

نیکلای یوری سوویچ واسیلیف

آندره آلکساندر وویچ یه گوروف

مسأله‌های المپیادهای ریاضی

در شوروی

ترجمه پرویز شهریاری



نشر توسعه



انتشارات توسعه : خیابان دانشگاه - کوچهٔ میترا - شماره ۷ تلفن : ۶۴۶۹۹۶۵

مسأله‌های الپیادهای ریاضی در شوروی

نیکلای یوری سوویچ و اسیلی یف - آندره الکساندروویچ یه‌گوروف

ترجمه پرویز شهریاری

چاپ سوم : ۱۳۷۵ - ۲۲۰۰ نسخه

چاپ و صحافی : چاپخانه رامین

همهٔ حقوق محفوظ است.

شابک : ۹۶۲-۵۵۰۹-۲۳-۲

پیش‌گفتار

بسیار پیش آمده است که علاقه‌مندی به ریاضیات، ضمن برخورد با مسأله‌های جالب آغاز شده است. از این گونه مسأله‌ها، در کتاب‌های درسی، نشریه‌های ریاضی، کتاب‌های جنب درسی و کتاب‌های مربوط به معماها و سرگرمی‌های ریاضی هم وجود دارد. ولی، المپیادهای ریاضی (از المپیادهای مدرسه‌ای و ناحیه‌ای گرفته تا المپیادهای جهانی)، سرچشمه‌ای غنی از مسأله‌های پرکشش و جالب بوده است.

در این کتاب، مجموعه‌ی کامل مسأله‌های دور نهائی المپیادهای ریاضی سراسری روسیه و اتحاد شوروی سابق، از آغاز سال‌های ۶۰ آمده است. مسأله‌ها را از آغاز تا پایان با شماره‌ی ردیف آورده‌ایم. ولی در آغاز هر المپیاد، مسأله‌های مربوط به کلاس‌های مختلف را (کلاس‌های هشتم، نهم و دهم) مشخص کرده‌ایم.*

مسأله‌های المپیادهای ۱۹۶۱ تا ۱۹۷۹ را به‌طور کامل حل کرده‌ایم و برای مسأله‌های المپیادهای سال‌های بعد راهنمایی‌های کوتاهی داده‌ایم.

(* در اتحاد شوروی سابق (و روسیه کنونی) دوره‌ی دبیرستان در سال دهم تحصیل تمام می‌شود و، بنابراین، کلاس‌های هشتم، نهم و دهم، به‌معنای سه سال آخر دبیرستان است.

مسأله‌های نخستین المپیادهای سال‌های ۶۰ (که المپیادهای سراسری روسیه نامیده می‌شدند)، به‌طور نسبی ساده‌اند، با وجود این، در بین آن‌ها هم، به مسأله‌هایی برمی‌خوریم که جنبهٔ معمائی دارند و پیدا کردن کلید حل آن‌ها، چندان ساده نیست. دشوارترین مسأله‌ها را، با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم.

مسأله‌ها، از نظر مضمون ریاضی خود، بسیار متنوع‌اند. تقریباً در بین مسأله‌های هر المپیاد، با مسأله‌هایی که از لحاظ تنظیم خود، عادی و سنتی هستند روبرو می‌شویم: مسأله‌های مربوط به دایره‌ها، مثلث‌ها، سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم، معادله‌ها و نامعادله‌ها. البته، این‌ها تمرین‌های ساده‌ای نیستند که تنها برای آزمایش میزان آگاهی‌ها و کاربرد روش‌های عادی دبیرستانی طرح شده باشند، بلکه اغلب برای حل آن‌ها، باید قضیه یا قضیه‌هایی را ثابت کرد؛ همچنین، مسأله‌های مربوط به مکان‌های هندسی (جست و جوی مجموعه‌ها) و می‌نیم‌ها یا ماکزیم‌ها، نیاز به بررسی جدی دارند.

با این‌همه، اهمیت بیشتر را باید به مسأله‌هایی داد که از صورت‌های عادی و سنتی دورند. در این مورد‌ها، برای پیدا کردن جواب و یا اثبات، تنها آگاهی‌های دبیرستانی کفایت نمی‌کند، بلکه در کنار آن‌ها، به اندیشه‌ای سالم و خلاق، به نیروی منطق و استدلال، نیاز است و باید بتوان شرط‌های نامتعارف را به زبان ریاضی مناسبی ترجمه کرد. راه حل این گونه مسأله‌ها، همیشه زنجیره‌ای از چند گام طبیعی را تشکیل نمی‌دهد. اغلب پیش می‌آید که، با وجود تجزیه و تحلیل دقیق شرط‌های مسأله، نمی‌توان به اندیشه‌ای رسید که، به‌طور مستقیم، ما را به سمت راه حل هدایت کند، اگرچه راه حل حاضر و آماده آن، از چند سطر تجاوز نمی‌کند (و این، یکی از نشانه‌هایی است که آن‌ها را، از مسأله‌های عادی متمایز می‌کند). اغلب، مسیر راه حل، به‌صورتی نامنتظر، شهودی، همچون چراغی که ناگهان روشن شود، ظاهر می‌شود. این، همان لحظهٔ «کشف» و بروز «خلاقیت ریاضی» است که، برای دانش‌آموز، شادی فراوان به‌همراه دارد.

البته، با اندیشه‌ای که در آغاز نامنتظر است، ممکن است بعد از آن،

بارها و بارها رو به روشویم (مثلاً، باز یافت زیبایی که در مسأله ۷ بدست می آید - چگونه مجموع عددهای جدول تغییر می کند - به صورت دیگری در مسأله های ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱ و غیره مورد استفاده قرار می گیرد). و به تدریج، همین اندیشه ها و استدلال های ظریف - که در آغاز دست نیافتنی بودند - به صورت استدلال هایی عادی در می آیند و به عنوان یک روش، کار حل مسأله ها را ساده می کنند.

تسلط بر روش های مشخص استدلال، نه تنها برای المپیادها، بلکه برای هر گونه پیشرفت جدی در ریاضیات، اهمیت دارد و، به همین مناسبت، در پایان کتاب، «راهنمای روش ها» را آورده ایم. در این بخش، به صورتی گذرا، از مفهومی ها، قضیه ها و روش هایی صحبت شده است که، به طور سنتی، برای هر شرکت کننده در المپیادها، دانسته فرض می شود. مثلاً در بند ۱ از روش استقرار ریاضی، در بند ۲ از بخش پذیری عددهای درست، در بند ۵ از چند جمله ای ها، در بند ۸ از نابرابری بین واسطه حسابی و واسطه هندسی گفت و گو شده است. هر جا، در متن کتاب، به واژه های «بند ۱»، «بند ۲»، ... برخورد می کنید، به معنای آن است که به این بند از «راهنمای روش ها» تکیه شده است. روشن است که این «راهنما»، تنها می تواند در حل برخی از مسأله ها، آن هم اغلب به طور غیر مستقیم، کمک کند؛ در بسیاری از مسأله ها، مجموعه ای از این «راهنماها» به کار می آیند و، در واقع، برای حل هر مسأله، وجود «راهنمای» جداگانه ای ضرورت دارد.

هدف برگزاری هر المپیاد، این است که مسأله ها و پرسش هایی را در برابر دانش آموزان قرار دهند، که هم از نظر مضمون و هم از نظر روش های حل، تازگی داشته باشند. ریاضی دانانی که این مسأله ها را طرح می کنند، اغلب بر کتاب های کمتر شناخته شده و یا مقاله های علمی تازه تکیه می کنند. (بسیاری از پیش قضیه های علمی، بر اندیشه ای مقدماتی تکیه دارند و از همین گونه اندیشه های مقدماتی است که مسأله های المپیادها زاده می شوند. مثلاً، مسأله های ۱۸۱، ۲۱۹، ۲۴۸، ۲۶۷ و ...، به همین ترتیب پدید آمده اند؛ و مسأله ۱۴۸، که برای المپیادها در نظر گرفته شده است،

و به شعاع r_1, r_2, r_3, r_4 رسم کرده ایم؛ در ضمن $r_1 + r_2 = r_3 + r_4 < d$ (طول قطر مستطیل است؛ شکل ۲). مماس‌های مشترک بیرونی را برای دودایره ۱ و ۳ و برای دودایره ۲ و ۴ رسم کرده ایم. ثابت کنید، در چهار-ضلعی که از برخورد این مماس‌ها به دست می‌آید، می‌توان دایره‌ای محاط کرد. \checkmark ۳. ثابت کنید، بین هر ۳۹ عدد طبیعی متوالی، می‌توان عددی را پیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن، بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۴. جدولی 4×4 خانه‌ای داده شده است. ثابت کنید، می‌توان هفت ستاره در خانه‌های جدول طوری قرار داد که، اگر دو سطر دلخواه و دو ستون دلخواه از جدول را حذف کنیم، در خانه‌های باقی‌مانده جدول، همیشه دست کم یک ستاره وجود داشته باشد. ثابت کنید، اگر تعداد ستاره‌ها از هفت کمتر باشد، همیشه می‌توان دو سطر و دو ستون جدول را طوری حذف کرد که همه خانه‌های باقی‌مانده، خالی باشند.

۵. a چهار عدد مثبت (a, b, c, d) مفروض است. از آن‌ها، چهار عدد جدید (ab, bc, cd, da) را طبق قاعده زیر می‌سازیم: هر عدد، در عدد بعدی خود، و عدد چهارم در عدد اول ضرب می‌شود. از گروه چهار عددی جدید، بنا بر همین قاعده، گروه چهار عددی سوم می‌سازیم و غیره. ثابت کنید، در دنباله این گروه‌های چهار عددی، هرگز دوباره به (a, b, c, d) نمی‌رسیم، مگر وقتی که داشته باشیم: $a = b = c = d = 1$.

b انتخاب دلخواهی از اعدادهای ۱ و -1 را، به طول 2^k ، در نظر می‌گیریم. از این گروه عددها، گروه تازه‌ای با قاعده زیر می‌سازیم: هر عدد را در عدد بعدی خود، و آخرین عدد، یعنی عدد 2^k ام را در عدد اول ضرب می‌کنیم. از این گروه جدید و طبق همان قاعده، گروه سوم از اعدادهای ۱ و -1 را به دست می‌آوریم و غیره. ثابت کنید، سر آخر به گروهی از عددها می‌رسیم که تنها شامل واحدها هستند.

۶. a نقطه‌های A و B به طور یکنواخت و با سرعت زاویه‌ای برابر، به ترتیب، روی محیط دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) حرکت می‌کنند. ثابت کنید، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC هم، به‌طور یکنواخت، روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند.

(1) فاصله نقطه ثابت P واقع در صفحه مثلث ABC تا رأس A و B از این مثلث برابر است با $AP = 2$ و $BP = 3$. حداکثر مقدار فاصله CP چقدر است؟

۷. در خانه‌های جدول $m \times n$ ، عددهایی نوشتند ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت‌های همه عددهای یک ستون یا همه عددهای یک سطر را عوض کنیم. ثابت کنید، با چندبار تکرار این عمل، می‌توان جدول را به‌صورتی در آورد که، در آن، مجموع عددهای واقع در هر ستون و مجموع عددهای واقع در هر سطر، غیرمنفی باشد.

۸. n نقطه را، به کمک پاره خط‌های راست غیرمتقاطع، طوری بهم وصل کرده‌ایم که، از هر نقطه بتوان، از طریق این پاره‌خط‌ها، به بقیه نقطه‌ها عبور کرد؛ در ضمن دو نقطه‌ای پیدا نشود که با دومی به هم وصل شده باشند. ثابت کنید، تعداد کل پاره خط‌های راست، برابر است با $n - 1$.

۹. a ، b و p ، سه عدد درست دلخواهند. ثابت کنید، می‌توان دو عدد k و l پیدا کرد که نسبت به هم اول باشند و $ak + bl$ بر p بخش پذیر باشد. ۱۰. کولیا و په‌تیا $2n + 1$ گردو را بین خود تقسیم می‌کنند ($n \geq 2$)؛ در ضمن، هر کسی می‌خواهد بیشترین مقدار ممکن گردو را به دست آورد. فرض می‌کنیم، سه روش تقسیم (و هر روش در سه مرحله) وجود داشته باشد. مرحله اول. په‌تیا همه گردوها را به دو بخش تقسیم می‌کند، به نحوی که، در هر بخش، دست کم دو گردو باشد.

مرحله دوم. کولیا هر بخش را دوباره به دو بخش تازه تقسیم می‌کند، به نحوی که در هر بخش، دست کم یک گردو باشد.

(مرحله‌های اول و دوم، برای هر سه روش مشترک‌اند.)

مرحله سوم. در روش اول، کولیا بزرگترین و کوچکترین بخش را برمی‌دارد؛ در روش دوم، کولیا دو بخش وسط را برمی‌دارد؛ در روش سوم، کولیا یا دو بخش بزرگتر و کوچکتر و یا دو بخش متوسط را برمی‌دارد، ولی بنا بر قرار قبلی، از آن‌چه انتخاب کرده‌است، یک گردو به په‌تیا برمی‌گرداند.

کدام روش تقسیم، برای کولیا مناسب تر و کدام روش نامناسب تر است؟
 ۱۱. ثابت کنید، برای هر سه دنباله نامتناهی عددهای طبیعی

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

می توان شماره های p و q را طوری پیدا کرد که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$a_p \geq a_q, b_p \geq b_q, c_p \geq c_q$$

۱۲. در مستطیلی با ضلع های ۲۵ و ۲۵، به تعداد ۱۲۰ مربع به ضلع واحد انداخته ایم. ثابت کنید، می توان در مستطیل دایره ای به قطر واحد قرارداد، به نحوی که حتی یکی از مربع ها را قطع نکند.

المپیاد دوم سراسری روسیه

سال ۱۹۶۲ (مسکو)

کلاس

۸: ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷

۹: ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۱۷

۱۰: ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶

۱۳. روی امتداد ضلع های AB ، BC ، CD و DA از چهار ضلعی

محدب $ABCD$ ، نقطه های A' ، B' ، C' و D' را طوری انتخاب کرده ایم،

که داشته باشیم: $\vec{AA'} = \vec{DA}$ و $\vec{DD'} = \vec{CD}$ ، $\vec{CC'} = \vec{BC}$ ، $\vec{BB'} = \vec{AB}$.

ثابت کنید، مساحت چهار ضلعی $A'B'C'D'$ ، پنج برابر مساحت چهار ضلعی $ABCD$ است.

۱۴. دایره S و خط راست l در یک صفحه داده شده است و می دانیم،

خط راست l ، از نقطه O مرکز دایره S گذشته است. دایره S' را رسم

می کنیم که از نقطه O بگذرد و مرکز آن، روی خط راست l باشد. نقطه

تماس مشترک دو دایره S و S' را با دایره S' ، M می نامیم. مطلوب

است مکان هندسی نقطه M .

۱۵. ✓ عددهای درست و مثبت $a_0, a_1, \dots, a_{99}, a_{100}$ داده شده اند. می دانیم $a_1 > a_0, a_2 = 2a_1 - 2a_0, a_3 = 2a_2 - 2a_1, \dots, a_{99} = 2a_{98} - 2a_{97}, a_{100} = 2a_{99} - 2a_{98}$. ثابت کنید، $a_{100} > 2^{99}$.

۱۶. ثابت کنید، عددهای درست a, b, c, d وجود ندارند، به نحوی که به ازای آنها، عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ به ازای $x = 19$ برابر واحد و به ازای $x = 62$ برابر ۲ شود.

۱۷. در هر يك از خانه های جدول مربعی $n \times n$ ، که در آن n عددی فرد است، یکی از عددهای ۱ یا -1 را بدلیخواه نوشته ایم. زیر هر ستون، حاصل ضرب همه عددهای این ستون، و در سمت راست هر سطر، حاصل ضرب همه عددهای این سطر نوشته شده است. ثابت کنید، مجموع همه این حاصل ضرب، نمی تواند برابر صفر باشد*.

۱۸. دو ضلع از مثلثی داده شده اند و می دانیم میاندهای وارد بر این دو ضلع در مثلث، برهم عمودند. مثلث را رسم کنید.

۱۹. a, b, c, d عددهایی مثبت اند که حاصل ضرب آنها، برابر واحد است. ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

۲۰. پنج ضلعی منتظمی داده شده است. M ، نقطه دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج ضلعی است. فاصله های نقطه M را از ضلع های پنج ضلعی (و یا امتداد آنها)، به ترتیب مقدارهای صعودی آنها شماره گذاری می کنیم:

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5$$

همه موضع های نقطه M را پیدا کنید که، به ازای آنها، r_3 کمترین مقدار ممکن را قبول کند؛ همچنین، همه موضع های M را پیدا کنید که، برای آنها، r_3 بیشترین مقدار ممکن باشد.

(* این مساله در کلاس هشتم، برای $n = 25$ داده شده است.

۲۱. عددی با ۱۹۶۲ رقم در نظر گرفتد ایم که بر ۹ بخش پذیر است. مجموع همه رقم‌های این عدد را با a ، مجموع رقم‌های عدد a را با b و مجموع رقم‌های عدد b را با c نشان می‌دهیم. عدد c را پیدا کنید.

۲۲. از نقطه M وسط قاعده AC در مثل متساوی الساقین ABC ، عمود MH را بر ضلع BC فرود آورده‌ایم. P را وسط پاره خط راست MH می‌گیریم. ثابت کنید $AH \perp BP$.

۲۳. حداکثر مساحت مثلثی را پیدا کنید که برای ضلع‌های آن، a و b و c داشته باشیم:

$$0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$$

۲۴. x و y و z ، سه عدد درست دلخواه و دو به دو متمایز از یکدیگرند. ثابت کنید:

$$\Delta(y-z)(z-x)(x-y) \text{ بر } (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$$

بخش پذیر است.

۲۵. درباره عددهای a_0, a_1, \dots, a_n می‌دانیم

$$a_0 = a_n = 0 \text{ و } a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0$$

(برای $k = 1, 2, \dots, n-1$). ثابت کنید همه a_k ها، غیر مثبت اند.

۲۶. عددهای مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ مفروض اند و می‌دانیم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

ثابت کنید، در جدول شامل m سطر و n ستون، می‌توان ~~حداکثر~~ $m+n-1$ عدد مثبت طوری قرار داد که، در آن، مجموع عددهای سطر i م برابر a_i و مجموع عددهای ستون k م برابر b_k باشد.

المپیاد سوم سراسری روسیه

سال ۱۹۶۳ (مسکو).

کلاس

۳۱a	۳۰	۲۹a	۲۸	۲۷	:۸
۲۸	۲۱b	۲۴	۲۳	۲۲	:۹
۲۸	۲۹b	۲۷	۲۶	۲۵	:۱۰
۲۹b	۴۰	۳۹	۲۸	۲۸	:۱۱

۲۷/۰. از پنج دایره مفروض، هر چهار دایره، از يك نقطه می گذرند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می گذرند.

۲۸/۰. ۸ نفر در يك مسابقه شطرنج شرکت کردند و همه آنها، امتیازهایی مختلف به دست آوردند. شطرنج بازی که مقام دوم را کسب کرده است، به اندازه مجموع امتیازهای چهار مقام آخر، امتیاز آورده است. دو نفری که در مقام‌های سوم و هفتم قرار دارند، چگونه بازی را تمام کرده‌اند، نفر سوم برده است یا نفر هفتم؟

۲۹/۰. (a) هر قطر چهارضلعی محدب $ABCD$ ، مساحت آن را نصف می کند. ثابت کنید، $ABCD$ يك متوازی الاضلاع است.

(b) در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ می دانیم، هر يك از قطرهای AD ، BE و CF ، مساحت آن را نصف می کند. ثابت کنید، این قطرهای، در يك نقطه به هم می رسند.

۳۰/۰. عددهای طبیعی a و b نسبت به هم اول اند. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $a+b$ و a^2+b^2 ، برابر است با ۱ یا ۲.

۳۱. دو نقطه A و B روی محیط دایره ثابت اند و نقطه M تمامی محیط دایره را می پیماید. از نقطه K وسط پاره خط راست MB ، عمود KP را بر خط راست MA رسم کرده ایم.

(a) ثابت کنید، همه خط‌های راست KP از يك نقطه می گذرند.

(b) مجموعه نقطه‌های P (مکان هندسی نقطه P) را پیدا کنید.

۳۲. مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل

مقدار d را پیدا کنید که، بد ازای آن، پاره خط راست به طول d ، در حالی که دو انتهای آن، روی ضلع‌های مثلث است، بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

۳۳. صفحه شطرنجی 6×6 را، با ۱۸ مهره به اندازه 2×1 دومینو پوشانده‌ایم (هر مهره، دو خانه را اشغال کرده است). ثابت کنید، مهره‌ها را به هر ترتیبی چیده باشیم، می‌توان صفحه شطرنجی را، با یک خط راست افقی یا یک خط راست قائم به دو بخش تقسیم کرد، به نحوی که به هیچ کدام از مهره‌ها لطمه‌ای وارد نیاید.

۳۴. عدد مثبت و مختلف a_1, a_2, \dots, a_n داده شده است. از این عددها، همهٔ مجموع‌های ممکن را، با هر تعداد جمله، ساخته‌ایم (تعداد جمله‌های هر مجموع، از ۱ تا n است). ثابت کنید، در بین این مجموع‌ها، دست کم $\frac{1}{2}n(n+1)$ عدد پیدا می‌شود که دو به دو با هم فرق دارند.

۳۵. در مثلث ABC ، دو نیمساز را رسم کرده‌ایم که از رأس‌های A و B گذشته‌اند؛ سپس از رأس C ، خط‌های راستی موازی با این دو نیمساز کشیده‌ایم. محل برخورد این خط‌های راست با نیمسازها را، به ترتیب، D و E می‌نامیم. معلوم شد دو خط راست AB و DE با هم موازی‌اند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳۶. تصاعد حسابی نامتناهی، با جمله‌های مثبت مفروض است. ثابت کنید، اگر یکی از جمله‌های تصاعد مجذور کامل باشد، آن وقت، در تصاعد، بی‌نهایت جملهٔ مجذور کامل پیدا می‌شود.

۳۷. ضلعی منتظم مفروض است. آیا می‌توان رأس‌های آن را، با عددهای از ۰ تا ۹ طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر دو عدد مختلف، ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهای آن با این عددها شماره‌گذاری شده باشد؟

۳۸. عددهای حقیقی a, b, p, q را طوری پیدا کنید که برابری

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$$

این هر مقدار x برقرار باشد.

۳۹. در دو انتهای قطری از دایره، عددهای ۱ را قرار داده‌ایم. هر يك از رسم دایره‌های حاصل را نصف کرده‌ایم و در نقطه وسط کمان هر نیم-دایره، مجموع دو عددی را قرار داده‌ایم که در دو انتهای آن وجود دارند (نام اول). سپس، هر يك از چهار کمان حاصل را نصف کرده و در نقطه وسط آنها، مجموع دو عددی را که در دو انتهای آن است، قرار داده‌ایم (نام دوم). این عمل را n بار ادامه داده‌ایم. مجموع همه عددهایی را پیدا کرده روی محیط دایره نوشته‌ایم.

۴۰. مثلثی متساوی‌الساقین مفروض است. مکان هندسی نقطه‌هایی از درون مثلث را پیدا کنید که فاصله هر کدام از آنها تا قاعده، برابر با واسطه هندسی فاصله آن تا دو ساق باشد.

المپیاد چهارم سراسری روسیه سال ۱۹۶۴ (مسکو)

کلاس					
۴۵a	۴۴	۴۳	۴۲	۴۱	:۸
۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۱	:۹
۵۳	۵۲	۵۴a, b	۵۱	۵۰	:۱۰
۴۴	۵۳	۵۲	۵۵	۵۴	:۱۱

۴۱. در مثلثی، طول هر يك از دو ارتفاع آن، از طول ضلعی که بر آن رسم شده است، کوچکتر نیست. زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

۴۲. ثابت کنید، عدد $m(m+1)$ نمی‌تواند، به ازای مقداری طبیعی m ، برابر با توانی از يك عدد درست باشد.

۴۳. در هر يك از عددهای ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰، مجموع رقم‌ها را محاسبه کرده‌ایم. در هر يك از میلیارد عددی که به دست می‌آید، دوباره مجموع رقم‌ها را به دست آورده‌ایم و غیره، تا وقتی که همه عددها، يك رقمی بشوند. کدام عدد بیشتر به دست می‌آید: ۱ یا ۲؟

۴۴. n عدد درست دلخواه a_1, a_2, \dots, a_n داده شده است. از این گروه عددها، گروه جدیدی درست می‌کنیم:

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}$$

و از این گروه جدید، گروه بعدی را با همان قاعده به دست می‌آوریم و غیره. ثابت کنید، اگر همه عددهای حاصل درست باشند، آن وقت، همه عددهای اولیه، برابرند.

۴۵. (a) درشش ضلعی محدب $ABCDEF$ ، همه زاویه‌ها برابرند. ثابت کنید:

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA$$

(b) ثابت کنید، عکس این حکم هم درست است: اگر برای شش پاره خط راست به طول‌های a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 و a_6 داشته باشیم:

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$$

آن وقت می‌توان، با این پاره خط‌های راست، یک شش ضلعی محدب با زاویه‌های برابر ساخت.

۴۶. این معادله را، در مجموعه عددهای درست، حل کنید:

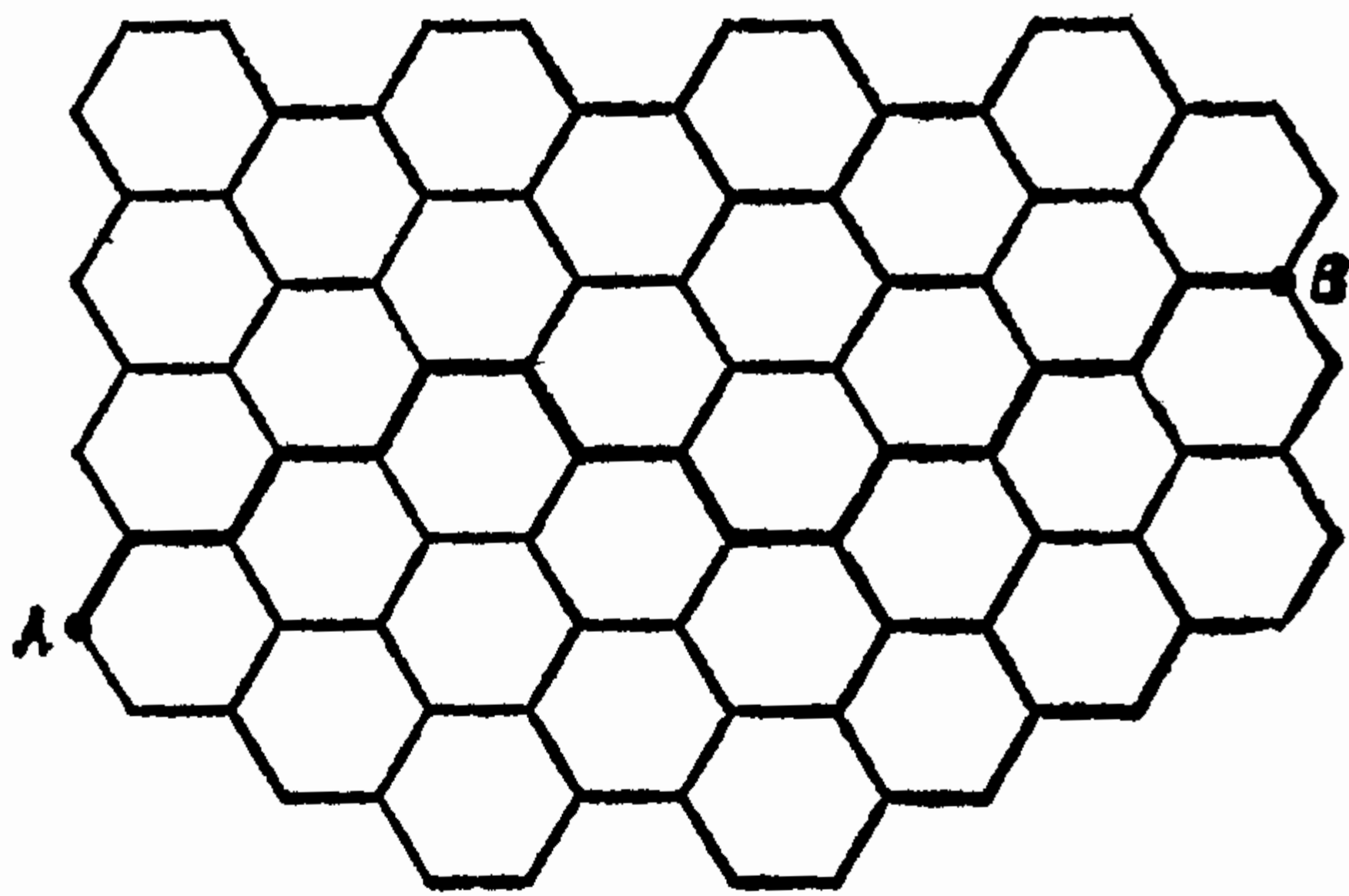
$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}} = y$$

۱۹۶۴ رادیکال

۴۷. از رأس‌های چهارضلعی محدب $ABCD$ ، عمودهایی بر قطرهای آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، چهارضلعی که رأس‌های آن، بر پای این عمودها منطبق باشد، با چهارضلعی اصلی متشابه است.

۴۸. همه عددهای طبیعی و فرد n را پیدا کنید که، برای آن‌ها، عدد $(n-1)$ بر n^2 بخش پذیر نباشد.

۴۹. به کمک شش ضلعی‌های منتظم به ضلع واحد، شبکه‌ای را روی



شکل ۳

صفحه رسم کرده‌ایم (شکل ۳). حشره‌ای روی ضلع‌های شبکه، از نقطه A به طرف نقطه B ، روی کوتاه‌ترین مسیر ممکن، راهی به اندازه ۱۰۰ را می‌پیماید. ثابت کنید، نیمی از تمامی مسیر را، در یک جهت طی می‌کند.

۵۰. چهار ضلعی $ABCD$ را بر دایره به مرکز O محیط کرده‌ایم.

ثابت کنید، مجموع دو زاویه AOB و COD برابر 180 درجه است.

۵۱. a, b, n سه عدد طبیعی ثابت‌اند. می‌دانیم، به ازای هر عدد

طبیعی k ($k \neq b$)، عدد $a - k^n$ بر عدد $b - k$ بخش پذیر است. ثابت کنید، در این صورت $a = b^n$.

۵۲. در عبارت $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ ، برای نشان دادن ردیف عمل‌ها،

پرانتزهایی گذاشته و نتیجه را به این صورت نوشته‌ایم:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{n-k}}}$$

(در ضمن، هر یک از حرف‌های x_1, x_2, \dots, x_n ، یا در صورت کسر قرار دارد و یا در مخرج آن). اگر همه روش‌های ممکن پرانتز گذاری را در نظر بگیریم، به چند کسر از این گونه می‌رسیم؟

۵۳. مکعبی را به چهار وجهی‌هایی تقسیم کرده‌ایم که یکدیگر را

نمی‌پوشانند. کمترین تعداد این چهار وجهی‌ها چقدر است؟

۵۴. بزرگترین عدد مجذور کاملی را پیدا کنید که، بعد از حذف دو

رقم آخر آن (دو رقم راست)، دوباره يك مجذور كامل به دست آيد (فرض بر اين است كه، يكي از رقم‌هاي حذف شده، برابر صفر نيست).

۵۵. $ABCD$ ، يك ذوزنقه محيطي است؛ E را نقطه برخورد قطرهای

AC و BD ، و r_1, r_2, r_3, r_4 را، به ترتيب، شعاع دایره‌های محاط در مثلث‌های ABE, BCE, CDE, DAE می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

المپیاد پنجم سراسری روسیه سال ۱۹۶۵ (مسکو)

						کلاس
۶۰	۵۹	۵۸	۵۷	۵۶a	:	۸
۶۵	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱	:	۹
۶۹	۶۸a	۶۷a	۶۶	۵۶b	:	۱۰
۷۱	۶۸b	۷۰	۶۷b	۶۳	:	۱۱

۵۶. a) هر يك از عددهای x_1, x_2, \dots, x_n می‌تواند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱، ۰ یا -۱ را قبول کند. حداقل مجموع حاصل ضرب‌های دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

b) حداقل مقدار مجموع همه حاصل ضرب‌های دو به دوی n عدد x_1, x_2, \dots, x_n چقدر است، به شرطی که قدر مطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

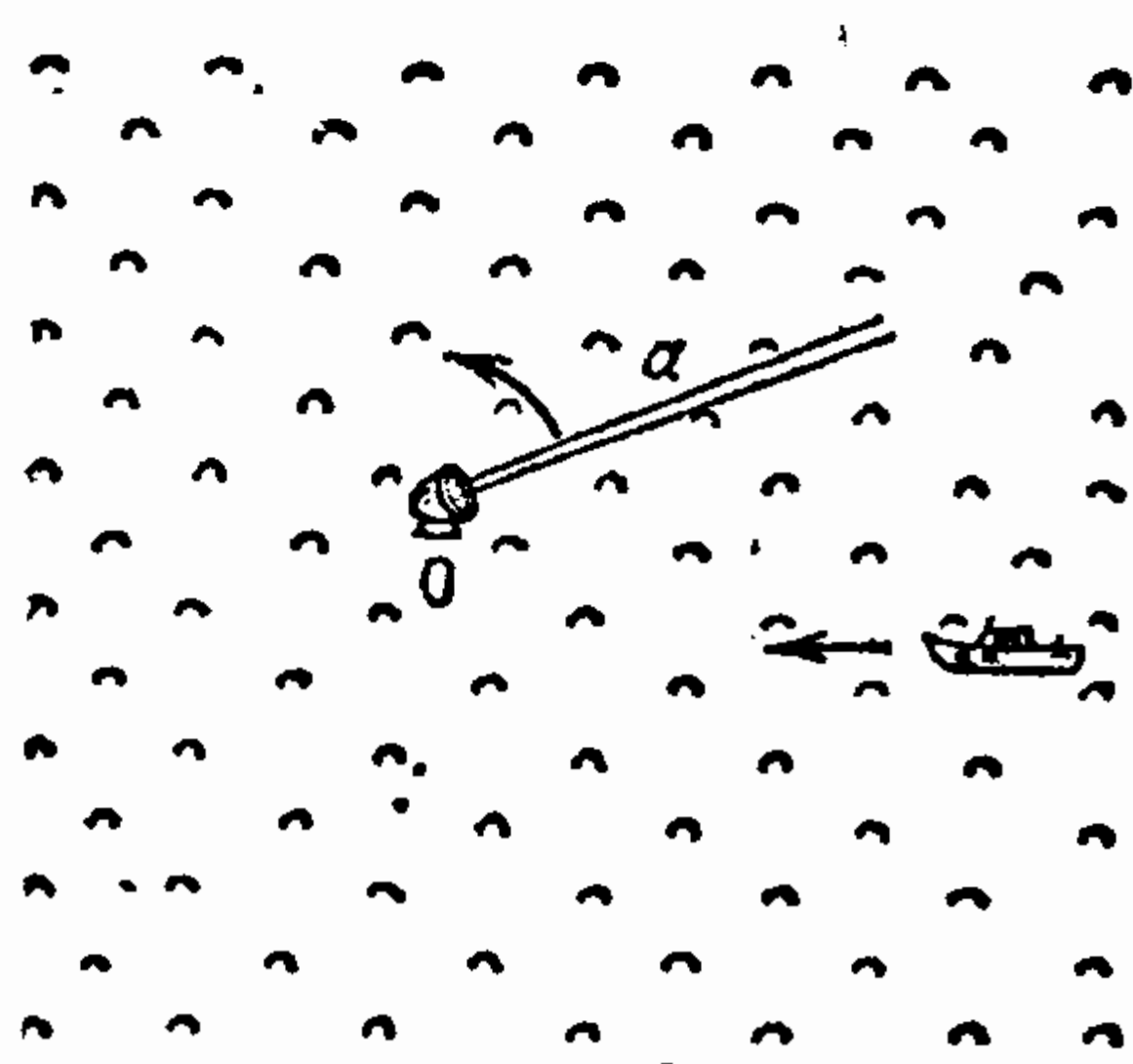
۵۷. صفحه‌ای مربعی با 3×3 خانه و ۹ کارت، که اندازه‌های يکي از آنها برابر با اندازه‌های يك خانه است، در اختیار داریم. روی هر کارت عددی نوشته شده است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، به نوبت این کارت‌ها را روی خانه‌ها می‌گذارند. بعد از آن که همه کارت‌ها در خانه‌ها قرار گرفتند، اولی (آغاز کننده بازی) مجموع شش عددی را به دست می‌آورد که در دو سطر بالایی و پایینی قرار دارند و، دومی، مجموع شش عددی

را نه در ستون‌های سمت چپ و سمت راست واقع است، محاسبه می‌کند. کسی بازی را برده است که صاحب مجموع بیشتری باشد. ثابت کنید، اگر بازی درست انجام شود، دومی نمی‌تواند از اولی ببرد، بدون ارتباط با عددهایی که روی کارت‌ها نوشته شده است.

✓ ۵۸. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده‌ایم. وترهایی که وسط کمان AC را به وسط کمان‌های AB و BC وصل کرده‌اند، ضلع‌های AB و BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید، پاره خط راست DE ، با ضلع AC موازی است و از مرکز دایره محاطی مثلث ABC می‌گذرد.

✓ ۵۹. شماره بلیت اتوبوس عددی شش رقمی است. بلیتی را «بلیت خوشبختی» می‌نامیم که مجموع سه رقم آن، با مجموع سه رقم آخر بلیت برابر باشد. ثابت کنید، مجموع همه شماره‌های بلیت‌های خوشبختی، بر عدد ۱۳ بخش پذیر است.

* ۶۰. روی دریاچه کوچکی، یک نورافکن قرار داده‌اند که، پرتو آن، پاره خط راستی از سطح آب دریا به طول a را روشن می‌کند (شکل ۴). نورافکن، به طور یکنواخت، دور محور قائم، طوری دوران می‌کند که، انتهای پرتو آن، با سرعت v جا به جا می‌شود. ثابت کنید، ناوچه‌ای که سرعت حداکثر آن برابر $\frac{v}{8}$ است، نمی‌تواند به دریاچه نزدیک شود، بدون آن که



شکل ۴

در معرض پرتو نورافکن قرار گیرد.

۶۱. در يك گروه ملی، ۱۰۰ نفر عضویت دارند و هر شب، سه نفر نگهبانی می‌دهند. ثابت کنید، نمی‌توان برنامه نگهبانی‌ها را طوری تنظیم کرد که، هر دو نفر، تنها يك بار باهم نگهبانی بدهند.

۶۲. پاره خط راستی، محدود به دو ضلع جانبی مثلث و مماس با دایره محاطی مثلث، با قاعده مثلث موازی شده است. اگر محیط مثلث برابر $2p$ باشد، حداکثر طول این پاره خط راست چقدر است؟

۶۳. عدد n^2 عدد x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$)، در دستگاهی شامل n^2 معادله صدق می‌کنند:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0, (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

ثابت کنید، عددهای a_1, a_2, \dots, a_n وجود دارند، به نحوی که برابری $x_{ij} = a_i - a_j$ برای هر i و j برقرار باشد.

۶۴*. آیا می‌توان ۱۹۶۵ نقطه را، در مربع به ضلع واحد، طوری

قرار داد که هر مستطیل به مساحت $\frac{1}{200}$ و با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های

مربع، دست کم یکی از این نقطه‌ها را در درون خود داشته باشد؟

۶۵*. گرد کردن يك عدد را، به این معنا می‌گیریم که، آن را، با یکی از دو عدد درست نزدیک به آن، عوض کنیم.

n عدد داده شده است. ثابت کنید، می‌توان این n عدد را طوری گرد کرد

که، مجموع هر m عدد گرد شده ($1 \leq m \leq n$)، از مجموع خود m عدد

(یعنی در حالتی که گرد نشده‌اند)، بیش از $(n+1) \frac{1}{4}$ اختلاف نداشته باشد.

۶۶. جهان‌گردی که با قطار به مسکو آمده بود، تمام روز را در شهر

قدم زد. در رستورانی واقع در يك میدان شام خورد و تصمیم گرفت به

ایستگاه برگردد و، در ضمن، تنها از خیابان‌هایی عبور کند که، تا آن

ساعت، به تعداد فرد از آن‌ها گذشته است. ثابت کنید، جهان‌گرد در هر حال

می‌تواند، به این ترتیب، خود را به ایستگاه برساند.

۶۷. (a) يك كميسيون ۴۰ بار تشكيل شده است. در هر نشست ۱۰ عضو كميسيون شركت کرده‌اند، در ضمن هيچ دو عضوی از كميسيون با هم، بيش از يكبار، در نشست‌ها نبوده‌اند. ثابت كنيد، تعداد عضوهای كميسيون از ۶۰ بيشتر است.

(b) ثابت كنيد، با ۲۵ نفر نمی‌توان بيش از ۳۰ كميسيون ۵ عضوی تشكيل داد، به شرطی كه هيچ دو كميسيونی، بيش از يك عضو مشترك نداشته باشند.

۶۸*. دو عدد مثبت p و q ، نسبت به هم اول‌اند. عدد درست n را «خوب» می‌ناميم، وقتی كه بتوان آن را به صورت $n = px + qy$ نشان داد كه، در آن، x و y عددهای درست غير منفي‌اند؛ و در حالت عكس، آن را «بد» می‌ناميم.

(a) ثابت كنيد، عدد درست c وجود دارد، به نحوی كه از دو عدد درست n و $c - n$ ، هميشه يکی عدد «خوب» و دیگری عدد «بد» است.

(b) روی هم، چند عدد «بد» غير منفي وجود دارد؟

۶۹. هواپيماي اکتشافی روی دایره‌ای به مرکز نقطه A و به شعاع ۱۰ كيلومتر، با سرعت ساعتی ۱۰۰۰ كيلومتر پرواز می‌کند. در لحظه‌ای، از نقطه A موشکی پرتاب می‌شود كه دارای همان سرعت هواپيما است و مسیر حرکت آن، هميشه، روی خط راستی قرار دارد كه نقطه A را به هواپيما وصل می‌کند. موشك، چه مدتی بعد از پرتاب، به هواپيما می‌رسد؟

۷۰. ثابت كنيد، مجموع طول يال‌های هر چندوجهی از $3d$ بيشتر است كه، در آن، d عبارت است از فاصله بين دورترین دو راس چندوجهی از يكديگر.

۷۱*. در سياره‌ای كه به شكل كره است، موجودی زندگی می‌کند كه می‌تواند، روی سطح سياره، با سرعتی كه از 11 تجاوز نمی‌کند، حرکت کند. يك سفینه فضایی در اطراف اين سياره در پرواز است كه می‌تواند با

سرعت v حرکت کند. ثابت كنيد، اگر داشته باشيم $v > 11$ ، آن وقت،

موجود روی سیاره نمی تواند خود را از دید سفینه مخفی کند.

المپیاد ششم سراسری روسیه سال ۱۹۶۶ (وورونژ)

کلاس					
۷۶	۷۵a	۷۴	۷۳a	۷۲	:۸
۷۹	۷۸	۷۵b	۷۳b	۷۷	:۹
۸۳	۸۲	۸۱	۸۰	۷۵b	:۱۱۶۱۰

۷۲. روی هر سیاره از یک منظومه، یک اخترشناس، نزدیک ترین سیاره را مشاهده می کند. فاصله های بین سیاره ها، دو به دو، با هم اختلاف دارند. ثابت کنید، اگر تعداد سیاره ها فرد باشد، سیاره ای وجود دارد که کسی آن را مشاهده نمی کند.

