53 ص

# توابع چند متغیره (یا میدانهای اسکالر)

یادآوری

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x)$

$y = f(x)$

متغیر وابسته — متغیر مستقل

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto z$

$D_f\subseteq\mathbb{R}^2$

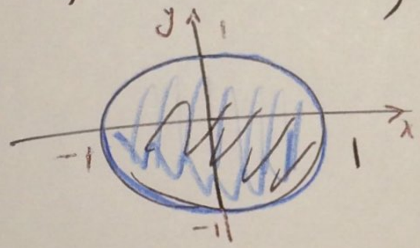
$z = f(x,y)$

متغیر وابسته — متغیرهای مستقل

---

**EX** $\quad f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\ ,\quad D_f = ?$ (دامنه f)

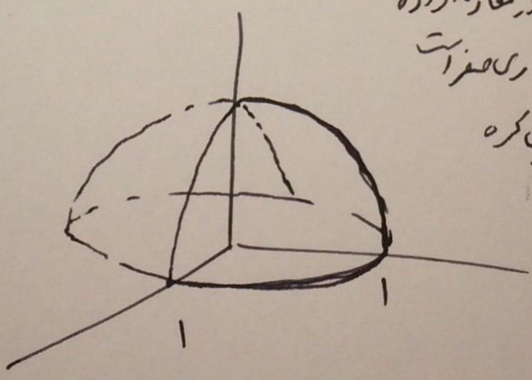
$$D_f=\{(x,y): 1-x^2-y^2\geq 0\}$$
$$=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$$



دامنه f

$$\underbrace{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\text{نیمه بالای کره به مرکز مبدا شعاع 1}}\Longrightarrow z^2=1-x^2-y^2\Longrightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

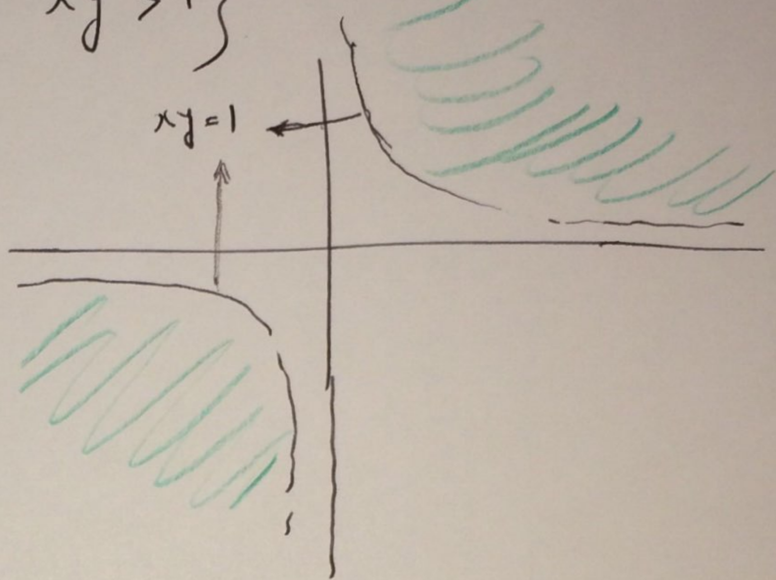
کره به مرکز مبدا شعاع 1، اما در معادله داده شده z همواره بزرگتر مساوی صفر است از این رو نیمه بالای کره مورد نظر است.



Ex $\quad Z = Ln(xy-1) \;;\; D_f = ? \;,\; f(5,5) = ?$

حل:
$$D_f = \{(x,y) : xy - 1 > 0\}$$
$$= \{(x,y) : xy > 1\}$$

$D_f$ همان ناحیه هاشور خورده




$$f(5,5) = Ln(24)$$

---

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto w \qquad D_f \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\underset{\text{متغیر وابسته}}{w} = f(\underbrace{x,y,z}_{\text{متغیرهای مستقل}})$$

