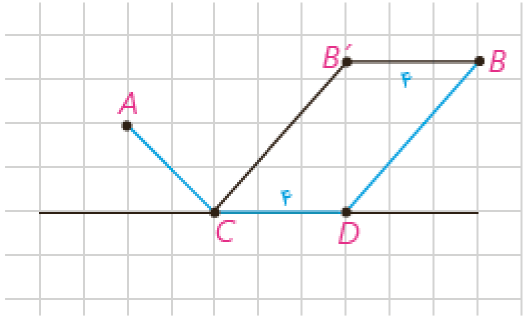
۲) دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ و نقاط ثابت A و B مفروض اند. چگونه می توان با طی کوتاهترین مسیر از نقطه ی A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط $d_۱$ و $d_۲$ از نقطه ی B گذشت؟

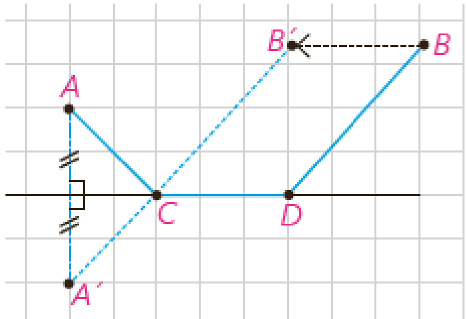




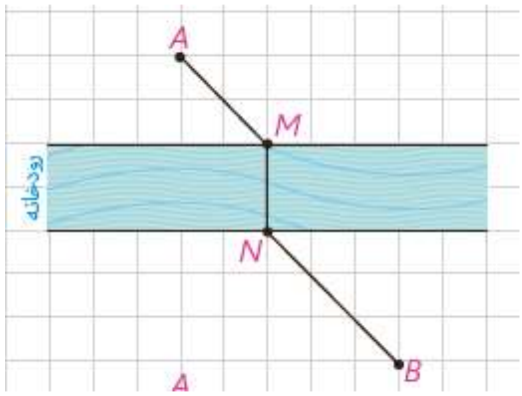
۳) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A تا B بسازیم بطوریکه ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاهترین مسیر ممکن باشد؟

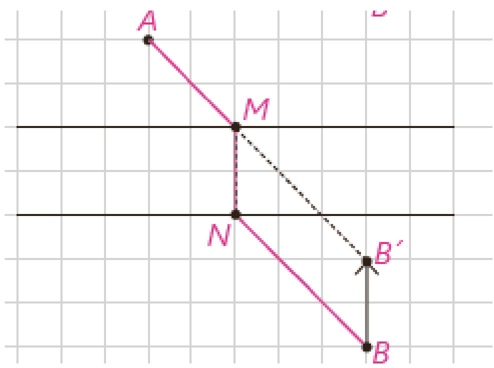




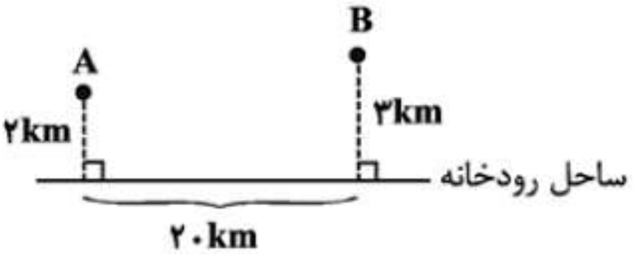


۴) اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاهترین مسیر ممکن باشد؟





مطابق شکل دو شهر A و B مفروض اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم.به طوری که ۸ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود . اندازه کوتاهترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



۱) ۲۰

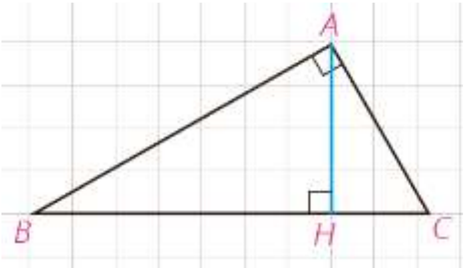
۲) ۲۱

۳) ۲۲

۴) ۲۳

فصل۳

یادآوری: روابط طولی زیر را در مثلث قائم الزاویه در سال گذشته دیدیم.