۷۳. a) نقطه های B و C در درون پاره خط راست AD واقع اند. ثابت کنید، اگر AB برابر CD باشد، آن وقت، برای هر نقطه P از صفحه، داریم:

$$PA + PD \geq PB + PC$$

b) نقطه های A ، B ، C و D ، روی یک صفحه مفروض اند. می دانیم، برای هر نقطه P از صفحه، این نابرابری برقرار است.

$$PA + PD \geq PB + PC$$

ثابت کنید، نقطه های B و C روی پاره خط راست AD واقع اند و $AB = CD$.

۷۴. آیا عددهای طبیعی x و y وجود دارند که، به ازای آن ها، $x^2 + y^2$ و $x + y^2$ ، مجذورهای کاملی باشند؟

۷۵. a) دانش آموزان کلاس هشتم در یک صف ایستاده اند. جلو هر کدام از آن ها، دانش آموزی از کلاس هفتم ایستاده است که قدی کوتاه تر دارد. ثابت کنید، اگر صف دانش آموزان کلاس هشتم به ردیف قد و صف دانش آموزان کلاس هفتم هم به ردیف قد خود ایستاده باشند، باز هم مثل قبل،

۷۵. دانش آموز کلاس هشتم بلندتر از دانش آموز کلاس هفتم جلو خود است. (۱) گروهی سرباز به شکل مستطیلی ایستاده اند، به نحوی که در هر صف، ردیف قد آنها رعایت شده است. ثابت کنید، اگر سربازان را، در هر ستون، بدردیف قد خود قرار دهیم، باز هم مثل سابق، در هر صف، بدردیف قد خود قرار می گیرند.

۷۶. روی يك صفحه کاغذ شطرنجی، مستطیل $ABCD$ را رسم کرده ایم، به نحوی که ضلع های آن، روی خط های راست شبکه قرار داشته باشد و، در ضمن، $AD = k$ برابر AB باشد (k ، عددی درست است). همه مسیرهای ممکن را از طریق خط های راست شبکه در نظر می گیریم، به نحوی که کوتاه ترین راه از A به C باشند. ثابت کنید، بین این مسیرها، نمونه هایی پیدا می شود که، در آنها، نخستین حلقه بر AD واقع است و، این حلقه، k برابر نمونه هایی است که، در آنها، نخستین حلقه بر AB قرار دارد.

۷۷. ✓ برای اعداد a_1, a_2, \dots, a_n می دانیم:

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1, a_2 \leq a_3 \leq 2a_2, \dots, a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$$

ثابت کنید، در مجموع $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ می توان علامت ها را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم: $0 \leq s \leq a_1$.

۷۸. ✓ ثابت کنید، در چهارضلعی محدب به مساحت S و محیط P ، می-

توان دایره ای به شعاع $\frac{S}{P}$ جاداد.

۷۹. ✓ در يك شهر، برای هر سه چهار راه A, B و C ، مسیری وجود

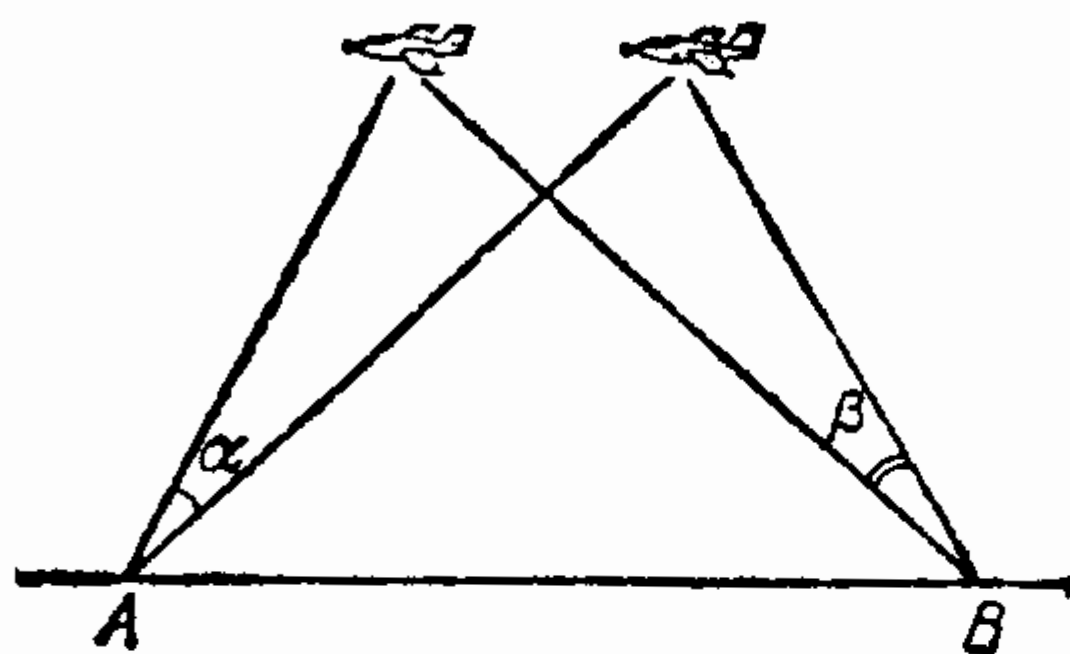
دارد که از A به B می رود، ولی از C نمی گذرد. ثابت کنید، هر چهار راه با هر چهار راه دیگر، دست کم به وسیله دو مسیر غیر متقاطع، مربوط است. (چهار راه، به نقطه ای می گوئیم که، از آن جا، دست کم دو خیابان عبور کند؛ در شهر، دست کم، دو چهار راه وجود دارد.)

۸۰. مثلث ABC مفروض است. همه چهاروجهی های ممکن $PABC$

را در نظر می‌گیریم که، در آن‌ها، PH کوچکترین ارتفاع چهاروجهی باشد (H ، تصویر نقطه P بر صفحه ABC است). مجموعه نقطه‌های H (مکان هندسی نقطه H) را پیدا کنید.

* ۸۱. ۱۰۰ نقطه روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، این نقطه‌ها را می‌توان با چند دایره غیرمتقاطع پوشاند، به نحوی که مجموع قطرهای این دایره‌ها، کوچکتر از ۱۰۰ و فاصله بین هر دو دایره بیشتر از واحد باشد (فاصله بین دو دایره غیرمتقاطع، به فاصله بین نزدیک‌ترین نقطه‌های آن‌ها گفته می‌شود).

۸۲. از دو نقطه A و B ، که به فاصله d کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، به طور هم زمان و در طول یک ثانیه، هواپیمائی را مشاهده می‌کنند



شکل ۵

که روی خط راست و با سرعتی ثابت حرکت می‌کند (شکل ۵). از نقطه A اطلاع می‌دهند که، این هواپیما، در طول یک ثانیه، به اندازه زاویه α جا به جا شده است؛ از نقطه B اطلاع می‌دهند که، در طول این یک ثانیه، هواپیما به اندازه زاویه β جا به جا شده است (α و β زاویه‌هایی حاده‌اند). حداقل سرعت هواپیما، چقدر می‌تواند باشد؟

* ۸۳. ۲۰ عدد ۱، ۲، ...، ۲۰ روی کاغذ نوشته شده است. دو بازی کن، به نوبت، جلو این عددها، علامت «+» یا «-» می‌گذارند (علامت را، می‌توان جلوی هر عددی گذاشت که بی‌علامت باقی مانده است). اولی می‌خواهد ترتیبی بدهد که، بعد از پایان علامت گذاری‌ها، مجموع همه عددها، کمترین مقدار ممکن را، از لحاظ قدر مطلق، داشته باشد. نفر دوم، چه مجموع حداکثری را، از لحاظ قدر مطلق، می‌تواند برای خود تأمین کند؟

نخستین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۷ (تفلیس)

کلاس					
۸۸	۸۷c	۸۶a	۸۵a	۸۴a	:۸
۸۹	۸۴b	۸۵b	۸۶a	۸۷b	:۹
۹۳	۹۲	۹۱	۸۶b	۹۰	:۱۰

۸۴. a) در مثلث ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، بزرگترین ارتفاع آن، AH ، با میانه BM برابر است. ثابت کنید، زاویه ABC از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

b) در مثلث ABC ، با زاویه‌های حاده، ارتفاع AH با میانه BM و بانی‌مساز CD برابر است. ثابت کنید، مثلثی متساوی‌الاضلاع است.
۸۵. a) در یک عدد طبیعی، جای رقم‌ها را به دلخواه عوض کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع عدد اصلی با عددی که به دست می‌آید، نمی‌تواند برابر با عدد زیر باشد:

$$\underbrace{999\dots 9}_{\text{رقم } 1967}$$

b) رقم‌های عددی را جابه‌جا و، سپس آن را، با عدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر این مجموع برابر ۱۰^k باشد، عدد اصلی بر ۱۰ بخش پذیر است.

۸۶. a) نورافکن زاویه ۹۰ درجه را روشن می‌کند. ثابت کنید، با فرار دادن نورافکن در چهار نقطه دلخواه صفحه، می‌توان آن‌ها را جهت‌گیری کرد که تمامی صفحه روشن شود.

b) در هر یک از هشت نقطه فضا، نورافکنی قرار دارد که می‌تواند یک هشتم فضا را (یعنی درون یک کعب سه وجهی را که یال‌های آن دو به دو بر هم عمودند) روشن کند، راس این کعب را باید در نقطه‌ای در نظر

گرفت که نور افکن در آن جا قرار دارد. ثابت کنید، می توان جهت نور افکن ها را طوری تنظیم کرد که تمامی فضا روشن شود.

۸۷. (a) آیا می توان عدد های ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را روی محیط يك دایره طوری قرار داد که، هر دو عدد مجاور، ۳، ۴ یا ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

(b) آیا می توان عددهای ۱، ۲، ...، ۱۳ را روی محیط دایره طوری قرار داد که، هر دو عدد مجاور به اندازه ۳، ۴ یا ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

۸۸. ثابت کنید، عددی وجود دارد که بر 5^{1000} بخش پذیر است و در بین رقم های آن، حتی يك صفر وجود ندارد.

۸۹*. همه زوج عددهای درست x و y را پیدا کنید که در معادله زیر صدق کنند:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

۹۰. در دنباله ای از عددهای درست و مثبت، با آغاز از جمله سوم، هر جمله برابر است با قدر مطلق تفاضل دو جمله قبل از آن.

این، دنباله، حداکثر چند جمله می تواند داشته باشد، به شرطی که هر جمله آن، از ۱۹۶۷ تجاوز نکند؟

۹۱. «خودکشی شاه». روی يك صفحه شطرنجی 1000×1000 ، شاه سیاه و ۴۹۹ رخ سفید وجود دارد. ثابت کنید، مهره شاه در هر خانه ای باشد و سفید به هر ترتیبی بازی کند، شاه زیر ضربه رخ های سفید است. (حرکت ها، مثل بازی معمولی شطرنج انجام می شوند.)

۹۲. سه رأس متوالی لوزی، به ترتیب، روی ضلع های AB ، BC و CD از مربع مفروض به ضلع واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت شکلی که به وسیله رأس چهارم چنین لوزی هایی پر می شود.

۹۳*. عدد طبیعی k ، دارای این ویژگی است که، اگر عدد n بر آن بخش پذیر باشد، مقلوب عدد n هم (یعنی عددی که با همان رقم های n ، ولی در جهت عکس نوشته شده باشد) بر k بخش پذیر است. ثابت کنید، عدد

دومین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۶۸ (لنین گراد)

دور شفاهی					دور کتبی					کلاس
۱۰۹	۱۰۸	۱۰۷	۱۰۶	۱۰۵a	۹۸	۹۷	۹۶	۹۵	۹۴	:۸
۱۰۹	۱۰۸	۱۰۵a	۱۱۱	۱۱۰	۱۰۲	۹۷	۱۰۱	۱۰۰	۹۹	:۹
۱۰۹	۱۱۴	۱۱۳	۱۱۲	۱۰۵b	۹۶	۹۷	۱۰۴	۹۵	۱۰۳	:۱۰

۹۴. در یک هشت ضلعی، همه زاویه‌ها برابرند و طول ضلع‌ها عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، در این هشت ضلعی، ضلع‌های رو به‌رو با هم برابرند.

۹۵. کدام یک بزرگ‌ترند: ۳۱۱ یا ۱۷۱۴ ؟

۹۶. صفحه‌ای شطرنجی که طول ضلع هر خانه آن برابر یک سانتی‌متر است، در اختیار داریم. دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم، به نحوی که محیط آن، از هیچ رأسی از خانه‌ها نمی‌گذرد و بر هیچ ضلعی از خانه‌ها مماس نیست. محیط این دایره، چند خانه را می‌تواند قطع کند؟

۹۷. بین دانشجویانی که به دانشگاه «دوستی ملت‌ها» آمده‌اند، درست ۵۰ نفر زبان انگلیسی، درست ۵۰ نفر زبان فرانسوی و درست ۵۰ نفر زبان اسپانیایی می‌دانند. ثابت کنید، دانشجویان را می‌توان به ۵ گروه (لازم نیست برابر باشند)، چنان تقسیم کرد که، در هر گروه، درست ۱۰ نفر که زبان انگلیسی می‌دانند، درست ۱۰ نفر که زبان فرانسوی می‌دانند و درست ۱۰ نفر که زبان اسپانیایی می‌دانند، وجود داشته باشد. (فرض بر این است که، از بین دانشجویان، برخی هیچ‌کدام از این زبان‌ها را نمی‌دانند و برخی دیگر به دو یا هر سه زبان مسلط‌اند.)

۹۸. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \dots + \frac{20}{x^2-100} =$$

$$= 1 \left(\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right)$$

۹۹✓ در يك n ضلعی منتظم ($n > 5$)، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین قطر، برابر با ضلع n ضلعی است. n را پیدا کنید.

۱۰۰✓ دنباله a_1, a_2, a_3, \dots ، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, \dots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

ثابت کنید: $a_{100} > 14$.

۱۰۱✓ نقطه O را در درون مثلث ABC و نقطه O' را در درون مثلث $A'B'C'$ انتخاب کرده‌ایم؛ زاویه‌های هر دو مثلث، حاده‌اند. از نقطه O ، عمود OA_1 را بر ضلع BC ، عمود OB_1 را بر ضلع CA و عمود OC_1 را بر ضلع AB رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب، عمودهای $O'A'_1, O'B'_1, O'C'_1$ را، به ترتیب، بر ضلع‌های $B'C', C'A', A'B'$ رسم کرده‌ایم. معلوم شد:

$$OA_1 \parallel O'A'_1, OB_1 \parallel O'B'_1, OC_1 \parallel O'C'_1,$$

$$OA_1 \cdot O'A'_1 = OB_1 \cdot O'B'_1 = OC_1 \cdot O'C'_1$$

ثابت کنید:

$$O'A'_1 \parallel OA, O'B'_1 \parallel OB, O'C'_1 \parallel OC,$$

$$O'A'_1 \cdot OA = O'B'_1 \cdot OB = O'C'_1 \cdot OC$$

۱۰۲* ثابت کنید، هر عدد طبیعی را که از $n!$ تجاوز نکند، می‌توان به صورت مجموعی از عددهای طبیعی مختلف نشان داد، به نحوی که، تعداد جمله‌های مجموع، از n تجاوز نکند و، در ضمن، هر جمله مجموع، منقسم‌علیهی از $n!$ باشد.

✓ ۱۰۳. نقطه D را روی ضلع AB و نقطه E را روی ضلع AC از مثلث ABC گرفته‌ایم. در ضمن، می‌دانیم:

$$DE \parallel BC, AD = DE = AC, BD = AE$$

ثابت کنید، طول BD برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع $R = AC$.

✓ ۱۰۴. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. سه کره، بدترتیب، با قطرهای AB ، AC و AD در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، این کره‌ها، چهاروجهی را می‌پوشانند.

✓ ۱۰۵. (a) در جدول 4×4 ، علامت‌های «+» و «-» را، طبق شکل ۶، قرار داده‌ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت همه خانه‌هایی را که در

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

شکل ۶

یک سطر، یا یک ستون، یا به روی خط راستی موازی یک قطر (و در حالت خاص، یکی از خانه‌های گوشه‌ای) قرار دارند، به‌طور هم‌زمان، عوض کنیم. ثابت کنید، اگر این عمل را هر چندبار انجام دهیم، به جدولی نمی‌رسیم که همه علامت‌های خانه‌های آن مثبت باشد.

(b) در همه خانه‌های صفحه شطرنجی 8×8 ، علامت مثبت گذاشته‌ایم، به استثنای یکی از خانه‌ها (و البته، به جز خانه‌های گوشه‌ای)، که در آن، علامت منفی قرار داده‌ایم. تصمیم گرفتیم، به‌طور هم‌زمان، علامت همه خانه‌های یک سطر، یک ستون یا یک قطر را تغییر دهیم (و در حالت خاص، هر کدام از خانه‌های گوشه‌ای را؛ قطر را به نحوی گوییم که مهره فیل می‌تواند روی آن حرکت کند). ثابت کنید، اگر هر چند بار، به این ترتیب، علامت‌ها را تغییر دهیم، به جدولی نمی‌رسیم که همه علامت‌های آن، مثبت باشد.

۱۰۶. میان‌های مثلث ABC ، آن را به شش مثلث تقسیم می‌کنند. معلوم شد، از بین دایره‌های محاطی این مثلث‌ها، چهار دایره با هم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰۷. ثابت کنید، معادله

$$x^2 + x + 1 = py$$

برای بی‌نهایت عدد اول p ، در مجموعه عددهای درست (x, y) ، جواب دارد.

۱۰۸. بعد از هنرنمایی ۲۰ هنرمند رقص، هر یک از ۹ داور، بنا به نظر خود، ردیفی بسرای مقام‌های آن‌ها، از ۱ تا ۲۰ معین کردند. معلوم شد، اختلاف مقام‌هایی که داوران مختلف برای هر هنرمند تعیین کرده‌اند، بیشتر از ۳ نیست.

مقام‌های هر هنرمند را جمع کردند و عددهای حاصل را، به ترتیب صعودی نوشتند. ردیف

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4 \leq \dots \leq c_{20}$$

به دست آمد. داوران روی هم، به c_1 حداکثر چه عددی داده‌اند؟

۱۰۹. عددهای a_1, a_2, \dots, a_n از بین عددهای $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ و هر

کدام یک بار و هم‌چنین، عددهای b_1, b_2, \dots, b_n هم از بین همین عددها، باز هم هر کدام یک بار، انتخاب شده‌اند. در ضمن، می‌دانیم:

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 + b_3 \geq \dots \geq a_n + b_n$$

ثابت کنید، به ازای هر m از بین عددهای ۱ تا n ، داریم:

$$a_m + b_m \leq \frac{4}{m}$$

۱۱۰. روی میز معلم یک ترازو گذاشته شده است. در کفدهای ترازو

وزنه‌هایی وجود دارد که ممکن است برابر نباشند. روی هر وزنه، نام فامیل یک یا چند نفر از دانش‌آموزان نوشته شده است. هر دانش‌آموزی که به

کلاس وارد می‌شود، وزنه‌ای را که نام فامیل از روی آن نوشته شده است، بر می‌دارد و در کفه دیگر ترازو می‌گذارد. ثابت کنید، می‌توان ورود دانش-آموزان به کلاس را طوری اجازه داد که، در نتیجه، آن کفه‌ای از ترازو سبک‌تر باشد که در ابتدا سنگین‌تر بوده است.

۱۱۱. طرح يك شهر به صورت مستطیلی است که به خانه‌هایی تقسیم شده است. n خیابان موازی با هم، و m خیابان دیگر عمود بر آنها، در آن وجود دارد. در خیابان‌های شهر (و نه در چهار راه‌ها)، پاسبان‌های اداره راهنمایی و رانندگی مستقر شده‌اند. هر پاسبان، شماره، جهت حرکت و زمان اتوبوس‌هایی را که از مقابل او می‌گذرند، اطلاع می‌دهد. همه اتوبوس‌ها، روی مسیرهای بسته‌ای در خیابان‌های شهر حرکت می‌کنند (وقتی که اتوبوسی، يك بار مسیر خود را طی می‌کند، از هیچ نقطه‌ای دوبار نمی‌گذرد). حداکثر، چند پاسبان باید در خیابان‌های شهر گذاشت، تا بتوان بنا بر آگاهی‌هایی که می‌دهند، مسیر هر اتوبوس را، به صورتی يك ارزشی، معین کرد؟

۱۱۲. ✓ دایره محاطی مثلث ABC ، بر ضلع AC در نقطه K مماس است. ثابت کنید، خط راستی که وسط ضلع AC را به مرکز دایره محاطی مثلث وصل می‌کند، پاره خط راست BK را نصف می‌کند.

۱۱۳. ✓ دنباله عددهای a_1, a_2, \dots, a_n ، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, \dots$$

$$\dots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|$$

$$\text{ثابت کنید: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

۱۱۴. ✓ در چهارضای محدب $ABCD$ ، طول همه ضلع‌ها و قطر‌ها، عددهایی گویا هستند. اگر O محل برخورد قطرهای چهارضای باشد، ثابت کنید، طول پاره خط راست AO ، عددی گویاست.

سومین الهپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۹ (کیف)

کلاس	روز اول	روز دوم
:۸	۱۱۵ ۱۱۶ ۱۱۷	۱۲۲ ۱۲۳ ۱۲۴a
:۹	۱۱۸ ۱۱۹ ۱۱۵	۱۲۴ ۱۲۵ ۱۲۶
:۱۰	۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱	۱۲۵ ۱۲۷ ۱۲۸

۱۱۵. روی قاعده AD در دوزنقه $ABCD$ ، نقطه E طوری انتخاب شده است که مثلث‌های ABE ، BCE و CDE ، محیط‌هایی برابر پیدا کرده‌اند.

ثابت کنید: $BC = \frac{1}{2}AD$.

۱۱۶. در مرکز میدانی مربع شکل، یک گرگ و در چهار رأس این مربع، چهار سگ ایستاده‌اند. گرگ می‌تواند، در تمامی میدان بدود، ولی سگ‌ها، تنها روی ضلع‌های مربع حرکت می‌کنند. گرگ می‌تواند از عهده یک سگ برآید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت هر سگ، $1/5$ برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ‌ها، این امکان را دارند که مانع خروج گرگ از میدان مربعی بشوند.

۱۱۷. دنباله‌ای متناهی از رقم‌های صفر و واحد. با دو ویژگی زیر داده شده است:

(الف) اگر در جای دلخواهی از دنباله، ۵ رقم متوالی را جدا کنیم و، در جای دلخواه دیگری، دوباره ۵ رقم متوالی را در نظر بگیریم، آن-وقت، این دو ردیف ۵ رقمی با هم اختلاف دارند (مثلاً در دنباله ۰۱۱۰۱۰۱)؛

(ب) اگر در سمت راست دنباله، رقم ۰ یا رقم ۱ را قرار دهیم، ویژگی (الف)، برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم اول این دنباله، بر چهار رقم آخر آن منطبق است.

۱۱۸. a, b, c و d را، عددهایی مثبت می‌گیریم. ثابت کنید، در

$$a + b < c + d,$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd,$$

$$(a + b)cd < ab(c + d)$$

دست کم یکی، نادرست است.

✓ ۱۱۹. کوچکترین عدد طبیعی a را پیدا کنید که، به ازای آن، سه جمله‌ای درجه دوم با ضرایب‌های درست و ضریب بزرگترین درجه a ، وجود داشته باشد، به نحوی که دارای دوریسه مختلف کوچکتر از واحد باشد.

✓ ۱۲۰. عدد طبیعی n مفروض است. همه کسرهای به صورت $\frac{1}{pq}$ را می-

نویسیم که، در آن، p و q نسبت به هم اول‌اند و $0 < p < q \leq n$ ،

✓ ۱۲۱. ثابت کنید، مجموع همه این کسرها، برابر است با $\frac{1}{4}$. (نوروز)

* ۱۲۱. n نقطه را در فضا طوری مستقر کرده‌ایم که، هر سه نقطه آن، رأس‌های مثلثی را با یک زاویه بزرگتر از ۱۲۰ درجه تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، این نقطه‌ها را، می‌توان با حرف‌های A_1, A_2, \dots, A_n طوری نام‌گذاری کرد که، هر کدام از زاویه‌های $A_i A_j A_k$ ($1 \leq i < j < k \leq n$)، بزرگتر از ۱۲۰ درجه باشد.

۱۲۲. در چهار عدد سه رقمی مختلف، رقم اول سمت چپ، یکی است. در ضمن، مجموع این چهار عدد، بر سه تا از این عددها بخش پذیر است. این عددها را پیدا کنید.

✓ ۱۲۳. خط‌های هوایی بین شهرهای یک کشور طوری تنظیم شده‌اند که، هر شهر، حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. در ضمن، برای مسافرت از هر شهر به هر شهر دیگر، بیش از یک بار، نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور، چقدر است؟

۱۲۴. در یک پنج‌ضلعی محدب، همه ضلع‌ها با هم برابرند.

(a) ثابت کنید: در درون این پنج ضلعی و روی قطر بزرگتر، نقطه‌ای وجود دارد که، از آنجا، هر ضلع پنج ضلعی به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

(b) ثابت کنید، دایره‌هایی که به قطر ضلع‌ها رسم شوند، پنج ضلعی را نمی‌پوشانند.

۱۲۵. روی تخته سیاه، معادله‌ای به این صورت نوشته شده است:

$$x^3 + \dots + x^2 + \dots + x + \dots = 0$$

دو نفر، به صورت زیر، با هم بازی می‌کنند. نفر اول، در یکی از جاهای خالی، عدد درستی مخالف صفر (مثبت یا منفی) می‌نویسد؛ سپس، نفر دوم، در یکی از جاهای خالی باقی مانده، عددی درست و غیر صفر را جا می‌دهد. سر آخر، نفر اول، در تنها جای باقی مانده، عدد درستی را قرار می‌دهد. ثابت کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که، بدون توجه به حرکت دومی، ریشه‌های معادله‌ای که به دست می‌آید، عددهایی درست باشند.

۱۲۶*. ۲۵ تیم فوتبال، برای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست کم، چند بازی باید انجام شود تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشد که بازی خود را انجام داده باشند؟

۱۲۷. یک k ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R مفروض است. اگر h_k ، فاصله مرکز چندضلعی تا یکی از ضلع‌های آن باشد، ثابت کنید:

$$(n+1)h_{n-1} - nh_n > R$$

۱۲۸*. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1, a_2, \dots, a_n

داریم:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{\pi}{4}$$

چهارمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۰ (سیم فیه روپول - مرکز کریمه)

روز دوم	روز اول	کلاس
۱۳۳a	۱۳۲	۱۳۱ ۱۳۰ ۱۲۹ :۸
۱۳۷	۱۳۶	۱۳۳b ۱۳۵ ۱۳۴ :۹
۱۴۳ ۱۴۲ ۱۴۱	۱۴۰ ۱۳۶	۱۳۳b ۱۳۹ ۱۳۸ :۱۰

۱۲۹. يك دایره، قطر AB از آن و نقطه C واقع بر این قطر، مفروض اند. روی محیط دایره، دو نقطه X و Y را، قرینه هم نسبت به قطر AB ، طوری پیدا کنید که، خط راست YC بر خط راست XA عمود باشد. ۱۳۰. ثابت کنید، اگر حاصل ضرب سه عدد مثبت برابر واحد، و مجموع این سه عدد از مجموع عکس آنها بزرگتر باشد، آن وقت، درست یکی از این عددها، از واحد بزرگتر است.

۱۳۱. در يك چندضلعی محدب، چندضلع می تواند وجود داشته باشد که، طول هر کدام از آنها، برابر با طول بزرگترین قطر چندضلعی باشد. ۱۳۲. رقم های يك عدد هفده رقمی را، در جهت عکس نوشته ایم. عدد حاصل را، با عدد اصلی جمع کرده ایم. ثابت کنید، دست کم یکی از رقم های این مجموع، عددی زوج است.

۱۳۳. (a) زمین قلعه ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع، با ضلع به طول ۱۰۰ متر است. آن را به ۱۰۰ سالن مثلثی شکل تقسیم کرده اند. همه دیوارهای سالن، طول هایی برابر دارند: ۱۰ متر. در وسط هر دیوار بین هر دو سالن، دری تعبیه شده است. ثابت کنید، اگر کسی بخواهد، سالن های قلعه را بازدید کند، بدون این که دوبار وارد يك سالن بشود، نمی تواند بیش از ۹۱ سالن را ببیند.

(b) هر يك از ضلع های مثلث متساوی الاضلاع را به k بخش برابر تقسیم کرده ایم. از هر نقطه تقسیم، خط های راستی موازی ضلع ها کشیده ایم. به این ترتیب، مثلث مفروض، به k^2 مثلث کوچکتر تقسیم می شود. دنباله مثلث هایی را يك «زنجیره» می نامیم که، در آن، هیچ مثلثی دوبار تکرار نشده باشد

و، در ضمن، هر مثلث با مثلث قبلی خود، در يك ضلع مشترك باشد. حداكثر تعداد مثلث‌های این «زنجیره» چند است؟

۱۳۴. پنج پاره خط راست چنان اند که، با هر سه تای آنها، می‌توان يك مثلث ساخت. ثابت کنید، دست کم یکی از این مثلث‌ها، زاویه‌هایی حاده دارد.

۱۳۵. در مثلث ABC که زاویه‌هایی حاده دارد، نیمساز AD ، میانۀ BM و ارتفاع CH ، در يك نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، زاویه BAC از 45 درجه بیشتر است.

۱۳۶. با رقم‌های 201 ، پنج عدد n رقمی طوری ساخته‌ایم که، رقم‌های هر دو عدد، درست در m مرتبه خود بر هم منطبق‌اند؛ ولی رقم‌های هر پنج عدد، در هیچ مرتبه‌ای بر هم منطبق نیستند. ثابت کنید:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}$$

۲۶

۱۳۷*. ثابت کنید، از بین هر دو یست عدد درست، می‌توان صد عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آنها، بر 100 بخش پذیر باشد.

۱۳۸. در مثلث ABC ، از نقطه M وسط ضلع BC و نقطه O مرکز دایره محاطی مثلث، خط راستی گذرانده‌ایم تا ارتفاع AH را در نقطه E قطع کند. ثابت کنید، طول پاره خط راست AE برابر است با شعاع دایره محاطی مثلث.

۱۳۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی k ، بی‌نهایت عدد طبیعی t وجود دارد که، در عددنویسی به مبنای ده، شامل رقم‌های صفر نباشد و، در ضمن در عدد t و kt ، در مجموع رقم‌ها برابر باشند.

۱۴۰. دو مستطیل برابر، طوری روی هم قرار گرفته‌اند که، محیط‌های آنها، در هشت نقطه، یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت بخش مشترك دو مستطیل، از نصف مساحت هر يك از مستطیل‌ها، بیشتر است.

۱۴۱. روی کارت‌های جداگانه، همه عددهای پنج رقمی از 11111

تا ۹۹۹۹۹ را نوشته ایم. این کارت‌ها را، به ترتیب دلخواه، در کنار هم قرار می‌دهیم. ثابت کنید، عدد حاصل (که عددی با ۴۴۴۴۵ رقم است)، نمی‌تواند توانی از ۲ باشد.

۱۴۲*. همه عددهای طبیعی را، که تعداد رقم‌های هر کدام از آنها از n تجاوز نمی‌کند، به دو گروه تقسیم کرده ایم. در گروه اول، همه عددهایی را قرار دادیم که، مجموع رقم‌های هر یک از آنها، عددی فرد است، و در گروه دوم، همه عددهای با مجموع رقم‌های زوج. ثابت کنید، اگر $1 \leq k < n$ ، آن وقت، مجموع توان‌های k ام همه عددهای گروه اول، برابر است با مجموع توان‌های k ام همه عددهای گروه دوم.

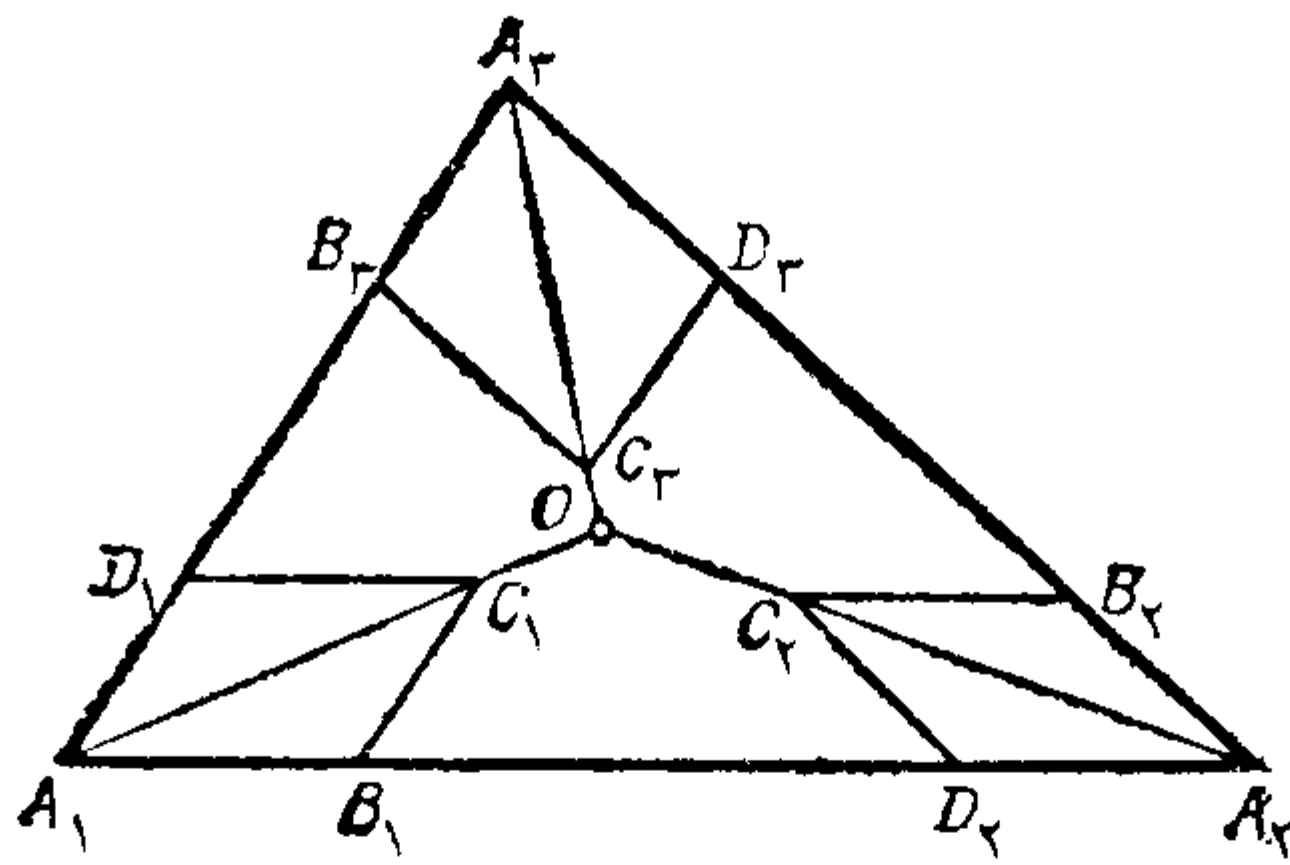
۱۴۳*. رأس‌های یک n ضلعی منتظم را با چند رنگ مختلف، طوری رنگ کرده ایم (هر رأس، تنها یک رنگ دارد) که، نقطه‌های هم رنگ، رأس‌های یک چندضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، در بین این چندضلعی‌ها، دو چندضلعی برابر وجود دارد.

پنجمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۱ (ریگا)

روز دوم			روز اول				کلاس
۱۵۴	۱۵۳	۱۵۲a, b	۱۴۷	۱۴۶a	۱۴۵a	۱۴۴	۸
۱۵۵	۱۵۲c	۱۵۶	۱۴۶b	۱۴۷	۱۴۸	۱۴۵a	۹
۱۵۸	۱۵۷	۱۵۶	۱۵۱	۱۴۷	۱۵۰	۱۴۵b	۱۰

۱۴۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان عددی n رقمی با رقم‌های ۰ و ۱ پیدا کرد که بر 2^n بخش پذیر باشد.

۱۴۵. مثلث $A_1 A_2 A_3$ مفروض است. نقطه‌های B_1 و D_1 را روی ضلع $A_1 A_2$ ، نقطه‌های B_2 و D_2 را روی ضلع $A_2 A_3$ و نقطه‌های B_3 و D_3 را روی ضلع $A_3 A_1$ طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_1 B_1 C_1 D_1$ ، $A_2 B_2 C_2 D_2$ و $A_3 B_3 C_3 D_3$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست $A_1 C_1$ ، $A_2 C_2$ و $A_3 C_3$ در یک نقطه O به هم برسند. ثابت کنید،



شکل ۷

اگر داشته باشیم: $A_1B_1 = A_2D_2$ و $A_2B_2 = A_3D_3$ ، آن وقت داریم:
 $A_3B_3 = A_1D_1$ (شکل ۷).

(b) چند ضلعی محدب $A_1A_2 \dots A_n$ داده شده است. نقطه‌های B_1 و D_2 را روی ضلع A_1A_2 ، نقطه‌های B_2 و D_3 را روی ضلع A_2A_3 ، ...، نقطه‌های B_n و D_1 را روی ضلع A_nA_1 طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_1B_1C_1D_1$ ، $A_2B_2C_2D_2$ ، ...، $A_nB_nC_nD_n$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست A_1C_1 ، A_2C_2 ، A_3C_3 ، ...، A_nC_n در یک نقطه O به هم برسند. ثابت کنید، برابری زیر، از حاصل ضرب طول‌ها، برقرار است:

$$A_1B_1 \cdot A_2A_2 \cdot A_3B_3 \dots A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \dots A_nD_n$$

۱۴۶. (a) دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. نفر اول پشت سرهم، دو ردیف عدد و در هر ردیف ۱۰ عدد می‌نویسد، به نحوی که با این قانون سازگار باشند: اگر عدد b زیر عدد a ، و عدد d زیر عدد c نوشته شده باشد، داشته باشیم $a + d = b + c$. بازی کن دوم، از این قانون اطلاع دارد و می‌خواهد همه عددها را پیدا کند. تصمیم می‌گیرد، پرسش‌هایی از این نوع از بازی کن اول بکند: «در ردیف اول و در جای سوم چه عددی قرار دارد؟» یا «چه عددی در ردیف دوم و جای نهم قرار دارد؟» و غیره. بازی کن دوم، دست کم چند پرسش مطرح کند تا از همه عددها اطلاع داشته باشد؟

(b) در جدول $m \times n$ ، عددهایی را طوری نوشته‌ایم که، برای هر دو

سطر و هر دو ستون، مجموع‌های واقع در دورأس متقابل مستطیلی که تشکیل می‌شود. برابر با مجموع دو عدد دورأس دیگر مستطیل باشد. بخشی از عددها پاك شده‌اند. ولی به كمك عددهای باقی مانده می‌توان آن‌ها را پیدا کرد. ثابت کنید، تعداد عددهای باقی مانده، از $m+n-1$ عدد کمتر نیست. 147^* در يك مربع بدضلع واحد چند دایره رسم کرده‌ایم که، شعاع هر کدام از آن‌ها، از $1/500$ کوچکتر است. فاصله بین هر دو نقطه از هر دو دایره. برابر $1/500$ نیست. ثابت کنید، مساحتی که به وسیله دایره‌ها پوشیده می‌شود. از $34/5$ تجاوز نمی‌کند.

148^* در سه ظرف مقداری آب وجود دارد. مقدار آب هر ظرف، بر حسب لیتر، با عدد درستی بیان می‌شود. تصمیم می‌گیریم. در هر ظرف به اندازه آبی که در آن وجود دارد. از یکی از ظرف‌های دیگر وارد کنیم. ثابت کنید، با چند بار جابجائی، می‌توان یکی از ظرف‌ها را آزاد کرد. (ظرف‌ها به اندازه کافی بزرگ‌اند: هر کدام از آن‌ها. می‌تواند همه آب‌های سه ظرف را در خود جای دهد.)

149 . عددهای p_1, p_2, q_1, q_2 در نابرابری زیر صدق می‌کنند:

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0$$

ثابت کنید، سه جمله‌ای‌های $x^2 + p_1 x + q_1$ و $x^2 + p_2 x + q_2$ دارای ریشه‌های حقیقی هستند و، در ضمن، بین دو ریشه هر سه جمله‌ای، ریشه‌ای از سه جمله‌ای دیگر واقع است.

150 . تصویرهای جسمی بر دو صفحه، دایره شده است. ثابت کنید، این دو دایره، شعاع‌هایی برابر دارند.

151^* روی محیط دایره‌ای، چند عدد نوشته‌ایم. اگر برای چهار عدد متوالی a, b, c, d داشته باشیم: $(a-d)(b-c) < 0$ ، آن وقت، جای دو عدد b و c را عوض می‌کنیم. ثابت کنید، به تعداد محدودی می‌توان این عمل را انجام داد.

152 (a) ثابت کنید، خط راستی که مثلث مفروض را به دو چند ضلعی با محیط‌ها و مساحت‌های برابر تقسیم کند، از مرکز دایره محاطی مثلث

می گذرد.

(b) همین حکم را در مورد چندضلعی دلخواهی ثابت کنید که بتوان یک دایره در آن محاط کرد.

(c) ثابت کنید، همه خط‌های راستی که، هم مساحت و هم محیط مثلث را نصف می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

۱۵۳. ثابت کنید، از بین ۲۵ عدد مثبت مختلف، می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که، حتی یکی از بقیه عددها، برابر مجموع و یا برابر تفاضل این دو عدد نباشد.

۱۵۴. (a) در رأس A_1 از دوازده ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_{12}$ ، علامت منفی، و در بقیه رأس‌ها، علامت مثبت گذاشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به‌طور هم‌زمان، علامت رأس‌های شش رأس متوالی را، عوض کنیم. ثابت کنید، نمی‌توان با تکرار چندبار این عمل، به‌جایی رسید که علامت رأس A_2 منفی و علامت بقیه رأس‌ها مثبت باشد.

(b) همین حکم را، برای حالتی که به‌جای شش رأس متوالی، علامت‌های چهار رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم، ثابت کنید.

(c) همین حکم را برای موردی ثابت کنید که، تصمیم بگیریم، به‌طور هم‌زمان، علامت‌های سه رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم.

۱۵۵. روی صفحه شطرنجی نامتناهی، N خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. ثابت کنید، از این صفحه می‌توان تعداد محدودی مربع، طوری جدا کرد که با دو شرط زیر سازگار باشند:

(۱) همه خانه‌های سیاه در داخل این مربع‌ها باشند؛

(۲) در هر مربع جدا شده، مساحت خانه‌های سیاه از $\frac{1}{5}$ مساحت این

مربع کمتر و از $\frac{4}{5}$ مساحت آن بیشتر نباشد.