---

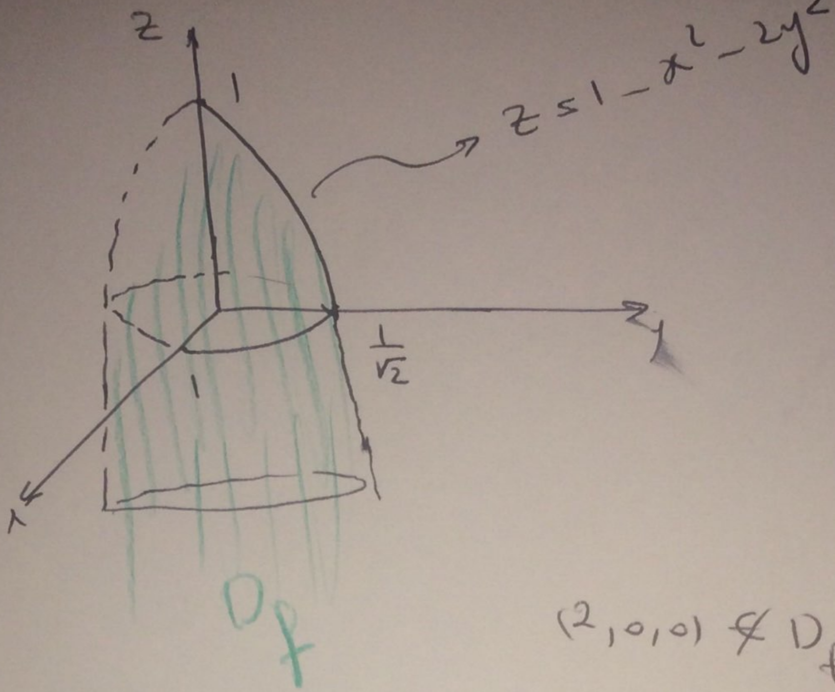
Ex $\quad f(x,y,z) = Ln(1 - x^2 - 2y^2 - z)$

$D_f = ?$

آیا $f(2,0,0)$ قابل تع. است؟ $f(0,0,-2)$ چطور؟

حل:
$$D_f = \{(x,y,z) : 1 - x^2 - 2y^2 - z > 0\} = \{(x,y,z) : z < 1 - x^2 - 2y^2\}$$

شکل دامنه در صفحه بعد




$(2,0,0) \notin D_f \rightarrow f(2,0,0) = \ln(-3)$ تعریف نشده است

$(0,0,-2) \in D_f \Rightarrow f(0,0,-2) = \ln 3$

## حد توابع چند متغیره

تذکر: راجع به حد توابع چند متغیره ابزار کارآمدی مثل هوپیتال در دست نداریم. یعنی نمی‌توانیم از هوپیتال استفاده کنیم. یکی از ابزارهایی که برای بدست آوردن حد توابع می‌توان از آن استفاده کرد پیوستگی است که بعداً شما در این ارتباط خواهیم دید. ابزار دیگر قانون ساندویچ است

- که می‌گوید اگر $B \le A \le B$ آنگاه می‌توان گفت $A=B$. یک مثال در این ارتباط ببینیم.

مثال) نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

حل: می‌دانیم

$$0 \le \left|\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 3|x|\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \le 3|x|$$

پس

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3|x| = 0$$

یعنی حد مورد نظر بین دو تا صفر ساندویچ شده است از این رو

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

اما چرا $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$ ؟ زیرا داریم $y^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow |y| \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$$

- حال اگر طرفین این نابرابری را در $3|x|$ که مثبت هم هست ضرب کنیم داریم

$$\frac{3|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 3|x|.$$

---

با استفاده از قضیه زیر می توان نشان داد که یک تابع چند متغیره حد ندارد.

- قضیه: اگر حد یک تابع چند متغیره روی حداقل دو منحنی یکسان نباشد، حد مورد نظر موجود نیست. حتی اگر حد یک تابع چند متغیره روی یک منحنی موجود نباشد مجدداً می توان نتیجه گرفت حد مورد نظر موجود نیست.

---

نحوه استفاده از قضیه بالا را در مثالهای بعدی درک می کنیم.

ص57

نشان دهید حدهای زیر موجود نیستند

① $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

حل:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \\ (x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_1=\{(x,y): y=0\} \end{array}\right. = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+0}{x^2-0} = 1$$

این سه خط یعنی حد f روی منحنی S که محور xها است (و از مبدأ می‌گذرد).

$$\left\{\begin{array}{l} \lim \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \\ (x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_2=\{(x,y): x=0\} \end{array}\right. = \lim_{y\to 0} \frac{0+y^2}{0-y^2} = -1$$

حد f روی منحنی $S_2$ که محور yها است، از مبدأ می‌گذرد.

حد f روی منحنی $S_1$ برابر $1$ و روی منحنی $S_2$ برابر $-1$ است بنا به قضیه قبل

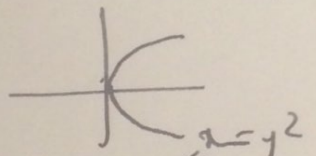
حد ① موجود نیست.