۱ـ $AB^{۲}=BC.BH$

۲ـ $AC^{۲}=BC.CH$

۳ـ $AH^{۲}=BH.CH$

۴ـ $AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$

۵ـ $AB.AC=BC.AH$

۲- قضیه سینوس ها:

قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع BC=a ، AC=b و AB=c داریم:

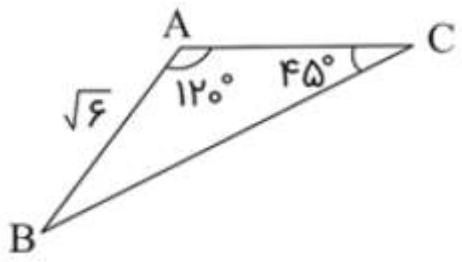
$$\frac{a}{\text{SinA}}=\frac{b}{\text{SinB}}=\frac{c}{\text{SinC}}=۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه ABC $(A=۹۰)$ با ارتفاع $AH=a$ داریم:

$$\frac{۱}{{h_a}^{۲}}=\frac{۱}{b^{۲}}+\frac{۱}{c^{۲}}$$

در شکل زیر اندازه ی ضلع BCکدام است؟



۱) ۳

۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) ۴

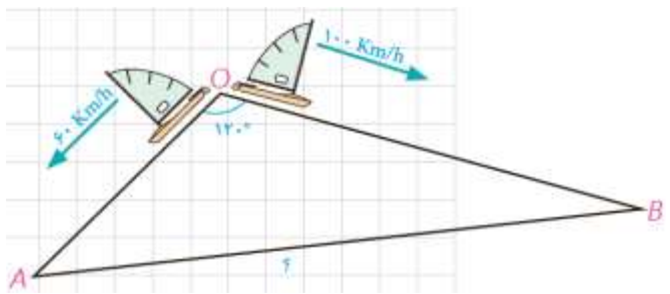
۴) $۳\sqrt{۲}$

قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$, $b^2= \cdots + \cdots - \cdots$

$c^2= \cdots + \cdots - \cdots$

تست۴: دو قایق از یک نقطه در دریاچه ای با سرعت های ۶۰ $\frac{Km}{h}$ و ۱۰۰ $\frac{Km}{h}$ و با زاویه ی ۱۲۰ از هم دور می شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از یکدیگر هستند؟



۱) ۷۰

۲) ۸۰

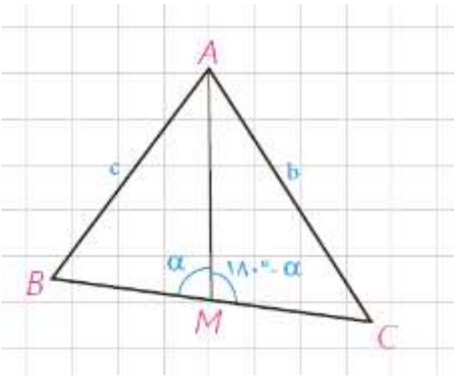
۳) ۸۵

۴) ۹۰

قضیه میانه ها

در مثلث ABC، میانه ی AM را رسم کرده ایم($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیه ی کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه و با جمع کردن تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)



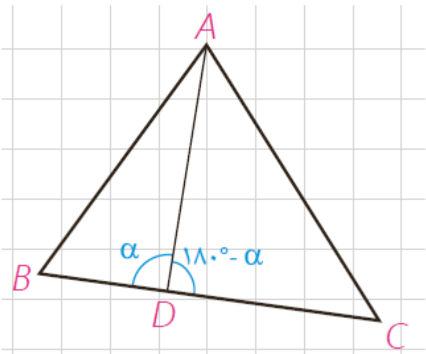
داریم: $a^۲ + c^۲ = ۲{m_b}^۲ + \frac{b^۲}{۲}$ و $a^۲ + b^۲ = ۲{m_c}^۲ + \frac{c^۲}{۲}$