مساله‌های از ۱۵۶ تا ۱۵۸، در روز دوم و به دانش‌آموزان کلاس دهم

داده شده است. این توضیح هم، قبل از صورت مسأله‌ها، برای دانش‌آموزان آمده است:

«سه مسأله به شما پیشنهاد می‌شود. حل درست هر يك از این سه مسأله، به اندازه کافی دشوار است و وقت زیادی را می‌گیرد. یکی از این مسأله‌ها را انتخاب کنید و حل آن را، تا هر جا که می‌توانید جلو ببرید.

بعد از حل مسأله، «خلاصه نتیجه‌گیری‌ها» را بنویسید: گزاره‌هایی را که ثابت کرده‌اید نام ببرید، چند مثال در موردهایی که به نتیجه رسیده‌اید بیاورید، نظریه‌هایی را تنظیم کنید که به نظر تان درست می‌آیند.»

✓ ۱۵۶. مکعب بدضلع n را، به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. چند مکعب کوچک را انتخاب و از مرکز هر کدام از آن‌ها، سه خط راست موازی با سه یال مکعب رسم می‌کنیم. دست کم چند مکعب کوچک را باید انتخاب کرد تا، این خط‌های راست، همه مکعب‌های کوچک را خط بزنند؟

(a) پاسخ را، برای مقدارهای کوچک n بدهید: برای $n = 2, 3, 4$.

(b*) سعی کنید، پاسخ را برای $n = 10$ پیدا کنید.

(c*) مسأله را در حالت کلی حل کنید. اگر نتوانستید پاسخ دقیق را به دست آورید، حد بالا و حد پایینی را، برای تعداد مکعب‌های کوچکی که باید

انتخاب کنیم، تخمین بزنید.

(d*) توجه کنید که، این مسأله را، می‌توان به این صورت تنظیم کرد:

همه انتخاب‌های ممکن (x_1, x_2, x_3) را در نظر می‌گیریم که، در آن،

هر يك از حرف‌های x_1, x_2, x_3 می‌توانند یکی از n مقدار $1, 2, \dots, n$

را قبول کنند. دست کم چند گروه سه تایی باید انتخاب کرد تا، برای هر يك

از گروه‌های سه تایی باقی مانده، گروهی از بین سه تایی‌های انتخاب شده

پیدا بشود که با آن تنها در يك مقدار اختلاف داشته باشد (یعنی دو گروه،

تنها در یکی از مختص‌های x_1, x_2, x_3 یا اختلاف داشته باشند)؟ سعی کنید

پاسخ را برای مسأله کلی‌تر پیدا کنید، وقتی که، به جای سه عدد، گروه‌ها را

با چهار عدد یا بیشتر در نظر گرفته باشیم.

۱۵۷ (a) تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ را در نظر می‌گیریم.

ثابت کنید، برای هر نقطه (x, y) ، می توان عددهای درست (m, n) را پیدا کرد که، برای آنها، داشته باشیم:

$$f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leq \frac{1}{2}$$

(b^*) کمترین مقدار از عددهای $f(x-m, y-n)$ را $\tilde{f}(x, y)$ می نامیم. (برای همه عددهای درست m و n). حکم مسأله a به این معناست

که برای هر x و y ، نابرابری $\tilde{f}(x, y) \leq \frac{1}{2}$ برقرار است.

ثابت کنید که، در واقع، نابرابری نیرومندتری برقرار است:

$\tilde{f}(x, y) \leq \frac{1}{3}$. همه نقطه‌هایی را پیدا کنید که، برای آنها، برابری

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{3}$$

برقرار باشد.

(c^*) این تابع را در نظر می گیریم:

$$f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2, \quad (0 \leq a \leq 2)$$

عدد c را، در بستگی با a ، طوری پیدا کنید که، به ازای همه (x, y) ها، نابرابری $|f_a(x, y)| \leq c$ برقرار باشد. بکوشید ارزیابی دقیق را پیدا کنید.

۱۵۸. کلید با دو ورودی و دو خروجی را می توان در دو موقعیت

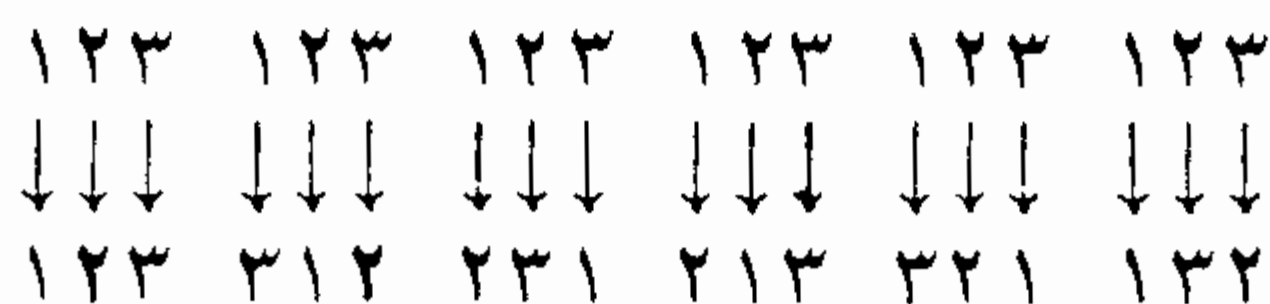
مختلف قرار داد (شکل ۸-۸).

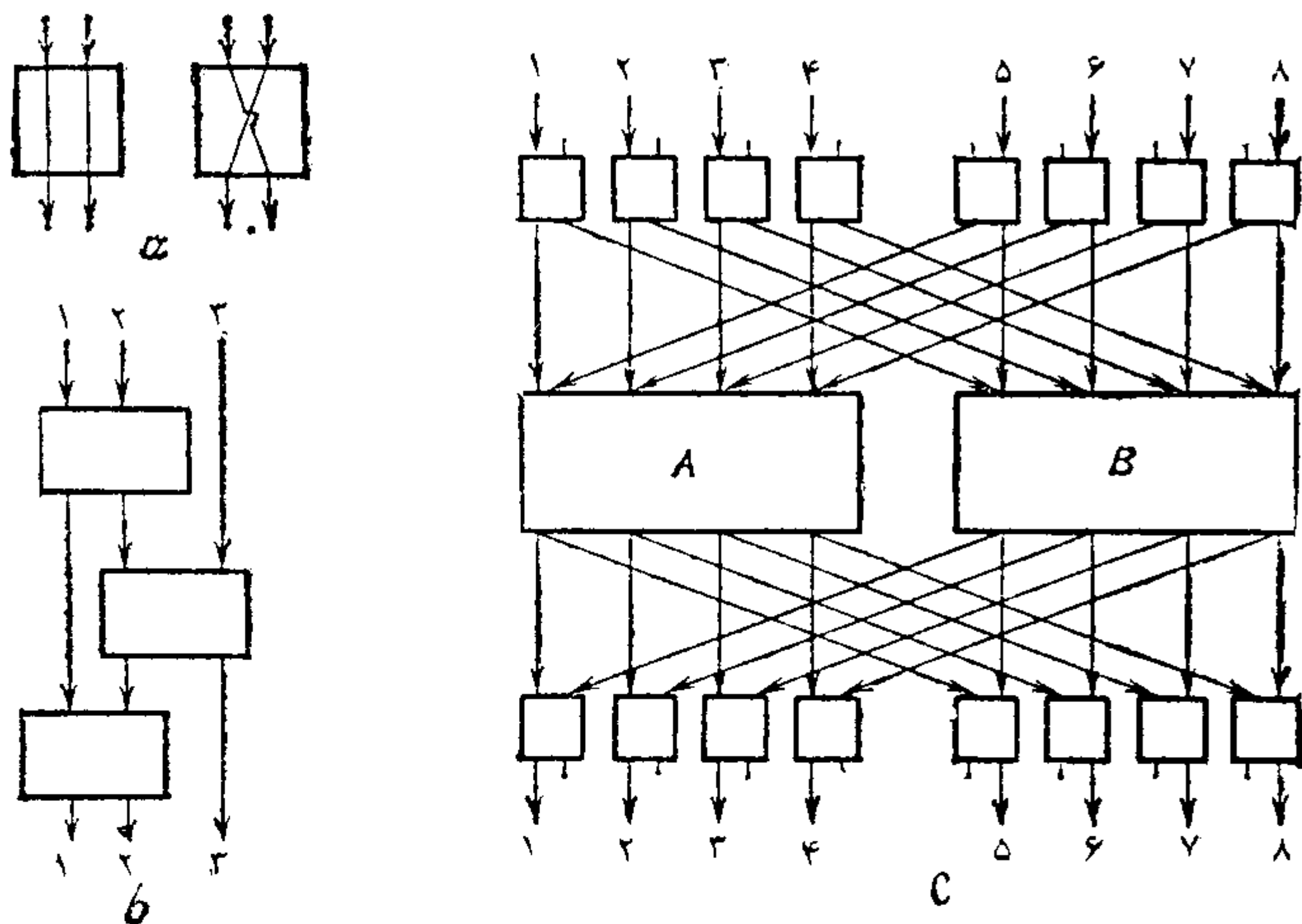
در شکل ۸-۸، طرح ارتباط تلفنی با سه ورودی و سه خروجی داده

شده است، که ویژگی «همه کاره بودن» را دارد: با تغییر دادن وضع کلید،

می توان به هر يك از شش حالتی که سه ورودی را به سه خروجی مختلف وصل

می کند، رسید، یعنی





شکل ۸

(این را آزمایش کنید. توجه کنید که، تعداد حالت‌های مختلف این طرح، برابر است با $2^3 = 8$ ، زیرا هر کلید می‌تواند در دو وضع قرار گیرد.)

(a) طرح مربوط به چهار ورودی و چهار خروجی را بسازید، بد نحوی که «همه‌کاره» باشد، یعنی امکان هر یک از 2^4 اتصال ممکن ورودی-ها و خروجی‌ها را فراهم کند.

(b) حداقل تعداد کلیدهایی که برای این طرح لازم می‌شود، چقدر است؟
 (c*) وقتی که با n ورودی و n خروجی سروکار داشته باشیم، طرحی را که، به کمک آن، امکان همه $n!$ اتصال n ورودی با n خروجی مختلف فراهم شود، «طرح همه‌کاره مرتبه n » می‌نامیم.

در شکل ۸-۱، طرحی با هشت ورودی و هشت خروجی داده شده است که، در آن، *A* و *B*، «همه‌کاره مرتبه ۴» هستند. ثابت کنید، این طرح «همه‌کاره مرتبه ۸» است.

حد بالا و حد پایین تعداد کلیدها را در «طرح همه‌کاره مرتبه n » تخمین

بزنید.

ششمین المپیاد سراسری شوروی

سال ۱۹۷۲ (چه لیانپسک)

روز دوم			روز اول				کلاس
۱۶۸	۱۶۷	۱۰۶۶	۱۶۱	۱۶۰	۱۵۹	:۸	
۱۷۱	۱۷۰	۱۰۶۹	۱۶۴	۱۶۱	۱۶۳	۱۶۲a :۹	
۱۷۳	۱۷۲	۱۰۶۶	۱۶۴	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۲b :۱۰	

۱۵۹. M را وسط ضلع AD و N را وسط ضلع BC در مستطیل $ABCD$ گرفتاریم. روی امتداد پاره خط راست CD ، و از طرف D ، نقطه P را انتخاب کرده‌ایم. محل برخورد خط‌های راست PM و AC را Q می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\widehat{QNM} = \widehat{MNP}$$

۱۶۰. روی خط راستی، ۵۰ پاره خط راست داده شده است. ثابت کنید، دست کم یکی از دو حکم زیر درست است:
الف) هشت پاره خط راست پیدا می‌شود که دارای نقطه مشترکی هستند؛

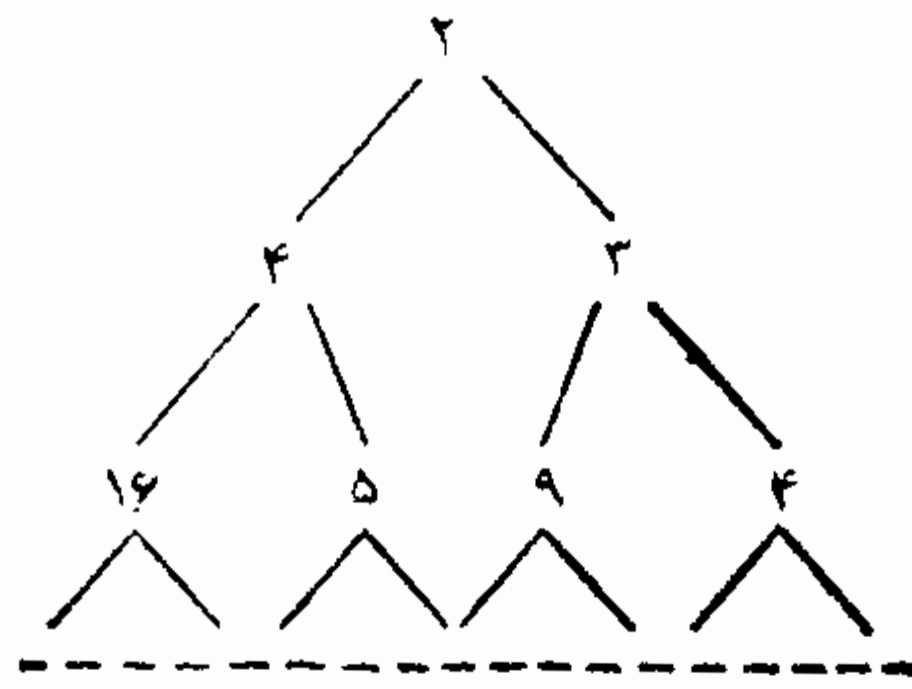
ب) هشت پاره خط راست وجود دارد که، هیچ دو تایی از آنها، نقطه مشترکی ندارند.

۱۶۱. بزرگترین عدد درست x را پیدا کنید که، به‌ازای آن، عدد

$$4^{27} + 4^{1000} + 4^x$$

برابر با مجذور یک عدد درست باشد.

۱۶۲. a فرض کنید a ، m و n ، سه عدد طبیعی باشند و $a > 1$. ثابت کنید، اگر $a^m + 1$ بر $a^n + 1$ بخش پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش پذیر است.
ب) فرض کنید، a ، b ، m و n ، عددهایی طبیعی باشند؛ در ضمن، a و b نسبت به هم اول و $a > 1$. ثابت کنید، اگر $a^m + b^m$ بر $a^n + b^n$ بخش پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش پذیر است.



شکل ۹

۱۶۳ ✓ جدولی مثلثی را، با قانون زیر ساختادیم: در سطر بالا، عدد طبیعی a را می‌نویسیم، سپس، زیر هر عدد k ، در سمت چپ k^2 ، و در سمت راست $k+1$ را قرار می‌دهیم. مثلاً، به ازای $a=2$ ، جدولی به دست می‌آید که در شکل ۹ نشان داده‌ایم. ثابت کنید، در هر سطر این جدول، همهٔ عددها با هم اختلاف دارند.

۱۶۴* چند مربع داده شده است که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با ۱. ثابت کنید، می‌توان همهٔ این مربع‌ها را در مربعی به مساحت ۲ جا داد، بدون این که روی هم قرار گیرند.

۱۶۵. O محل برخورد قطرهای، در چهارضلعی محدب $ABCD$ است. ثابت کنید، خط راستی که از نقطه‌های برخورد میان‌های دو مثلث AOB و COD می‌گذرد، بر خط راستی که از نقطه‌های برخورد ارتفاع‌های دو مثلث BOC و AOD می‌گذرد، عمود است.

۱۶۶ ✓ هر يك از نه خط راست، مربع را به دو چهارضلعی تقسیم کرده‌اند که، نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر ۳:۲ شده است. ثابت کنید، دست کم سه خط راست، از این نه خط راست، از يك نقطه می‌گذرند.

۱۶۷. هفت ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ، در يك دایره محاط شده است. ثابت کنید، اگر مرکز این دایره، در درون هفت ضلعی باشد، آن وقت، مجموع زاویه‌های رأس‌های A_1 ، A_3 و A_5 ، از ۴۵۰ درجه کمتر است.

۱۶۸* ✓ دو نفر، به این بازی مشغول‌اند. اولی يك رقم را نام می‌برد، دیگری، بنا به نظر خود، آن را به جای یکی از ستاره‌ها، در تفاضل زیر

— * * * *

* * * *

بعد اولی رقم دیگری را نام می‌برد و دومی آن را به جای ستاره دیگری می‌گذارد؛ این روند ۸ بار تکرار می‌شود تا همه ستاره‌ها به رقم تبدیل شوند. اولی می‌خواهد تا آنجا که ممکن است، به تفاضل بزرگتری برسد، در حالی که تمایل دومی به هر چه کوچکتر بودن تفاضل است. ثابت کنید:

(a) دومی می‌تواند رقم‌ها را طوری قرار دهد که، بدون ارتباط بانوع رقم‌هایی که اولی نام برده است، تفاضل حاصل از ۴۰۰۰ تجاوز نکند.
 (b) اولی می‌تواند رقم‌هایی را نام ببرد که، بدون ارتباط با این که این رقم‌ها را دومی در کجا قرار می‌دهد، تفاضل حاصل کمتر از ۴۰۰۰ نباشد.

۱۶۹. x و y را عددهایی مثبت و s را کوچکترین عدد از بین عددهای x ، $y + \frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ فرض می‌کنیم. حداکثر مقدار s چقدر می‌تواند باشد؟ بد ازای چه مقدارهایی از x و y ، مقدار s به این حداکثر می‌رسد؟

۱۷۰. نقطه O ، در درون چندضلعی محدب طوری انتخاب شده است که، با هر دو رأس چندضلعی، يك مثلث متساوی الساقین می‌سازد. ثابت کنید، این نقطه، از رأس‌های چندضلعی، به يك فاصله است.

۱۷۱. آیا می‌توان عددهای ۰، ۱ و ۲ را در خانه‌های يك جدول شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ طوری قرار داد که، در هر مستطیل ۳×۴ آن، سه تا صفر، چهار تا واحد و پنج تا دو وجود داشته باشد؟

۱۷۲. مجموع عددهای مثبت x_1, x_2, \dots, x_n ، برابر واحد است. s را بزرگترین عدد از بین عددهای زیر می‌گیریم:

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}$$

حداقل ممکن عدد S را پیدا کنید. به ازای چه مقدارهایی از x_1, x_2, \dots, x_n ، به این حداقل می‌رسیم؟

۱۷۳* بعد از پایان يك دور بازی‌ها كی، معلوم شد، برای هر گروهی از تیم‌ها، می‌توان تیمی را پیدا کرد (که ممکن است جزو همین گروه تیم‌ها باشد)، به نحوی که در بازی با تیم‌های این گروه، امتیازهایی کسب کرده باشد که، تعداد آن‌ها، عددی فرد باشد. ثابت کنید، تعداد تیم‌هایی که در این دور با هم مسابقه داده‌اند، عددی زوج است. (باخت، ۰ امتیاز؛ تساوی، ۱ امتیاز و برد، ۲ امتیاز دارد.)

هفتمین المپیاد سراسری شوروی

سال ۱۹۷۳ (کیشی‌نو)

کلاس	روز اول	روز دوم
۸:	۱۷۴a ۱۷۵ ۱۷۶	۱۸۲ ۱۸۳ ۱۸۴
۹:	۱۷۴b ۱۷۷ ۱۷۸	۱۷۹ ۱۸۵ ۱۸۶
۱۰:	۱۸۰ ۱۷۷ ۱۸۱	۱۸۷ ۱۸۸ ۱۸۴

۱۷۴. برای تعیین کیفیت ۱۴ سکه به قاضی مراجعه کردند. متخصص کشف کرد که سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم، واقعی‌اند. قاضی فقط این را می‌داند که، سکه‌های تقلبی يك وزن دارند و سکه‌های واقعی هم، هم وزن‌اند؛ در ضمن آگاه است که يك سکه تقلبی از يك سکه واقعی سبک‌تر است. متخصص، يك ترازو در اختیار دارد، ولی وزندهایی در اختیار او نیست.

(a) متخصص می‌خواهد به قاضی ثابت کند که سکه‌های اول تا هفتم، تقلبی‌اند. چگونه می‌تواند، تنها با سه بار استفاده از ترازو، به این امر توفیق یابد؟

(b) ثابت کنید، متخصص می‌تواند، با سه بار استفاده از ترازو، چیز بیشتری را ثابت کند: او می‌تواند ثابت کنید، سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم واقعی‌اند.

✓ ۱۷۵. ثابت کنید، عدد نه رقمی که، در آن، از همه رقم‌ها به جز صفر استفاده شده است و، در ضمن، رقم آخر آن برابر ۵ است، نمی‌تواند مجذور يك عدد درست باشد.

✓ ۱۷۶. n نقطه داده شده است و $n > 4$. ثابت کنید، می‌توان این نقطه‌ها را، با پیکان چنان به هم وصل کرد که، از هر نقطه به هر نقطه دیگر، به کمک يك یا دو پیکان رسید (هر دو نقطه را می‌توان با پیکانی به هم وصل کرد که تنها يك جهت داشته باشد؛ حرکت روی هر پیکان، تنها در مسیری ممکن است که با جهت آن مشخص شده است).

✓ ۱۷۷. زاویه به‌راس O و دایره‌ای که بر ضلع‌های این زاویه در نقطه‌های A و B مماس است، رسم شده‌اند. از نقطه A ، نیم‌خط راستی موازی OB رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه C قطع کند. پاره‌خط راست OC دایره را در نقطه دیگر E قطع کرده است و خط‌های راست AE و OB در نقطه K به هم رسیده‌اند. ثابت کنید: $OK = KB$.

✓ ۱۷۸. عددهای حقیقی a ، b و c چنان‌اند که، برای هر مقدار x واقع در بازه $[-1, 1]$ ، این نابرابری برقرار است:

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1$$

ثابت کنید، به ازای همین مقادیر x ، نابرابری زیر هم برقرار است:

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2$$

✓ ۱۷۹. فدراسیون تنیس، به تنیس‌بازان عضو خود، شماره داده است: به بهترین بازی‌کن، شماره اول، به نفر بعدی از لحاظ قدرت بازی، شماره دوم و غیره. می‌دانیم، تنیس بازی که با رقیب خود، بیش از ۲ شماره اختلاف داشته باشد، همیشه پیروز می‌شود. دورهایی از مسابقه، که در آن ۱۰۲۴

تنیس باز شرکت کرده بودند، به شیوه المپیک برگزار شد: بنا بر قرعه، هر دو نفر با هم بازی می‌کنند، بعد برندگان دور اول در گروه‌های دوفنری به‌زور-آزمایی می‌پردازند و غیره، به نحوی که تعداد بازی‌کنان هر دور، نصف تعداد بازی‌کنان دور قبل است. به این ترتیب، بعد ازده دور، قهرمان مسابقه معلوم می‌شود. قهرمان مسابقه، حداکثر چه شماره‌ای می‌تواند داشته باشد؟

۱۸۰. سه جمله‌ای $f(x) = ax^2 + bx + c$ چنان است که، معادله $f(x) = x$ ، جواب حقیقی ندارد. ثابت کنید، معادله $f(f(x)) = x$ هم، دارای ریشه حقیقی نیست.

۱۸۱. روی کاغذ شطرنجی نامتناهی سفیدی، n خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. در هر لحظه زمانی $t = 1, 2, \dots$ ، به‌طور هم‌زمان و طبق قاعده زیر، خانه‌های صفحه شطرنجی، تغییر رنگ می‌دهند: هر خانه K به رنگی درمی‌آید که دست‌کم دو خانه از سه خانه K ، خانه سمت چپ و خانه سمت راست آن، در مرحله قبل، آن رنگ را داشته‌اند (اگر در مرحله قبل، دو خانه سفید بوده‌اند، K به رنگ سفید در می‌آید و اگر دو خانه در مرحله قبل، رنگ سیاه داشته‌اند، K سیاه می‌شود).

(a) ثابت کنید، بعد از گذشت زمان معینی، روی صفحه شطرنجی، خانه سیاه باقی نمی‌ماند.
(b) ثابت کنید، از بین رفتن خانه‌های سیاه، به بعد از لحظه $t = n$ ، موقوف نمی‌شود.

۱۸۲. روی ضلع‌های مثلث ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، سه مثلث متشابه با هم AC_1B ، BA_1C و CB_1A را، در بیرون مثلث و با زاویه‌های حاده ساخته‌ایم؛ در ضمن

$$\widehat{AB_1C} = \widehat{ABC_1} = \widehat{A_1BC}, \quad \widehat{BA_1C} = \widehat{BAC_1} = \widehat{B_1AC}$$

(a) ثابت کنید، دایره‌های محیطی مثلث‌های AC_1B و BA_1C ، CB_1A در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.
(b) ثابت کنید، خط‌های راست AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم، در همین

نقطه به هم می‌رسند.

۱۸۳. N نفر با هم آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی از آن‌ها را طوری با هم آشنا کنیم که، وقتی سه نفر را به دلخواه از بین این N نفر انتخاب کردیم، تعداد آشنای آن‌ها، یکسان نباشد. ثابت کنید، برای هر N ، می‌توان به این نتیجه رسید.

۱۸۴. شاه صفحه 8×8 شطرنج را طی کرده است، به نحوی که در هر میدان درست یکبار بوده است و با حرکت آخر به میدان اولیه برگشته است (شاه، طبق قانون عادی شطرنج حرکت می‌کند). وقتی که مرکز میدان‌هایی را که شاه پشت سر هم پیموده است، به هم وصل کردیم، خط شکسته بسته‌ای به دست آمد که خودش را قطع نکرده است.

(a) مثالی پیدا کنید که شاه درست ۲۸ حرکت، در جهت افقی و قائم، انجام داده باشد.

(b) ثابت کنید، که شاه نمی‌تواند کمتر از ۲۸ حرکت داشته باشد.
(c) حداکثر و حداقل طول مسیری که شاه طی می‌کند، چقدر است، به شرطی که طول ضلع یک خانه صفحه شطرنج، برابر واحد باشد؟
۱۸۵. مثلی با مساحت واحد و ضلع‌های a ، b و c داده شده است. می‌دانیم:

$$a \geq b \geq c$$

ثابت کنید: $b \geq \sqrt{2}$.

۱۸۶. یک n ضلعی محدب، که هیچ دو ضلعی از آن با هم موازی نیستند، و نقطه‌ای در درون آن داده شده است. ثابت کنید، از این نقطه، نمی‌توان بیش از n خط راست رسم کرد، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، مساحت n ضلعی را نصف کند.

۱۸۷. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 عددهایی مثبت اند. ثابت کنید:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq$$

$$\geq 4(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1)$$

۱۸۸. ۴ نقطه، غیر واقع بر یک صفحه، در فضا داده شده‌اند. چند متوازی‌السطوح وجود دارد، به نحوی که، این چهار نقطه، راس‌هایی از آن باشند؟

هشتمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۴ (ایروان)

روز دوم				روز اول				کلاس
۲۰۰۰a	۱۹۹	۱۹۸	۱۹۷	۱۹۱	۱۹۰	۱۸۹a, b, c	:۸	
۲۰۰۰b	۲۰۲	۲۰۱	۱۹۳	۱۸۹d	۱۹۲	۱۹۰	:۹	
۲۰۰۰b	۲۰۴	۲۰۳	۱۹۳	۱۹۶	۱۹۵	۱۹۴	:۱۰	

۱۸۹. روی هر یک از کارت‌ها عدد «+۱» یا «-۱» نوشته شده است. سه کارت را انتخاب می‌کنیم و می‌پرسیم: حاصل ضرب عددهای روی این کارت‌ها، چقدر است؟ (از خود عددها، اطلاعی به ما نمی‌دهند.) حداقل چند بار باید این پرسش را تکرار کرد تا حاصل ضرب عددهای روی همه کارت‌ها را بدانیم، به شرطی که تعداد کارت‌ها: a) ۳۰؛ b) ۳۱؛ c) ۳۲ باشد؟ در هر حالت ثابت کنید، با تعداد کمتری پرسش، نمی‌توان به نتیجه رسید.

d) روی محیط دایره‌ای، ۵۰ عدد نوشته شده است که، هر کدام از آن‌ها، برابر «+۱» یا «-۱» است. می‌خواهیم، حاصل ضرب همه این عددها را بدانیم. با هر پرسش، می‌توان به حاصل ضرب سه عدد مجاور هم، پی برد، حداقل چند پرسش لازم است؟

۱۹۰. بین عددهای به صورت $5^k - 3^k$ ، کوچکترین عدد را، از لحاظ قدر مطلق، پیدا کنید (k و l، عددهایی طبیعی‌اند). ثابت کنید، عددی را که پیدا کرده‌اید، به واقع کوچکترین است.

۱۹۱. a) هر یک از ضلع‌های یک شش ضلعی، محدب، طولی بزرگتر از واحد دارد. آیا همیشه، در این شش ضلعی، می‌توان قطری با طول بزرگتر از ۲ پیدا کرد؟

(b) در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ ، طول هر يك از قطرهای AD ، BE و CF از ۲ بیشتر است. آیا، در این شش ضلعی، همیشه می توان ضلعی با طول بزرگتر از واحد پیدا کرد؟

۱۹۲. دو دایره، به شعاع های R و r ، مماس خارج اند. دوزنقه های مختلف $ABCD$ را طوری می سازیم که، هر يك از دایره ها، بر هر دو ساق و یکی از قاعده های دوزنقه مماس باشند. حداقل طول ساق AB چقدر است؟

۱۹۳* روی صفحه، n بردار داده شده است که طول هر کدام از آنها، برابر واحد است. مجموع این n بردار، برابر صفر شده است. ثابت کنید، این بردارها را می توان طوری شماره گذاری کرد که به ازای هر $n, \dots, 2, 1, k$ ، مجموع k بردار اول، طولی بیشتر از ۲ نداشته باشد.

۱۹۴. به ازای کدام عددهای حقیقی a, b و c ، برابری

$$|ax+by+cz| + |bx+cy+az| + |cx+ay+bz| = |x| + |y| + |z|$$

برای همه عددهای حقیقی x و y و z برقرار است؟

۱۹۵. مربع $ABCD$ مفروض است. نقطه های P و Q ، به ترتیب، بر ضلع های AB و BC واقع اند و در ضمن $BP = BQ$. H را پای عمودی می گیریم که از B بر پاره خط راست PC رسم شده است. ثابت کنید، زاویه DHQ برابر ۹۰ درجه است.

۱۹۶. چند نقطه قرمز و چند نقطه آبی داده شده است. برخی از آنها را، با پاره خط های راست به هم وصل کرده ایم. يك نقطه را در نظر می گیریم و در حالتی که بیش از نیمی از پاره خط های راست متصل به آن، به نقطه هایی منتهی شده باشند که رنگی مخالف رنگ نقطه مفروض دارند، نقطه مفروض را «ویژه» می نامیم. تصمیم می گیریم، نقطه های «ویژه» را تغییر رنگ بدهیم: در هر گام، یکی از نقطه های ویژه را انتخاب می کنیم و رنگ آن را، بدرنگ مخالف خود درمی آوریم. ثابت کنید، بعد از چند گام، نقطه «ویژه ای» باقی نمی ماند.

۱۹۷. عددهای طبیعی n و k را طوری پیدا کنید که عدد n^k دارای

k رقم و عدد k^k دارای n رقم باشد.

۱۹۸. روی ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه CA و CB از مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC ، به ترتیب، نقطه‌های D و E را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $CD = CE$. امتداد عمودهای وارد از نقطه‌های D و C بر خط راست AE ، به ترتیب، وتر AB را در K و L قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $KL = LB$.

۱۹۹. دو نفر، روی صفحه شطرنجی 8×8 ، «موش و گربه» بازی می‌کنند. اولی يك مهره دارد (موش)، و دومی دارای چند مهره است (گربه‌ها). حرکت همه مهره‌ها، یکسان است: به راست، به چپ، به طرف بالا و به طرف پایین؛ و در هر حرکت يك خانه. اگر موش به یکی از خانه‌های کناری برسد، می‌تواند از صفحه به بیرون برود. اگر موش و گربه در يك خانه قرار گیرند، گربه، موش را می‌خورد.

بازی کن‌ها، به نوبت، حرکت می‌کنند؛ در ضمن دومی، در هر حرکت خود، همه گربه‌ها را با هم حرکت می‌دهد (البته، گربه‌های مختلف، می‌توانند در جهت‌های مختلف حرکت کنند). حرکت اول را، موش آغاز می‌کند. کوشش موش در این است که از صفحه بیرون برود، و گربه‌ها می‌خواهند، قبل از فرار موش، به او دسترسی پیدا کنند.

(a) تعداد گربه‌ها را، دو تا می‌گیریم. موش در یکی از خانه‌ها - البته، به جز خانه‌های کناری، قرار دارد. آیا می‌توان گربه‌ها را در کناره‌های صفحه طوری جا داد که آنها، بتوانند موش را بخورند؟

(b) سه گربه داریم، ولی موش می‌تواند، بار اول، دو حرکت متوالی انجام دهد. ثابت کنید، گربه‌ها در هر نقطه‌ای باشند، موش می‌تواند خود را از دست آنها نجات دهد.

۲۰۰. ثابت کنید، عددهای $1, 2, 3, \dots, 32$ را می‌توان طوری ردیف کرد که، برای هر دو عددی از این ردیف، نصف مجموع آنها، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آنها، نباشد.

(b) آیا صد عدد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰ را می‌توان طوری ردیف کرد که، نصف مجموع هر دو عدد دلخواه از این ردیف، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آنها، نباشد؟

۲۰۱. عدد سه رقمی A دارای این ویژگی است: اگر واسطه حسابی همه عددهایی را پیدا کنیم که از عدد A و با جا به جا کردن رقم‌های آن به دست آمده‌اند، دوباره خود عدد A به دست می‌آید. همه عددهای A را پیدا کنید.

۲۰۲. چندضلعی محدب مفروض است و در آن، نمی‌توانیم هیچ کدام از مثلث‌های به مساحت واحد را جا بدهیم. ثابت کنید، این چندضلعی را می‌توان در مثلثی با مساحت ۴ جاداد.

۲۰۳. تابع f ، در بازه $0 \leq x \leq 1$ داده شده است. می‌دانیم، این تابع، غیرمنفی است و در ضمن $f(1) = 1$. به جز این، برای هر دو عدد x_1 و x_2 ، با شرط $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$ و $x_1 + x_2 \leq 1$ ، داریم:

$$f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$$

(a) ثابت کنید، برای هر تابع f از این گونه، به ازای هر مقداری از x ، نابرابری $f(x) \leq 2x$ برقرار است.

(b) آیا درست است که، برای هر مقدار x

$$f(x) \leq 1/9x$$

۲۰۴. مثلث ABC با مساحت واحد داده شده است. A_1 ، B_1 و C_1 را، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC ، CA و AB می‌گیریم. اگر K ، L و M ، به ترتیب، نقطه‌هایی واقع بر پاره‌خط‌های راست AB_1 ، CA_1 و BC_1 باشند، بخش مشترک مثلث‌های $A_1B_1C_1$ و KLM ، چه مقدار مساحتی می‌تواند داشته باشد؟

نهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۵ (ساراتوف)

روز دوم	روز اول	کلاس
۲۱۵ ۲۱۴ ۲۱۳	۲۰۸a ۲۰۷ ۲۰۶ ۲۰۵a	:۸
۲۱۷ ۲۱۵ ۲۱۶	۲۰۸b ۲۱۰ ۲۰۶ ۲۰۹	:۹
۲۱۹ ۲۱۸ ۲۱۴	۲۰۸ ۲۰۵b ۲۱۲ ۲۱۱	:۱۰

۲۰۵. a) مثلث ABC را، دور مرکز دایره محاطی آن، به اندازه زاویدای کوچکتر از ۱۸۰ درجه، دوران داده‌ایم تا مثلث $A_1B_1C_1$ به دست آید. پاره‌خط‌های راست AB و A_1B_1 در نقطه C_2 . پاره‌خط‌های راست BC و B_1C_1 در نقطه A_2 و پاره‌خط‌های راست CA و C_1A_1 در نقطه B_2 یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، دو مثلث ABC و $A_2B_2C_2$ متشابه‌اند.

b) چهارضلعی $ABCD$ را که در دایره‌ای محاط شده است، دور مرکز دایره محیطی آن، به اندازه زاویدای کمتر از ۱۸۰ درجه دوران داده‌ایم تا چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ به دست آید. محل برخورد خط‌های راست AB و A_1B_1 ، BC و B_1C_1 ، CD و C_1D_1 ، DA و D_1A_1 را پیدا می‌کنیم. ثابت کنید، چهار نقطه اخیر، راس‌های یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲۰۶. ✓ مثلث ABC به مساحت واحد داده شده است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، اولی نقطه X را روی ضلع AB انتخاب می‌کند، بعد دومی نقطه Y را روی BC و سپس اولی نقطه Z را روی AC در نظر می‌گیرند. اولی می‌خواهد، تا آن جا که ممکن است، مساحت مثلث XYZ بیشتر باشد، در حالی که دومی علاقه‌مند است به حداقل مساحت برای این مثلث برسد. اولی، حداکثر به چه مساحتی دست می‌یابد؟

۲۰۷. راس‌های یک ۳۲ ضلعی محدب در نقطه‌های گرهی یک صفحه کاغذ شطرنجی قرار دارند. اگر طول ضلع هر خانه برابر واحد باشد، حداقل محیط ۳۲ ضلعی چقدر است؟

۲۰۸. ✓ a) می‌خواهیم در یک جدول مربعی ۷×۷ ، مرکزهای k خانه را طوری علامت بگذاریم که، اگر به هر ترتیبی چهار نقطه دلخواه از بین

آن‌ها انتخاب کنیم، رأس‌های يك مستطیل با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های مربع نباشند. k حداکثر چه عددی می‌تواند باشد تا به این امر توفیق یابیم؟
 (b) همین مسأله را در مورد مربع ۱۳×۱۳ خانه‌ای حل کنید.

۲۰۹. در شش ضلعی مجذب $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ، وسط قطرهای $A_2 A_6$ ، $A_1 A_3$ ، $A_2 A_4$ ، $A_3 A_5$ و $A_4 A_6$ را، به ترتیب، B_1 ، B_2 ، B_3 ، B_4 و B_5 می‌نامیم. ثابت کنید، اگر شش ضلعی $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$ مجذب باشد، مساحت آن، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت شش ضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ است.

۲۱۰. ثابت کنید، با رقم‌های ۱ و ۲ می‌توان 2^{n-1} عدد ساخت، به نحوی که هر کدام از آن‌ها دارای 2^n رقم باشد و، در ضمن، هر دو عدد، دست کم در 2^{n-1} مرتبه خود، با هم اختلاف داشته باشند.

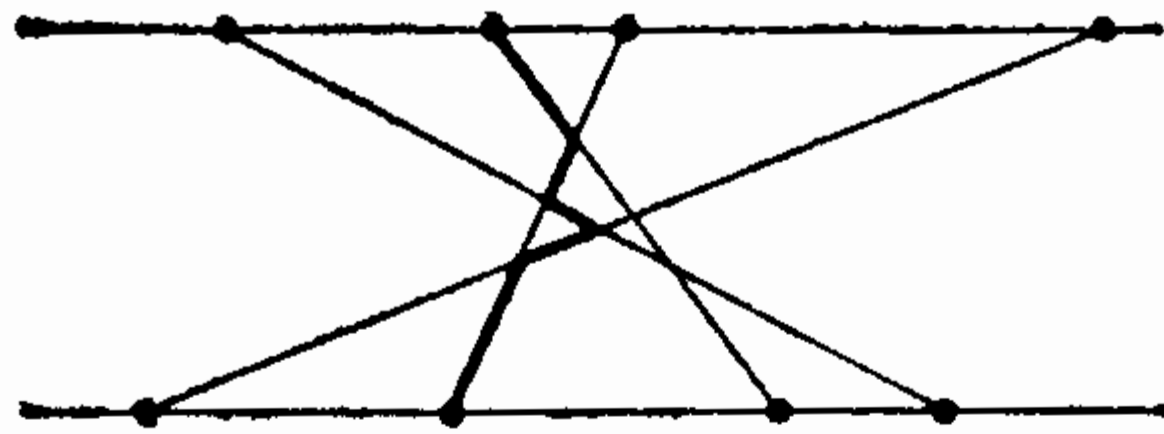
۲۱۱. مجموعه‌ای متناهی از چندضلعی‌ها، در صفحه داده شده است، به نحوی که هر دو تا از آن‌ها، دارای نقطه مشترکی هستند. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که همه این چندضلعی‌ها را قطع می‌کند.

۲۱۲. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a ، b و c ، این نابرابری برقرار است:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

۲۱۳. سه مگس روی ضلع‌های مثلث ABC طوری حرکت می‌کنند که، مرکز ثقل مثلثی که تشکیل می‌دهند، تغییر جا نمی‌دهد. ثابت کنید، این نقطه بر مرکز ثقل مثلث ABC منطبق است، به شرطی که بدانیم، یکی از مگس‌ها، روی تمامی محیط مثلث حرکت می‌کند. (مرکز ثقل يك مثلث، در محل برخورد میان‌های آن واقع است.)

۲۱۴. روی تخته سیاه، چنده، ۱ و ۲ نوشته شده است. در هر گام، دو عدد نابرابر را پاک می‌کنیم و، به جای آن‌ها، عدد سوم را می‌نویسیم (به جای ۵ و ۱، عدد ۲؛ به جای ۵ و ۲، عدد ۱ و به جای ۱ و ۲، عدد ۵). ثابت کنید، اگر بعد از چند گام، تنها يك عدد باقی بماند، این عدد بستگی به این



شکل ۱۵

ندارد که گام‌ها را به چه ردیفی برداشته‌ایم.

۲۱۵. روی صفحه، نواری داده شده است که دو مرز آن را، دو خط موازی با هم تشکیل می‌دهند. n خط راست، این نوار را قطع کرده است. هر دو خط راست، در درون نوار، یکدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه خط راستی در یک نقطه به هم نمی‌رسند. همه مسیرهایی را در نظر می‌گیریم که، با آغاز از کناره پایین نوار و روی این خط‌های راست، تا کناره بالایی نوار امتداد دارند. این مسیرها، باید دارای این ویژگی باشند: ضمن عبور از مسیر، همیشه رو به بالا برویم؛ وقتی که به یک نقطه برخورد می‌رسیم، باید روی خط راست دیگری حرکت کنیم (شکل ۱۵). ثابت کنید، بین این مسیرها

(a) دست کم $\frac{n}{4}$ مسیر، بدون برخورد با یکدیگر وجود دارد؛

(b) مسیری وجود دارد که شامل دست کم n پاره خط راست است؛

(c*) مسیری وجود دارد که شامل بیش از $1 + \frac{n}{4}$ پاره خط راست نیست؛

(d*) مسیری وجود دارد که از طریق هر n خط راست می‌گذرد.

[در کلاس هشتم، بخش‌های a، b و d) برای حالت $n = 20$ ؛ و برای

کلاس نهم، بخش‌های b، c و d) در حالت کلی خواسته شده است.]

۲۱۶. عددهای طبیعی k را طوری پیدا کنید که وقتی مکعب به ضلع k را به مکعب‌های به ضلع واحد تقسیم می‌کنیم، بتوان مکعب‌های واحد را طوری به رنگ‌های سیاه و سفید در آورد که، هر مکعب کوچک، درست مجاور با دو مکعب دیگر هم رنگ خود باشد. (دو مکعب را وقتی مجاور هم می‌دانیم که در یک وجه مشترک باشند.)