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

حل:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} \\ (x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_1=\{(x,y): y=0\}\end{array}\right. = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2)^3} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} \\ (x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_2=\{(x,y): x=y^2\}\end{array}\right. = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2)^4y^4}{((y^2)^2+y^4)^3} = \lim_{y\to 0}\frac{y^{12}}{(2y^4)^3} = \lim_{y\to 0}\frac{y^{12}}{8y^{12}} = \frac{1}{8}$$




دقت کنید از مبدا می‌گذرد

حد $f$ روی منحنی $S_1$ برابر $0$ و روی منحنی $S_2$ برابر $\frac{1}{8}$ است و بنابه قضیه قبل حد ② موجود نیست.

صو5

(3) $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+2xz+3yz}{x^2+y^2+z^2}$$

حل:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+2xz+3yz}{x^2+y^2+z^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x^2+3x^2}{x^2+x^2+x^2} = 2 \\ (x,y,z)\in S_1=\{(x,y,z): x=y=z\} \end{cases}$$

خط گذرنده از سیرا و هادی

$i+j+k$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+2xz+3yz}{x^2+y^2+z^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \\ (x,y,z)\in S_2=\{(x,y,z): x=y,\ z=0\} \end{cases}$$

خط گذرنده از سیرا با هادی

$i+j+0k$

(3)

حد $f$ روی منحنی $S_1$ برابر 2، روی منحنی $S_2$ برابر $\frac{1}{2}$ است و بنابه قضیه قبل حد مسئله

هم موجود نیست.

## پیوستگی توابع چند متغیره

تابع $z = f(x,y)$ را در نقطه $(x_0, y_0)$ پیوسته گوییم هرگاه

۱) $f(x_0,y_0)$ تعریف شده باشد. (یعنی $(x_0,y_0) \in D_f$)

② $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود باشد

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

---

• مانند توابع یک متغیره مجموع، حاصلضرب، خارج قسمت توابع چند متغیره پیوسته، خود پیوسته اند. (در مورد خارج قسمت مخرج باید ناصفر باشد) حتی ترکیب توابع پیوسته هم خود پیوسته است.

Ex $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} e^{xy} = e^{2\times 1} = e^2$

$xy$ حاصلضرب دو تابع پیوسته که خود پیوسته است

تابع نمایی با تابع پیوسته $xy$ ترکیب پیوسته دارند

از این رو حد $e^{xy}$ وقتی $(x,y)$ به $(2,1)$

میل می کند با مقدار تابع در $(2,1)$ برابر است.

---

Ex $\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} (y+1)\,\ln(xy^3) \overset{\text{تابع پیوسته است}}{=\!=} (1+1)\,\overset{\ln e = 1}{\ln(e1)} = 2$

تعریف: درصورتیکه $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود نباشد، گوییم تابع $f$ ناپیوستگی اساسی یا رفع نشدنی دارد. و درصورتیکه $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود باشد اما $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$ گوییم تابع $f$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

---

Ex) پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید و در صورت ناپیوستگی نوع آن را مشخص کنید

1)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2)
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

از مثالهای قبل می دانیم $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ولی $f(0,0)=1$ پس $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$ ازاین رو $f$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

همینطور می دانیم $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ موجود نیست ازاین رو $g$ ناپیوستگی اساسی دارد.

# مشتقات جزئی (پاره‌ای)

زمانیکه از یک تابع چند متغیره نسبت به یکی از متغیرها مشتق می‌گیریم، بقیه متغیرها را عدد ثابت تلقی می‌کنیم.