و همچنین برای محاسبه ی اندازه ی میانه ی وارد بر هر ضلع داریم: $m_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲}$

قضیه ی استورات

در مثلث ABC، نقطه ی دلخواه D روی BC مفروض است. در اینصورت داریم:

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$ (قضیهٔ استوارت)



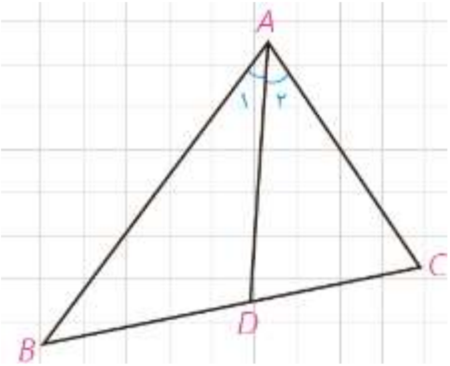
نکته: مجموع مربعات میانه ها برابر $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربعات اضلاع است.

$$ {m_a}^۲ + {m_b}^۲ + {m_c}^۲ = \frac{۳}{۴}(a^۲ + b^۲ + c^۲) $$

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه ی داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع آن زاویه تقسیم می کند.

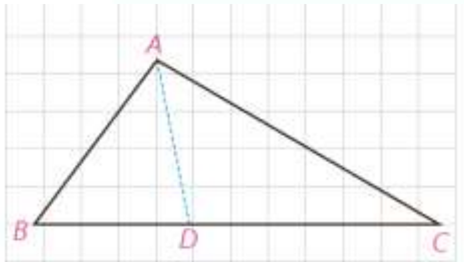
فرض:

حکم:



محاسبه ی طول نیمساز های زوایای داخلی مثلث

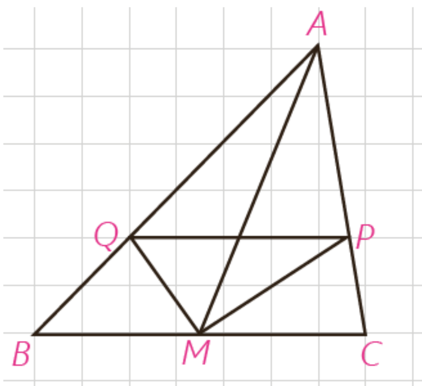
قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



$$AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$$

نکته: در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند ثابت کنید

$PQ \parallel BC$



قضیه هرون:

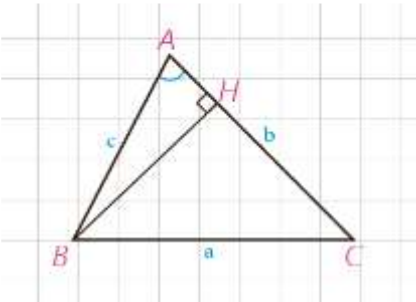
در مثلث ABC، که $BC = a$ و $AB = c$ و $AC = b$ مساحت را با دستور زیر محاسبه میکنیم.

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{۲}$$

مثال: مساحت مثلثی به اضلاع ۷ و ۹ و ۱۲ واحد را بدست آورید.

دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث



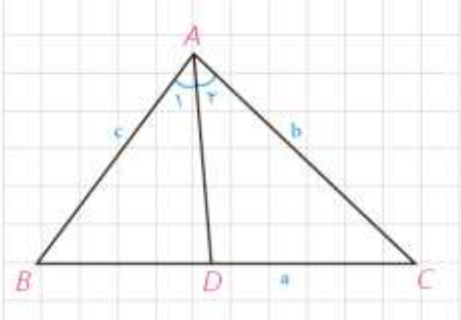
نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc.\sin A = \frac{۱}{۲} ab.\sin C = \frac{۱}{۲} ac.\sin B$$

یادآوری: محاسبه ی مساحت مثلث متساوی الاضلاع از دستور هرون

محاسبه ی طول نیمساز



$$d_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$ (نیمساز رأس A)