۲۱۷ ✓ چند جمله‌ای $P(x)$

(a) با ضریب‌های طبیعی؛

(b) با ضریب‌های درست

داده شده است. مجموع رقم‌های عدد $P(n)$ را، در دستگاه عدد نویسی به مبنای ده، a_n می‌نامیم. ثابت کنید، عددی پیدا می‌شود که در دنباله عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ بی‌نهایت بار تکرار شده است.

۲۱۸. در مسابقه قهرمانی جهان و اروپا، ۲۵ تیم شرکت کرده‌اند. در

بین این تیم‌ها، k تیم اروپایی وجود دارد که نتیجه مسابقه‌های بین آن‌ها، به حساب مسابقه اروپائی گذاشته می‌شود. مسابقه در یک دور انجام می‌شود.

حداکثر k را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان این نتیجه را

به دست آورد؛ تیمی که بیشترین امتیاز را در مسابقه اروپایی به دست آورده

است، کمترین امتیاز را در مسابقه جهانی به دست آورده باشد؛ به شرطی که

(a) این مسابقه در هاکی باشد و تساوی هم به حساب آید؛

(b) این مسابقه در والیبال باشد و تساوی به حساب نیاید؟

۲۱۹. (a) عددهای حقیقی a_1, a_2, b_1, b_2 و عددهای مثبت p_1, p_2 ،

q_1, q_2 مفروض‌اند. ثابت کنید، در جدول 2×2

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{p_1 + q_1} & \frac{a_1 + b_2}{p_1 + q_2} \\ \frac{a_2 + b_1}{p_2 + q_1} & \frac{a_2 + b_2}{p_2 + q_2} \end{pmatrix}$$

می‌توان عددی را پیدا کرد که از عدد هم‌سطر خود کمتر و از عدد هم‌ستون خود بیشتر نباشد.

(b*) عددهای حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ و عددهای مثبت

$p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$ مفروض‌اند. جدولی $m \times n$ تشکیل می‌-

دهیم که در هر خورد سطر i ام ($i = 1, 2, \dots, m$) با ستون j ام آن

($j = 1, 2, \dots, n$)، عدد

$$\frac{a_i + b_j}{p_i + q_j}$$

قرار گرفته باشد، ثابت کنید، در این جدول عددی پیدا می‌شود که کمتر از هر عدد هم‌سطر خود و بیشتر از هر عدد هم‌ستون خود نباشد.

دهمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۶ (دوشنبه)

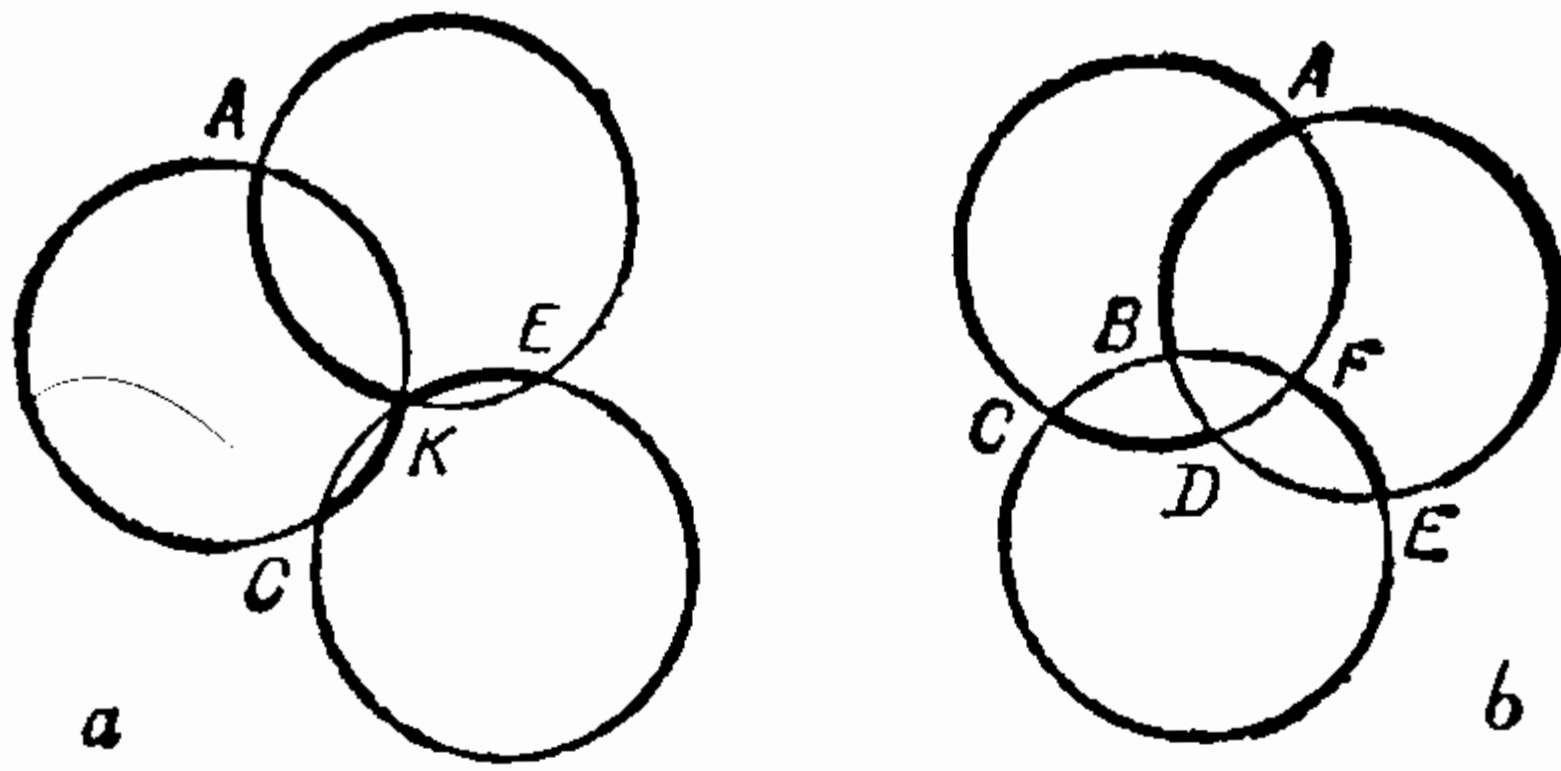
روز دوم	روز اول	کلاس
۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱	۲۲۱ ۲۲۲a.b ۲۲۳	:۸
۲۳۰ ۲۳۲ ۲۳۱	۲۲۴ ۲۲۳ ۲۲۵	:۹
۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۱	۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۵	:۱۰

۲۲۰. ۵۰ ساعتی که درست کار می‌کنند، روی میز قرار دارند. ثابت کنید، لحظه‌ای وجود دارد که، در آن، مجموع فاصله‌های مرکز میز تا انتهای عقربه‌های دقیقه شمار، از مجموع فاصله‌های مرکز میز تا مرکز ساعت‌ها، بیشتر است.

۲۲۱. ۱۰۰۰ عدد را در یک سطر پشت سر هم نوشته‌ایم. زیر این عددها، سطر دوم را با قانون زیر می‌نویسیم: زیر هر عدد a از سطر اول، عددی طبیعی را می‌نویسیم که برابر باشد با تعداد عددهای a در سطر اول. با همین روش، سطر سوم را زیر سطر دوم می‌نویسیم: زیر هر عدد b عددی طبیعی را می‌نویسیم که برابر باشد با تعداد عددهای b در سطر دوم. سپس، با همین روش، سطر چهارم و بعد سطر پنجم و غیره را می‌سازیم.

(a) ثابت کنید، یکی از سطرها، با سطر بعدی خود، یکی درمی‌آید.
(b) دقیق‌تر، ثابت کنید، سطر یازدهم، با سطر دوازدهم، یکی است.
(c) برای سطر اول، نمونه‌ای پیدا کنید که، به ازای آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نباشند.

۲۲۲. سه دایره با شعاع‌های برابر، روی یک صفحه داده شده است.



شکل ۱۱

(a) ثابت کنید، اگر این سه دایره، مثل شکل ۱۱، a از یک نقطه بگذرند، مجموع کمان‌های مشخص شده \widehat{AK} ، \widehat{CK} و \widehat{EK} برابر است با ۱۸۰ درجه. (b) ثابت کنید، اگر سه دایره در وضع شکل ۱۱، b باشند، مجموع

کمان‌های مشخص شده \widehat{AB} ، \widehat{CD} و \widehat{EF} برابر است با ۱۸۰ درجه.

۲۲۳. عددهای طبیعی x_1 و x_2 از ۱۰۰۰۰ کوچکترند. با آغاز از

این دو عدد، دنباله $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را می‌سازیم که، در آن، x_3 برابر است با $|x_1 - x_2|$ ، x_4 برابر است با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_1 - x_3|$$

x_5 برابر است با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_4|, |x_3 - x_4|$$

و به همین ترتیب، برای عددهای بعدی دنباله (هر جمله دنباله، برابر است با کوچکترین عدد از بین قدرمطلق تفاضل‌های دو به‌دوی جمله‌های قبلی). ثابت کنید، در هر حال $x_{21} = 0$.

۲۲۴. آیا می‌توان راس‌های یک مکعب را با عددهای سه رقمی طوری

شماره‌گذاری کرد که، اولاً این عددها تنها با رقم‌های ۱ و ۲ ساخته شده باشند، ثانیاً شماره‌های هر دو راس مجاور، دست کم در دو مرتبه از رقم‌های خود با هم اختلاف داشته باشند؟

۲۲۵*. بردارهای a, b, c, d به مجموع 0 ، روی یک صفحه داده شده‌اند.

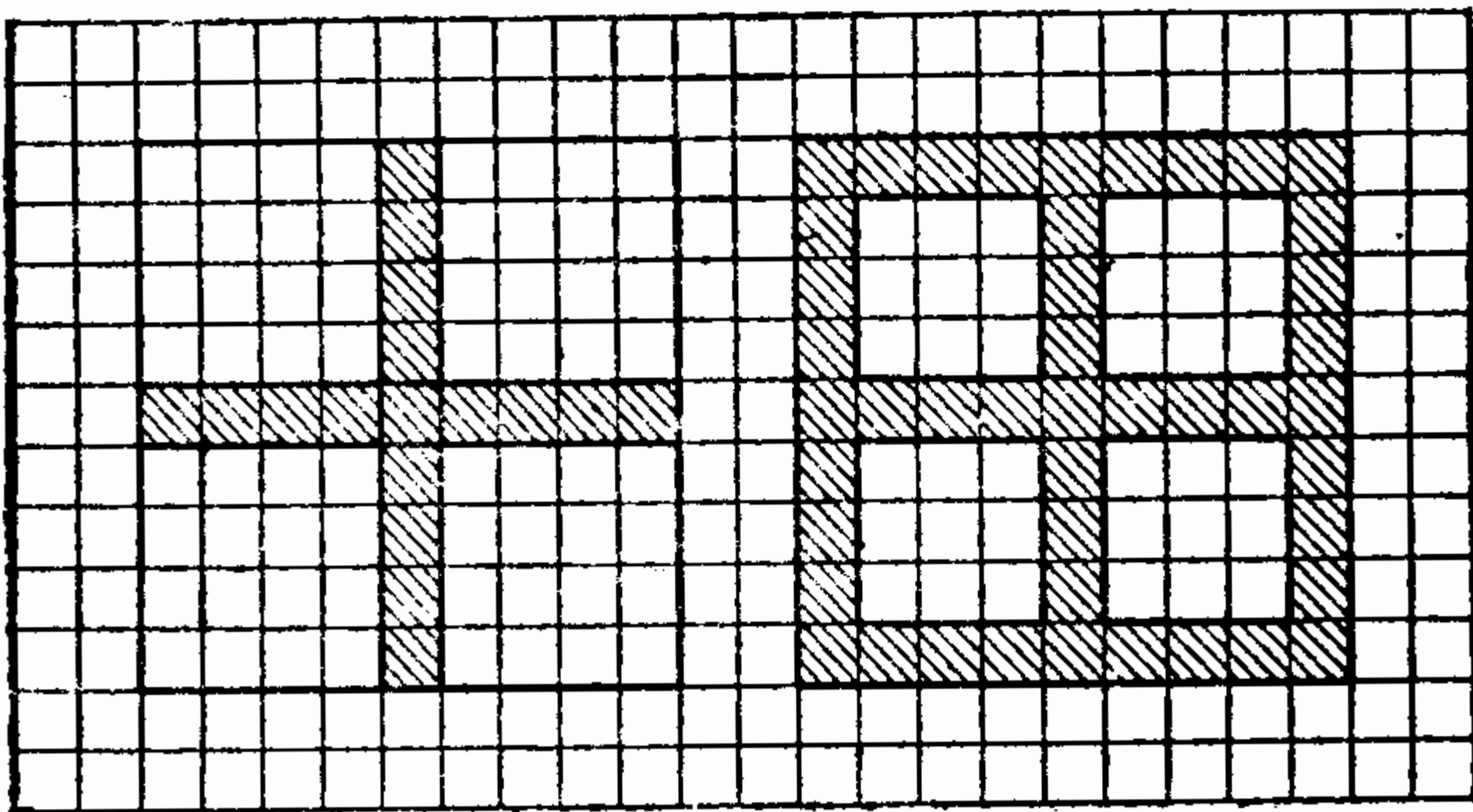
$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a+d| + |b+d| + |c+d|$$

۲۲۶. در ۱۹۷۶ ضلعی منتظم، وسط همه ضلع‌ها و وسط همه قطر‌ها را علامت گذاشته‌ایم. از این نقطه‌ها، حداکثر چند نقطه روی محیط يك دایره‌اند؟

۲۲۷. روی يك صفحه مربع شکل کاغذ، n مستطیل رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های آن‌ها، موازی با ضلع‌های صفحه باشد. بین این مستطیل‌ها، هیچ دو مستطیلی، دارای نقطه درونی مشترك نیستند. ثابت کنید، اگر همه این مستطیل‌ها را از صفحه مربعی شکل کاغذ جدا کنیم، تعداد قطعه‌های بخش باقی‌مانده کاغذ، از $n+1$ تجاوز نمی‌کند.

۲۲۸. روی سه جاده مستقیم، سه پیاده، با سرعت‌هایی ثابت حرکت می‌کنند. در لحظه آغاز حرکت، این سه نفر، روی يك خط راست نیستند. ثابت کنید آن‌ها نمی‌توانند، بیش از دو بار، روی يك خط راست قرار گیرند.

۲۲۹. روی صفحه شطرنجی 99×99 ، شکلی را در نظر گرفته‌ایم (این شکل، در بخش‌های a ، b و c متفاوت است). در هر خانه شکل Φ ، حشره‌ای قرار دارد. در لحظه‌ای، حشره‌ها می‌پرند و دوباره در خانه‌های همان شکل می‌نشینند؛ در ضمن، ممکن است در يك خانه شکل، چند حشره بنشینند. هر دو حشره‌ای که در خانه‌های مجاور هم قرار دارند، بعد از پرواز،



شکل ۱۲
a b

یا دوباره در دوخانه مجاور می‌نشینند و یا هر دو در يك خانه جا می‌گیرند. (دو خانه را، وقتی مجاور هم به حساب می‌آوریم که يك ضلع یا يك رأس مشترك داشته باشند.)

(a) فرض کنید، شکل Φ ، «صلیب مرکزی» باشد، یعنی شکلی که شامل خانه‌های افقی و خانه‌های قائم وسط صفحه شطرنجی است (شکل ۱۲، a). ثابت کنید، در این حالت، حشره‌ای وجود دارد که یا به جای خود برمی‌گردد و یا به خانه مجاور می‌پرد.

(b) آیا این حکم، برای حالتی که Φ به شکل «چارچوب پنجره‌ای» باشد، یعنی وقتی که شامل صلیب مرکزی و همه خانه‌های کناری صفحه باشد، (شکل ۱۲، b)، باز هم درست است؟

(c*) آیا حکم، برای حالتی که شکل Φ ، تمامی صفحه را فرا گرفته باشد، درست است؟

۲۳۰. مثلث را «بزرگ» می‌نامیم، وقتی که طول هر ضلع آن از واحد بیشتر باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، با طول ضلع ۵، داده شده است. ثابت کنید:

(a) از مثلث ABC می‌توان ۱۰۰ مثلث «بزرگ» جدا کرد؛

(b) مثلث ABC را می‌توان، به‌طور کامل، دست‌کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» تقسیم کرد.

(c*) مثلث ABC را می‌توان دست‌کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» طوری تقسیم کرد که، هر دو مثلث «بزرگ» یا متقاطع نباشند، یا تنها يك رأس مشترك داشته باشند و یا ضلع یکی از دو مثلث، ضلع دیگری هم باشد (این نوع تقسیم را، مثلث‌بندی گویند).

(d*) مساله‌های (b) و (c) را، برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ حل کنید.

۲۳۱. عدد طبیعی n مفروض است. دنباله عددهای طبیعی a_1, a_2, \dots, a_k را، برای عدد n ($k \geq n$)، «عام» می‌نامیم، وقتی که بتوان از آن، با خط‌زدن بعضی از جمله‌ها، هر تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n را به دست آورد

(یعنی، هر دنباله‌ای از n عدد که، در آن، هر يك از عددهای ۱، ۲، ...، n یکبار آمده باشد). مثلاً دنباله

$$(۱, ۲, ۳, ۱, ۲, ۳)$$

برای $n=3$ ، يك دنباله «عام» است، ولی دنباله

$$(۱, ۳, ۱, ۲, ۳, ۱)$$

برای $n=3$ ، عام نیست، زیرا با هر حذفی، نمی‌توان تبدیل (۲، ۱، ۳) را از آن به دست آورد. هدف این مساله آن است که برای به دست آوردن تعداد جمله‌های کوتاه‌ترین دنباله عام (با مفروض بودن n)، برآوردی پیدا کنیم.

(a) نمونه‌ای از يك دنباله عام شامل n^2 جمله بدهید.

(b) نمونه‌ای از دنباله عام شامل $n^2 - n + 1$ جمله پیدا کنید.

(c*) ثابت کنید، هر دنباله عام، دست کم دارای $\frac{1}{4}n(n+1)$ جمله است.

(d*) ثابت کنید، به ازای $n=4$ ، کوتاه‌ترین دنباله عام، از ۱۲ جمله تشکیل شده است.

(e*) تحقیق کنید، برای عدد مفروض n ، چگونه می‌توان، کوتاه‌ترین دنباله عام را پیدا کرد. (هیأت داوران مسابقه می‌توانند، دنباله عام را، برای هر n ، با $n^2 - 2n + 4$ جمله بسازد.)

۲۳۲. عدد حقیقی روی محیط دایره نوشته شده است؛ مجموع این n عدد، برابر صفر و یکی از آن‌ها برابر واحد است.

(a) ثابت کنید، دو عدد مجاور وجود دارد که دست کم به اندازه $\frac{4}{n}$ بی‌با هم اختلاف دارند.

(b*) ثابت کنید، عددی وجود دارد که با واسطه حسابی دو عدد مجاور

خود، دست کم به اندازه $\frac{8}{n^2}$ اختلاف دارد.

(c*) ارزیابی بخش (b) را می توان بهتر کرد. سعی کنید، به جای عدد ۸، عدد بزرگتری قرار دهید. به نحوی که حکم مساله، برای همه عددهای طبیعی n برقرار باشد.

(d*) ثابت کنید، برای $n = 30$ ، می توان عددی روی محیط دایره پیدا کرد که، دست کم، به اندازه $\frac{2}{113}$ با واسطه حسابی دو عدد مجاور خود اختلاف داشته باشد. نمونه ای از انتخاب ۳۰ عدد روی محیط دایره بیاورید، به نحوی که اختلاف هیچ عددی با واسطه حسابی دو عدد مجاور خود، بیشتر از $\frac{2}{113}$ نباشد.

۲۳۳. در رأس های n ضلعی منتظم به مرکز O ، عددهای $(+1)$ و (-1) را قرار داده ایم. در گام اول، تصمیم می گیریم علامت همه عددهایی را که در رأس های یک k ضلعی منتظم به مرکز O قرار دارند، عوض کنیم (در ضمن، پاره خط راستی را هم که از O می گذرد، یک دو ضلعی به مرکز O به حساب می آوریم). ثابت کنید. در حالت های (a)، (b) و (c)، می توان انتخاب اولیه $(+1)$ و (-1) را طوری در نظر گرفت که، با برداشتن هر چند گام، به حالتی که همه عددها $(+1)$ باشند، برسیم:

$$(a) \quad n = 15;$$

$$(b) \quad n = 30;$$

(c*) هر عدد دلخواه بزرگتر از ۲؛

(d*) سعی کنید، برای عدد دلخواه n ، حداکثر $K(n)$ ، تعداد ترتیب های مختلف $(+1)$ و (-1) را پیدا کنید که، در بین آنها، نتوان یکی را از دیگری، با هر چند گام، به دست آورد. مثلاً ثابت کنید: $K(200) = 2^{80}$.
۲۳۴*. روی کره به شعاع واحد، دایره عظیمه ای را رسم کرده ایم که آن را، «استوا» می نامیم. به سادگی می توانیم، اصطلاح های جغرافیایی

دیگر را هم به کار بریم: قطب، نصف النهار، مدار.

(a) تابع f را، با متناظر کردن هر نقطه کره با مجذور فاصله این نقطه از صفحه استوا، در نظر می‌گیریم. تحقیق کنید که، این تابع، دارای ویژگی زیر است:

(*) اگر M_1 ، M_2 و M_3 انتهای سه شعاع دو به دو عمود بر هم در

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1$$

کره باشند، آن وقت f عبارت است از تابع غیر منفی دلخواهی روی کره. به نحوی که در همه نقطه‌های استوا به سمت صفر میل می‌کند و، در ضمن، دارای ویژگی (*) است.

(b) M و N را، نقطه‌هایی از يك نصف النهار، واقع در بین قطب شمال و استوا فرض می‌کنیم. ثابت کنید، اگر نقطه M ، دورتر از نقطه N ، نسبت به صفحه استوا باشد، آن وقت $f(M) > f(N)$.

(c) M و N را نقطه‌های دلخواهی از کره می‌گیریم. ثابت کنید، اگر نقطه M ، نسبت به نقطه N ، از صفحه استوا دورتر باشد، آن وقت $f(M) > f(N)$.

(d) ثابت کنید، اگر M و N روی يك مدار باشند، آن وقت

$$f(M) = f(N)$$

(e) ثابت کنید، تابع f ، بر تابعی که در بخش (a) توضیح داده‌ایم، منطبق است.

یازدهمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۷ (تالین)

روز دوم				روز اول				کلاس	
۲۴۶	۲۴۵	۲۴۴a, b	۲۴۳	۲۳۸	۲۳۷b	۲۳۶	۲۳۵	:۸	
۲۵۰	۲۴۹	۲۴۸	۲۴۷	۲۴۰	۲۳۵	۲۳۹	۲۳۷a	:۹	
	۲۴۶	۲۴۴	۲۵۱	۲۳۵	۲۴۲	۲۴۱	۲۳۹	۲۳۷a	:۱۰
	a, c-e								

۲۳۵. يك خط شكسته بسته، كه خودش را قطع نكرده است، روي صفحه داده شده است؛ هيچ سدرأسي از خط شكسته، روي يك خط راست نيستند. دو ضلع غير مجاور آن را، «خاص» مي ناميم. وقتي كه ادامه يكي از آنها، ديگري را قطع كند. ثابت كنيد، تعداد جفت ضلع هاي خاص، عددي زوج است.

۲۳۶. چند نقطه، كه بر يك خط راست واقع نيستند، روي صفحه در نظر مي گيريم و روي هر کدام از آنها، عددي مي نويسيم. مي دانيم، اگر خط راستي از دو يا چند نقطه بگذرد. مجموع همه عددهاي واقع بر آن، برابر صفر مي شود. ثابت كنيد همه عددها برابر صفرند.

۲۳۷. (a) مثلث هاي T_1 و T_2 در دایره ای محاط اند، در ضمن، راس های مثلث T_1 در وسط کمان هایی از دایره قرار دارند که به وسیله راس های مثلث T_2 به وجود آمده اند. ثابت کنید، در شش ضلعی $T_1 \cap T_2$ ، قطر هایی که راس های روبرو را بهم وصل می کنند، با ضلع های مثلث T_1 موازی اند و در يك نقطه به هم می رسند.

(b) پاره خط راستی که وسط کمان های AB و AC از دایره محیطی مثلث ABC را بهم وصل می کند، ضلع های AB و AC را در نقطه های D و K قطع می کند. ثابت کنید. نقطه های A, D, K, O (مرکز دایره محیطی مثلث ABC)، راس های يك لوزی اند.

۲۳۸. روي محیط دایره ای، چند کارت کوچک سیاه و سفید قرار داده ایم. دو نفر، به نوبت، این عمل را انجام می دهند: اولی همه کارت های سیاهی را که در مجاورت خود (ولو در يك طرف) کارت سفیدی دارند بر می دارد و، سپس، دومی همه کارت های سفیدی را بر می دارد که در مجاورت خود کارت سیاهی دارند. این عمل را آن قدر ادامه می دهند تا همه کارت های باقی مانده، از يك رنگ باشند.

(a) فرض کنید، در ابتدا، ۴۰ کارت وجود داشته باشد. آیا ممکن است این وضع پیش آید که بعد از آن که، هر کدام از دو نفر دو حرکت انجام دادند، روي محیط دایره تنها يك کارت باقی بماند؟

(b*) روي محیط دایره هزار کارت وجود دارد. حداقل چند حرکت باید

انجام شود تا روی محیط دایره. فقط يك کارت باقی بماند!

۲۳۹. دنباله عددی نامتناهی $\{a_n\}$ داده شده است. می‌دانیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n \right) = 0$$

ثابت کنید: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

۲۴۰*. در يك کشور، از هر شهر می‌توانیم به هر شهر دیگری برویم، بدون این که از شهرهای دیگر عبور کنیم. قیمت بلیت مسافرت بین هر دو شهر معلوم است. دو نوع مسافرت به همه شهرها را در نظر می‌گیریم. در هر يك از این مسافرت‌ها، به هر شهر، تنها یکبار می‌رویم. در مسیری که برای مسافرت اول انتخاب می‌کنیم، از این اصل پیروی می‌کنیم: آغاز مسیر، يك شهر دلخواه است؛ در هر مرحله، مسیر خود را به شهری از شهرهای باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم که، قیمت بلیت مسافرت به آن جا، نسبت به قیمت بلیت مسافرت به دیگر شهرها کمترین مقدار باشد (اگر چند شهر از این گونه وجود داشته باشد، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم)؛ مسافرت را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا همه شهرها را ببینیم. در مسیر دوم، برای مسافرت، باز هم آغاز حرکت را، شهری دلخواه می‌گیریم، ولی در هر مرحله، برای مسیر بعدی، شهری را انتخاب می‌کنیم که، بلیت مسافرت به آن، نسبت به بقیه شهرهای باقی‌مانده، گران‌تر باشد. ثابت کنید، مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر اول، از مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر دوم، بیشتر نیست.

۲۴۱. در هر يك از راس‌های چندوجهی محدب M ، سه یال به هم رسیده‌اند. می‌دانیم، هر وجه این چندوجهی، يك چندضلعی قابل محاط در دایره است. ثابت کنید، می‌توان کره‌ای را بر این چندوجهی محیط کرد.

۲۴۲*. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x^2 + *x + 1 = 0$$

دو نفر با هم بازی می‌کنند. اولی به جای یکی از ستاره‌ها، يك عدد می‌گذارد،

بعد دومی به جای یکی از ستاره‌های باقی مانده يك عدد می گذارد، سپس دوباره نوبت به اولی می رسد. به نوبت جای ستاره‌ها را عدد می گذارند تا جایی که دیگر ستاره‌ای باقی نماند (روی هم ۹ حرکت). اگر در پایان کار، به چند جمله‌ای برسیم که ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، اولی بازی را برده است، و اگر چند جمله‌ای حاصل، دست کم يك ریشه حقیقی داشته باشد، دومی بازی را برده است. آیا دومی می تواند، با هر نوع بازی اولی، برنده شود؟

۲۴۳. ۷ نفر پشت يك میز گرد نشسته‌اند. جلوی هر کدام از آن‌ها، يك لیوان است. در بعضی از این لیوان‌ها، مقداری شیر وجود دارد. یکی از افراد، تمامی شیر لیوان خود را در بقیه لیوان‌ها، به طور مساوی، می ریزد. بعد، نفر سمت راست او، همین عمل را انجام می دهد. سپس نفر سوم در سمت راست نفر دوم، شیر موجود در لیوان خود را بین بقیه، به طور مساوی، تقسیم می کند و غیره. وقتی که نفر آخر (هفتمین نفر) شیر خود را به طور مساوی بین بقیه لیوان‌ها تقسیم کرد، معلوم شد، در هر لیوان، همان مقدار شیر وجود دارد که در ابتدا بوده است. اگر مجموع شیرهای همه لیوان‌ها، برابر ۳ لیتر باشد، در آغاز کار، در هر لیوان، چقدر شیر بوده است؟

۲۴۴. عدد n رقمی را وقتی «خاص» می نامیم که، اولاً خود عدد مجذور کامل باشد و ثانیاً، عددهایی که از n رقم اول و، از n رقم آخر به دست می آیند، هر دو مجذور کامل باشند (در ضمن، عدد n رقمی دوم می تواند با صفر آغاز شود، ولی نباید برابر صفر باشد؛ عدد n رقمی اول، نمی تواند با صفر آغاز شود).

(a) همه عددهای «خاص» دورقمی و چهاررقمی را پیدا کنید.

(b) آیا عددهای شش رقمی «خاص» وجود دارد؟ (یا نمونه‌ای از

این عددها بدهید و یا ثابت کنید، چنین عددهایی وجود ندارند.)

(c*) ثابت کنید، دست کم يك عدد ۲۰ رقمی «خاص» وجود دارد.

(d*) ثابت کنید، تعداد عددهای «خاص» ۱۰۰ رقمی، بیشتر از ۱۰

نیست.

(e*) ثابت کنید، دست کم، يك عدد «خاص» ۳۰ رقمی وجود دارد.

۲۴۵* ✓ مجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ از عددهای مثبت داده شده است. برای هر زیرمجموعه آن، مجموع عددهایی را که در آن وجود دارد، می نویسیم (مجموع عددها، در زیرمجموعه‌های شامل يك، دو، ...، n جمله). ثابت کنید، همه این عددها را می توان طوری به n گروه تقسیم کرد که، در هر کدام از آنها، نسبت بزرگترین عدد به کوچکترین عدد، از ۲ تجاوز نکند.

۲۴۶* هزار بلیت با شماره‌های ۰۰۰، ۰۰۱، ۰۰۲، ...، ۹۹۹ و صد جعبه با شماره‌های ۰۰، ۰۱، ۰۲، ...، ۹۹ در اختیار داریم. بلیت درجعبه‌ای انداخته می‌شود که، با حذف یکی از رقم‌های شماره بلیت، شماره جعبه به دست آید، ثابت کنید:

(a) ✓ می توان همه بلیت‌ها را در ۵۰ جعبه انداخت؛

(b) ✓ همه بلیت‌ها را، در کمتر از ۴۰ جعبه، نمی توان جا داد؛

(c*) ✓ نمی توان همه بلیت‌ها را در کمتر از ۵۰ جعبه جا داد؛

(d*) ✓ شماره بلیت‌ها را چهاررقمی می گیریم (از ۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹) و هر بلیت را در جعبه‌ای می اندازیم که، شماره آن، از شماره بلیت، با حذف دو رقم آن به دست آید. ثابت کنید، همه بلیت‌های چهاررقمی را می توان در ۳۴ جعبه جا داد.

(e*) حداقل چند جعبه لازم است تا بتوان همه بلیت‌های k رقمی را در آنها جا داد ($k = 4, 5, 6, \dots$)؟

۲۴۷* ✓ صفحه شطرنجی مربعی با 100×100 خانه مفروض است. چند خط شکسته غیر متقاطع با خود رسم کرده‌ایم که روی ضلع‌های خانه‌ها ساخته شده‌اند و، در ضمن، نقطه مشترکی با هم ندارند. این خط‌های شکسته، دقیقاً در داخل مربع‌اند، ولی دو انتهای آنها، به مرزهای آن رسیده‌اند. ثابت کنید، به جز راس‌های مربع اصلی، گره‌های دیگری هم (در داخل یا روی مرز مربع) وجود دارند که متعلق به هیچ کدام از خط‌های شکسته نیستند (هر راس يك خانه از صفحه شطرنجی را، يك گره می نامیم).

۲۴۸* عددهای طبیعی x_1, x_2, \dots, x_n و y_1, y_2, \dots, y_m مفروض‌اند و

می‌دانیم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m < mn$$

ثابت کنید، در برابری

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

می‌توان بخشی از جمله‌ها را، طوری حذف کرد که، دوباره، به يك برابری برسیم.

۲۴۹. ۱۰۰۰ مربع را روی صفحه رسم کرده‌ایم، به نحوی که، ضلع‌های آن‌ها، موازی با محورهای مختصات باشد، M را، مجموعه مرکزهای این مربع‌ها می‌گیریم، ثابت کنید، می‌توان بخشی از مجموعه مربع‌ها را، طوری جدا کرد که، هر نقطه مجموعه M ، حداقل متعلق به یکی و حداکثر متعلق به چهارتا از مربع‌های جدا شده باشد.

۲۵۰. روی میز، يك ترازو و n وزنه، با وزن‌های مختلف، وجود دارد. وزنه‌ها را به نوبت، در کفه‌های ترازو قرار می‌دهیم (هر بار، وزنه‌ای را از روی میز برمی‌داریم و در این یا آن کفه می‌گذاریم).

(a) ثابت کنید، می‌توان وزنه‌ها را طوری ردیف کرد که، ابتدا کفه چپ، بعد کفه راست، سپس دوباره کفه چپ ترازو و غیره، سنگین‌تر باشد. این دنباله نتیجه‌ها را با حرف‌های R و L نشان می‌دهیم و به صورت واژه $LRLRLR\dots$ می‌نویسیم. در این جا، L به معنای آن است که کفه چپ سنگین‌تر است و R ، به معنای سنگین‌تر بودن کفه راست ترازو است.

(b*) ثابت کنید، برای هر واژه به طول n از حرف‌های L و R ، می‌توان وزنه‌ها را به چنان ردیفی تنظیم کرد که، اگر آن‌ها را با همان ردیف به نوبت در این یا آن کفه ترازو قرار دهیم، واژه مفروض، متناظر با وضع کفه‌های ترازو باشد.

۲۵۱*. چند جمله‌ای با يك متغیر x و ضریب بزرگترین درجه واحد n را، در نظر می‌گیریم. چند جمله‌ای‌های P و Q را، قابل جابه‌جایی

می‌نامیم، وقتی که چند جمله‌ای‌های $P(Q(x))$ و $Q(P(x))$ متحد با یکدیگر باشند

(a) برای هر عدد α ، همه چند جمله‌ای‌های $Q(x)$ را پیدا کنید که از درجه سوم تجاوز نکنند و با چند جمله‌ای $P(x) = x^2 - \alpha$ قابل جابده‌جایی باشند.

(b) P را چند جمله‌ای از درجه دوم و k را عددی طبیعی می‌گیریم. ثابت کنید، بیش از یک چند جمله‌ای درجه k وجود ندارد که با P قابل جابده‌جایی باشد.

(c) چند جمله‌ای‌های از درجه ۴ و ۸ را پیدا کنید که با چند جمله‌ای مفروض از درجه دوم، قابل جابده‌جایی باشند.

(d) چند جمله‌ای‌های Q و R ، با چند جمله‌ای مفروض P از درجه دوم، قابل جابده‌جایی‌اند. ثابت کنید، این دو چند جمله‌ای نسبت به هم قابل جابده‌جایی‌اند.

(e) ثابت کنید، دنباله‌ای نامتناهی از چند جمله‌ای‌های $P_2, P_3, P_4, \dots, P_k, \dots$ وجود دارد (P_k چند جمله‌ای درجه k است)، به نحوی که هر دو چند جمله‌ای دلخواه از آن، نسبت به هم قابل جابده‌جایی باشند و $P_2 = x^2 - 2$.

دوازدهمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۸ (تاشکند)

روز دوم	روز اول	کلاس
۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۲ ۲۶۳	۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۴ ۲۵۵	۸
	a·b	
۲۶۰ ۲۶۱ ۲۶۴ ۲۶۵	۲۵۲ ۲۵۳ ۲۵۶ ۲۵۷	۹
۲۶۰ ۲۶۶ ۲۶۷ ۲۶۸	۲۵۸ ۲۵۹ ۲۵۵ ۲۵۷	۱۰
	c·d·e	

۲۵۲. نزدیک‌ترین عدد درست به \sqrt{n} را a_n می‌نامیم. این مجموع را

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}$$

۲۵۳. نقطه M را در درون چهار ضلعی $ABCD$ طوری در نظر می-گیریم که $ABMD$ متوازی الاضلاع شود. ثابت کنید، اگر $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$ ، آن وقت $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

۲۵۴. ثابت کنید، عدد $1 - 1978^m$ ، به ازای هیچ عدد طبیعی m ، بر عدد $1 - 1000^m$ بخش پذیر نیست.

۲۵۵. روی صفحه (یا در فضا)، مجموعه متناهی K_0 داده شده است. همه نقطه‌هایی را که می‌توان از راه قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر این مجموعه به دست آورد، به K_0 اضافه می‌کنیم و مجموعه حاصل را K_1 می‌نامیم. به همین ترتیب، از مجموعه K_1 ، مجموعه K_2 ؛ از مجموعه K_2 ، مجموعه K_3 و غیره را پیدا می‌کنیم.

(a) فرض کنید K_0 از دو نقطه A و B بدفاصله واحد تشکیل شده باشد. کمترین مقدار n را پیدا کنید که، به ازای آن، در مجموعه K_n نقطه‌ای وجود داشته باشد که در فاصله 1000 از نقطه A باشد.

(b) K_0 را مجموعه‌ای از سه نقطه بگیرد که در راس‌های یک مثلث متساوی الاضلاع بدمساحت واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت کوچکترین چندضلعی محدبی که مجموعه K_n را در بر گرفته باشد ($n = 1, 2, \dots$). در بخش‌های زیر، K_0 ، عبارت است از مجموعه چهار راس یک چهار-وجهی منتظم با حجم واحد.

(c) کوچکترین چندوجهی محدبی را در نظر می‌گیریم که مجموعه K_1 را در بر گرفته باشد. تعداد و نوع وجه‌های این چندوجهی را پیدا کنید. (a) حجم این چندوجهی چقدر است؟

(c)* حجم کوچکترین چندوجهی محدبی را پیدا کنید که مجموعه K_n را در بر گرفته باشد ($n = 2, 3, \dots$).

۲۵۶. دو توده چوب کبریت داریم. در ابتدا، در يك توده m چوب کبریت و در دیگری n چوب کبریت وجود دارد ($m > n$). دو نفر، به نوبت، چوب کبریت‌هایی از توده‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت؛ می‌توان از يك توده، به تعداد مضربی از تعداد چوب کبریت‌های توده دیگر برداشت (که البته باید مخالف صفر باشد). کسی بازی را برده است که آخرین چوب کبریت را از يك توده بردارد.

(a) ثابت کنید، اگر $m > 2n$ ، آن وقت: کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند برد خود را تأمین کند.

(b) گزاره زیر به ازای چه مقداری از α درست است: اگر $m > \alpha n$ باشد، آغازکننده بازی می‌تواند برد خود را تأمین کند؟

*۲۵۷. ثابت کنید، دنباله نامتناهی و کران‌دار x_n وجود دارد، به نحوی که برای هر دو عدد مختلف و دلخواه m و k داشته باشیم:

$$|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|m - k|}$$

۲۵۸. $f(x) = x^2 - x + 1$ می‌گیریم. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $m > 1$ ، عددهای m ، $f(m)$ ، $f(f(m))$ ، ...، دو به دو نسبت به هم اول‌اند.

۲۵۹. ثابت کنید، عدد A وجود دارد که، به ازای آن، می‌توان در نمودار تابع $y = A \sin x$ ، دست کم ۱۹۷۸ مربع دو به دو نابرابر محاط کرد. (مربعی را محاطی می‌گوییم، وقتی که هر چهار رأس آن، روی نمودار تابع باشد.)

۲۶۰. سه کامپیوتر کوچک، زوج عددهای طبیعی را روی کارت‌ها چاپ می‌کنند. آن‌ها، طوری برنامه ریزی شده‌اند که به ترتیب زیر کار می‌کنند: اولی با خواندن کارت (a, b) ، کارت جدید $(a+1, b+1)$ را می‌دهد؛

دومی با خواندن کارت (a, b) ، کارت $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ را می‌دهد (دومی تنها وقتی کار می‌کند که a و b عددهایی زوج باشند)؛ سومی بعد از خواندن دو کارت

(a, b) و (b, c) ، کارت (a, c) را می‌دهد. در ضمن، کامپیوترها، کارت‌های خوانده شده را هم بر می‌گردانند. فرض کنید، در ابتدا، کارت $(5, 19)$ را در اختیار داشته باشیم. آیا می‌توان با استفاده از این سه کامپیوتر (به هر ردیفی)، کارت $(a, 50)$ ، کارت $(b, 100)$ را به دست آورد؟

c کارت اولیه را (a, b) می‌گیریم $(a < b)$ و می‌خواهیم کارت $(1, n)$ را به دست آوریم. به ازای چه مقداری از n این کار ممکن است؟

۲۶۱. درد ایره به شعاع R ، ضلعی به مساحت S را محاط کرده‌ایم. روی هر ضلع n ضلعی، نقطه‌ای را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مساحت n ضلعی که، رئس‌های آن در نقطه‌های مشخص شده باشد، از $\frac{2S}{R}$ کمتر نیست.

۲۶۲. مهره‌ای در گوشه صفحه شطرنجی $n \times n$ قرار دارد. هر يك از دو نفری که با هم بازی می‌کنند، به نوبت، مهره را به میدان مجاور (که با میدانی که مهره در آن بود است، يك ضلع مشترك دارد) می‌برد. بار دوم، نمی‌توان مهره را به میدانی برد که قبلاً بوده است. کسی می‌بازد که امکان حرکت نداشته باشد.

a ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، کسی که بازی را آغاز کرده است، می‌تواند ببرد و، اگر n فرد باشد، دومی امکان برد دارد.

b اگر مهره، به جای گوشه، در میدان مجاور آن باشد، چه کسی امکان برد دارد؟

۲۶۳. روی صفحه، چند پاره‌خط راست غیرمقاطع داده شده است، به نحوی که هیچ دو پاره‌خط راستی بريك امتداد نیستند. می‌خواهیم چند پاره‌خط راست دیگر رسم کنیم که هر کدام از آنها، از وصل نقطه‌های انتهایی پاره‌خط‌های راست قبلی به دست آمده باشند و، روی هم، همه پاره‌خط‌های راست، يك خط شکسته تشکیل دهند که خودش را قطع نکند. آیا همیشه، این کار ممکن است؟

۲۶۴. عددهای x_1, x_2, \dots, x_n به بازه $[a, b]$ تعلق دارند که، در آن، $0 < a < b$. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2$$

۲۶۵*. عدد اول $p > 3$ مفروض است. مجموعه M را روی صفحه مختصاتی. شامل نقطه‌هایی با مختصات درست (x, y) ، طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$0 \leq x < p \text{ و } 0 \leq y < p$$

ثابت کنید، می‌توان p نقطه مختلف از مجموعه M را، طوری جدا کرد که، هیچ چهار نقطه‌ای از آن، راس یک متوازی‌الاضلاع و، هیچ سه نقطه‌ای از آن، روی یک خط راست نباشند.