$$Z = f(x,y)$$

$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ : مشتق f نسبت به x

$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ : مشتق f نسبت به y

---

$$w = f(x,y,z)$$

$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ : مشتق f نسبت به x

$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ : مشتق f نسبت به y

$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ : مشتق f نسبت به z

---

Ex $\quad f(x,y) = 2x^3y^2 - x^2y + xy^2 \,,\; f_x, f_y = ?$

$$f_x = 2(3x^2)y^2 - 2x(y) + (1)y^2 = 6x^2y^2 - 2xy + y^2$$

$$f_y = 2x^3(2y) - x^2(1) + x(2y) = 4x^3y - x^2 + 2xy$$

Ex $f(x,y) = (x^2 - y^3)\sec(2x+y)$

$f_x = ?\ ,\ f_y = ?$

حل: $f_x = 2x\sec(2x+y) + (x^2-y^3)(2)\sec(2x+y)\,tg(2x+y)$

یادآوری

$(\sec u)' = u'\sec u\, tg$

$\Rightarrow f_x = 2x\sec(2x+y) + 2(x^2-y^3)\sec(2x+y)\,tg(2x+y)$

$f_y = (-3y^2)\sec(2x+y) + (x^2-y^3)(1)\sec(2x+y)\,tg(2x+y)$

$\rightarrow f_y = -3y^2\sec(2x+y) + (x^2-y^3)\sec(2x+y)\,tg(2x+y)$

---

Ex $f(x,y) = \int_x^y \ln(\sin t)\,dt\ ,\ f_x\ ,\ f_y = ?$

حل: $\boxed{f_y = \ln \sin y}$

اگر $f$ پیوسته باشد

$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt \rightarrow h'(x) = f(x)$

$h(y) = \int_a^y f(t)\,dt \Rightarrow h'(y) = f(y)$

$f(x,y) = -\int_y^x \ln(\sin t)\,dt$

$\boxed{f_x = -\ln \sin x}$

---

Ex $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{z}\ ,\ f_x, f_y, f_z = ?$

حل

$f = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} = x\dfrac{1}{z} + y\dfrac{1}{z} \Rightarrow f_x = \dfrac{1}{z}\ ,\ f_y = \dfrac{1}{z}$

$f = (x+y)\dfrac{1}{z} \Rightarrow f_z = (x+y)\left(\dfrac{-1}{z^2}\right) = -\dfrac{x+y}{z^2}$

p.64 (Ex) $f(x,y,z) = x^{yz^2}$ $\quad f_x, f_y, f_z = ?$

$$f_x = (yz^2)\, x^{yz^2-1}$$

$$f_y = z^2\, x^{yz^2} \ln x$$

$$f_z = 2yz\, x^{yz^2} \ln x.$$

یادآوری

$$(a^u)' = u' a^u \ln a$$

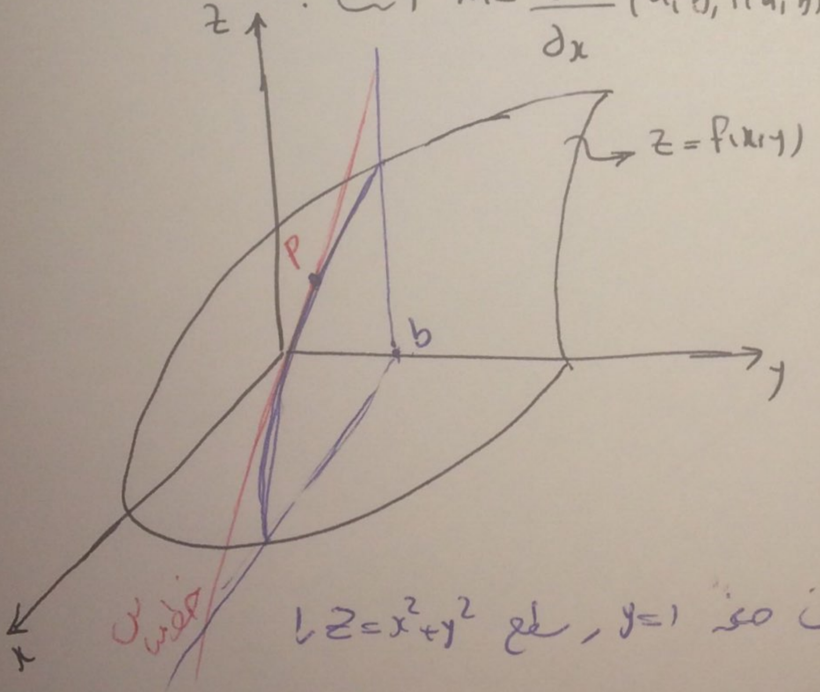
$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

---

• از برخورد صفحه $y=b$ با سطح $z=f(x,y)$ یک منحنی بوجود می‌آید که از نقطه $P(a,b,f(a,b))$ می‌گذرد. معادله خط مماس بر این منحنی در نقطه P برابر است با

$$z - f(a,b) = m(x-a), \quad y = b$$

که در آن $m = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,f(a,b))$ است.