۲۶۶*. ثابت کنید، برای هر چهاروجهی، می‌توان دو صفحه طوری پیدا کرد که، نسبت مساحت‌های دو تصویر چهاروجهی بر آن‌ها، از $\sqrt{2}$ کمتر نباشد.

۲۶۷. عدد n ، a_1, a_2, \dots, a_n را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2;$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2$$

ثابت کنید: $C \leq D \leq 2C$.

۲۶۸*. دنباله این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$$

هر کدام از جمله‌های این دنباله، به این صورت درمی‌آیند:

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$$

که در آن، q_n ، r_n ، s_n و t_n ، عددهای درستی هستند. این حدها را پیدا کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}$$

سیزدهمین المپیاد سراسری شوروی سال ۱۹۷۹ (تفلیس)

روز دوم				روز اول				کلاس
۲۷۷	۲۷۶	۲۷۵	۲۷۴	۲۷۱	۲۷۰	۲۶۹	۸	
۲۸۱	۲۸۰	۲۷۹	۲۷۸	۲۷۱	۲۷۲	۲۶۹	۹	
۲۸۳	۲۸۲	۲۷۵	۲۷۶	۲۷۱	۲۷۲	۲۷۳	۱۰	

۲۶۹. سه راس يك مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، روی سه ضلع مختلف مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین دیگری قرار دارند. حداقل نسبت مساحت‌های این دو مثلث، چقدر است؟

۲۷۰. کانگورو، روی ربع اول دستگاه مختصات Oxy به این ترتیب می‌جهد ($x \geq 0$ ، $y \geq 0$): او می‌تواند از نقطه (x_0, y) ، به نقطه $(y+7, y)$ یا $(x-5, y)$ یا به نقطه $(x+10, y-1)$ بجهد؛ در ضمن، پرش به نقطه‌هایی که، در آن‌ها، یکی از مختص‌ها منفی است، مجاز نیست. کانگورو، از کدام نقطه‌های (x_0, y) ، نمی‌تواند خود را به نقطه‌ای برساند که در فاصله بیش از ۱۰۰۰۰ از مبدأ مختصات باشد؟ مجموعه همه این نقطه‌های (x_0, y) را رسم و مساحت آن را پیدا کنید.

۲۷۱. در يك مجلس، هر يك از اعضاها، حداکثر سه دشمن دارد. ثابت کنید، این مجلس را می‌توان به دو گروه چنان تقسیم کرد که، هر عضو مجلس، در گروه خود، بیش از يك دشمن نداشته باشد. (فرض بر این است که، اگر B دشمن A باشد، A هم دشمن B است.)

۲۷۲. روی صفحه کاغذ، چند عدد نوشتند. تصمیم می‌گیریم، به این عددها، عدد دلخواه دیگری اضافه کنیم، با این شرط که، عدد تازه، برابر واسطه حسابی دو یا چند عدد از عددهای موجود باشد و در ضمن، با هیچ کدام از عددهای قبلی برابر نباشد. ثابت کنید، با آغاز از دو عدد ۰ و ۱، می‌توان با تکرار عمل فوق،

(a) عدد $\frac{1}{5}$ را به دست آورد؛

(b*) هر عدد گویای بین ۰ و ۱ را به دست آورد.

۲۷۳. دنباله نزولی x_n ، از عددهای مثبت، طوری است که برای هر عدد طبیعی n ، داریم:

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 1$$

ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، خواهیم داشت:

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3$$

۲۷۴. چند نقطه روی صفحه داده شده است. برای دو نقطه A و B ،

بردار \overrightarrow{AB} را در نظر می‌گیریم؛ در ضمن، تعداد بردارهایی که از هر نقطه آغاز شده‌اند، برابر است با تعداد بردارهایی که به این نقطه ختم شده‌اند. ثابت کنید، مجموع همه این بردارها، برابر بردار صفر است.

۲۷۵. حداقل چند مهره باید در میدان‌های صفحه شطرنجی با اندازه‌های

(a) 8×8 خانه‌ای؛

(b) $n \times n$ خانه‌ای

قرار داد تا روی هر خط راستی از مرکز یک میدان می‌گذرد و موازی با یک ضلع یا یک قطر صفحه شطرنجی است، دست کم یک مهره واقع باشد؟ (مهره‌ها، در مرکز میدان‌ها قرار دارند.)

۲۷۶. x و y را، در این دستگاه پیدا کنید:

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \quad \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b$$

که در آن، a و b ، عددهایی مفروض اند.

۲۷۷. چند مربع داریم که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با

۴. ثابت کنید، با این مربع‌ها، همیشه می‌توان مربع به مساحت واحد را پوشاند.

۲۷۸. ثابت کنید، برای عددهای دلخواه x_1, x_2, \dots, x_n از بازه

$[0, 1]$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

۲۷۹. عددهای طبیعی p و q نسبت به هم اول اند. بازه $[0, 1]$ را،

به $p+q$ بازه یکسان تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، در هر یک از این بازه‌ها، به جز دو بازه اول و آخر، درست یکی از $p+q-2$ عدد زیر قرار دارد:

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$$

۲۸۰. از نقطه O واقع در فضا، ۱۹۷۹ خط راست $l_1, l_2, \dots,$

l_{1979} رسم کرده‌ایم، به نحوی که هیچ دو خط راستی بر هم عمود نباشند.

روی خط راست l_1 ، نقطه A_1 را، غیر از نقطه O انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید،

می‌توان نقطه‌های A_i را روی خط‌های راست l_i ($i = 2, 3, \dots, 1979$) طوری

انتخاب کرد که، ۱۹۷۹ زوج خط‌های راست زیر بر هم عمود باشند:

$$A_1 A_3 \perp l_2, A_2 A_4 \perp l_3, \dots, A_{i-1} A_{i+1} \perp l_i, \dots$$

$$\dots, A_{1977} A_{1979} \perp l_{1978}, A_{1978} A_1 \perp l_{1979}, A_{1979} A_2 \perp l_1$$

* ۲۸۱. دنباله متناهی a_1, a_2, \dots, a_n از عددهای ۰ و ۱، باید با شرط

زیر سازگار باشد: برای هر عدد درست k از 0 تا $n-1$ مجموع

$$a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_{n-k} a_n$$

عددی فرد باشد.

(a) دربارهٔ چنین دنباله‌ای، برای $n=25$ ، بیندیشید.

(b) ثابت کنید، چنین دنباله‌ای، برای مقداری از $n > 1000$ ، وجود

دارد.

۲۸۲. چهارضلعی محدب $ABCD$ را، به وسیلهٔ قطرهای آن، به چهار

مثلث تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر شعاع‌های چهار دایرهٔ محاطی این

مثلث‌ها، باهم برابر باشند، چهارضلعی $ABCD$ یک لوزی است.

۲۸۳*. روی خط راستی، نقطه‌های A_1, A_2, \dots, A_n را، به همین

ردیف، طوری قرار داده‌ایم که، طول هر یک از پاره‌خط‌های راست $A_1 A_2$ ،

$A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ از واحد تجاوز نکنند. می‌خواهیم $k-1$ نقطه از

نقطه‌های A_2, \dots, A_{n-1} را طوری بدرنگ قرمز در آوریم که، طول هر دو

بخش دلخواه از k بخشی که به وسیلهٔ نقطه‌های قرمز روی پاره‌خط راست

$A_1 A_n$ پدید آمده‌اند، احتمالی بیش از واحد نداشته باشند. ثابت کنید، این

عمل را همیشه می‌توان انجام داد:

(a) برای $k=3$ ؛

(b) برای هر عدد طبیعی $k < n-1$.

چهاردهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی

سال ۱۹۸۰ (ساراتوف)

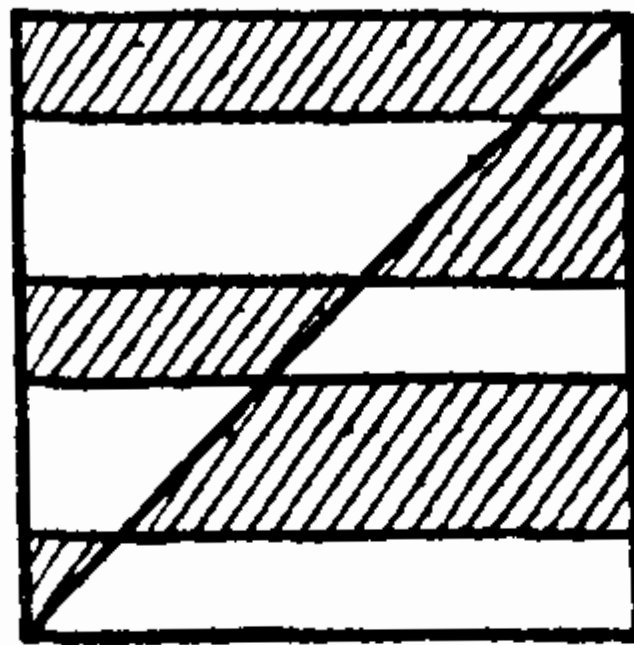
روز دوم	روز اول	کلاس
۲۹۳ ۲۹۴ ۲۹۵ ۲۹۶	۲۸۴ ۲۸۵ ۲۸۶ ۲۸۷	:۸
۲۹۵ ۲۹۷ ۲۹۸ ۲۹۹	۲۸۸ ۲۸۹ ۲۸۶ ۲۹۰	:۹
۳۰۰ ۳۰۱ ۳۰۲ ۳۰۳	۲۹۱ ۲۸۹ ۲۹۲ ۲۹۰	:۱۰

۲۸۴. عددهای دورقمی از ۱۹ تا ۸۰ را از چپ به راست کنار هم

۱۹۲۰۲۱ ... ۷۸۷۹۸۰

آیا این عدد، بر ۱۹۸۰ بخش پذیر است؟

۲۸۵. ضلع قائم AB از مربع $ABCD$ را، به n پاره‌خط راست طوری تقسیم کرده‌ایم که، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف زوج با مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف فرد، برابر شود. از نقطه‌های



شکل ۱۳

تقسیم، پاره‌خط‌های راستی موازی با ضلع AD رسم و، سپس، هر یک از n نوار حاصل را، به وسیله قطر BD ، به دو بخش چپ و راست تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های بخش‌های چپ در ردیف‌های فرد، برابر است با مجموع مساحت‌های بخش‌های راست در ردیف‌های زوج (در شکل ۱۳، این بخش‌ها را، هاشور زده‌ایم).

۲۸۶. محموله‌ای را که در صندوق‌هایی بسته‌بندی شده است، باید به ایستگاه فضایی «سالیوت» رسانید. تعداد صندوق‌ها از ۳۵ کمتر نیست و وزن کل محموله، برابر ۱۸ تن است. هفت سفینه فضایی «پروگرس» در اختیار داریم که، هر کدام از آن‌ها، می‌تواند ۳ تن بار را در مدار قرار دهد. می‌دانیم، این سفینه‌ها می‌توانند با هم، هر ۳۵ صندوق از صندوق‌های موجود را با خود حمل کنند. ثابت کنید، با این سفینه‌ها، می‌توان تمامی بار را در مدار قرار داد.

۲۸۷. نقطه‌های M و P ، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC و CD از

چهارضلعی $ABCD$ هستند. می‌دانیم:

$$MP + AP = a$$

ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$ ، از $\frac{1}{4} a^2$ کمتر است.

۲۸۸. آیا معادله $x^2 + y^3 = z^4$ ، برای عددهای اول x ، y و z ، جواب دارد؟

۲۸۹. روی قطر AC از دایره‌ای، نقطه E داده شده است. از نقطه E ، وتر BD را طوری رسم کنید که مساحت چهارضلعی $ABCD$ ، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۹۰. در ساحل يك دریاچه گرد بزرگ، چند نقطه مسکونی وجود دارد. بین برخی از این نقطه‌های مسکونی، می‌توان با کشتی رفت و آمد کرد. می‌دانیم، تنها وقتی بین دو نقطه، رفت و آمد با کشتی ممکن است که، بین دو نقطه مسکونی بعد از آن‌ها (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، این وسیله ارتباطی وجود نداشته باشد. ثابت کنید، از هر نقطه به هر نقطه دیگر، می‌توان با کشتی مسافرت کرد، به نحوی که حداکثر به دو بار جابه‌جایی نیاز باشد.

۲۹۱. عددی شش رقمی که ارزش رقم مختلف و مخالف صفر درست شده است، بر ۳۷ بخش پذیر است. ثابت کنید، با جابه‌جایی رقم‌های این عدد، می‌توان دست کم ۲۳ عدد مختلف شش رقمی دیگر به دست آورد که، باز هم، بر ۳۷ بخش پذیر باشند.

۲۹۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x + 2 \sin(x + y + z) = 0 \\ \sin y + 3 \sin(x + y + z) = 0 \\ \sin z + 4 \sin(x + y + z) = 0 \end{cases}$$

۲۹۳. روی صفحه، ۱۹۸۰ بردار داده شده است؛ در ضمن، در بین آن‌ها، بردارهای ناهم‌راستا وجود دارد. می‌دانیم، مجموع هر ۱۹۷۹ بردار، با برداری که در این مجموع نیامده، هم‌راستا است. ثابت کنید، مجموع

این ۱۹۸۰ بردار، برابر با بردار صفر است.

۲۹۴. مجموع همه رقم‌های عدد طبیعی n را، با $S(n)$ نشان می‌دهیم. (a) آیا عدد طبیعی n وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$n + S(n) = 1980$$

(b) ثابت کنید، از هر دو عدد طبیعی متوالی، دست کم یکی را می‌توان به صورت $n + S(n)$ ، برای یک عدد طبیعی سوم n ، نوشت.

۲۹۵. بعضی از خانه‌های یک صفحه شطرنجی نامتناهی را به رنگ قرمز و بقیه را به رنگ آبی در آورده‌ایم؛ در ضمن، این رنگ آمیزی به نحوی است که در هر مستطیل ۳×۲ ، درست دو خانه قرمز وجود دارد. در یک مستطیل ۹×۹ خانه‌ای، با اندازه‌های ۱۱×۹ ، چند خانه قرمز می‌تواند وجود داشته باشد؟

۲۹۶. مردمی که در باغ گل زندگی می‌کردند، ناگهان دچار بیماری سرماخوردگی شدند. در یک روز، چند نفر از آن‌ها سرما خوردند و بیمار شدند و، اگر چه پس از آن، کسی به خودی خود دچار سرماخوردگی نشد، کسانی که از دوستان بیمار خود عیادت می‌کردند، مریض می‌شدند. می‌دانیم، هر کسی درست یک روز دچار سرماخوردگی می‌شود؛ در ضمن، چنین فردی، دست کم یک روز مصونیت پیدا می‌کند، یعنی، در این روز، سالم است و دوباره به بیماری سرماخوردگی دچار نمی‌شود. با وجود سرایت بیماری، هر کسی که سالم است، روزانه، از دوستان بیمار خود عیادت می‌کند. وقتی اپیدمی آغاز شد، مردم تلقیح را فراموش کردند و کسی واکسن ضد سرما-خوردگی نزد.

ثابت کنید:

(a) اگر، قبل از اپیدمی، بعضی از افراد واکسن زده باشند و در نخستین روز، مصونیت داشته باشند، آن وقت اپیدمی می‌تواند برای همیشه ادامه پیدا کند؛

(b) ولی اگر در روز اول، کسی مصونیت نداشته باشد، اپیدمی دیر

یا زود به پایان می‌رسد.

۲۹۷. حاصل ضرب همهٔ رقم‌های عدد طبیعی n را، با $P(n)$ نشان می‌دهیم. آیا ممکن است دنبالهٔ (n_k) که با دستور برگشتی

$$n_{k+1} = n_k + P(n_k)$$

و جملهٔ اول $n_1 \in \mathbf{N}$ داده شده است، کران‌دار نباشد؟

۲۹۸. مثلث ABC ، با ضلع‌های برابر، مفروض است. خط راستی موازی با ضلع AC ، خط‌های راست AB و BC را، به ترتیب، در نقطه‌های M و P قطع کرده است. نقطهٔ D را مرکز مثلث PMB و نقطهٔ E را وسط پاره خط AP می‌گیریم. زاویه‌های مثلث DEC را پیدا کنید.

۲۹۹. مکعب مستطیلی با یال‌های به طول x ، y و z سانتی‌متر مفروض

است؛ در ضمن

$$p = 4(x + y + z), s = 2(xy + yz + xz), d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

را، به ترتیب، محیط، مساحت سطح و قطر مکعب مستطیل می‌گیریم. ثابت کنید، به شرط $x < y < z$ داریم:

$$x < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{4} s} \right),$$

$$z > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{4} s} \right)$$

۳۰۰. مجموعهٔ A از عددهای درست تشکیل شده است؛ کوچکترین عضو آن واحد، و بزرگترین عضو آن ۱۰۰ است. هر عضو A ، به جز واحد، برابر است با مجموع دو عدد (که ممکن است برابر هم باشند) متعلق به این مجموعه. در بین همهٔ مجموعه‌های A ، که با این شرط سازگار باشند، مجموعهٔ با حداقل تعداد جمله‌ها را پیدا کنید.

۳۰۱. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد B وجود دارد که، به‌ازای آن، معادلهٔ

$$\left[\sqrt{x^2} \right] + \left[\sqrt{y^2} \right] = B$$

دست کم ۱۹۸۰ جواب، در مجموعه عددهای طبیعی x و y داشته باشد ($[z]$ به معنای بزرگترین عدد درستی است که از z تجاوز نکند).

۳۰۲. در چهاروجهی $ABCD$ ، یال AC بر BC و یال AD بر BD عمود است. ثابت کنید، کسینوس زاویه بین خط‌های راست AC و BD ، از $\frac{CD}{AB}$ کمتر است.

۳۰۳. عدد $x \in [0, 1]$ ، به صورت کسر دهدهی نامتناهی نوشته شده است. با جابه‌جا کردن ۵ رقم اول بعد از ممیز در آن، به ترتیبی دلخواه، دوباره به کسر دهدهی نامتناهی می‌رسیم که، متناظر با عددی مثل x_1 است. اگر در نمایش دهدهی x_1 ، رقم‌های از دوم تا ششم بعد از ممیز را جابه‌جا کنیم، نمایش دهدهی عدد x_2 به دست می‌آید. به‌طور کلی، نمایش دهدهی x_{k+1} با جابه‌جا کردن رقم‌های عدد x_k ، از رقم $(k+1)$ تا رقم $(k+5)$ بعد از ممیز به دست می‌آید.

(a) ثابت کنید، صرف نظر از نوع جابه‌جایی رقم‌ها در هر گام، دنباله عددهای حاصل x_k ، همیشه دارای حد است. این حد را l می‌نامیم.
 (b) آیا می‌توان، با این روند، از عدد گویای x_0 ، به عدد گنگ l رسید؟
 (c) کسر x_0 را طوری پیدا کنید که، برای آن، روند فوق، همیشه منجر به عدد گنگ l شود، بدون توجه به این که، در هر گام، چه تبدیلی از ۵ رقم را جانشین کنیم.

پانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی سال ۱۹۸۱ (آلمان)

روز دوم	روز اول	کلاس
۲۱۸ ۲۱۷ ۲۱۶ ۲۱۵	۲۰۷ ۲۰۶ ۲۰۵ ۲۰۴	:۸
۲۲۲ ۲۲۱ ۲۲۰ ۲۱۹	۲۱۰ ۲۰۹ ۲۰۷ ۲۰۸	:۹
۲۲۶ ۲۲۵ ۲۲۴ ۲۲۳	۲۱۴ ۲۱۳ ۲۱۲ ۲۱۱	:۱۰

۳۰۴. دو صفحه شطرنج مساوی 8×8 خانه‌ای، دارای مرکز مشترک اند؛ در ضمن، یکی از آنها، نسبت به دیگری، به اندازه ۴۵ درجه دور مرکز چرخیده است. مجموع مساحت‌های همه بخش‌های متقاطع سیاه این دو صفحه شطرنج را پیدا کنید، به شرطی که مساحت هر خانه، برابر واحد باشد.

۳۰۵. نقطه‌های A ، B ، M و N روی محیط یک دایره اند. از نقطه M ، وترهای MA_1 و MB_1 را، به ترتیب، عمود بر خط‌های راست NB و NA رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط‌های راست AA_1 و BB_1 موازی اند.

۳۰۶. گوئیم عددی دارای ویژگی $P(k)$ است وقتی که بتوان آن را به حاصل ضرب k عدد طبیعی متوالی بزرگتر از واحد تجزیه کرد.

(a) را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عددی مثل N ، در عین حال، دارای ویژگی‌های $P(k)$ و $P(k+2)$ باشد.

(b) ثابت کنید، عددی وجود ندارد که، در عین حال، دارای دو ویژگی $P(2)$ و $P(4)$ باشد.

۳۰۷. جدولی ۴ سطر دارد. در سطر اول، عددهای طبیعی دلخواهی نوشته شده است، که در بین آنها، عددهای برابر هم می‌تواند باشد. سطر دوم، به این ترتیب پر شده است: از چپ به راست به عددهای سطر اول نگاه می‌کنیم و، زیر عدد a ، عدد k را می‌نویسیم، به شرطی که عدد a در سطر اول (و در سمت راست آن) k بار آمده باشد. با همین روش، سطر سوم را زیر سطر دوم، و سطر چهارم را زیر سطر سوم می‌نویسیم. ثابت کنید، سطر دوم و سطر چهارم، همیشه یکسان در می‌آیند.

۳۰۸. عدد a داده شده است. مطلوب است، کمترین مقدار مساحت مستطیلی که ضلع‌هایی موازی محورهای مختصات Ox و Oy داشته باشد و، در ضمن، شکلی را که از دستگاه نامعادله‌های زیر به دست می‌آید، در بر بگیرد:

$$\begin{cases} y \leq -x^2 \\ y \geq x^2 - 2x + a \end{cases}$$

۳۰۹. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC ، CDE و EHK مفروض‌اند (راس‌ها را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید) و طوری روی صفحه قرار گرفته‌اند که $\vec{AD} = \vec{DK}$. ثابت کنید، مثلث BHD هم، متساوی‌الاضلاع است.

۳۱۰. در محله‌ای ۱۰۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هر روز هر يك از آنها، خبرهای تازه‌ای را که دیروز شنیده است، با همه آشناهای خود در میان می‌گذارد. می‌دانیم که، هر خبر تازه‌ای، سرانجام به گوش همه ساکنان محله می‌رسد.

ثابت کنید، می‌توان از بین افراد محله، ۹۰ نفر طوری انتخاب کرد که، اگر همه آن‌ها را از خبر تازه‌ای آگاه کنیم، بعد از ۱۰ روز، همه ساکنان محله آن را شنیده باشند.

۳۱۱. درباره عددهای a و b می‌دانیم که نامعادله

$$a \cos x + b \cos 3x > 1$$

جواب ندارد. ثابت کنید $|b| \leq 1$.

۳۱۲. نقطه‌های K و M ، وسط ضلع‌های AB و CD از چهارضلعی محدب $ABCD$ هستند؛ نقطه‌های L و N روی دو ضلع دیگر چهارضلعی طوری قرار گرفته‌اند که، چهارضلعی $KLMN$ ، يك مستطیل شده است. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$ ، دو برابر مساحت مستطیل $KLMN$ است.

۳۱۳*. همه دنباله‌های (a_n) از عددهای طبیعی را طوری پیدا کنید که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) به‌ازای هر n داشته باشیم: $a_n \leq n\sqrt{n}$ ؛

ب) به‌ازای هر دو عدد مختلف m و n ، تفاضل $a_m - a_n$ بر $m - n$ بخش‌پذیر باشد.

۳۱۴*. آیا می‌توان همه خانه‌های يك جدول مستطیلی را، طوری به رنگ‌های سیاه و سفید درآورد که، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های

سفید برابر باشد، ولی در هر سطر و هر ستون، بیش از $\frac{3}{4}$ خانه‌ها از یک رنگ باشند؟

۳۱۵. ثابت کنید، اگر چهار ضلعی‌های $AHBT$ ، $AMBE$ ، $ACPH$ ، $BKXM$ متوازی‌الاضلاع باشند، آن وقت چهار ضلعی $ABTE$ هم یک متوازی‌الاضلاع است (رأس‌های همه چهار ضلعی‌ها را، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به حساب آورید).

۳۱۶. این معادله را، در مجموعه عددهای طبیعی x و y حل کنید:

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

۳۱۷. در یک مسابقه فوتبال، ۱۸ تیم، در ۸ مرحله با هم بازی کرده‌اند: هر تیم با هشت تیم مختلف بازی کرده است. ثابت کنید، سه تیم پیدا می‌شود که هنوز با هم حتی یک مسابقه هم نداده‌اند.

۳۱۸. نقطه‌های A_1 ، C_1 و B_1 را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB ، BC و CA از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{3}$$

اگر P را محیط مثلث ABC و p را محیط مثلث $A_1B_1C_1$ بگیریم، ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}P < p < \frac{3}{4}P$$

۳۱۹. ثابت کنید، اگر عددهای مثبت x و y در معادله

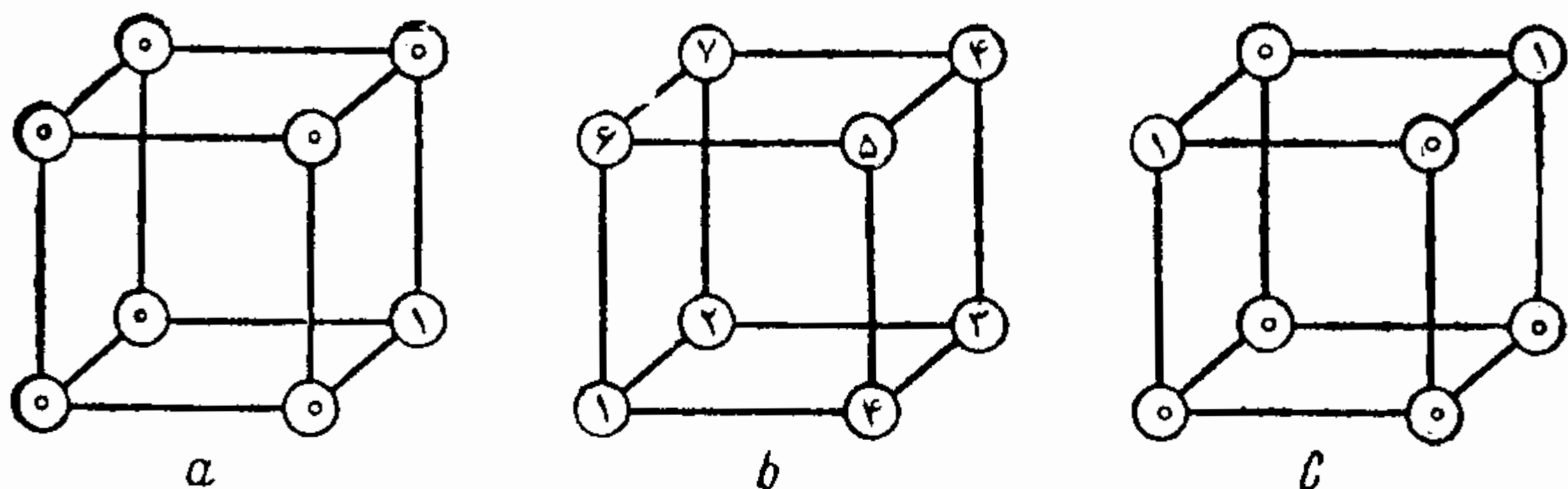
$$x^3 + y^3 = x - y$$

صدق کنند، آن وقت $x^2 + y^2 < 1$.

۳۲۰. دانش‌آموزی می‌خواهد یک چندضلعی محدب را، که در دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارد، رسم کند. ابتدا، یکی از ضلع‌ها را رسم می‌کند،

از انتهای آن ضلع دوم، سپس، از انتهای ضلع دوم، ضلع سوم و غیره را رسم می‌کند. در پایان کار متوجه می‌شود که چند ضلعی او بسته نیست و آخرین خط راستی که به دست آورده است، به فاصله d از رأس اول قرار دارد. می‌دانیم، دانش آموز زاویه‌ها را با دقت رسم کرده و خطای نسبی او، در رسم هر ضلع، از عدد p تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید: $d \leq 4p$.

۳۲۱. در هر رأس مکعب، عددی نوشته‌ایم. در یک گام، به دو عددی که روی یک یال دلخواه قرار دارند، یک واحد اضافه کرده‌ایم. آیا می‌توان،



شکل ۱۴

بعد از چند گام، هر هشت عدد را مساوی کرد، به شرطی که عددهای اولیه مطابق شکل ۱۴ - a باشند؟ در باره عددهای شکل ۱۴ - b چطور؟ و در باره عددهای شکل ۱۴ - c؟

۳۲۲. دست کم یک عدد طبیعی n را پیدا کنید، به نحوی که، هر یک از عددهای

$$n, n+1, n+2, \dots, n+20$$

با عدد $30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ ، مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتر از واحد داشته باشد.

۳۲۳. هر یک از عددهای طبیعی از ۱۰۰ تا ۹۹۹ را روی یک کارت نوشته‌ایم. کارت‌ها را روی میز طوری می‌گذاریم که عددها دیده نشوند (به طرف پایین باشند)؛ سپس، آنها را مخلوط می‌کنیم و در یک ستون قرار می‌دهیم. کارت‌های ستون را، یکی بعد از دیگری، برمی‌گردانیم، آنها را طبقه‌بندی می‌کنیم و، روی هم، در ستون‌هایی، به ترتیب، از عددهای کوچکتر

قرار می‌دهیم، به نحوی که عددها دیده شوند (رو به بالا باشند). در ستون اول، همهٔ عددهایی که به ۵ ختم شده‌اند؛ در ستون دوم، همهٔ عددهایی که به ۱ ختم شده‌اند و غیره. همهٔ این ستون‌ها را در یک ستون جمع می‌کنیم: ستون دوم را روی ستون اول، سپس روی آن ستون سوم را، و سر آخر ستون دهم را. ستونی را که به دست می‌آید، برمی‌گردانیم و دوباره طبقه‌بندی می‌کنیم، منتهی این بار، بعد از برگرداندن هر کارت و خواندن عدد روی آن، آن‌ها را بر حسب رقم دوم خود، در ستون‌های جداگانه قرار می‌دهیم. مثل حالت قبل، این ستون‌ها را جمع می‌کنیم (به ترتیب صعودی، نسبت به رقم دوم). برای بار آخر، آن‌ها را، نسبت به رقم سمت چپ، طبقه‌بندی و، سپس، در یک ستون جمع می‌کنیم. بعد از طبقه‌بندی آخر، عددهای روی کارت‌ها، به چه ردیفی قرار گرفته‌اند؟

۳۲۴. در مستطیلی با ضلع‌های برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، E نقطه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، دو نقطه پیدا می‌شود که، فاصلهٔ بین آن‌ها، از $\sqrt{5}$ سانتی‌متر تجاوز نمی‌کند.

۳۲۵. a) حداقل مقدار این چندجمله‌ای را پیدا کنید:

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$$

b^*) ثابت کنید، این چندجمله‌ای را نمی‌توان به صورت مجموع مجذورهای چندجمله‌ای‌هایی از دو متغیر x و y نوشت.

۳۲۶. پاره‌خط‌های راست AD ، BE و CF یال‌های جانبی موازی، از یک منشور مثلث القاعده را تشکیل می‌دهند. روی قاعدهٔ ABC این منشور همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که، از خط‌های راست AE ، BF و CD به یک فاصله باشند.

شانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی

سال ۱۹۸۲ (۱۹۸۱)

روز دوم				روز اول				کلاس
۳۴۰	۳۳۹	۳۳۸	۳۳۷	۳۳۰	۳۲۹a	۳۲۸	۳۲۷	:۸
۳۴۴	۳۴۳	۳۴۲	۳۴۱	۳۳۴	۳۳۳	۳۳۲	۳۳۱	:۹
۳۴۸	۳۴۷	۳۴۶	۳۴۵	۳۳۶	۳۲۹b	۳۳۲	۳۳۵	:۱۰

۳۲۷. روی محیط دایره به مرکز O_1 و شعاع r_1 ، نقطه‌های M و K را انتخاب کرده‌ایم. در زاویه مرکزی، MO_1K ، دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 محاط شده است. مساحت چهارضلعی MO_1KO_2 را پیدا کنید.

۳۲۸. در دنباله‌های عددی (a_n) و (b_n) ، با آغاز از جمله سوم، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبل از آن. در ضمن:

$$a_1 = 1, a_2 = 2; b_1 = 2, b_2 = 1$$

چند عدد وجود دارد که در هر دو دنباله، با آن‌ها برخورد می‌کنیم؟

۳۲۹. a و m ، عددهایی طبیعی اند. ثابت کنید، اگر برای عددهای غیر منفی k_1, k_2, \dots, k_n ، عدد $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ بر عدد $2^m - 1$ بخش پذیر باشد، آن وقت $n \geq m$.

(b) آیا عددی طبیعی وجود دارد که بر $\underbrace{111 \dots 1}_m$ بخش پذیر و

مجموع رقم‌های آن، کوچکتر از m باشد؟

۳۳۰. هر رأس مکعب را متناظر با عددی حقیقی و غیر منفی قرار داده‌ایم؛ در ضمن، مجموع همه این عددها، برابر است با واحد. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از وجه‌ها را انتخاب می‌کند، دومی وجه دیگر را در نظر می‌گیرد و، سرانجام، اولی وجه سوم را انتخاب می‌کند. در ضمن، نمی‌توان وجهی را انتخاب کرد که، وجه موازی با آن، قبلاً انتخاب شده است. ثابت کنید، اولی می‌تواند طوری بازی کند که، عدد واقع بر رأس مشترک سه وجه انتخاب شده، از $\frac{1}{6}$ تجاوز نکند.

۳۳۱. يك روز، سه جوان در کتابخانه عمومی به هم رسیدند. یکی از آن‌ها گفت: «من يك روز در میان به کتابخانه می‌آیم.» دومی اطلاع داد که، او دو روز در میان به کتابخانه مراجعه می‌کند. معلوم شد که سومی هم، سه روز در میان به کتابخانه سر می‌زند. کتابدار که گفت و گوی آن‌ها را می‌شنید، یادآوری کرد که چهارشنبه‌ها، کتابخانه تعطیل است. جوانان توضیح دادند که، اگر روز مراجعه آن‌ها، با روز تعطیل کتابخانه برخورد

کند، روز بعد به کتابخانه می‌روند و دیدارهای بعدی خود را، از آن روز به حساب می‌آورند. این جوانان، یک روز دوشنبه، دوباره یکدیگر را در کتابخانه ملاقات کردند. گفت‌وگوی بالا، در چند روزی از هفته، بین جوانان انجام گرفته است؟

۳۳۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، که لوزی نیست، نسبت طول‌های دو قطر داده شده است: $AC:BD = k$. نیم خط راست AM را قرینه نیم خط AD نسبت به خط راست AC ، نیم خط راست BM را قرینه نیم خط BC نسبت به خط راست BD و نقطه M را، محل برخورد نیم‌خط‌های راست AM و BM می‌گیریم. مطلوب است محاسبه نسبت $AM:BM$.

۳۳۳. $3k$ نقطه، روی محیط دایره‌ای قرار داده‌ایم، از $3k$ کمانی که به دست می‌آید، k کمان به طول ۱، k کمان به طول ۲ و k کمان باقی‌مانده به طول ۳ هستند. ثابت کنید، بین این نقطه‌ها، دو نقطه وجود دارد که در دو انتهای یک قطرند.

۳۳۴. نقطه M را، در درون چهاروجهی در نظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست کم یکی از یال‌های چهاروجهی، از نقطه M ، به زاویه‌ای دیده می‌شود که، کسینوس آن، از $\frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند.

۳۳۵. عددهای a ، b و c در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارند و می‌دانیم:

$$\cos a = a, \sin \cos b = b, \cos \sin c = c$$

این عددها را، به ردیف صعودی بنویسید.

۳۳۶. خط شکسته بسته M ، دارای تعداد فردی رأس است: $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. $S(M)$ را خط شکسته بسته تازه‌ای می‌گیریم که رأس‌های متوالی آن، $B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ ، در وسط ضلع‌های خط شکسته M قرار دارند: B_1 وسط پاره خط راست $A_1 A_2$ ، B_2 وسط $A_2 A_3$ ، \dots ، B_{2n+1} وسط $A_{2n} A_{2n+1}$. ثابت کنید، در دنباله خط‌های شکسته

$$M_1 = S(M), M_2 = S(M_1), \dots, M_k = S(M_{k-1})$$

خط شکسته بسته‌ای وجود دارد که با خط شکسته M متجانس است.
 ۳۳۷. عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۲ را، یکی پس از دیگری، به ردیفی دلخواه نوشته‌ایم. کامپیوتر، دو به دو عددهای مجاور را، از چپ به راست، مورد بررسی قرار می‌دهد (اولی و دومی، دومی و سومی و غیره) و هر جا عدد بزرگتر در سمت چپ عدد کوچکتر قرار داشته باشد، جای آن‌ها را با هم عوض می‌کند. سپس دوباره، از راست به چپ، دوبه‌دوی عددهای مجاور را بررسی می‌کند و، طبق همان قانون، در صورت لزوم، جای عددها را با هم عوض می‌کند. بعد از پایان این برنامه، معلوم شد، عددی که در جای صدم قرار داد، در هر دو بار، بدون تغییر جا باقی مانده است. این عدد را پیدا کنید.

۳۳۸. رودخانه‌ای در منطقه نزدیک به مصب خود، چند جزیره پدید آورده است که مجموع محیط‌های همه آن‌ها برابر ۸ متر است. می‌خواهیم از نقطه‌ای واقع در یک طرف رود، با قایق به طرف دیگر آن برویم. در فاصله بین این نقطه و کناره دیگر رود، جزیره‌ها قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، از این نقطه به نقطه‌ای در کناره دیگر، کمتر از ۳ متر راه با قایق وجود دارد. دو کناره رود با هم موازی و عرض رودخانه برابر یک متر است.

۳۳۹. نمودار تابع $y = x^2$ را روی صفحه مختصات Oxy رسم کرده‌ایم. سپس، محورهای مختصات را پاک کرده و تنها سهمی را باقی گذاشته‌ایم. به کمک پرگار و خط‌کش، چگونه می‌توان محورها و واحد طول را باز سازی کرد؟

۳۴۰. خانه‌های یک جدول مربعی $n \times n$ را، با عددهای درست پر کرده‌ایم. در ضمن، در هر دو خانه‌ای که یک ضلع مشترک دارند، عددهایی گذاشته‌ایم که اختلاف آن‌ها، از واحد تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، در جدول، دست کم به یک عدد برخورد می‌کنیم که

(a) لا اقل $\left[\frac{n}{2} \right]$ مرتبه تکرار شده است (منظور از $[a]$ ، بخش درست

عدد a است)؛

(b) لا اقل n بار تکرار شده است.

✓ ۳۴۱. درستی این نابرابری را، برای همه مقادیرهای مثبت x ، ثابت

کنید:

$$2\sqrt[12]{x} + 2\sqrt[4]{x} \geq 2 \times 2\sqrt[6]{x}$$

✓ ۳۴۲. از مجموعه عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹۸۲، دست کم چند عدد باید

حذف کرد تا هیچ کدام از عددهای باقی مانده، برابر با حاصل ضرب دو عدد

دیگر باقی مانده نباشد؟ به چه ترتیبی، باید این کار را انجام داد؟

✓ ۳۴۳. در هر خانه از یک صفحه شطرنجی نامتناهی، یک عدد حقیقی

نوشته ایم. ثابت کنید، می توان خانه های پیدا کرد که، عدد آن، دست کم از

عددهای چهارخانه از هشت خانه ای که آن را احاطه کرده اند، تجاوز نمی کند.

✓ ۳۴۴. ثابت کنید، از هر دنباله عددهای حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n ،

می توان بخشی از عددها را طوری جدا کرد که با سه شرط زیر سازگار باشند:

(الف) هیچ سه عددی را که در دنباله، پشت سر هم قرار دارند، با

هم انتخاب نکرده باشیم؛

(ب) از بین هر سه عدد متوالی در دنباله، دست کم یکی را در نظر

گرفته باشیم؛

(ج) قدر مطلق مجموع عددهایی که انتخاب کرده ایم، از مقدار زیر

کمتر نباشد:

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{6}$$

✓ ۳۴۵. $n-1$ خانه از یک جدول مربعی $n \times n$ را علامت گذاشته ایم.

ثابت کنید، با جابه جایی سطرها نسبت به هم و جابه جایی ستونها نسبت به

هم، می توان به جدولی رسید که همه خانه های علامت دار، در زیر قطرهای

جدول باشند.

۳۴۶. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی a ، نابرابری زیر برقرار است:

$$|a| \cdot |a-1| \cdot |a-2| \cdots |a-n| \geq \langle a \rangle \frac{n!}{2^n}$$

که در آن، $\langle a \rangle$ عبارت است از فاصله عدد a تا نزدیکترین عدد درست به آن و $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

۳۴۷. آیا چند جمله‌ای‌های

$$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$$

از متغیرهای x و y و z وجود دارند، به نحوی که، این اتحاد برقرار باشد:

$$(x-y+1)^3 P + (y-z-1)^3 Q + (z-2x+1)^3 R = 1$$

(b) همان پرسش، برای اتحاد

$$(x-y+1)^3 P + (y-z-1)^3 Q + (z-x+1)^3 R = 1$$

۳۴۸*. رأس‌های چهاروجهی $KLMN$ ، روی وجه‌ها یا یال‌های

چهاروجهی دیگر $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید، مجموع طول‌های همه

یال‌های چهاروجهی $KLMN$ از $\frac{4}{3}$ مجموع همه یال‌های چهاروجهی

$ABCD$ کمتر است.

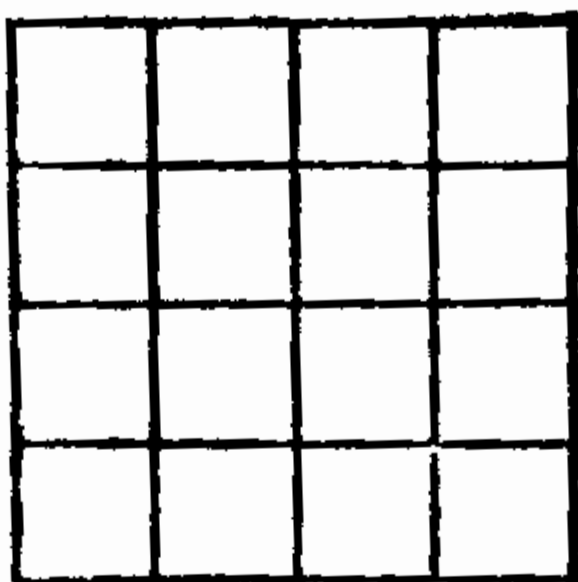
هفدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی

سال ۱۹۸۳ (کی‌شی نف)

روز دوم				روز اول				کلاس
۳۶۳	۳۶۲	۳۶۱	۳۶۰	۳۵۲	۳۵۱	۳۵۰	۳۴۹	:۸
۳۶۷	۳۶۶	۳۶۵	۳۶۴	۳۵۶	۳۵۵	۳۵۴	۳۵۳	:۹
۳۷۰	۳۶۹	۳۶۸	۳۶۰	۳۵۹	۳۵۸	۳۵۴	۳۵۷	:۱۰

۳۴۹. در شبکه شکل ۱۵، هر خانه دارای اندازه 1×1 است. آیا

می‌توان، این شبکه را: (a) به صورت اجتماعی از هشت خط شکسته نشان



شکل ۱۵

داد، به نحوی که طول هر کدام از آنها برابر ۵ باشد؛ (b) به صورت اجتماعی از پنج خط شکسته نشان داد، به نحوی که طول هر کدام از آنها، برابر ۸ باشد؟
 ۳۵۰۷. سه عدد درست را روی تخته سیاه نوشته ایم. یکی از عددها را پاک کرده ایم و، به جای آن، عددی را نوشته ایم که از مجموع دو عدد دیگر یک واحد کمتر باشد. این عمل را چند بار تکرار کرده ایم و، در نتیجه، به عددهای ۱۷، ۱۹۶۷ و ۱۹۸۳ و رسیده ایم. آیا ممکن است، در ابتدا، روی تخته سیاه، عددهای (a) ۲، ۲، ۲ (b) ۳، ۳، ۳ نوشته شده باشد؟

۳۵۱. سه دایره، در نقطه‌های X ، Y و Z ، دایره دو بر هم مماس

بیرونی اند. شعاع‌های دایره‌ها را $\frac{2}{\sqrt{3}}$ برابر می‌کنیم و مرکزهای آنها را ثابت نگه می‌داریم. ثابت کنید، هر نقطه مثلث XYZ ، دست کم به وسیله یکی از دایره‌ها پوشیده می‌شود.

۳۵۲. چند عدد طبیعی مختلف، که بین مجذورهای دو عدد طبیعی متوالی قرار دارند، داده شده‌اند. ثابت کنید، همه حاصل ضرب‌های دایره‌دوی آنها هم، عددهایی مختلف اند.

۳۵۳. همه جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^2 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

۳۵۴. عدد طبیعی k ، در دستگاه دهدهی، دارای n رقم است. این عدد را در مرتبه دهگان گرد کرده ایم (به جای رقم یکان، صفر گذاشته ایم؛ و اگر رقم

یکان از ۴ بزرگتر باشد، یک واحد به رقم دهگان اضافه کرده‌ایم). سپس، به همان ترتیب، عدد حاصل را در مرتبه صدگان گرد کرده‌ایم و غیره. بعد از

($n-1$) امین گام، عدد k_1 به دست آمده است. ثابت کنید: $k_1 < \frac{18}{13}k$.

۳۵۵. نقطه D وسط ضلع AB ، و نقطه‌های E و F به ترتیب روی پاره‌خط‌های راست AC و BC از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید، مساحت مثلث DEF ، از مجموع مساحت‌های دو مثلث ADE و BDF تجاوز نمی‌کند.

۳۵۶. (α_n) و (β_n) دنباله‌هایی هستند که، به ترتیب، از آخرین رقم‌های عددهای درست $[(\sqrt{10})^n]$ و $[(\sqrt{2})^n]$ درست شده‌اند (در این جا، $[x]$ به معنای بخش درست عدد x است). آیا دنباله‌های (α_n) و (β_n) متناوب‌اند؟

۳۵۷. α و β دو زاویه حاده‌اند و می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

ثابت کنید: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

۳۵۸. راس‌های چهاروجهی $ABCD$ را، به طور قائم، بر دو صفحه تصویر کرده‌ایم. این تصویرها را، به ترتیب، A_1, B_1, C_1, D_1 و A_2, B_2, C_2, D_2 می‌نامیم. ثابت کنید، یکی از صفحه‌ها را می‌توان در فضا طوری جابه‌جا کرد که A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 و D_1D_2 با هم موازی باشند.

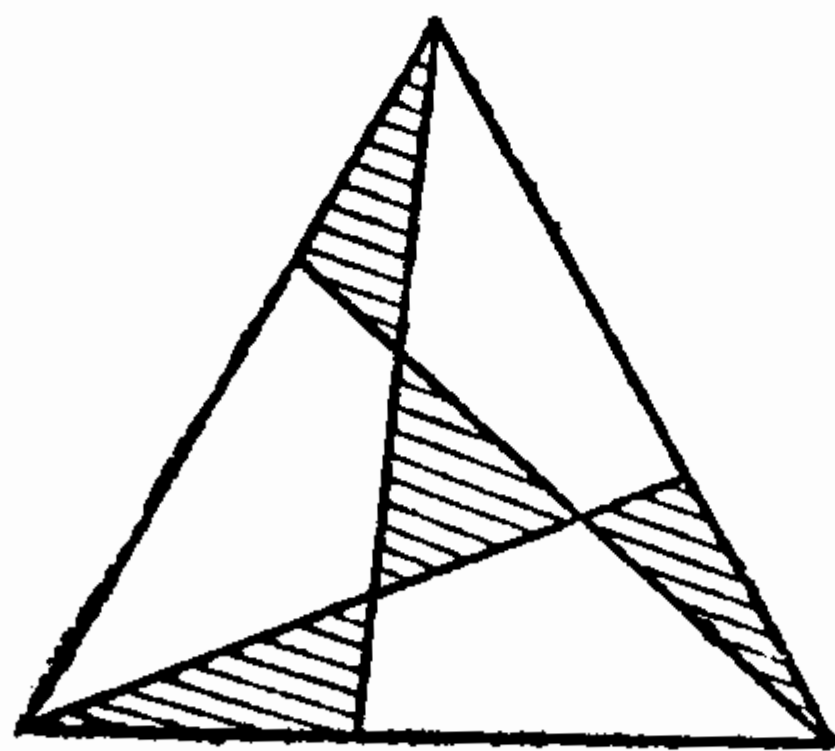
۳۵۹. دانش‌آموزی، حل معادله‌های درجه دوم را تمرین می‌کند. هر معادله‌ای را که حل می‌کند، به شرط داشتن ریشه‌های حقیقی، معادله دیگری به کمک ریشه‌های آن، به ترتیب زیر، می‌سازد: ریشه بزرگتر را به جای جمله آزاد (مقدار ثابت) معادله جدید و ریشه کوچکتر را در ضریب x قرار می‌دهد؛ ضریب x^2 را هم واحد انتخاب می‌کند. ثابت کنید، این تمرین را، نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه دهد. بیشترین تعداد معادله‌هایی که می‌تواند به این ترتیب، پشت هر هم، حل کند، چند تا است؟

۳۶۰. عددهای طبیعی m و n و k چنان اند که عدد m^n بر n^m و عدد n^k بر k^n بخش پذیر است. ثابت کنید، عدد m^k بر k^m بخش پذیر است.

۳۶۱. در زبان قبیله «آبا»، دو حرف وجود دارد. می دانیم، هیچ واژه‌ای از این زبان، در آغاز واژه دیگری قرار نگرفته است (یعنی نمی توان يك واژه را طوری به دو بخش تقسیم کرد که، بخش اول آن، معنا داشته باشد). آیا واژه نامه این زبان، می تواند شامل ۳ واژه چهار حرفی، ۱۰ واژه پنج حرفی، ۳۰ واژه شش حرفی و ۵ واژه هفت حرفی باشد؟

۳۶۲. آیا می توان در خانه های يك صفحه شطرنجی نامتناهی، عددهای درست را طوری قرار داد که در هر مستطیل ۴×۶ آن (که ضلع هایی در امتداد ضلع های خاندن دارد)، مجموع عدد: a برابر ۱۰، b برابر ۱ شود؟

۳۶۳. چهار مثلثی که در شکل ۱۶ هاشور نخورده اند، مساحت هایی برابر دارند. ثابت کنید، مساحت های سه چهار ضلعی، که هاشور نخورده اند، با هم برابرند. اگر مساحت یکی از مثلث ها، برابر يك سانتی متر مربع باشد، مساحت یکی از چهار ضلعی ها چقدر است؟



شکل ۱۶

۳۶۴. بچه های مهدکودک را در دو ستون در کنار هم قرار داده اند. می دانیم، در هر ستون، تعداد پسرها با تعداد دخترها برابر است و، همچنین، تعداد ردیف های دو نفری که، در آنها، يك پسر و يك دختر وجود دارد، با تعداد بقیه ردیف های دو نفری برابر است. ثابت کنید، تعداد کل بچه ها، بر ۸ بخش پذیر است.

۳۶۵. یکی از ضلع های مستطیلی برابر ۱ سانتی متر است. به جز این

می‌دانیم که، با رسم دو خط راست عمود بر هم، می‌توانیم آن را به چهار مستطیل کوچکتر طوری تقسیم کنیم که، مساحت سه تا از آن‌ها از ۱ سانتی‌متر مربع و مساحت چهارمی از ۲ سانتی‌متر مربع، کمتر نباشد. حداقل ضلع دوم مستطیل چقدر باشد، تا این عمل ممکن شود؟

۳۶۶. نقطه دلخواه O را در درون مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. درستی

برابری زیر را ثابت کنید:

$$S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0}$$

که در آن، S_A ، S_B و S_C ، به ترتیب، عبارتند از مساحت مثلث‌های BCO و CAO .

۳۶۷. ثابت کنید، بین هر $2m+1$ عدد درست مختلف، به شرطی که قدرمطلق آن‌ها از $2m-1$ تجاوز نکند، می‌توان سه عدد به مجموع ۰ پیدا کرد.

۳۶۸. نقطه‌های D ، E و F ، به ترتیب، روی ضلع‌های AB ، BC و CA (و نه روی رأس‌ها) از مثلث ABC داده شده‌اند. بزرگترین ضلع‌های مثلث‌های DEF ، ADF ، BDE و CEF را، به ترتیب، با طول‌های d_0 ، d_1 ، d_2 و d_3 می‌گیریم. ثابت کنید:

$$d_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \min(d_1, d_2, d_3)$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۳۶۹. مجموعه M ، شامل k پاره خط راست دو به دو غیر متقاطع و، واقع بر یک خط راست است. می‌دانیم، هر پاره خط راستی را که طولی بیشتر از واحد ندارد، می‌توان طوری روی خط راست قرار داد که دو انتهای آن متعلق به مجموعه M باشد. ثابت کنید، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راستی

که M را تشکیل داده‌اند، از $\frac{1}{k}$ کمتر نیست.

۳۷۰* در بسط نامتناهی عدد حقیقی a ، در دستگاه عدد نویسی به مبنای ۱۰، همه رقم‌ها وجود دارد. فرض کنید، v_n ، به معنای تعداد پاره‌خط‌های رقمی مختلف به طول n باشد، که در این بسط با آن‌ها برخورد می‌کنیم. ثابت کنید، اگر برای مقداری از n ، شرط $v_n \leq n+8$ برقرار باشد، آن وقت، a ، عددی گویاست.

هیجدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی سال ۱۹۸۴ (عشق آباد)

روز دوم				روز اول				کلاس
۳۸۶	۳۸۵	۳۸۴	۳۸۳	۳۷۴	۳۷۳	۳۷۲	۳۷۱	:۸
۳۹۰	۳۸۹	۳۸۸	۳۸۷	۳۷۸	۳۷۷	۳۷۶	۳۷۵	:۹
۳۹۴	۳۹۳	۳۹۲	۳۹۱	۳۸۲	۳۸۱	۳۸۰	۳۷۹	:۱۰

۳۷۱. a) حاصل ضرب n عدد درست برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر شده است. ثابت کنید، عدد n بر ۴ بخش پذیر است.

b) n را عددی طبیعی و بخش پذیر بر ۴ می‌گیریم. ثابت کنید، می‌توان n عدد درست طوری پیدا کرد که حاصل ضرب آن‌ها برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر باشد.

۳۷۲. a و b ، عددهایی غیر منفی و دلخواه هستند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

۳۷۳. دو مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ ، روی صفحه داده شده‌اند؛ رأس‌های این مثلث‌ها، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت،

نام گذاری شده است. از نقطه‌ای مثل O ، بردارهای \vec{OA} ، \vec{OB} و \vec{OC} را، به

ترتیب، برابر بردارهای $\vec{A_1A_2}$ ، $\vec{B_1B_2}$ و $\vec{C_1C_2}$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های A ، B و C هم، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۳۷۴. ✓ چهار رنگ و بی‌نهایت تخته مربعی شکل به ضلع واحد، در

اختیار داریم و تصمیم می‌گیریم، ضلع‌های تخته‌ها را رنگ کنیم، به نحوی که رنگ‌های هر چهارضلع در يك تخته، با هم اختلاف داشته باشند. این تخته‌های مربعی را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که، ضلع‌های مجاور هم در دو تخته، هم رنگ باشند. به‌ازای چه عددهایی از m و n ، می‌توان از این تخته‌ها، مستطیلی $m \times n$ ساخت، به نحوی که هر ضلع آن از يك رنگ، و چهارضلع آن، از چهار رنگ مختلف باشد؟

۳۷۵. $x > 0$ ، $y > 0$ و α عددهایی حقیقی و دلخواه‌اند. ثابت کنید:

$$x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha < x + y$$

۳۷۶. يك مكعب و دو رنگ قرمز و سبز در اختیار داریم. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. اولی ۳ یال مکعب را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ قرمز در می‌آورد. رقیب او، ۳ یال دیگر را (از آن‌ها که تاکنون رنگ نشده‌اند) رنگ سبز می‌زند. بعد دوباره اولی ۳ یال بی‌رنگ را قرمز و، بالاخره، رقیب او، ۳ یال باقی‌مانده را سبز می‌کند. رنگ يك یال را نمی‌توان عوض کرد و يك یال را، نمی‌توان دوبار، ولو با يك رنگ، رنگ زد. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین بار، توانسته باشد همه یال‌های يك وجه مکعب را، به رنگ مربوط به خود درآورد. آیا این حکم درست است که بازی‌کن اول، به شرطی که درست بازی کند، می‌تواند به طور قطع برنده باشد؟

۳۷۷. روی محیط دایره‌ای $n \geq 3$ عدد طبیعی نوشته‌ایم و می‌دانیم، برای هر عدد، نسبت مجموع دو عدد مجاور آن به خود عدد، باز هم عددی طبیعی است. ثابت کنید، مجموع همه این نسبت‌ها: a) از $2n$ کمتر نیست؛ b^*) از $3n$ کمتر است.

۳۷۸. دایره به مرکز O ، در مثلث ABC محاط شده است و، نقطه‌های تماس آن با ضلع‌های BC ، AC و AB ، به ترتیب، عبارتند از نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 . پاره‌خط‌های راست AO ، BO و CO ، به ترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط‌های راست

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ از يك نقطه می گذرند.

۳۷۹. به ازای چه مقدارهایی از m و n ، این برابری برقرار است:

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$$

۳۸۰. n عدد حقیقی مختلف را، در يك سطر و به ترتیب صعودی

نوشته ایم. در سطر دوم و زیر آن‌ها، همان عددها را، و به احتمالی در ردیف

دیگری، نوشته ایم. مجموع هر دو عددی را که در يك ستون قرار دارند

محاسبه کرده ایم و زیر آن‌ها آورده ایم. به این ترتیب، سطر سوم به دست

می آید. معلوم شد، عددهای سطر سوم، به ردیف صعودی قرار گرفته اند.

ثابت کنید، دو سطر اول و دوم، بر هم منطبق اند.

۳۸۱. مثلث ABC مفروض است. از نقطه P ، خط‌های راست PA ،

PB و PC را رسم کرده ایم. این خط‌های راست، دایره محیطی مثلث را،

در نقطه‌های A_1, B_1, C_1 (غیر از A, B, C) قطع کرده اند. معلوم شد که

مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC برابر است. ثابت کنید، حداکثر ۸ نقطه P با

این ویژگی وجود دارد.

۳۸۲. ✓ عددهای مثبت x, y و z ، در این معادله‌ها، صدق می کنند:

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه $D = xy + 2yz + 3zx$.

۳۸۳. معلم، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2 + 10x + 20$ را روی تخته

سیاه نوشت. سپس، هر يك از دانش آموزان، به نوبت، يك واحد به ضریب

x و یا به مقدار ثابت اضافه کردند و یا يك واحد کم کردند (تنها یکی از

این دو عدد را، يك واحد بزرگتر یا يك واحد کوچکتر کردند و نه هر دوی

آنها را). در نتیجه، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2 + 20x + 10$ روی تخته سیاه

نوشته شد. آیا این حکم درست است که، در لحظه‌ای، سه جمله‌ای درجه دومی با ریشه‌های درست، روی تخته سیاه، ظاهر شده است؟

۳۸۴. سکه‌ای به شعاع r ، روی صفحه طوری جا به جا می‌شود که، مرکز آن، محیط یک چند ضلعی محیط بر دایره‌ای به شعاع $R > r$ را می‌پیماید. اگر محیط این چند ضلعی، برابر p باشد، مساحت شکلی را پیدا کنید که در اثر حرکت سکه به دست می‌آید (یک حلقه چند زاویه‌ای).

۳۸۵. $n+1$ وزنه، به وزن کالی $2n$ ، و یک ترازوی دو کفه‌ای که در حال تعادل است، در اختیار داریم. وزن هر وزنه با یک عدد طبیعی بیان می‌شود. وزنه‌ها را، به نوبت، در کفه‌های ترازوی گذاریم: ابتدا، سنگین‌ترین (یا یکی از سنگین‌ترین) آن‌ها را، سپس، سنگین‌ترین وزنه از آن چه باقی مانده است و غیره. در ضمن، هر بار، وزنه نوبتی را در کفه‌ای می‌گذاریم که سبک‌تر است و، اگر ترازو در حال تعادل باشد، به دلخواه در یکی از دو کفه قرار می‌دهیم. ثابت کنید، بعد از آن که همه وزنه‌ها را در کفه‌های ترازو قرار دهیم، ترازو به حالت تعادل می‌ایستد.

۳۸۶. عددی را «عدد اول مطلق» می‌نامیم که هم خودش و هم عددهایی که از جا به جا کردن رقم‌های آن به دست می‌آیند، اول باشند. [مثلاً ۱۳۱، عدد اول مطلق است، زیرا عددهای ۱۳۱، ۱۱۳ و ۳۱۱ اول اند، در حالی که عدد ۱۰۱، اول مطلق نیست.] ثابت کنید، هر عدد اول مطلق، نمی‌تواند بیش از سه رقم متفاوت داشته باشد.

۳۸۷. رقم‌های $x \neq 0$ و y چنان‌اند که، به ازای هر $n \geq 1$ ، عدد

$$\underbrace{xx \dots x}_n \underbrace{y \dots y}_n$$

برابر مجذور یک عدد درست است. همه مقادیرهای ممکن x و y را پیدا کنید.

۳۸۸. چهار نقطه متفاوت A ، B ، C و D را روی خط راست، و به همین ردیف، انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، برای هر نقطه E ، که بر خط راست AD واقع نباشد، این نابرابری برقرار است:

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE$$

۳۸۹. دنباله x_n به این ترتیب تعریف شده است:

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n \quad (n \geq 1)$$

ثابت کنید، دنباله x_n دارای حد است و آن را پیدا کنید.

۳۹۰. در خانه‌های سفید يك جدول شطرنجی 1983×1984

خانه‌ای، عددهای ۱ و یا ۱- را طوری نوشته‌ایم که، برای هر خانه سیاه، حاصل ضرب عددهای واقع در خانه‌های سفید مجاور آن، برابر ۱ باشد. ثابت کنید، این وضع، وقتی پیش می‌آید که همه عددهای نوشته شده، برابر ۱ باشند.

۳۹۱. در خانه‌های جدول مربعی 3×3 ، عددهای ۱ یا ۱- را

نوشته‌ایم. برای هر خانه، حاصل ضرب عددهای واقع در خانه‌های مجاور آن را، محاسبه می‌کنیم (دو خانه را مجاور می‌دانیم که، در يك ضلع، مشترك باشند). حاصل ضرب‌های حاصل را، در خانه‌های جدول، به جای عددهای قبلی قرار می‌دهیم. بعد همان عمل را در مورد جدول جدید انجام می‌دهیم و غیره. ثابت کنید، بعد از چند گام، تنها عددهای ۱ در جدول خواهد بود.

۳۹۲. کدام يك از این دو عدد بزرگترند: $\frac{2}{201}$ یا $\ln \frac{101}{100}$ ؟

۳۹۳. سه دایره c_1, c_2, c_3 ، به مرکزهای C_1, C_2, C_3 ، و شعاع‌های

r_1, r_2, r_3 طوری روی صفحه‌اند که، هر دایره، در بیرون دو دایره دیگر

قرار دارد؛ در ضمن $r_1 > r_2$ و $r_1 > r_3$ ، نقطه برخورد مماس‌های بیرونی

دو دایره c_1 و c_2 ، در بیرون دایره c_3 ؛ و B ، نقطه برخورد مماس‌های بیرونی

دو دایره c_1 و c_3 در بیرون دایره c_2 قرار دارند. از نقطه A ، مماس‌هایی

بر دایره c_3 ؛ و از نقطه B ، مماس‌هایی بر دایره c_2 رسم کرده‌ایم. ثابت کنید،

از برخورد این دو زوج مماس، يك چهارضلعی پدید می‌آید که در دایره

قابل محاسبه است. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۳۹۴. ثابت کنید، هر مقطع مکعب با صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، مساحتی دارد که از مساحت وجه مکعب کمتر نیست.

نوزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی سال ۱۹۸۵ (موسکی لو)

روز دوم				روز اول				کلاس
۴۱۰	۴۰۹	۴۰۸	۴۰۷	۳۹۸	۳۹۷	۳۹۶	۳۹۵	:۸
۴۱۳	۴۱۲	۴۱۰	۴۱۱	۴۰۲	۴۰۱	۴۰۰	۳۹۹	:۹
۴۱۷	۴۱۶	۴۱۵	۴۱۴	۴۰۶	۴۰۵	۴۰۴	۴۰۳	:۱۰

۳۹۵. در مثلثی که زاویه‌هایی حاده دارد، از وسط هر ضلع، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

۳۹۶. آیا عدد طبیعی n ، با ویژگی زیر، وجود دارد: مجموع رقم‌های عدد n برابر ۱۰۰۰ و مجموع رقم‌های عدد n^2 برابر 1000^2 باشد؟

۳۹۷. حداکثر چند مهره می‌توان روی صفحه 8×8 خانه‌ای دامکا قرارداد تا، هر مهره، دست کم به وسیله یک مهره دیگر، در خطر زده شدن باشد؟

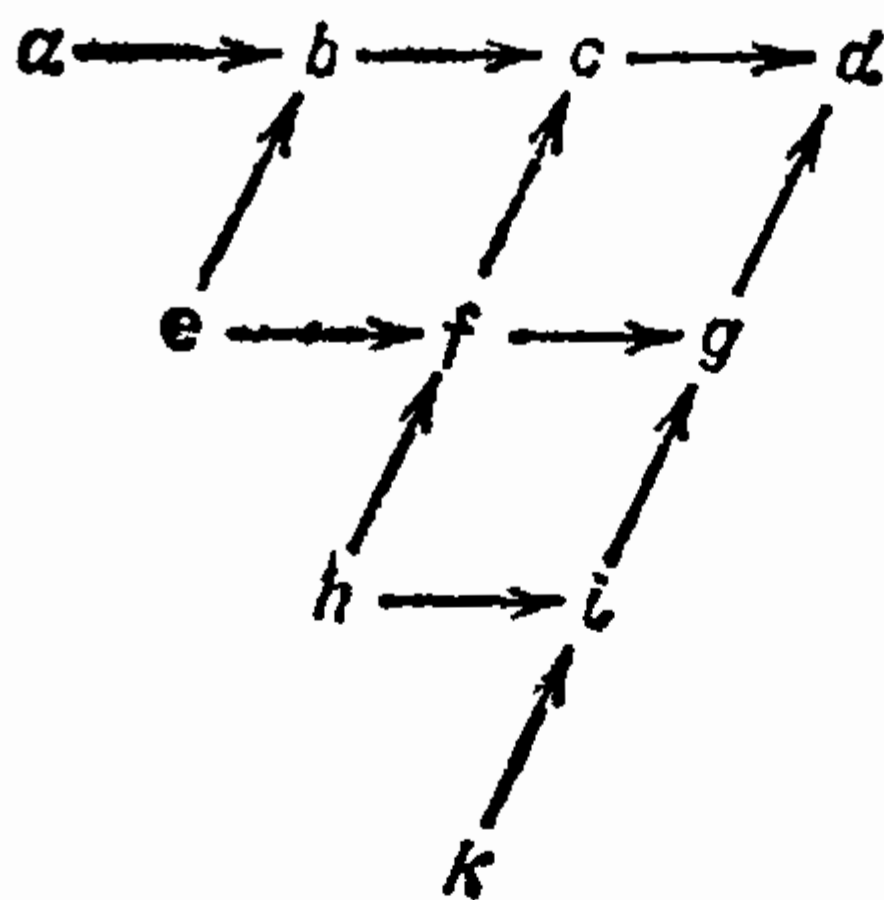
۳۹۸. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رنگ کنیم که هر دو پاره‌خط راستی که نقطه مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف درآمده باشند. برای این منظور، دست کم به چند رنگ نیاز داریم؟

۳۹۹. خط راست l ، نقطه O در بیرون این خط راست و نقطه دلخواه A ، روی یک صفحه، داده شده‌اند. ثابت کنید، تنها با استفاده از تقارن نسبت

به خط راست l و دوران به مرکز نقطه O ، می‌توان نقطه O را به نقطه A تبدیل کرد.

۴۰۰. حداکثر در چند نقطه صحیح مختلف، سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$ ، که در آن $a > 100$ ، می‌تواند مقدارهایی را قبول کند که از ۵۰ تجاوز نکنند؟

۴۰۱. عددهای طبیعی و مختلف a, b, \dots, k ، به صورت جدول شکل ۱۷ نوشته شده‌اند. می‌دانیم، هر عددی که در روی شکل، دو پیکان به



شکل ۱۷

سمت آن می‌رود، برابر با مجموع عددهایی است که در ابتدای این پیکان‌ها قرار دارند، به ازای چه حداقلی برای d ، این وضع ممکن است؟
۴۰۲* دنباله نامتناهی و اکیداً صعودی عددهای a_1, a_2, \dots داده شده است. ثابت کنید:

(a) شماره‌های مثل k_0 پیدا می‌شود که، برای هر $k \geq k_0$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$$

(b) برای شماره‌های به اندازه کافی بزرگ k ، داریم:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k-1}} < k - 1985$$

۴۰۳ همه زوج عددهای (x, y) را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leq 0$$

۴۰۴ پنج ضلعی محدب $ABCDE$ روی صفحه داده شده است. A_1 را قرینه A نسبت به نقطه B ، B_1 را قرینه B نسبت به نقطه C ، \dots ، E_1 را قرینه E نسبت به نقطه A می‌گیریم. بعد از به دست آوردن این قرینه‌ها، خود پنج ضلعی $ABCDE$ را پاک می‌کنیم. ثابت کنید، با در دست داشتن

نقطه‌های A_1, B_1, C_1, D_1 و E_1 می‌توان به کمک پرگار و خط‌کش، پنج‌ضلعی $ABCDE$ را بازسازی کرد.

۴۰۵. دنباله a_1, a_2, a_3, \dots با این قانون‌ها داده شده است:

$$\text{به ازای } n \geq 1: a_{2n} = a_n$$

$$\text{به ازای } n \geq 0: a_{4n+1} = 1, a_{4n+3} = 0$$

ثابت کنید، این دنباله، دوره تناوب ندارد.

۴۰۶*. n خط راست ($n > 2$) زوی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم که صفحه را به چند حوزه تقسیم کرده‌اند. بعضی از این حوزه‌ها را رنگ زده‌ایم؛ در ضمن، هیچ دو حوزه‌ای که رنگ شده‌اند، در مرزی مشترک نیستند. ثابت

کنید، تعداد حوزه‌های رنگ شده، از $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ تجاوز نمی‌کند.

۴۰۷. يك مكعب، يك قوطی مکعبی سرپوش‌دار با همان اندازه‌های مکعب و شش نوع رنگ در اختیار داریم. با هر رنگ، یکی از وجه‌های مکعب و یکی از وجه‌های قوطی را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان مکعب را در قوطی طوری قرار داد که، هر وجه مکعب، به وجهی از قوطی با رنگی دیگر مجاور باشد.

۴۰۸. قطر $A_5 A_1$ ، دایره به مرکز O را، به دو نیم دایره تقسیم کرده است. کمان یکی از این نیم دایره‌ها را، به پنج کمان برابر $A_5 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4$ و $A_4 A_5$ تقسیم کرده‌ایم. خط راست $A_1 A_4$ ، پاره‌خط‌های OA_2 و OA_3 را در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، مجموع طول‌های دو پاره‌خط راست $A_2 A_3$ و MN برابر است با شعاع دایره.

۴۰۹. دانش‌آموز عضو انجمن ریاضی، برای ماشین حساب خود برنامه‌ای ریخته‌است. طبق این برنامه، ماشین، با فشار دادن دکمه، چهار عدد (a, b, c, d) را به چهار عدد $(a-b, b-c, c-d, d-a)$ تبدیل می‌کند. ثابت کنید، اگر هر چهار عدد نخستین، چهار عدد مساوی باهم نباشند، بعد از چهار بار که دکمه را فشار دهیم، چهار عدد به دست می‌آید که، دست کم یکی از

آنها، از ۱۹۸۵ بزرگتر است.

۴۱۰. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $2n-1$ ، $2n$ را به دو گروه، و در هر گروه n عدد، تقسیم کرده ایم. فرض کنید، عددهای گروه اول را به ردیف صعودی:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

و عددهای گروه دوم را، به ردیف نزولی:

$$b_1 > b_2 > \dots > b_n$$

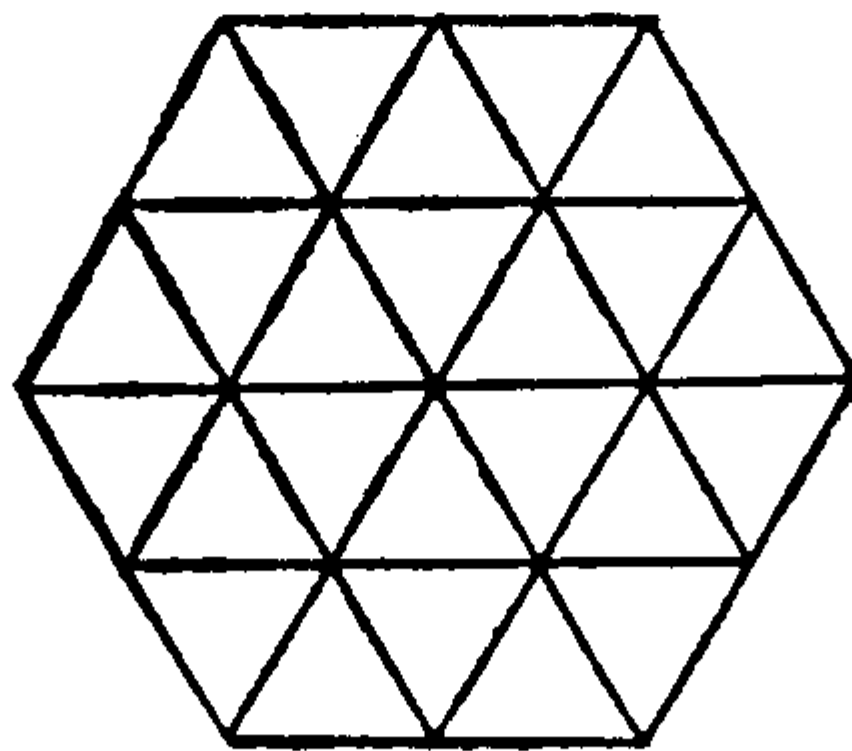
نوشته باشیم. ثابت کنید:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2$$

۴۱۱. با چند مکعب مساوی، يك مكعب مستطیل ساخته ایم. سه وجه مكعب مستطیل را، که رأسی مشترك دارند، رنگ کرده ایم، معلوم شد که نصف تعداد مکعب ها، دست کم در يك وجه خود، رنگ خورده اند. چند مکعب، دارای وجه هایی رنگی هستند؟

۴۱۲. یکی از دو دایره به شعاع R از رأس های A و B و، دیگری، از رأس های B و C از متوازی الاضلاع $ABCD$ گذشته است. نقطه برخورد دوم دو دایره را M می گیریم. ثابت کنید، شعاع دایره محیطی مثلث AMD برابر است با R .

۴۱۳*. شش ضلعی منتظم را، به ۲۴ مثلث تقسیم کرده ایم (شکل ۱۸). در همه گره های شکل، عددهای مختلفی نوشته ایم (شکل، دارای ۱۹ گره



شکل ۱۸

است). ثابت کنید، دست کم ۷ مثلث از بین ۲۴ مثلث وجود دارد که عددهای رأس‌های آنها، به ترتیب صعودی نوشته شده‌اند (عددهای رأس‌ها را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، در نظر می‌گیریم).

۴۱۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1$$

(در این کسر مسلسل، ۱۹۸۵ بار، عدد ۲ تکرار شده است).

۴۱۵. از پنج ضلعی منتظم به ضلع برابر ۱ سانتی متر، همهٔ نقطه‌هایی را که از همهٔ رأس‌های پنج‌ضلعی، به فاصله‌ای کمتر از ۱ سانتی متر قرار دارند، جدا کرده‌ایم. مساحت بخش باقی‌مانده را پیدا کنید.

۴۱۶. صفحه‌ای شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع ۱ سانتی متر در اختیار داریم. تصمیم می‌گیریم، برش‌هایی روی خط‌های راست شبکه انجام دهیم. ثابت کنید، به ازای هر عدد درست $m > 12$ ، می‌توان مستطیلی را برید که مساحتی بیشتر از m سانتی متر مربع داشته باشد و، در ضمن، نتوان از آن، مستطیلی به مساحت m سانتی متر مربع جدا کرد.

۴۱۷. طول یال مکعب $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ برابر یک سانتی متر است. دایرهٔ محیطی مربعی $ABCD$ ، و دایره‌ای را که از نقطه‌های A ، C و B_1 گذشته است، رسم کرده‌ایم. حداقل فاصلهٔ بین نقطه‌های محیط این دو دایره را پیدا کنید.

بیستمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی

سال ۱۹۸۶ (اولیانوسک)

روز دوم				روز اول				کلاس
۴۳۳	۴۳۲	۴۳۱	۴۳۰	۴۲۱	۴۲۰	۴۱۹	۴۱۸	:۸
۴۳۶	۴۳۵	۴۳۳b	۴۳۴	۴۲۵	۴۲۴	۴۲۳	۴۲۲	:۹
۴۴۰	۴۳۹	۴۳۸	۴۳۷	۴۲۹	۴۲۸	۴۲۷	۴۲۶	:۱۰

۴۱۸. ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b + 1 = 0$ ، عددهایی طبیعی اند.

ثابت کنید، عدد $a^2 + b^2$ ، يك عدد مرکب است.

۴۱۹. دو مربع مساوی، در برخورد با یکدیگر، يك هشت ضلعی

ساخته‌اند. ضلع‌های یکی از مربع‌ها سبز و ضلع‌های مربع دیگر قرمز است.

ثابت کنید، مجموع طول ضلع‌های سبز هشت ضلعی، با مجموع طول ضلع‌های قرمز آن، برابر است.

۴۲۰. نقطه M روی ضلع AC از مثلث ABC (با زاویه‌های حاده)

قرار دارد. دایره‌هایی بر دو مثلث ABM و ACM محیط کرده‌ایم. نقطه M در چه وضعی باشد تا مساحت بخش مشترک دو دایره، حداقل مقدار ممکن بشود؟

۴۲۱. می‌خواهند n شهر بسازند و آن‌ها را با $n - 1$ جاده به هم

وصل کنند، به نحوی که بتوان از هر شهر به هر شهر دیگر مسافرت کرد. (هر جاده،

دو شهر را به هم وصل می‌کند؛ جاده‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند و از شهرهای

دیگر نمی‌گذرند.) در ضمن، می‌خواهند، کوتاه‌ترین فاصله بین هر دو شهر،

به ترتیب، برابر با $1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ کیلومتر، از طریق شبکه جاده‌ها باشد.

آیا چنین خواستی را می‌توان بر آورد، به شرطی که داشته باشیم: $a = n = 6$ ؛

$b = 1986$.

۴۲۲. ثابت کنید، نمی‌توان در دستگاه محورهای مختصات قائم،

چهار ضلعی محدب رسم کرد، به نحوی که یکی از قطرهای آن دو برابر دیگری،

زاویه بین دو قطر برابر ۴۵ درجه و مختصات رأس‌های چهار ضلعی، عددهایی

درست باشند.

۴۲۳. ثابت کنید، جدول مستطیلی $m \times n$ خانه‌ای را، می‌توان با عددهای طبیعی مجذور کامل طوری پر کرد که، مجموع عددهای هر سطر و هر ستون، باز هم مجذور کامل باشند.

۴۲۴. دو دایره، که فاصله بین مرکزهای آنها برابر d است، در نقطه‌های P و Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطه‌های P ، Q و نقطه A واقع بر محیط دایره اول (A ، غیر از P و Q است)، خط‌های راستی گذرانده‌ایم که دایره دوم را، به ترتیب، در نقطه‌های B و C قطع کرده‌اند. (a) ثابت کنید، شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر است با d .
(b) اگر نقطه A روی محیط دایره اول حرکت کند، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث ABC ، چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

۴۲۵. یک شش‌ضلعی منتظم، روی یک صفحه داده شده است. هر ضلع آن را، به ۱۰۰۰ بخش برابر تقسیم کرده‌ایم و، نقطه‌های تقسیم را، با پاره‌خط‌های راستی موازی با ضلع‌های شش‌ضلعی، به هم وصل کرده‌ایم. در شبکه‌ای که به این ترتیب بدست می‌آید، سه گره را، که رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، در نظر می‌گیریم (با هر اندازه‌ای و در هر موقعیتی) و آن‌ها را رنگ می‌کنیم. به همین طریق، گره‌های سه‌گانه را رنگ می‌کنیم تا جایی که دیگر نتوان چنین گره‌های سه‌گانه را پیدا کرد. ثابت کنید، اگر تنها یک گره بدون رنگ باقی بماند، این گره نمی‌تواند یکی از رأس‌های شش‌ضلعی اصلی باشد.

۴۲۶. همه عددهای طبیعی را پیدا کنید، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، برابر مجذور تعداد همه مقسوم‌علیه‌های خود باشد.

۴۲۷. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1, a_2, \dots, a_n داریم:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 2 \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

۴۲۸. در مثلث ABC ($AB \neq AC$)، از رأس A ، خط‌های راست مختلفی گذرانده‌ایم. ثابت کنید، روی هر کدام از آن‌ها، بیش از یک نقطه

M پیدا نمی‌شود که غیر از رأس‌های مثلث باشد و در شرط $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

صدق کند. خط‌های راستی را معین کنید که شامل چنین نقطه‌ای نباشند.

۴۲۹. مکعب با یال به طول n ($n \geq 3$)، از n^3 مکعب واحد تشکیل

شده است. ثابت کنید، می‌توان روی هر یک از این مکعب‌های واحد، عدد

درستی نوشت، به نحوی که بین آن‌ها، عددهای برابر وجود نداشته باشد و

مجموع عددها، در هر ردیفی که موازی با یک یال مکعب است، برابر صفر شود.

۴۳۰. در عدد نویسی به مبنای ۱۰، عدد طبیعی a دارای n رقم برابر

x ، عدد b دارای n رقم برابر y و عدد c دارای $2n$ رقم برابر z است.

برای هر $n \geq 2$ ، همه این گونه رقم‌های x ، y و z را پیدا کنید که، برای

آن‌ها، داشته باشیم: $a^2 + b = c$.

۴۳۱. در درون یک دوازده ضلعی محدب، دو نقطه داده شده است که

به فاصله ۱۰ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. برای هر یک از این نقطه‌ها،

مجموع فاصله‌های از آن‌ها تا رأس‌های دوازده ضلعی را پیدا کرده‌اند. ثابت

کنید، اختلاف این دو مجموع، از یک متر کمتر است.

۴۳۲ ✓ در ۳۰ لیوان شیر، وجود دارد. پسر بچه‌ای می‌خواهد کاری کند

که مقدار شیر، در همه لیوان‌ها برابر باشد. برای این منظور، به ترتیب،

دو لیوان را برمی‌دارد و از یکی در دیگری می‌ریزد تا مقدار شیر آن‌ها

برابر شود. آیا می‌توان، مقدار شیر اولیه را در لیوان‌ها، طوری انتخاب

کرد که پسر بچه، هر قدر که به کار خود ادامه دهد، نتواند به هدف خود برسد؟

۴۳۳. مستطیلی را، به کمک خط‌های راست موازی با ضلع‌های آن،

به مربع‌هایی به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم و، سپس، آن‌ها را، شبیه صفحه

شطرنج، به رنگ‌های سیاه و سفید در آورده‌ایم. قطر مستطیل، به پاره‌خط‌های

راست سفید و سیاه تقسیم می‌شود، مطلوب است نسبت مجموع طول‌های

پاره‌خط‌های سفید به مجموع طول‌های پاره‌خط‌های سیاه، به شرطی که اندازه‌های

مستطیل $(a : 100 \times 99)$ ؛ $(b : 101 \times 99)$ باشد.

۴۳۴. n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ ، روی صفحه داده شده است. (a)

ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، می‌توان برای هر نقطه M از صفحه، در عبارت

$$\pm \overrightarrow{MA_1} \pm \overrightarrow{MA_2} \pm \dots \pm \overrightarrow{MA_n}$$

علامت‌های مثبت و منفی را طوری انتخاب کرد که، مجموع حاصل، برابر صفر شود. (b) ثابت کنید، در حالت فرد بودن n ، عبارت مذکور به کمک انتخاب علامت‌های مثبت و منفی، تنها برای تعداد محدودی نقطه M از صفحه، برابر صفر می‌شود.

۴۳۵. خانه‌های یک جدول مربعی $n \times n$ ($n \geq 3$) را، به این ترتیب، با عددهای ± 1 پر کرده‌ایم:

(۱) در تمام خانه‌های مرزی جدول، عدد -1 را گذاشته‌ایم؛
 (۲) عددهایی را که به نوبت در خانه‌های خالی جدول می‌گذاریم، می‌توان به یکی از این دو صورت انتخاب کرد: برابر با حاصل ضرب دو عدد دو طرف آن در یک سطر و یا برابر حاصل ضرب دو عدد دو طرف آن در یک ستون باشد. این روش را ادامه می‌دهیم تا همه خانه‌های جدول پر شود. (a) حداکثر؛ (b) حداقل تعداد عددهای $+1$ در جدول چقدر است؟

۴۳۶. درستی این نابرابری را، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید:

$$|\sin 1| + |\sin 2| + \dots + |\sin(3n-1)| + |\sin 3n| > \frac{8}{5}n$$

۴۳۷. m و n ، عددهایی طبیعی‌اند و $1 \leq m < n \leq 1986$. ثابت

کنید، مجموع همه عددهای به صورت $\frac{1}{mn}$ ، عددی درست نیستند.