Ex) معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک صفحه $y=1$، سطح $z=x^2+y^2$ را در نقطه $P(2,1,5)$ بنویسید.

$$z - 5 = m(x-2), \quad y = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad m = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,5) = 4$$

معادله خط مماس: $z - 5 = 4(x-2), \; y = 1$

بدین ترتیب از برخورد صفحه $x=a$ ، سطح $z=f(x,y)$ یک منحنی پدید می‌آید که از نقطه $(a,b,f(a,b))$ می‌گذرد، معادله خط مماس بر این منحنی در نقطه تماس P عبارتست از:

$$z - f(a,b) = m(y-b), \quad x=a$$

که در آن

$$m = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,f(a,b)).$$

مثال) معادله خط مماس بر سطح $z=x^3-4y^3$ را در نقطه $(1,-1,5)$ به گونه‌ای بیابید که در صفحه $x=1$ قرار داشته باشد.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -12y^2, \quad m = \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1,5) = -12(1)^2 = -12.$$

معادله خط مماس:

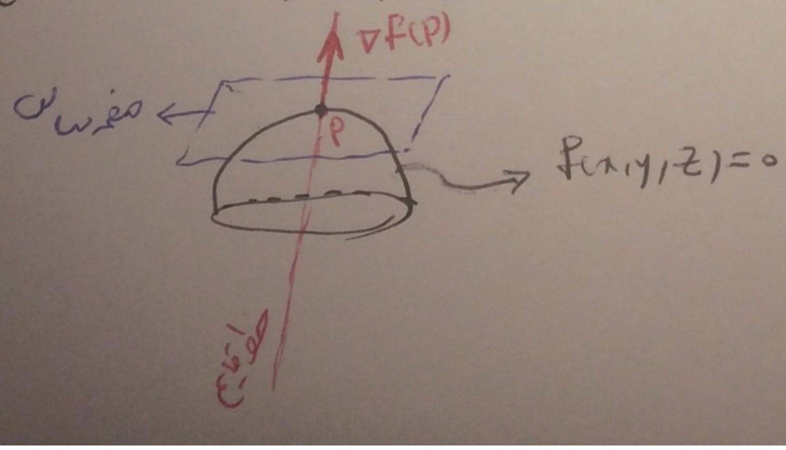
$$z-5 = -12(y+1), \quad x=1$$

بردار گرادیان

تابع $f(x,y,z)=f$ را در نظر بگیرید. گرادیان $f$ را با بردار $\vec{\nabla} f$ یا grad f نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\nabla} f = f_x i + f_y j + f_z k = (f_x, f_y, f_z).$$

از نظر هندسی بردار $\vec{\nabla} f$ ، بردار هادی خط عمود، یا بردار نرمال صفحه مماس بر سطح $f(x,y,z)=c$ است.



P: 66

پس می‌توان گفت معادله خط قائم بر این سطح در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ عبارتست از

$$\frac{x-x_0}{f_x(P)} = \frac{y-y_0}{f_y(P)} = \frac{z-z_0}{f_z(P)}.$$

و معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ عبارتست از

$$f_x(P)\,(x-x_0) + f_y(P)\,(y-y_0) + f_z(P)\,(z-z_0) = 0$$

Ex: معادله خط قائم، صفحه مماس بر سطح $z = x^2y - 3xy^2$ در نقطه $\overset{P}{(2,1,-2)}$ را بیابید.

حل: $f(x,y,z) := z - x^2y + 3xy^2 = 0$

$$\nabla f = \left(-2xy + 3y^2,\ -x^2 + 6xy,\ 1\right)$$

$$\nabla f(P) = (-4+3,\ -4+12,\ 1) = (-1, 8, 1)$$

خط قائم: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z+2}{1}$

صفحه مماس: $-(x-2) + 8(y-1) + 1(z+2) = 0 \Rightarrow -x + 8y + z - 4 = 0$

$$\overset{\text{یا}}{\Rightarrow} x - 8y - z = -4$$

دیفرانسیل یک تابع چند متغیره

$w = f(x,y,z)$

$dw = w_x\,dx + w_y\,dy + w_z\,dz$

$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$. یا

یادآوری دیفرانسیل

$y = f(x)$

$dy = y'\,dx$

$df = f'(x)\,dx$ یا

Scanned with CamScanner

P: 67

Ex
$$\begin{cases} u = x^2 + x^2y^3 + \sin(xy^2) \\ du = ? \end{cases}$$

یادآوری
$(\sin u)' = u' \cos u$

حل: $u = u(x,y) \Longrightarrow du = u_x\, dx + u_y\, dy$

$\Longrightarrow du = \left(2x + 2xy^3 + y^2\cos(xy^2)\right) dx + \left(3x^2y^2 + 2xy\cos(xy^2)\right) dy.$