۴۳۸. یک مربع و یک مثلث را، بردایره‌ای به شعاع واحد محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت بخش مشترک مربع و مثلث از $3/4$ بیشتر است. آیا می‌توان گفت که، این مساحت، از $3/5$ بیشتر است؟

۴۳۹*. چند جمله‌ای $P(x)$ را «مجاز» می‌نامیم، وقتی که همه ضریب‌های آن، برابر $0, 1, 2$ یا 3 باشند. برای عدد طبیعی مفروض n ، تعداد همه چند-جمله‌ای‌های «مجاز» را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $P(2) = n$.
 ۴۴۰*. همه چهاروجهی‌های $AXBY$ را در نظر می‌گیریم که بر کره

مفروضی محیط‌اند. ثابت کنید، اگر نقطه‌های A و B ثابت باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی $AXBY$ ، یعنی مقدار

$$\widehat{AXB} + \widehat{XBY} + \widehat{BYA} + \widehat{YAX}$$

به انتخاب نقطه‌های X و Y بستگی ندارد.

بیست و یکمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی سال ۱۹۸۷ (فرونزه)

روز دوم	روز اول	کلاس
۴۵۵ ۴۵۴ ۴۵۳ ۴۵۲	۴۴۴ ۴۴۳ ۴۴۲ ۴۴۱	:۸
۴۵۹ ۴۵۸ ۴۵۷ ۴۵۶	۴۴۸ ۴۴۷ ۴۴۶a ۴۴۵	:۹
۴۶۲ ۴۶۱ ۴۶۰ ۴۵۵	۴۴۶b ۴۵۱ ۴۵۰ ۴۴۹	:۱۰

۴۴۱. ده ورزشکار، در مسابقهٔ تنیس روی میز، مسابقه می‌دهند. هر دو نفر آن‌ها، درست يك بار باهم بازی می‌کنند. اولی در x_1 بازی پیروز شد و در y_1 بازی باخت؛ دومی x_2 بازی را برد و y_2 بازی را شکست خورد و غیره. ثابت کنید:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

۴۴۲. می‌دانیم، به کمک ۶ وزنه می‌توان ۶۳ جسم را که، وزن آن‌ها، عددهای طبیعی متوالی را تشکیل می‌دهند، وزن کرد. همهٔ این گونه وزنه‌ها را پیدا کنید.

۴۴۳. هفت ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_7$ مفروض است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1 A_5} + \frac{1}{A_1 A_3} = \frac{1}{A_1 A_7}$$

۴۴۴. بازی «نبرد دریائی»، در مربع 7×7 خاندهای انجام می‌شود. حداقل چند شلیک لازم است تا، به طور حتم، چهار نفر عرشهٔ کشتی زخمی شوند، به شرطی که

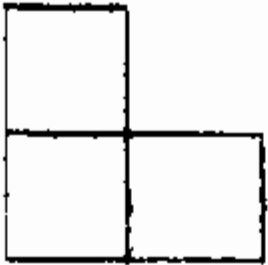
(a) به صورت  باشد؛

(b) از چهارخانه‌ای که ضلع‌های آن‌ها به هم متصل است، تشکیل شده باشد.

۴۴۵. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد

$$1^{1987} + 2^{1987} + \dots + n^{1987}$$

بر $n+2$ بخش پذیر نیست.

۴۴۶. (a) حداقل چند نمونه از شکل  را باید در مربع 8×8

خانه‌ای جا داد، تا دیگر نتوان حتی یکی از این شکل‌ها را، بدون این که روی دیگران قرار گیرد، در آن مستقر کرد؟

(b) در مربع 1987×1987 خانه‌ای، یکی از خانه‌ها را، به دلخواه، جدا کرده‌ایم. ثابت کنید، در هر حال، بخش باقی مانده را می‌توان به صورت شکل‌های شبیه بخش (a) برید.

۴۴۷. سه خط راست، موازی ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. هر يك از این خط‌های راست، از ضلعی که با آن موازی است، به فاصله‌ای برابر طول همان ضلع قرار دارد. در ضمن، برای هر ضلع مثلث، خط راست موازی با آن و رأس مقابل به این ضلع، در دو طرف مختلف ضلع قرار گرفته‌اند. ضلع‌های مثلث را امتداد داده‌ایم تا سه خط راستی را که رسم کرده‌ایم، قطع کنند. ثابت کنید، این نقطه‌های برخورد، روی محیط يك دایره واقع‌اند.

۴۴۸*. دو خط شکسته بسته، که تعداد ضلع‌های هر کدام از آن‌ها عددی فرد است، روی صفحه‌ای داده شده‌اند. همه ضلع‌های این خط‌های شکسته، روی خط‌های راست مختلفی قرار دارند و هیچ سه تایی از آن‌ها، از يك نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، از هر خط شکسته، می‌توان يك ضلع طوری انتخاب کرد که دو ضلع روبرو در يك چهارضلعی محدب باشند.

۴۴۹. پنج عدد طبیعی طوری پیدا کنید که، هر دو عدد آن‌ها، نسبت

به هم اول باشند و، مجموع هر چند عدد از آن‌ها، عددی مرکب باشد.

۴۵۰. ثابت کنید، اگر، در پنج ضلعی محدب $ABCDE$ داشته باشیم:

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADE}, \widehat{AEC} = \widehat{ADB}$$

آن وقت داریم: $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$.

۴۵۱. همه مقادیرهای α را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آنها، دنباله

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \cos 8\alpha, \dots, \cos 2^n \alpha$$

فقط شامل عددهای منفی باشد.

۴۵۲. برای عددهای مثبت a, b, c, A, B, C داریم:

$$a + A = b + B = c + C = k$$

ثابت کنید: $aB + bC + cA \leq k^2$.

۴۵۳. در هر یک از خاندهای جدول مربعی 1987×1987 خاندهای،

عددی گذاشته‌ایم که، قدر مطلق آن، از واحد تجاوز نمی‌کند. در هر مربع 2×2 از این جدول، مجموع عددها، برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع همه عددهای این جدول، از 1987 تجاوز نمی‌کند.

۴۵۴. رأس B از زاویه ABC در بیرون دایره‌ای قرار دارد و نیم خط‌های

راست BA و BC ، دایره را قطع می‌کنند. از نقطه K ، محل برخورد نیم خط راست BA با محیط دایره، خط راستی عمود بر نیمساز زاویه کشیده‌ایم، که دایره را در نقطه‌های K و P ، و نیم خط راست BC را در نقطه M قطع کرده است. ثابت کنید، طول پاره خط راست PM ، دو برابر طول عمودی است که از مرکز دایره بر نیمساز زاویه ABC فرود آید.

۴۵۵. دو نفر، به نوبت، عددی طبیعی را که از p تجاوز نمی‌کند، بر تخته سیاه می‌نویسند. کسی بازنده است که نتواند، در نوبت خود، عددی را بنویسد. در ضمن، طبق قانون بازی، نمی‌توان عددی را روی تخته سیاه نوشت که مقسوم‌علیه‌ی از یکی از عددهای قبلی باشد.

(a) روشن کنید. بد از ای $p = 10$ ، چه کسی می‌تواند برنامه‌ای برای بردن خود طرح کند. این برنامه را توضیح دهید.

(b) به همان پرسش درباره $p=1000$ پاسخ بدهید.

۴۵۶. عمو «دریا»، هر عصر از بین ۳۳ پهلوانی که برای نگهبانی نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاح دید خود، انتخاب می‌کند. حداقل بعد از چند روز، همه پهلوانان، به تعداد برابر نگهبانی داده‌اند؟

۴۵۷. در شبکه‌ای، که مختصات گره‌های آن عددهایی درست‌اند، مجموعه‌ای غیرتهی از گره‌ها را علامت گذاشته‌ایم. به جز آن، دسته‌ای از بردارهای غیر صفر، با مختصات درست داده شده است. می‌دانیم، اگر از هر گره شبکه که علامت دارد، همه بردارهای مفروض را رسم کنیم، بین نقطه‌های انتهائی آن‌ها، نقطه‌های علامت‌دار، بیش از نقطه‌های بی‌علامت است. ثابت کنید، تعداد گره‌های علامت‌دار، بی‌نهایت است.

۴۵۸. p ضلعی محدب را ($p \geq 5$)، روی همه قطرهای بریده‌ایم. ثابت کنید، بین بخش‌های حاصل، بخش‌هایی با مساحت‌های برابر وجود دارد.

* ۴۵۹. مجموعه T_0 ، شامل همه عددهای به صورت (2^k) است که، در آن، $\dots, 2, 1, 5, k$ ، به ازای هر $1987, \dots, 2, 1, p$ ، مجموعه T_p را از مجموعه T_{p-1} به این ترتیب به دست می‌آوریم که، به آن، همه عددهایی را که به صورت مجموعی از چند جمله T_{p-1} است، اضافه کنیم. ثابت کنید، دست کم یک عدد طبیعی وجود دارد که به مجموعه T_{1987} تعلق ندارد.

۴۶۰. نمودار تابع $y = f(x)$ ، که در تمامی محور عددی معین

است، ضمن دوران دور مبداء مختصات، بر خودش منطبق می‌شود.

(a) ثابت کنید، معادله $f(x) = x$ ، درست یک جواب دارد.

(b) نمونه‌ای از این تابع را بدهید.

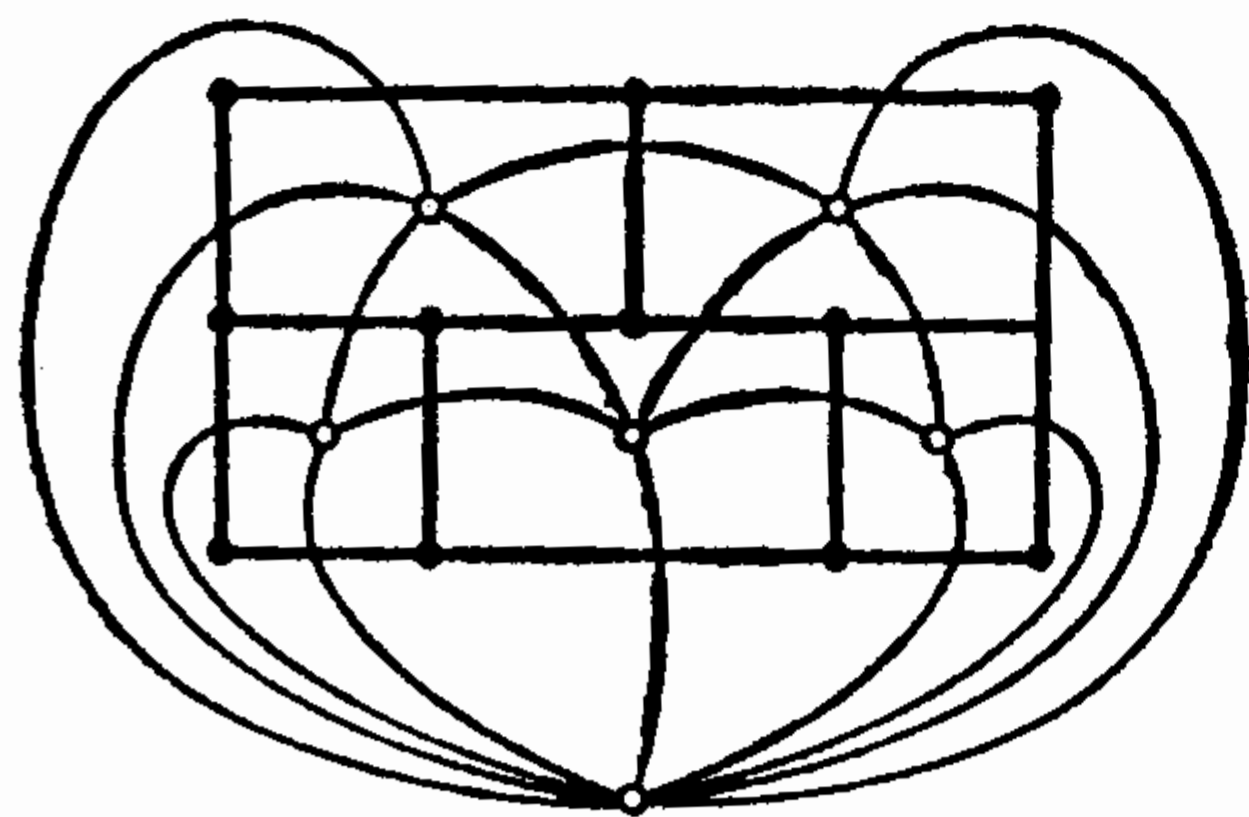
۴۶۱. همه وجه‌های یک چند وجهی محدب، مثلث‌اند. ثابت کنید، هر یال این چندوجهی را، می‌توان طوری به رنگ قرمز یا آبی در آورد که، بتوانیم از هر رأس به رأس دیگر، تنها روی یال‌های قرمز، همچنین، تنها روی یال‌های آبی حرکت کنیم.

۴۶۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، این نابرابری درست است:

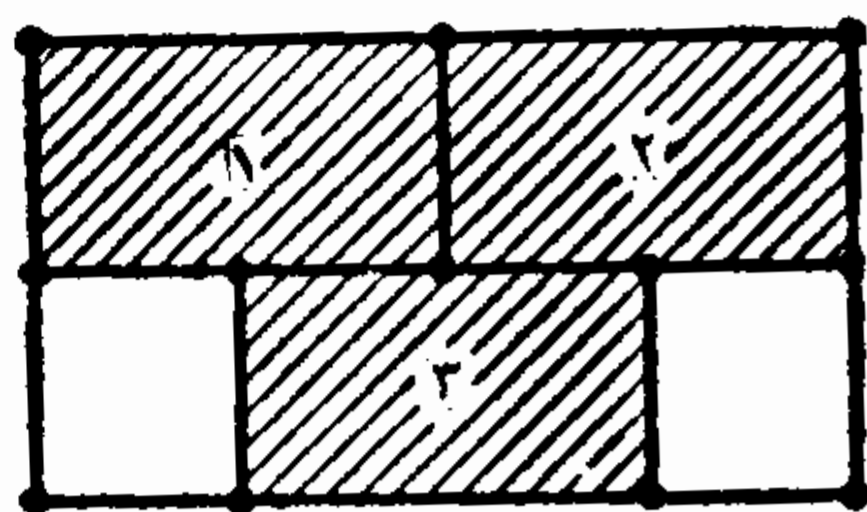
$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n$$

حل، راهنمایی، پاسخ

۱. فرض می‌کنیم، بتوانیم این خط شکسته را رسم کنیم. چون دوره هر يك از بخش‌های ۱، ۲ و ۳، که در شکل ۱۹ هاشور خورده‌اند، شامل پنج پاره‌خط راست است و خط شکسته باید هر کدام از این پاره‌خط‌های راست را، درست یکبار قطع کند، بنابراین، هر يك از این سه بخش، باید شامل یکی از دو انتهای خط شکسته باشد (اگر در یکی از این بخش‌ها، انتهای از خط شکسته نباشد، آن وقت، خط شکسته باید به تعداد مرتبه‌هایی که به آن وارد شده است، به همان تعداد هم از آن خارج شده باشد، یعنی باید پاره‌خط‌های راست مرزی را، به تعداد زوج قطع کرده باشد). ولی خط شکسته، تنها دو انتها دارد. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.



شکل ۲۰



شکل ۱۹

∇ همین راه حل را می توان، به صورت دیگری بیان کرد. شکل ما، صفحه را به ۶ حوزه تقسیم کرده است. در هر يك از این حوزه ها، نقطه ای انتخاب می کنیم و، آن را، «پای تخت» حوزه می نامیم؛ و برای هر يك از ۱۶ پاره خط راست، «جاده» ای در نظر می گیریم که این پاره خط راست را قطع و پای تخت های دو حوزه مجاور آن را به هم به وصل کرده باشد (شکل ۲۵). از این شبکه جاده ها نمی توان به نحوی عبور کرد که، از هر جاده، تنها یکبار گذشته باشیم: زیرا ۴ پای تخت وجود دارد که، از هر کدام آن ها، به تعداد فردی جاده می گذرد. و برای این که بتوان برای مسیر خود در روی جاده ها، راهی پیدا کرد که، از هر جاده تنها یکبار عبور کنیم، لازم است (و به سادگی می توان ثابت کرد که، کافی است) که، تعداد «پای تخت های فرد»، برابر ۵ یا ۲ باشد.

۲. $ABCD$ را مستطیل مفروض و LN را، مماس مشترک دایره های ۱ و ۳ (به مرکز نقطه های A و C) می گیریم. از نقطه O ، مرکز مستطیل، عمود OM را بر خط راست LN رسم می کنیم. چهار ضلعی $ALNC$ يك ذوزنقه، و OM پاره خط راستی است که وسط دو ساق آن را به هم وصل کرده است، به نحوی که

$$OM = \frac{1}{4}(r_1 + r_3)$$

فاصله نقطه O تا مماس مشترک دوم همین دو دایره، باز هم برابر

$$\frac{1}{4}(r_1 + r_3) \text{ می شود.}$$

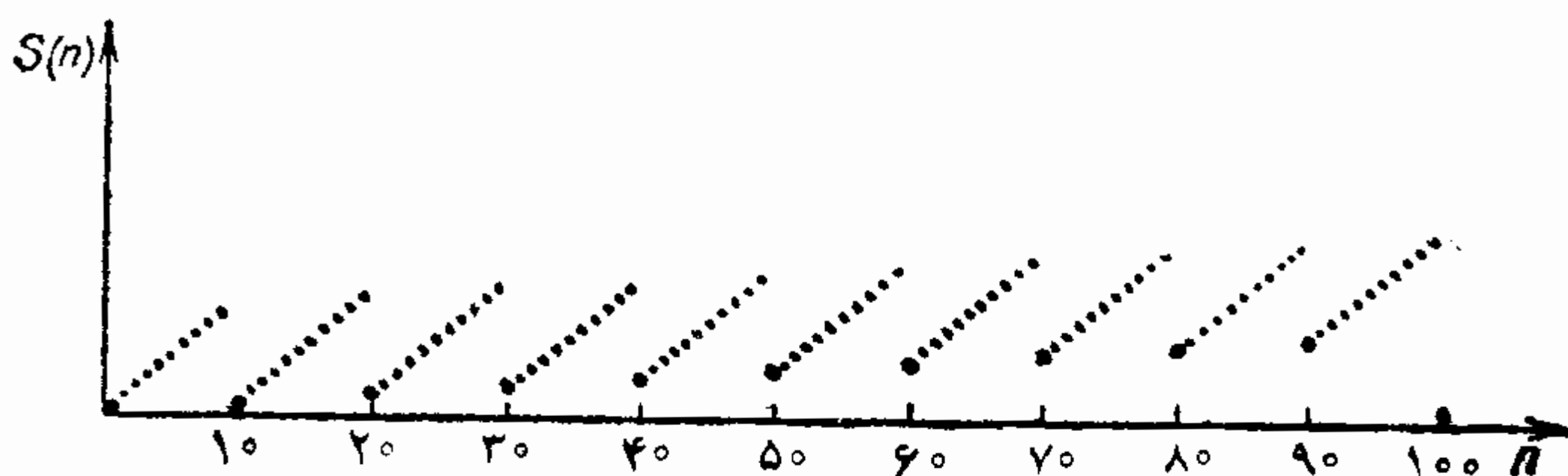
به همین ترتیب ثابت می شود که، فاصله O ، تا هر يك از مماس مشترک های

دو دایره دیگر، برابر است با $\frac{1}{4}(r_2 + r_4)$. چون، بنا به فرض، باید داشته

باشیم: $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ ، بنابراین نقطه O ، از هر چهار مماس مشترک به

يك فاصله است، یعنی مرکز دایره محاطی چهار ضلعی است که بوسیله این مماس ها تشکیل می شود.

۳. بین بیست عدد نخستین از عددهای مفروض، دو عدد وجود دارد که به صفر ختم می‌شوند (در دستگاه دهدهی عددنویسی). دست کم، در یکی از این دو عدد، رقم قبل از صفر، برابر ۹ نیست. این عدد را N ، و مجموع رقم‌های آن را S می‌گیریم. در این صورت، عددهای N ، $N+1$ ، $N+2$ ، \dots ، $N+9$ ، $N+19$ ، جزو ۳۹ عدد مفروض اند و مجموع رقم‌های آن‌ها، به ترتیب برابر است با S ، $S+1$ ، $S+2$ ، \dots ، $S+10$. ولی بین ۱۱ عدد متوالی، دست کم یکی، بر ۱۱ بخش پذیر است.



شکل ۲۱

∇ به طور کلی، برای هر $m = 2, 3, \dots$ می‌توان کوچکترین عدد c_m را طوری پیدا کرد که، بین هر c_m عدد طبیعی متوالی، دست کم در مورد یکی، مجموع رقم‌ها بر m بخش پذیر باشد (برای $m < 25$ ، کافی است رفتار تابع «مجموع رقم‌های عدد n » را، در محدوده صد عدد مطالعه کنیم؛ نمودار این تابع در شکل ۲۱ داده شده است)؛ در چند حالت خاص داریم:

$$c_2 = 3, c_3 = 5, \dots, c_{10} = 19, c_{11} = 39, c_{12} = 59.$$

			*
*	*		
*		*	
	*	*	

شکل ۲۲

۴. روشن است که، شکل ۲۲، با هفت ستاره‌ای که در خانه‌های آن گذاشته‌ایم، با شرط مساله سازگار است.
اگر تعداد ستاره‌ها برابر ۶ یا کمتر باشد، آن وقت، دو ستون پیدا می‌شود که، در هر کدام از آنها، حداکثر یک ستاره وجود دارد. دو ستون دیگر را حذف می‌کنیم. در این صورت، حداکثر دو ستاره باقی می‌ماند که، با حذف سطرهایی که این دو ستاره در آنها قرار دارند، دیگر ستاره‌ای باقی نمی‌ماند.

▽ بررسی حالت کلی این مساله، جالب است: حداقل تعداد ستاره‌هایی که می‌توان در یک جدول $m \times n$ قرار داد، چقدر می‌تواند باشد تا اگر k ستون و l سطر را حذف کنیم، دست کم، یک ستاره باقی بماند (در این جا، l, m, n و k عددهایی طبیعی اند و $l < n, k < m$). ولی حل این مساله، حتی برای $m = n$ و $k = l = n - 2$ ، بسیار دشوار است (مساله ۲۵۸ را ببینید که، در آن جا، $n = 7$ و $n = 13$).

۵. a از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، دوباره، با چهار عدد نخستین، یعنی (a, b, c, d) برخورد کنیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که، در این صورت $abcd = 1$.

$abcd = p$ می‌گیریم. در این صورت، حاصل ضرب عددهای گروه دوم برابر p^2 ، حاصل ضرب چهار عدد گروه سوم برابر p^4 ، حاصل ضرب عددهای گروه چهارم برابر p^8 و غیره می‌شود. روشن است که، برای $p \neq 1$ ، در دنباله این حاصل ضرب‌ها، نمی‌توان به دو عدد برابر رسید و، بنابراین، همه گروه‌ها، با هم فرق دارند. به این ترتیب $p = 1$.

اکنون، گروه چهار عددی دوم را در نظر می‌گیریم: ab, bc, cd, da . چون $abcd = 1$ ، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که گروه چهارم، به صورت عددهای $a^2b^2, d^2a^2, c^2d^2, b^2c^2$ درمی‌آید. به این ترتیب، گروه چهارم، از مجذور عددهای گروه دوم و جا به جایی آنها، به دست می‌آید. به همین ترتیب، می‌توان از گروه چهارم عددها، گروه ششم و، سپس، از آن، گروه هشتم و غیره را به دست آورد.

اگر همه عددهای گروه چهارم، برابر واحد نباشند، آن وقت، بزرگترین آنها، از واحد بزرگتر است. بنا بر این، بزرگترین عدد، از چهار عدد گروه $2n$ ام، همراه با n ، تا بی نهایت ترقی می کند؛ و این، متناقض با آن است که، بدطور متناوب، تکرار شوند.

به این ترتیب $ab = bc = cd = da = 1$ ، که از آنجا، به سادگی به دست می آید: $a = b = c = d = 1$.

(b) به سادگی روشن می شود که، حکم مساله، برای $n = 1$ درست است. فرض می کنیم، حکم، برای $n = k$ درست باشد و ثابت می کنیم که، در این صورت، برای $n = k + 1$ هم درست است. سه سطر اول را می نویسیم:

$$(1) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k+1}$$

$$x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_{2k+1} x_1$$

$$x_1 x_3, x_2 x_4, x_3 x_5, \dots, x_{2k+1} x_2$$

به سادگی می بینیم که، عددهای ردیف فرد و عددهای واقع در ردیف زوج، سطرهای

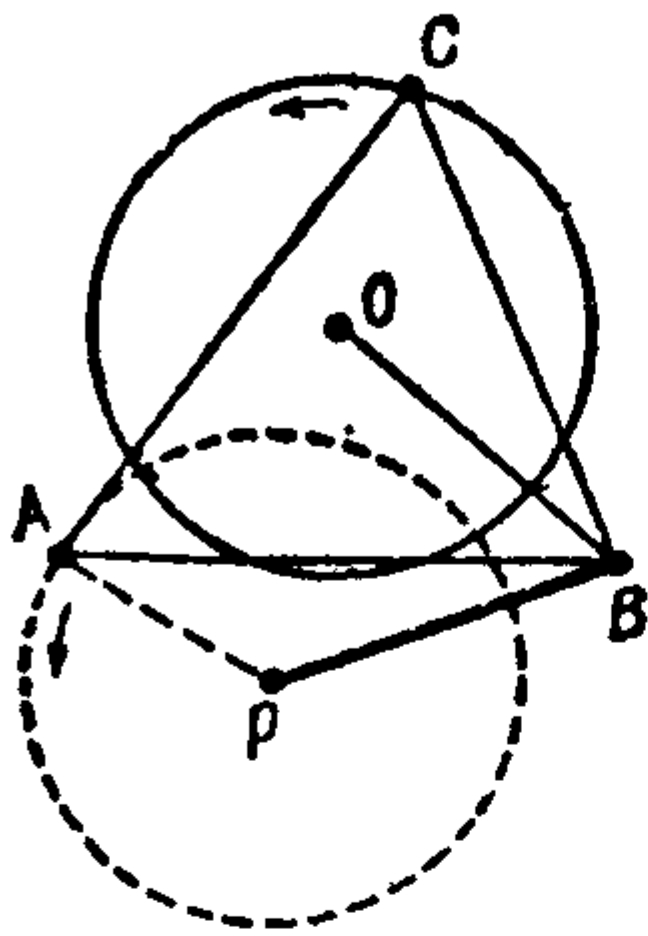
$$x_1, x_3, \dots, x_{2k+1} \quad \text{و} \quad x_2, x_4, \dots, x_{2k+1}$$

را به وجود می آورند که، هر کدام از آنها طولی برابر 2^k دارد و، بنا بر فرض استقرا، سرانجام، به واحدهای مثبت می رسند. بنا بر این، سطر (1) هم، بعد از برداشتن گامهایی، منجر به واحدهای مثبت می شود.

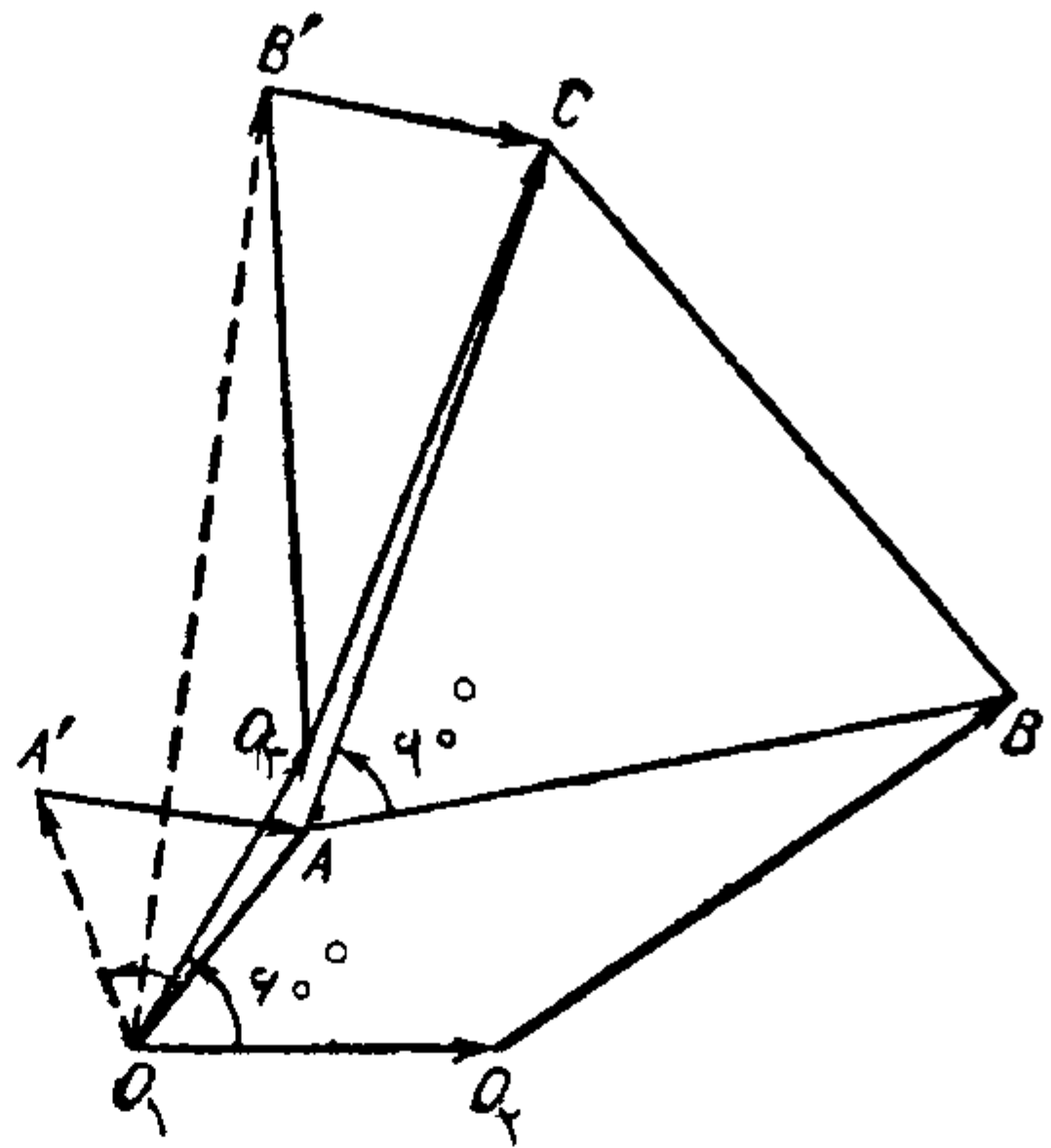
∇ می توان ثابت کرد که از سطر x به طول $m = 2^k r$ (r ، عددی فرد است)، تنها وقتی می توان به سطر y با واحدهای مثبت رسید که، x از r بخش مساوی به طول 2^k تشکیل شده باشد، یعنی دوره تناوبی برابر 2^k داشته باشد.

۶. a) فرض می کنیم $O_1 O_3$ برداری باشد که از دوران بردار $O_1 O_2$ →

به اندازه 60° درجه (در همان جهتی که از دوران AB → بردار AC به دست می آید) به دست آمده است؛ در همین دوران دور O_1 ، تصویر A و B را



شکل ۲۴

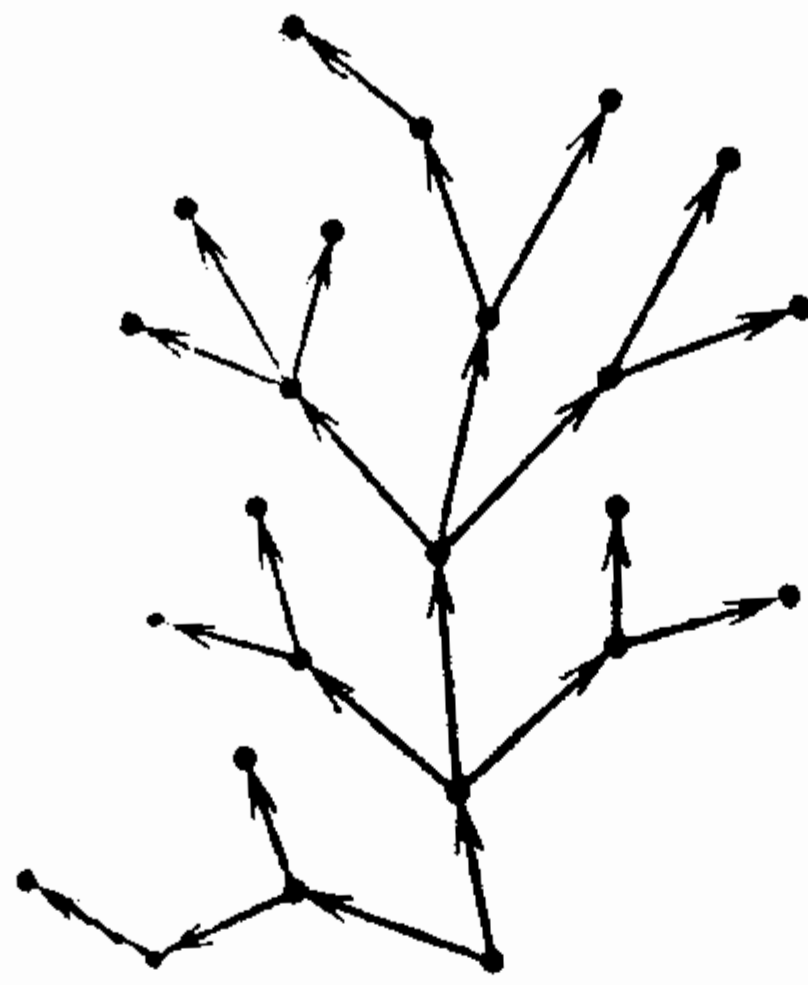


شکل ۲۳

A' و B' می گیریم. ضمن دوران یکنواخت بردارهای O_1A و O_1B ، مثلث $O_1A'A$ هم دور O_1 ، و بردارهای O_2B' و $B'C = A'A$ و در نتیجه مجموع آنها O_2C هم دور O_2 ، با همان سرعت زاویه ای دوران می کنند (شکل ۲۳).
 (b) پاسخ: ۵. نقطه B را به فاصله ۳ از P تثبیت می کنیم (شکل ۲۴).
 ضمن حرکت A روی محیط دایره به شعاع ۲ و به مرکز P ، رأس C روی محیط دایره به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصله ۳ از P قرار دارد، حرکت می کند (مثلث OPB ، متساوی الاضلاع است). دورترین نقطه محیط این دایره از P ، به فاصله $CO + OP$ یعنی ۵، قرار دارد.

∇ در نابرابری $PC \leq AP + PB$ هم (برای هر مثلث متساوی الاضلاع ABC و هر نقطه P)، وقتی به برابری می رسیم که، نقطه P ، روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.

۷. بین همه جدول هایی که می توان از تغییر علامت سطرها و ستون ها به دست آورد، آن را انتخاب می کنیم که، مجموع همه عددهای واقع در آن، حداکثر باشد. این جدول T (با حداکثر مقدار ممکن مجموع عددها) وجود دارد، زیرا مجموعه روش های تغییر علامت ها در جدول $m \times n$ ، مجموعه ای متناهی و دارای 2^{mn} عضو است (تعداد روش های ممکن، برای تغییر علامت ها در سطرها و ستون ها، در عمل، از این هم کمتر است: 2^{m+n-1}). در جدول



شکل ۲۵

T ، مجموع عددها در هر سطر و هر ستون، عددی غیر منفی است. در واقع، اگر مجموع عددها در یک سطر (یا یک ستون) از جدول T ، منفی باشد، آن وقت با تغییر علامت عددها در این سطر (یا ستون)، به جدولی می‌رسیم که مجموع عددهای آن بیشتر از مجموع عددهای جدول T می‌شود که، نوع انتخاب جدول T را، نقض می‌کند.

۸. یکی از نقطه‌ها را «ریشه» می‌نامیم. هر یک از $1 - n$ نقطه باقی مانده را، در تناظر با آخرین پاره‌خط مسیری قرار می‌دهیم که از «ریشه» به این نقطه می‌رود (بنا بر، شرط، این مسیر، منحصر به فرد است). این تناظر، یعنی تناظر بین مجموعه $1 - n$ نقطه و مجموعه پاره‌خط‌ها، یک به یک است. اگر روی همه پاره‌خط‌های راستی که از «ریشه» آغاز شده‌اند، در مسیری که به سمت نقطه‌های دیگر می‌روند، علامت پیکان بگذاریم (شکل ۲۵)، آن وقت، به هر نقطه (به جز ریشه)، یک پیکان می‌رسد.

∇ گرافی که، در این مسأله، مورد مطالعه قرار گرفته است «درخت» نامیده می‌شود (ضمیمه ۱۱)؛ در این جا، یکی از «رأس‌های» گراف را به عنوان «ریشه» انتخاب کرده‌ایم. یادآوری می‌کنیم، این مسأله را، با روش استقرای ریاضی (ضمیمه ۱) هم می‌توان حل کرد.

۹. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد b و $p - a$ را برابر d می‌گیریم:

$$b = kd \text{ و } p - a = ld$$

در این صورت، k و l نسبت به هم اول می‌شوند. سپس داریم:

$$ak + bl = \frac{ab}{d} + \frac{(p-a)b}{d} = pk$$

یعنی $ak + bl$ بر p بخش پذیر است.

۱۰. پاسخ: مناسب ترین روش، برای کولیا، روش اول است؛ در هر يك از روش های دوم و سوم، به شرط بازی آگاهانه، گردوی کمتری بدو می رسد. (همان طور که خواهیم دید، در این تقسیم، بحث تنها بر سر يك گردو است.)

فرض کنیم پهتیا، گردوها را، به نحوی، به دو بخش کرده باشد (در يك بخش a و در دیگری b گردو؛ $a < b$)؛ کولیا می تواند بخش بزرگتر را طوری تقسیم کند که در یکی ۱ گردو و در دیگری $b - 1$ گردو وجود داشته باشد. همین دو بخش، کوچکترین و بزرگترین بخش ها را تشکیل می دهند (و این، بستگی به تقسیم بخش شامل a گردو ندارد). به این ترتیب، باروش اول، به تعداد $n + 1$ گردو به کولیا می رسد. (اگر پهتیا $a = n$ و $b = n + 1$ گرفته باشد، سهم او در این روش، يك گردو کمتر از سهم کولیا می شود.) در روش دوم، اگر بعد از نخستین حرکت داشته باشیم $a = 2$ و $b = 2n - 1$ ، بهترین نوع تقسیم برای کولیا عبارت است از

$$2 = 1 + 1, \quad 2n - 1 = (n - 1) + n$$

که در این صورت، n گردو به کولیا می رسد. (اگر حرکت اول، به نحو دیگری باشد، کولیا می تواند تقسیم را طوری انجام دهد که کمتر از $n + 1$ گردو به او نرسد.)

در روش سوم، اگر $a = n$ و $b = n + 1$ باشد، کولیا نمی تواند طوری تقسیم ها را انجام دهد که بیش از $n + 1$ گردو به او برسد (مجموع دو بخش متوسط و مجموع دو بخش کوچکتر و بزرگتر، همیشه یکی از دو مقدار n یا $n + 1$ را اختیار می کنند). در این صورت، وقتی که کولیا يك گردو به پهتیا بدهد، سهم پهتیا بیشتر می شود.

۱۱. چون a_1, a_2, \dots, a_n عددهایی طبیعی اند، بنا بر این می توان

شماره‌های i_1, i_2, \dots, i_n را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم:

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n} \leq \dots$$

(a_{i_1} ، کوچکترین عدد در دنباله a_n ؛ a_{i_2} ، کوچکترین عدد از بقیه جمله‌های دنباله a_n و غیره). به همین ترتیب، از دنباله شماره‌های $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ می‌توان دنباله $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$ را طوری در نظر گرفت که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$b_{j_1} \leq b_{j_2} \leq \dots \leq b_{j_n} \leq \dots$$

روشن است که، در این ضمن، دنباله $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}, \dots$ ، غیر نزولی باقی می‌ماند. اکنون، کافی است، از دنباله $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_n}, \dots$ دنباله‌ای غیر نزولی را انتخاب کنیم. در این صورت

$$a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_n} \leq \dots$$

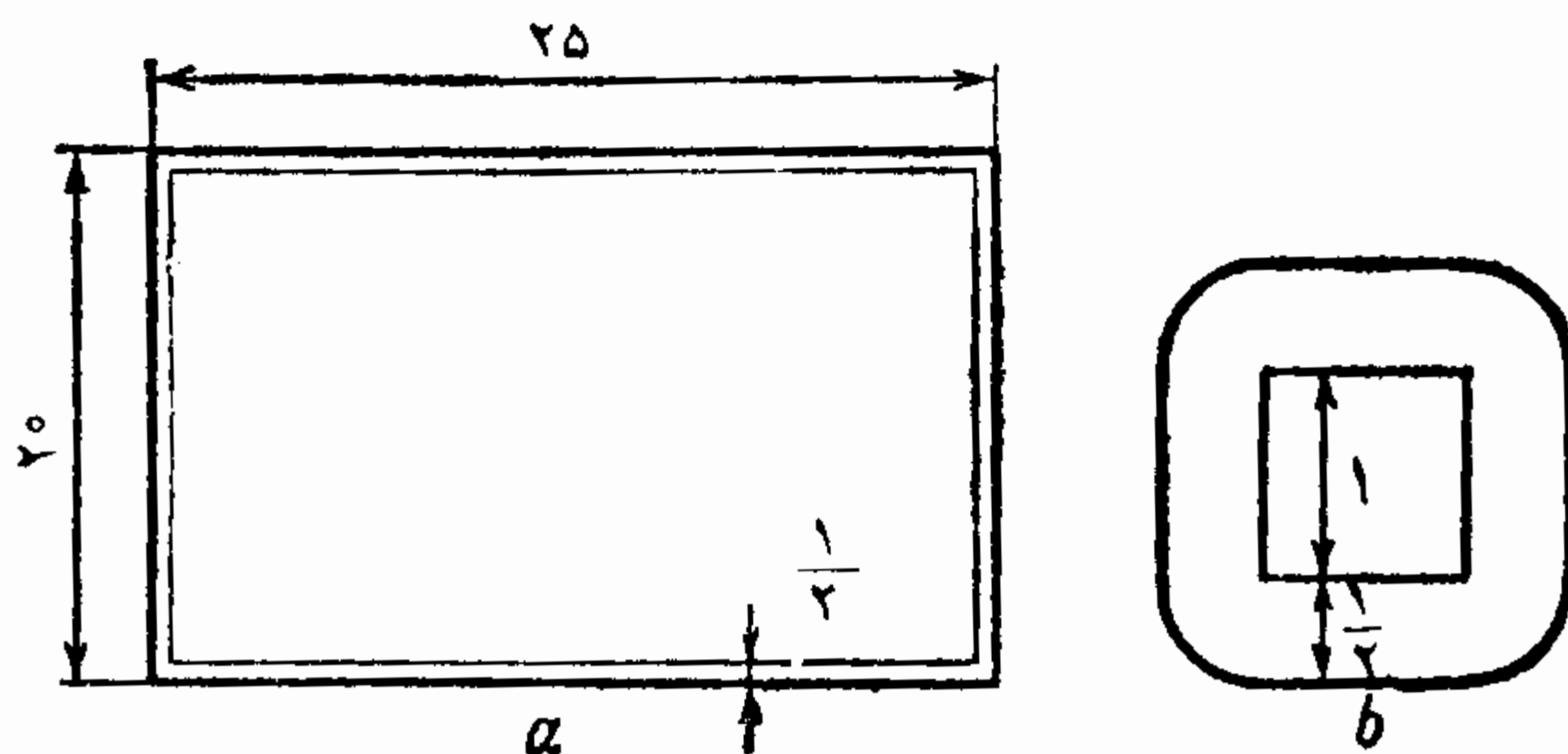
$$b_{k_1} \leq b_{k_2} \leq \dots \leq b_{k_n} \leq \dots$$

$$c_{k_1} \leq c_{k_2} \leq \dots \leq c_{k_n} \leq \dots$$

که از آن‌ها، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

▽ ضمن حل مساله، از این گزاره استفاده کردیم که، در هر مجموعه عددهای طبیعی (ولو نامتناهی)، کوچکترین عدد وجود دارد. در واقع، این گزاره، با نظام استقرای ریاضی، هم ارز است (ضمیمه ۱).