Ex
$$\begin{cases} w = \ln(x + 2y + 3z) \\ dw = ? \end{cases}$$

یادآوری
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$

حل: $w = w(x,y,z) \Longrightarrow dw = w_x\, dx + w_y\, dy + w_z\, dz$

$$dw = \frac{1}{x+2y+3z}\, dx + \frac{2}{x+2y+3z}\, dy + \frac{3}{x+2y+3z}\, dz.$$

مشتق ضمنی

فرض کنیم $f(x,y,z) = 0$ در این صورت

$$z_x = \frac{-f_x}{f_z} \quad , \quad z_y = \frac{-f_y}{f_z}.$$

$$x_y = \frac{-f_y}{f_x} \quad , \quad x_z = \frac{-f_z}{f_x}.$$

$$y_z = \frac{-f_z}{f_y} \quad ; \quad y_x = \frac{-f_x}{f_y}.$$

Ex $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1 \Longrightarrow z_x = ?$

حل: فرض کنید $f(x,y,z) := \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - 1 = 0$ پس:

$$z_x = \frac{-f_x}{f_z} = -\frac{2\sin x\cos x}{2\sin z\cos z}.$$

(تمرین) $z_y = ?$

# مشتقات جزئی مراتب بالاتر

برای تابعی مانند $w=f(x,y,z)$، منظور از $f_{xy}$ یا $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ یعنی از $f_x$ یکبار دیگر نسبت به $y$ مشتق بگیرید. مثلاً منظور از $f_{zx}$ یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ یعنی از $f_z$ یکبار دیگر نسبت به $x$ مشتق بگیرید.

قضیه: اگر تابع پیوسته $w=f(x,y,z)$ دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد، آن گاه مشتقات مخلوط $f$ برابرند، یعنی $f_{xy}=f_{yx}$ ، $f_{xz}=f_{zx}$ و $f_{yz}=f_{zy}$.

---

EX $f(x,y)=xy^2$

$f_x = y^2 \;\langle\; f_{xx}=0,\; f_{xy}=2y$

$f_y = 2xy \;\langle\; f_{yy}=2x,\; f_{yx}=2y$

$f_{xy}=f_{yx}$.

---

EX $f(x,y,z)=e^{3xy}\cos z$

$f_x = 3y e^{3xy}\cos z$

- $f_{xx} = 3y\cos z\,(3y e^{3xy})$
- $f_{xy} = 3e^{3xy}\cos z + 3y(3x e^{3xy})\cos z = f_{yx}$
- $f_{xz} = -3y e^{3xy}\sin z = f_{zx}$

$f_y = 3x e^{3xy}\cos z$

- $f_{yx}$ ✓
- $f_{yy} = 3x\cos z\,(3x e^{3xy})$
- $f_{yz} = -3x e^{3xy}\sin z = f_{zy}$.

$f_z = -e^{3xy}\sin z$

- $f_{zz} = -e^{3xy}\cos z$
- $f_{zx}$ ✓
- $f_{zy}$ ✓

سوال: منظور از $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ یا $f_{xxy}$ چیست؟

تست: اگر داشته باشیم $f(x,y)=2x^2 \ln y-(\sin x)e^y$ مقدار $f_{xxy}$ کدام است؟

۱- $4y+e^y\cos x$ ‏ ۲- $4xy+e^y\sin x$ ‏ ۳) $4y^2+e^y\cos x$ ‏ ۴) $\frac{4}{y}+e^y\sin x$

حل:

$$f_x = 4x\ln y-(\cos x)e^y$$

$$f_{xx} = 4\ln y+(\sin x)e^y$$

$$f_{xxy} = \frac{4}{y}+(\sin x)e^y$$

گزینه ۴

## قاعده زنجیره‌ای

یادآوری: فرض کنید $f=f(u(x))$ ، $u=u(x)$ توابع مشتق‌پذیری باشند
در این صورت

$$\left(f(u(x))\right)' = u'(x)\, f'(u(x))$$

مثلا

$$\left(\sin x^2\right)' = \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x^2}_{f'(u)}$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ f(u) = \sin u \end{cases}$$

## قاعده زنجیره‌ای برای توابع چند متغیره

فرض کنید $U = U(x,y,z)$ , $V = V(x,y,z)$ , $W = W(x,y,z)$ باشد و

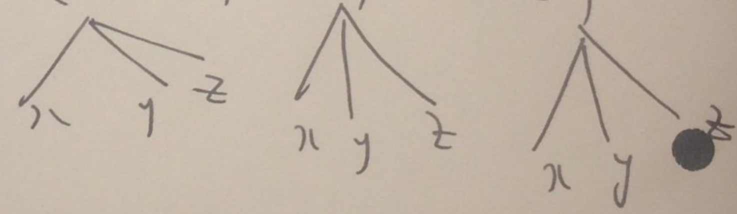
$f = f(u,v,w)$ توابع مشتق پذیری باشند، در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$f = f(u, v, w)$$




---

**Ex**

$f = f(u,v)$

$$\begin{cases} f = f(u,v) = u^2 + v^2 \\ u = \cos(x+y) \\ v = \sin(x-y) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

حل: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2u(-\sin(x+y)) + 2v(\cos(x-y))$

$= -2\cos(x+y)\sin(x+y) + 2\sin(x-y)\cos(x-y)$

$= -\sin(2(x+y)) + \sin(2(x-y))$

یادآوری: $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

P: 71

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 2u\left(-\sin(x+y)\right) + 2v\left(-\cos(x-y)\right)$$

$$= -2\cos(x+y)\sin(x+y) - 2\sin(x-y)\cos(x-y)$$

$$= -\sin(2(x+y)) - \sin(2(x-y))$$

دقت کنید هرگاه اسم توابع و متغیرها تغییر کردند، قاعده زنجیره‌ای را درست بکار ببرید!!

Ex: $Z = e^{xy}$

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 - w \\ y = uvw \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial w} = ?$$

حل: $Z = Z(x, y)$

$x$: $u\ v\ w$ $\quad$ $y$: $u\ v\ w$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \cancel{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{تمرین شما}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = ye^{xy}(-1) + xe^{xy}(uv)$$

$$= e^{xy}(-y + xuv) = e^{xy}\left(-uvw + (u^2+v^2-w)uv\right)$$

ادامه صفحه بعد. $\rightarrow$

P:72

$$\frac{\partial z}{\partial w} = e^{xy}\left(-uvw + u^3 v + uv^3 - uvw\right)$$

$$= e^{u^3vw + uv^3w - uvw^2}\left(-2uvw + u^3 v + uv^3\right)$$

EX

$$\begin{cases} f = u^2 + v^3 t^4 \\ u = x^2 y z^3 \\ v = x - y + z \\ t = x e^{yz} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

$$f = f(u, v, t)$$

$x\ y\ z \quad x\ y\ z \quad x\ y\ z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= 2u(2xyz^3) + 3v^2t^4(1) + 4v^3t^3(e^{yz})$$

$$= 4x^2yz^3\,xyz^3 + v^2t^3(3t + 4v\,e^{yz})$$

$$= 4x^3y^2z^6 + (x-y+z)^2 x^3 e^{3yz}\left(3xe^{yz} + 4(x-y+z)e^{yz}\right)$$

$$= 4x^3y^2z^6 + (x-y+z)^2 x^3 e^{4yz}\left(3x + 4(x-y+z)\right)$$

$$= 4x^3y^2z^6 + (x-y+z)^2 x^3 e^{4yz}(7x - 4y + 4z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \cdots$$ تمرين

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = \cdots$$ تمرين

P: 73

تست: فرض کنید $\vec{r} = xi + yj + zk$ ، $u = \|\vec{r}\|$ و $f$ تابعی مشتق‌پذیر از $u$ باشد (یعنی $f = f(u)$)، در این صورت $\overrightarrow{\nabla f(u)}$ برابر است با:

1- $\dfrac{f'(u)}{u^2}\vec{r}$  2- $-\dfrac{f'(u)}{u}\vec{r}$  3- $\dfrac{f'(u)}{u^3}\vec{r}$

4- $\dfrac{f'(u)}{u}\vec{r}$ ✓

حل:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) \stackrel{\text{ی}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad f = f(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'(u)}{u}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'(u)}{u}y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = f'(u)\frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'(u)}{u}z$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{f'(u)}{u}xi + \frac{f'(u)}{u}yj + \frac{f'(u)}{u}zk$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{f'(u)}{u}(xi + yj + zk)$$

$$\Rightarrow \nabla f = \frac{f'(u)}{u}\vec{r}$$

Scanned with CamScanner

## مشتق سویی (یا جهتی)

مشتق جهتی تابع چند متغیره $f = f(x,y,z)$ در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ در جهت بردار یکه $u = ai+bj+ck$ را با $D_u f(x_0,y_0,z_0) = D_u f(P)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$D_u f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$$

- دقت کنید در تعریف بالا، $f$ می‌تواند دو متغیره باشد، $\vec{u}$ باید حتماً بردار یکه باشد.

Ex) مشتق تابع $f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2$ در نقطه $(1,-2)$ و در جهت بردار $4i+3j$ کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{43}}{5}$ 2) $\frac{43}{5}$ 3) $\frac{43}{\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\frac{43}{5}}$

- حل: بردار $4i+3j$ یکه نیست زیرا $\|4i+3j\| = \sqrt{16+9} = 5$ پس ابتدا بردار داده شده را یکه می‌کنیم یعنی

$$\vec{u} = \frac{4i+3j}{5} = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$$

حال $\nabla f(1,-2)$ را حساب می‌کنیم.

$$\nabla f = f_x i + f_y j = (6x+y)i + (x-4y)j \Rightarrow \nabla f(1,-2) = 4i + 9j$$

در آخر می‌دانیم

$$D_u f(1,-2) = \nabla f(1,-2) \cdot u = \frac{16}{5} + \frac{27}{5} = \frac{43}{5}$$ ✓ گزینه 2

p: 75

(تست) مشتق سوئی تابع

۱- $f(x,y,z)=e^{2y-1}+3y\sqrt{5+x^2}-\frac{x^2}{1+z}$ در نقطه $A(2,\frac{1}{2},0)$ بطرف نقطه $B(0,-\frac{1}{2},2)$ کدام است؟

2 (4     1   -3     -1   -2     -2   -1

حل: جهت مورد نظر بردار $\overrightarrow{AB}$ است، پس

$$\overrightarrow{AB}=(0-2,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},2-0)=(-2,-1,2)$$

که البته باید نسبت، پس قرار دهیم

$$u=\frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}=\frac{(-2,-1,2)}{\sqrt{4+1+4}}=\left(\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

داریم:

$$\nabla f=\left(\frac{+\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5+x^2}}3y-\frac{2x}{1+z}\right)i+\left(2e^{2y-1}+3\sqrt{5+x^2}\right)j+\frac{x^2}{(1+z)^2}k$$

$$\nabla f(2,\frac{1}{2},0)=-3i+11j+4k=(-3,11,4)$$

در آخر

$$D_u f(2,1/2,0)=\overrightarrow{\nabla}f(2,\frac{1}{2},0)\cdot\overrightarrow{U}=+2-\frac{11}{3}+\frac{8}{3}=1$$

گزینه 3/

Scanned with CamScanner

P:76

* الف - بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع f در نقطه P برابر $\|\nabla f(p)\|$ است و در جهت $u=\frac{\overrightarrow{\nabla f(p)}}{\|\nabla f(p)\|}$ رخ می دهد.

* ب - کمترین مقدار مشتق جهتی تابع f در نقطه P برابر $-\|\nabla f(p)\|$ است و در جهت $u=-\frac{\overrightarrow{\nabla f(p)}}{\|\nabla f(p)\|}$ رخ می دهد.

● تست) بیشترین مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=xyz$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

1- $\sqrt{3}$ 2- $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3- $\sqrt{2}$ 4- $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

تست الف

حل: با توجه به نکته قبل بیشترین مشتق جهتی f در $(1,1,1)$ برابر است با $\|\nabla f(1,1,1)\|$، پس

$$\nabla f = yz\,i + xz\,j + xy\,k$$

● $$\nabla f(1,1,1) = i + j + k \Longrightarrow \|\nabla f(1,1,1)\| = \sqrt{3}.$$

گزینه 1

تست) جهت کمترین میزان کاهش تابع $f(x,y,z)=x\sin z-y\cos z$ در مبدا کدام است؟

1- در جهت $\vec{i}+\vec{j}$ 2- در جهت $\vec{k}$ 3- در جهت $\vec{j}$ 4- در جهت $j$

حل: با توجه نکته (ب) کمترین مقدار مشتق در جهت قرینه بردار $\nabla f(p)$ رخ می دهد.

پس

$$\nabla f = \sin z\, i - \cos z\, j + (x\cos z + y\sin z)k$$

$$\nabla f(0,0,0) = 0i - j + 0k = -j \Longrightarrow u = -\frac{\nabla f(\bar{0})}{\|\nabla f(0)\|} = -\frac{-j}{1} = j$$