۱۲. مرکز دایره به قطر واحد، باید در درون مستطیلی باشد که، ضلع‌های



شکل ۲۶

آن، به فاصله‌ای بیش از $\frac{1}{4}$ از ضلع‌های مستطیل اصلی قرار دارند و، در ضمن، در درون مستطیل اصلی باشد؛ یعنی این مرکز، باید در درون چارچوبی باشد که در شکل ۲۶ - a نشان داده شده است. مساحت این مستطیل درونی، برابر است با $456 = 24 \times 19$.

به جز این، مرکز این دایره، باید به فاصله بیش از $\frac{1}{4}$ از محیط هر یک از مربع‌ها باشد، یعنی در بیرون هر شکلی به مساحت $3 + \frac{\pi}{4}$ ، که در شکل ۲۶ - b دیده می‌شود. حتی اگر این شکل‌ها یکدیگر را قطع نکنند، مجموع مساحت‌های آن‌ها چنین می‌شود:

$$120 \left(3 + \frac{\pi}{4} \right) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \times 3/2 = 456$$

بنابراین، این شکل‌ها، نمی‌توانند مستطیل به مساحت ۴۵۶ را پوشانند و، در نتیجه، دایره‌ای با قطر واحد پیدا می‌شود که هیچ کدام از مربع‌ها را قطع نکند.

۱۳. هر میانه، مثلث را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. بنا بر این (شکل ۲۷) داریم:

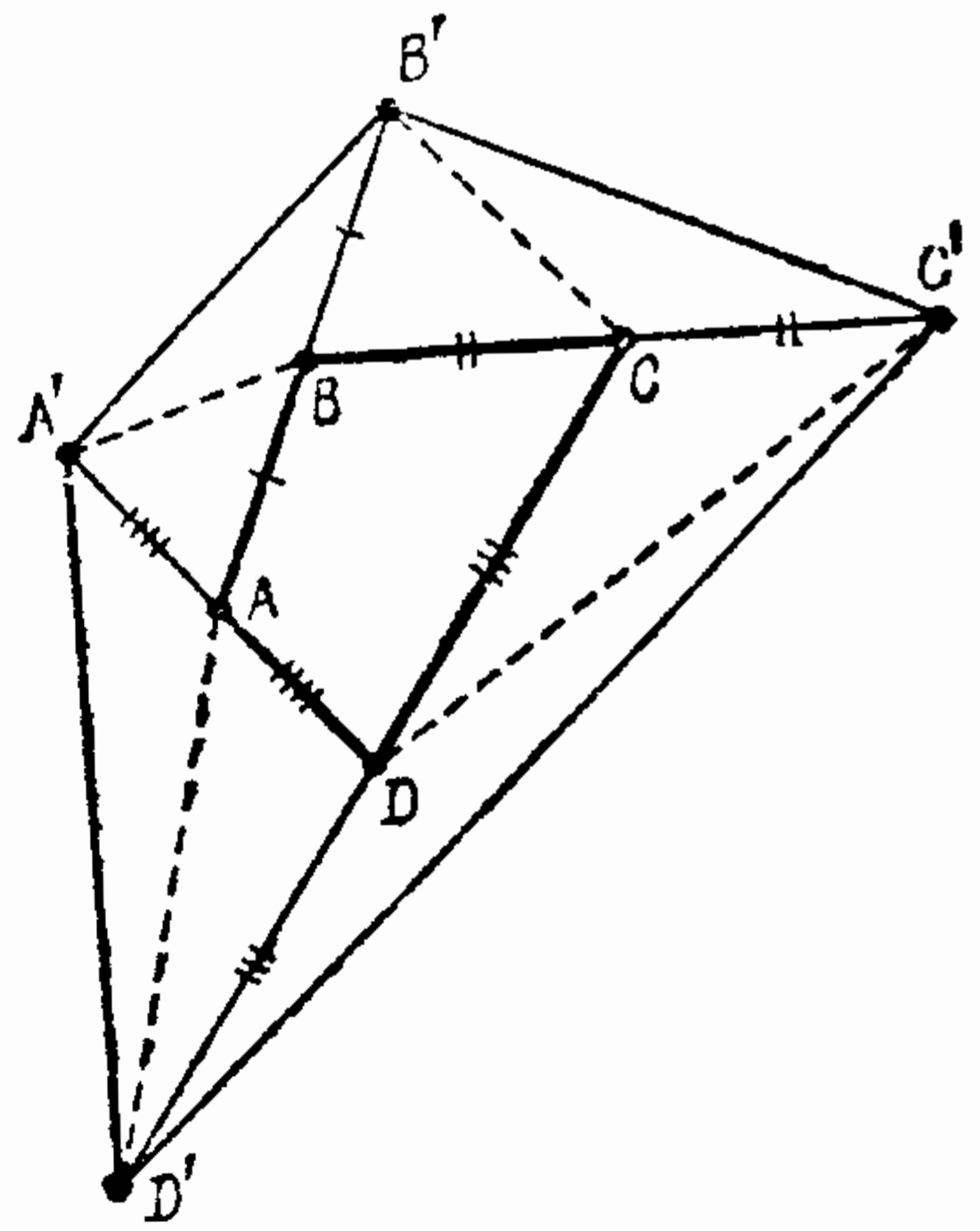
$$S_{ABC} = S_{CBB'} = S_{CB'C'}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود: $S_{BB'C'} = 2S_{ABC}$.
به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

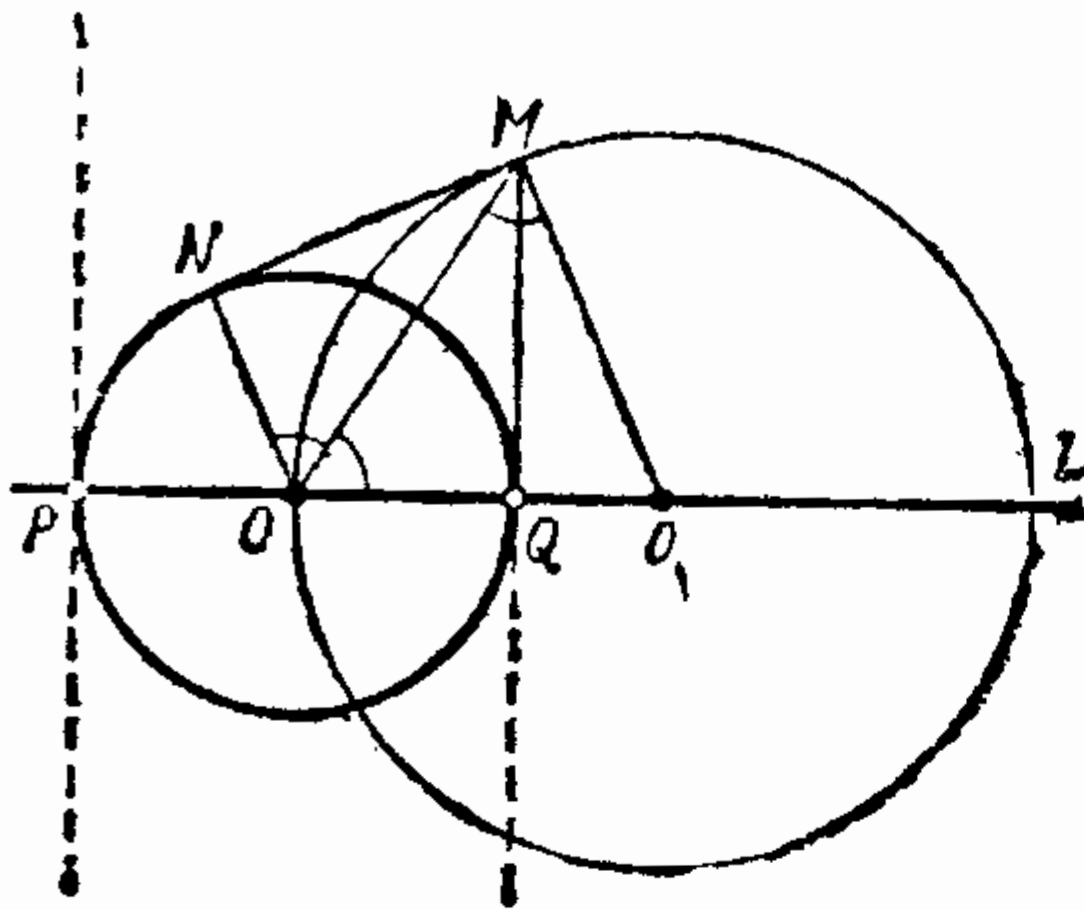
$$S_{CD'C'} = 2S_{BCD}; S_{DD'F'} = 2S_{CDA}; S_{AA'B'} = 2S_{DAB}$$

و از مجموع این چهار برابری، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_{BB'C'} + S_{CC'D'} + S_{DD'F'} + S_{AA'B'} &= \\ &= 2(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) = 4S \end{aligned}$$



شکل ۲۷



شکل ۲۸

به این ترتیب: $S_{A'B'C'D'} = 4S + S = 5S$

۱۴. پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از دو خط راست مماس بر

دایره S در نقطه‌های P و Q (به استثنای خود نقطه‌های P و Q).

نقطه تماس مماس مشترک دو دایره S و S' با دایره S را، N می‌نامیم.

در این صورت

$$\widehat{NOM} = \widehat{OMO_1} = \widehat{MOO_1}$$

($ON \parallel O_1M$ و $OO_1 = O_1M$). بنابراین زاویه MQO قائمه است و خط

راست MQ در نقطه Q بر دایره S مماس است (شکل ۲۸).

از طرف دیگر، از هر نقطه واقع بر خط راست جواب، به شرطی که

روی محیط S نباشد، می‌توان دایره‌ای گذراند که مرکزش روی خط راست

l باشد و، در ضمن، از O بگذرد.

۱۵. بنا به فرض $a_1 - a_0 \geq 1$. سپس به ترتیب

$$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0); \quad a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1); \quad \dots;$$

$$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$$

اگر این ۹۹ برابری را درهم ضرب کنیم (دو طرف هر یک از برابری‌ها، عددی

مثبت است)، سرانجام به دست می آید:

$$a_{100} = a_{99} + 2^{99} (a_1 - a_2) > 2^{99}$$

▽ ارزیابی دقیق تر را می توان، به کمک استقرا به دست آورد:

$$a_{100} \geq 2^{100}, (k = 1, 2, \dots), a_{k+1} - a_k \geq 2^k, a_k \geq 2^k$$

۱۶. فرض کنید: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. تفاضل

$$P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$$

بر ۴۳ بخش پذیر است و نمی تواند برابر واحد باشد.

▽ به طور کلی، برای هر چند جمله ای $P(x)$ با ضرایب های درست،

برای هر دو عدد درست x_1 و x_2 ، تفاضل $P(x_1) - P(x_2)$ بر $x_1 - x_2$ بخش پذیر است (ضمیمه ۶).

۱۷. p_1, p_2, \dots, p_n را حاصل ضرب های سطرها و q_1, q_2, \dots, q_n

را حاصل ضرب های ستون ها می گیریم. در این صورت

$$p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_n$$

زیرا، هر طرف این برابری، معرف حاصل ضرب همه اعدادی واقع در جدول است. این برابری، به معنای آن است که، اگر تعداد اعدادی -1 در بین

p_1, p_2, \dots, p_n زوج باشد، تعداد اعدادی -1 در بین q_1, q_2, \dots, q_n هم زوج است و اگر تعداد اعدادی -1 در دنباله اول فرد باشد، در دنباله دوم هم فرد است. به این ترتیب، در بین دو $2n$ عدد $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$

q_1, q_2, \dots, q_n ، تعداد اعدادی -1 زوج و، بنابراین، تعداد اعدادی $+1$ هم زوج است. ولی چون n ، عددی فرد است، تعداد اعدادی -1 نمی تواند با تعداد اعدادی $+1$ برابر باشد و، در نتیجه، مجموع

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

نمی تواند برابر صفر شود.

▽ این مجموع، می تواند با $2n$ ، اختلافی برابر d داشته باشد، به شرطی

که d مضربی از ۴ باشد. جالب است، با پیدا کردن مثال های متناظر، روشن

کنید که، برای هر $d = 4k$ ، $|k| < \frac{n}{2}$ ، مجموع مربوط می تواند برابر

$2n-d$ شود.

۱۸. a و b را طول ضلع‌های BC و AC از مثلث ABC می‌گیریم و فرض می‌کنیم، میانه‌های AD و BE تحت زاویه قائمه، یکدیگر را قطع کرده باشند. پاره‌خط راست AC به طول b را در نظر می‌گیریم و نقطه F را روی آن طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $AF : FC = 3$. در این صورت FD با BE موازی و زاویه ADF برابر 90° درجه می‌شود. به این ترتیب، می‌توان نقطه D را پیدا کرد: این نقطه، اولاً روی محیط دایره‌ای به قطر AF و ثانیاً روی محیط دایره‌ای به مرکز C و شعاع $\frac{1}{4}a$ قرار دارد. با به دست آوردن نقطه D ، نقطه B هم به سادگی پیدا می‌شود. مساله وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $2 < \frac{b}{a} < 4$ ، در ضمن، مساله تنها يك جواب دارد. ∇ به سادگی می‌توان ثابت کرد که، در چنین مثلی، برای ضلع سوم به طول c داریم:

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2)$$

و از آنجا، راه دیگری برای رسم مثلث به دست آورد.

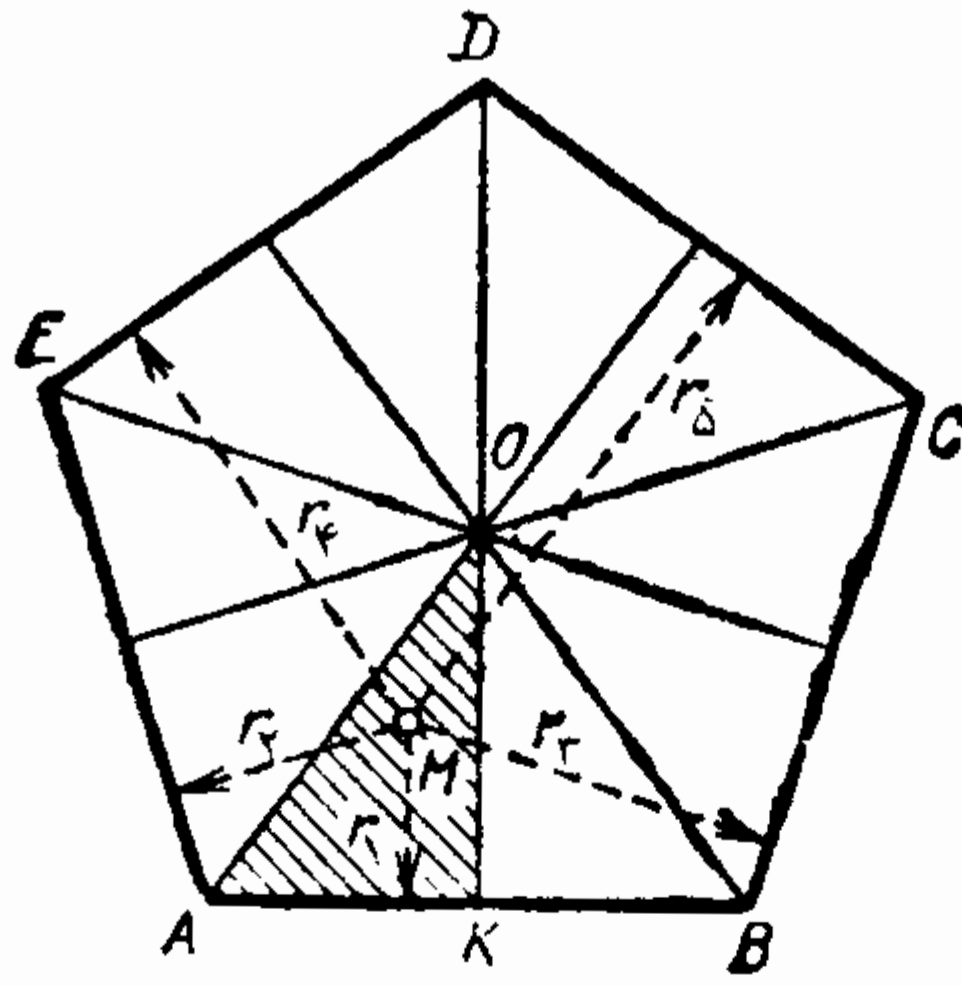
۱۹. از نابرابری $x^2 + y^2 \geq 2xy$ نتیجه می‌شود:

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2(ab + cd) \geq 4\sqrt{abcd} = 4,$$

$$ab + cd \geq 2, bc + ad \geq 2, ac + bd \geq 2$$

∇ با استفاده از قضیه کلی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی، می‌توان مساله را به طریق دیگری حل کرد و، در ضمن، ثابت کرد که، برای هر n عدد مثبت به حاصل ضرب واحد، مجموع مجذورهای آنها از n ، و مجموع حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آنها (که تعدادی برابر $\frac{1}{2}n(n-1)$

دارند) از $\frac{1}{2}n(n-1)$ کمتر نیست.



شکل ۲۹

۲۰. پاسخ: بیشترین مقدار برای رأس پنج ضلعی و کمترین مقدار برای وسط یکی از ضلع‌ها به دست می‌آید.

پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ را، به وسیله محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است نقطه M را، تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و مثلاً مثلث AOK مورد بررسی قرار دهیم (شکل ۲۹). برای این که فاصله نقطه M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم، کافی است روشن کنیم که، نقطه M ، در کدام طرف نیمساز این زاویه قرار دارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصله نقطه M تا ضلع‌های پنج ضلعی: AB ، AE ، BC ، DE و CD ، به ترتیب صعودی است:

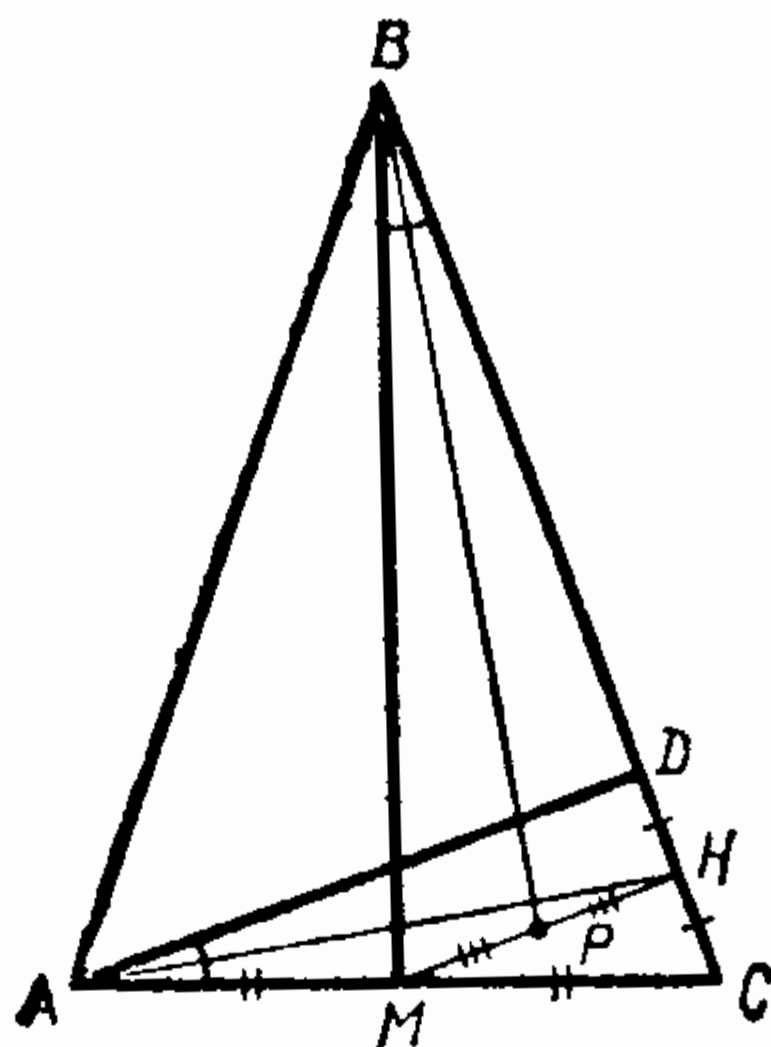
$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5$$

اکنون دیگر روشن است که فاصله r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، نقطه M روی رأس A قرار گیرد، و وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، نقطه M بر نقطه K منطبق باشد.

۲۱. پاسخ: $c = 9$.

باقی مانده تقسیم مجموع رقم‌های هر عدد بر ۹، برابر است با باقی مانده تقسیم خود عدد بر ۹ (ضمیمه ۳). از طرف دیگر $19999 < 1962 \times 9 \leq a$ ؛

$$b \leq 1 + 4 \times 9 = 37 \text{ و } c \leq 9 \quad \text{بنا بر این}$$



شکل ۳۰

۲۲. ارتفاع AD را در مثل ABC رسم می‌کنیم (شکل ۳۰). در این صورت، در مثل ADC ، پاره‌خط راست MH ضلع DC را هم نصف می‌کند، یعنی $DH = CH$. مثلث‌های قائم‌الزاویه ADC و BHM متشابه‌اند، زیرا

$$\widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{HBM}$$

اگر یکی از این مثلث‌ها را به اندازه 90° درجه دوران دهیم، ضلع‌های متناظر در آن‌ها، با هم موازی می‌شوند؛ در ضمن میانده‌های آن‌ها، AH و BP هم، موازی با هم درمی‌آیند، یعنی قبل از دوران، AH و BP بر هم عمودند.

۲۳. پاسخ: ۱.

بین مثلث‌های با دو ضلع a و b ، با شرط‌های $0 < a \leq 1$ و $1 \leq b \leq 2$ ، حداکثر مساحت، مربوط به مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های مجاور به

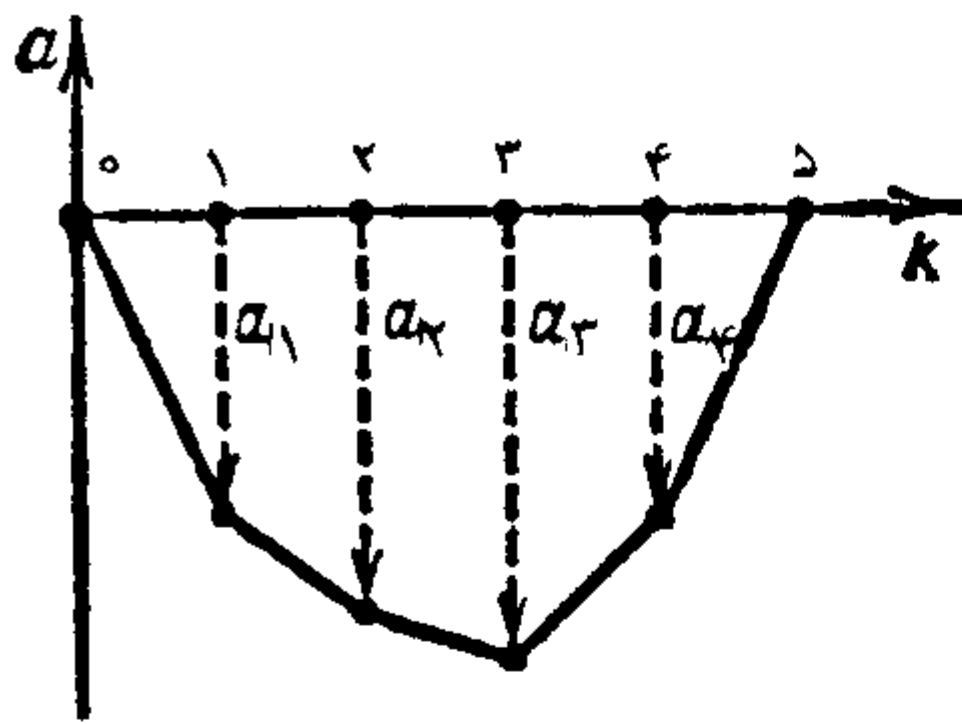
زاویه قائمه آن $a = 1$ و $b = 2$ باشد (در واقع $1 \leq \frac{ab}{2} \leq 2$ ، زیرا ارتفاع

وارد بر ضلع b ، از a تجاوز نمی‌کند). اکنون، و تر این مثلث $c = \sqrt{5}$ ، با شرط $2 \leq c \leq 3$ سازگار است؛ بنابراین، بین همه این مثلث‌ها، مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های 1 ، 2 و $\sqrt{5}$ ، حداکثر مساحت را دارد.

۲۴. خارج قسمت برابر است با

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

برای تحقیق، بهتر است فرض کنیم: $x - y = u$ ، $y - z = v$ ، در این صورت



شکل ۳۱

و، سپس، این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(u+v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u+v)(u^2 + uv + v^2)$$

[به کمک بسط دو جمله‌ای (ضمیمه ۶)].

۲۵. شکل ۳۱ به حل این مسأله کمک می‌کند: خط شکسته با رأس‌هایی

در نقطه‌های (k, a_k) ، محدب است، زیرا

$$a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$$

(یعنی، ضریب زاویه هر ضلع، از ضریب زاویه ضلع قبلی، بیشتر است)، به نحوی که همه این نقطه‌ها، به جز دو انتها، در زیر محور Ok قرار دارند.

فرض می‌کنیم، به ازای مقداری از $m \geq 1$ ، داشته باشیم: $a_{m-1} \leq 0$

و $a_m > 0$ در این صورت

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \dots \geq a_{m+1} - a_m \geq a_m - a_{m-1} > 0$$

و بنابراین

$$a_n > a_{n-1} > \dots > a_m > 0$$

که با شرط $a_n = 0$ متناقض است.

۲۶. جدولی $m \times n$ در نظر می‌گیریم و، استدلال را، با استقرا انجام

می‌دهیم. درستی حکم، برای جدول 1×1 روشن است. فرض می‌کنیم، حکم

مسأله، برای هر تعدادی کمتر از $m+n$ عدد، درست باشد n و ثابت می-

کنیم که، در این صورت، برای $m+n$ عدد هم درست است. کوچکترین

عدد، از بین $m+n$ عدد مفروض $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، این عدد، مثلاً a_1 باشد. a_1 را در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرار می‌دهیم و، سپس، سطر اول را از جدول جدا می‌کنیم. اکنون باید مساله را، برای جدول $(m-1) \times n$ و گروه‌های $a_2, \dots, a_m, a_1 - b_1, b_2, \dots, b_n$ حل کنیم که، بنا به فرض استقر، حل آن، برای ما ممکن است.

داه حل دوم. پاره‌خط راستی به طول

$$d = a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

رسم و، آن را، با دو روش، تقسیم می‌کنیم: m پاره‌خط راست «قرمز» به طول‌های a_1, a_2, \dots, a_m و n پاره‌خط راست «آبی» به طول‌های b_1, b_2, \dots, b_n . روی هم $(m-1) + (n-1)$ نقطهٔ تقسیم و، متناظر با آن، $m+n-1$ پاره‌خط راست کوچک خواهیم داشت. این باقی می‌ماند که طول هر یک از این پاره‌خط‌های راست کوچک را (اشتراک پاره‌خط قرمز a_i با پاره‌خط آبی b_j) در خانهٔ متناظر آن در جدول (محل برخورد i امین سطر و j امین ستون) بنویسیم.

۲۷. نقطهٔ برخورد دایره‌های اول، دوم، چهارم و پنجم را A ؛ نقطهٔ برخورد دایره‌های اول، سوم، چهارم و پنجم را B ؛ و نقطهٔ برخورد دایره‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم را C می‌گیریم.

هر سه نقطهٔ A, B و C نمی‌توانند جدا از هم باشند، زیرا این سه نقطه، بر محیط دایره‌های چهارم و پنجم قرار دارند و، دو دایره، نمی‌توانند بیش از دو نقطهٔ برخورد داشته باشند. بنابراین، از سه نقطهٔ A, B و C ، دو تا برهم منطبق‌اند (ضمیمهٔ ۹).

مثلاً فرض کنید $A = B$. در این صورت، همهٔ دایره‌ها، از نقطهٔ A می‌گذرند.

۲۸. پاسخ: نفر سوم، از نفر هفتم برده است.

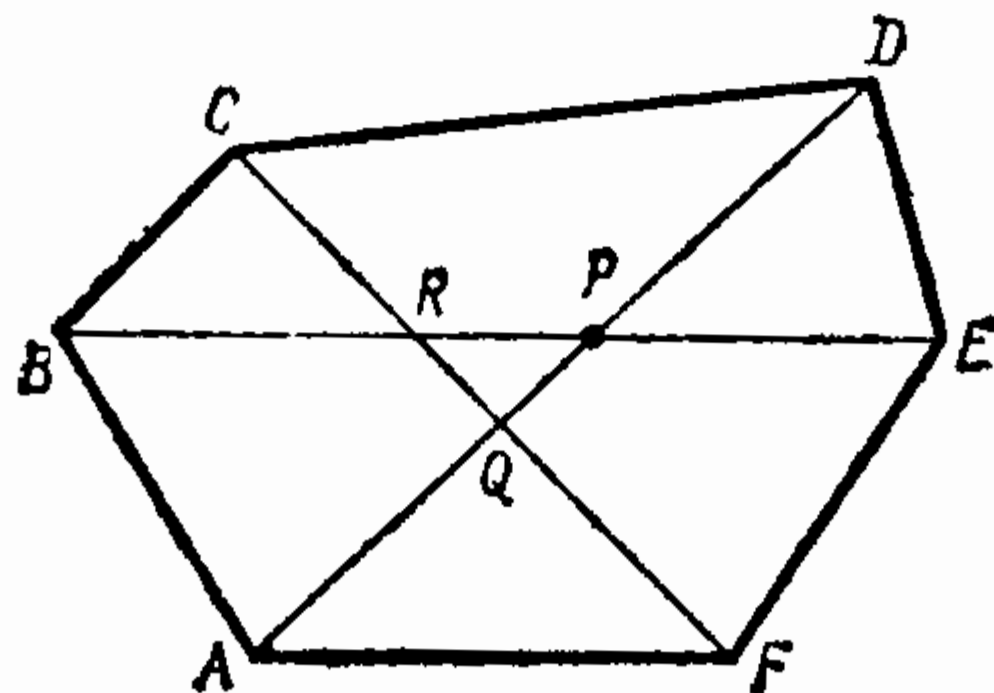
شطرنج بازانی که چهارم مقام آخر را به دست آورده‌اند، روی هم ۶ بار با هم بازی کرده‌اند و، بنابراین، در این بازی‌ها، دست کم ۶ امتیاز کسب شده است. به این ترتیب، بازی کن مقام دوم، دست کم ۶ امتیاز دارد.

از طرف دیگر، این شطرنج باز مقام دوم، نمی تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد: اگر بازی کن مقام اول ۷ امتیاز آورده باشد، به معنای آن است که از نفر دوم برده است و نفر دوم نمی تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد؛ و اگر اولی ۵/۶ امتیاز داشته باشد، باز هم دومی بیش از ۶ امتیاز ندارد. از این جا نتیجه می شود که، نفر مقام دوم، درست ۶ امتیاز کسب کرده است. چهار نفر مقام های آخر هم، همین ۶ امتیاز را داشته اند و، بنابراین، در برابر شطرنج بازان مقام های اول تا چهارم، به همه آنها باخته اند.

۲۹. (a) O را نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ می گیریم. چون دو مثلث ABD و BCD ، مساحت هایی برابر دارند و در قاعده BD مشترک اند، بنا بر این، دو ارتفاع وارد بر این قاعده در دو مثلث، با هم برابرند، یعنی نقطه های A و C ، از BD به یک فاصله اند که، از آن جا، نتیجه می شود: $AO = OC$. به همین ترتیب، می توان ثابت کرد: $BO = OD$.

به این ترتیب، قطرهای چهارضلعی $ABCD$ ، یکدیگر را نصف کرده اند، یعنی این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است.

(b) راه حل اول. فرض می کنیم، در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ ، قطرهایی که رأس های روبه رو را به هم وصل کرده اند، مساحت آن را نصف کنند و، در عین حال، از یک نقطه نگذرند. در این صورت، نقطه های برخورد این سه قطر، P و Q و R ، رأس های مثلثی را تشکیل می دهند که در درون شش ضلعی واقع است (شکل ۳۲). مساحت های دو چهارضلعی $ABCD$ و $BCDE$ برابرند و، بنا بر این، دو مثلث ABP و EPD هم، مساحت هایی برابر دارند، زیرا



شکل ۳۲

$$S_{IBP} = S_{IBCD} - S_{BCDP} = S_{BCDE} - S_{BCDP} = S_{FPD}$$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد:

$$S_{BCR} = S_{EFR} \text{ و } S_{IQF} = S_{CQD}$$

از برابری مساحت های مثلث ها، به دست می آید:

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP,$$

$$CQ \cdot DQ = AQ \cdot FQ,$$

$$ER \cdot FR = BR \cdot CR$$

و اگر این روابط را، در هم ضرب کنیم:

$$AP \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot ER \cdot FR = AQ \cdot BR \cdot CR \cdot DP \cdot EP \cdot FQ$$

وای این، ممکن نیست، زیرا داریم:

$$AP > AQ \cdot BP > BR \cdot CQ > CR \cdot DQ > DP.$$

$$ER > EP \cdot FR > FQ$$

یعنی، حاصل ضرب سمت راست، از حاصل ضرب سمت چپ کوچکتر است. تناقض حاصل. ثابت می کند که قطارهای AD ، BE و CF از یک نقطه می گذرند (یعنی $PQ = QR = RP = 0$).

راه حل دوم. این راه حل، بر اساس استفاده از تبدیل هندسی است: تجانس. چنانچه مساحت های چهارضلعی های $ABCD$ و $BCDE$ برابرند، بنا براین، مساحت های مثلث های ABD و BDE هم برابرند (همر کدام از آن ها، به اندازه مساحت مثلث BCD ، از چهارضلعی متناظر خود، کمتر است). این دو مثلث، در قاعده BD مشترک اند. برابری مساحت ها، به معنای برابری دو ارتفاعی است که از رأس های A و E بر قاعده BD فرود می آیند: یعنی نقطه های A و E ، از BD به یک فاصله اند. به این ترتیب: $AE \parallel BD$ به همین ترتیب، می توان ثابت کرد: $CE \parallel BF$ و $DF \parallel AC$. بنا براین، مثلث های ACE و BDF متشابه اند.

P را نقطه برخورد قطرهای AD و BE می‌گیریم. به تجانس توجه می‌کنیم که به مرکز P و ضریب $PE : PB$ باشد. در این تجانس، نقطه B به نقطه E ، نقطه D به نقطه A ، خط راست DF به خط راست AC و خط راست BF به خط راست EC تبدیل می‌شود.

چون F ، نقطه برخورد خط‌های راست DF و BF است، بنابراین، ضمن تجانس، به نقطه برخورد خط‌های راست AC و EC ، یعنی به نقطه C ، تبدیل می‌شود. به این ترتیب، نقطه‌های F ، P و C روی یک خط راست اند و این به معنای آن است که، قطرهای AD ، BE و CF ، از نقطه P می‌گذرند. ۳۰. اگر $a+b$ و a^2+b^2 بر d بخش پذیر باشند، آن وقت عدد

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$$

هم بر d بخش پذیر است. از این جا، باید عدد‌های

$$2a^2 = 2a(a+b) - 2ab \quad \text{و} \quad 2b^2 = 2b(a+b) - 2ab$$

هم بر d بخش پذیر باشند.

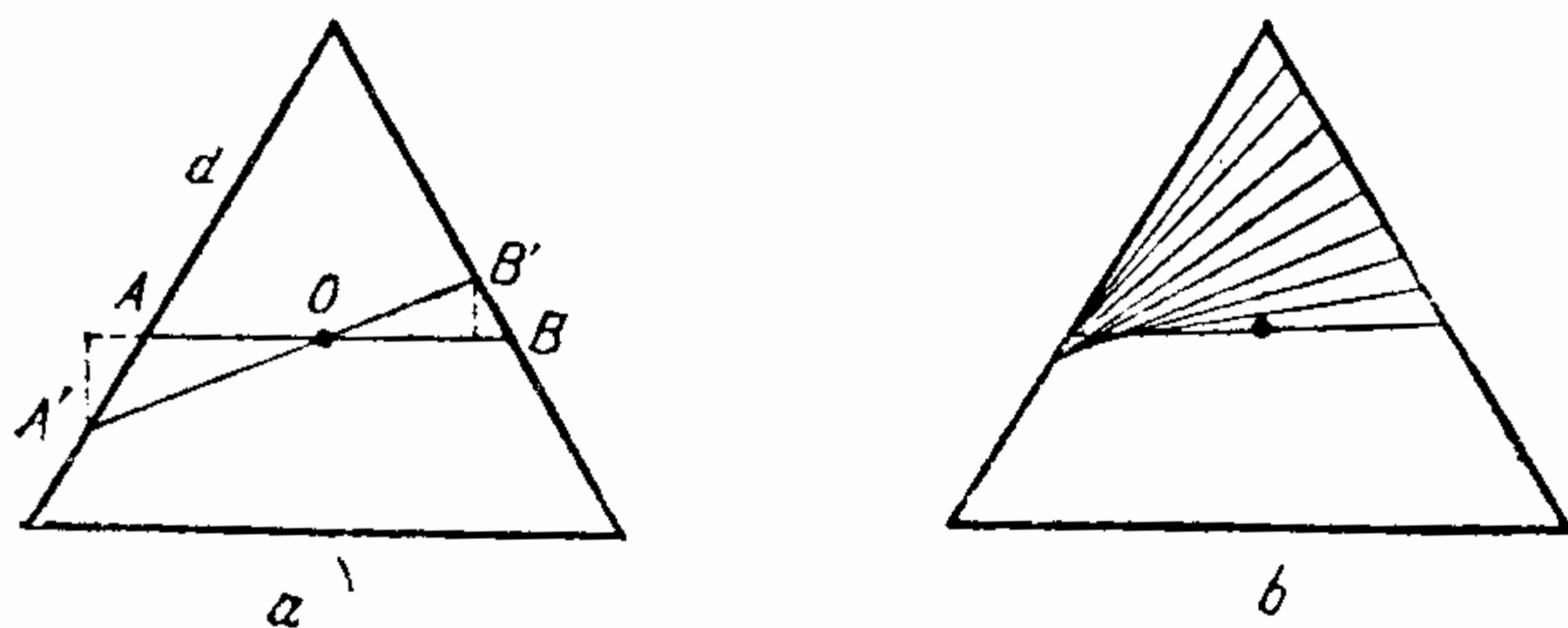
ولی، اگر a و b نسبت به هم اول باشند، a^2 و b^2 هم نسبت به هم اول می‌شوند و، بنابراین، نمی‌توانند به طور هم زمان، بر عدد $2 > d$ بخش پذیر باشند. [در این جا، از قضیه اصلی حساب استفاده کردیم (ضمیمه ۲).]

۳۱. a را C را انتهای دیگر قطری از دایره می‌گیریم که از A گذشته است. AMC ، زاویه قائمه است. چون $MK = KB$ و $PK \parallel MC$ ، بنابراین، خط راست PK ، پاره خط راست BC را در وسط آن قطع می‌کند: $BH = HC$. به این ترتیب، همه خط‌های راست PK ، از نقطه H وسط پاره خط راست BC می‌گذرند.

(b) از (a) نتیجه می‌شود که، همه نقطه‌های P ، روی محیط دایره‌ای قرار دارند که به قطر AH رسم شود. چون زاویه HBA قائمه است، این دایره از نقطه B هم می‌گذرد.

$$۳۲. پاسخ: $d = \frac{2}{3}$.$$

اگر پاره خط راستی تمامی مثلث را جارو کند، در یکی از موقعیت‌های



شکل ۳۳

خود، از مرکز مثلث می‌گذرد. ثابت می‌کنیم، از بین پاره‌خط‌های راستی که از مرکز مثلث می‌گذرند و دو انتهای هر یک از آن‌ها، بر ضلع‌های مثلث تکیه‌دارند، پاره‌خط راست AB ، موازی با ضلع مثلث، از همه کوتاه‌تر است. $A'B'$ را پاره‌خط راستی می‌گیریم که دو انتهای آن بر همان ضلع‌ها تکیه داشته باشد، از مرکز مثلث بگذرد و، در ضمن $OB' < OA'$ (شکل ۳۳). در این صورت $AA' > BB'$ و روشن است که، حتی تصویر این پاره‌خط بر خط راست AB ، طولی بیشتر از $\frac{2}{3}$ دارد. بنا بر این، پاره‌خط راستی که بتواند تمامی مثلث را جا رو کند، طولی کمتر از $\frac{2}{3}$ ندارد.

از طرف دیگر، با پاره‌خط راست به طول $\frac{2}{3}$ می‌توان تمامی مثلث را جا رو کرد. برای این منظور، باید ثابت کرد، از هر نقطه P واقع در درون مثلث می‌توان پاره‌خط راستی به طول $\frac{2}{3}$ عبور داد، به نحوی که دو انتهای آن روی ضلع‌های مثلث باشد. از نقطه P ، دو خط راست می‌گذرانیم که با نزدیک‌ترین و دورترین ضلع مثلث به P ، موازی باشند. این خط‌های راست، به وسیله محیط مثلث به دو پاره‌خط راست محدود می‌شوند که اولی طولی بیشتر از $\frac{2}{3}$ و دومی طولی کمتر از $\frac{2}{3}$ دارد. پاره‌خط اول را دور نقطه P دوران می‌دهیم تا بر پاره‌خط دوم منطبق شود؛ این پاره‌خط، در یکی از

موقعیت‌های بینابینی بر پاره‌خط راستی به طول $\frac{2}{3}$ منطبق می‌شود که دو انتهای آن بر ضلع‌های مثلث قرار دارد.

▽ یادآوری می‌کنیم که، با وجود روشن بودن گزارهٔ اخیر، برای اثبات دقیق، باید پیوستگی روندکار اثبات شود (ضمیمهٔ ۵).

۳۳. فرض می‌کنیم، بتوانیم مهره‌های دومینو را طوری روی صفحه قرار دهیم که هر یک از خط‌های راست افقی یا قائم، که صفحه را به خانه‌ها تقسیم می‌کنند، دست کم، یکی از مهره‌های دومینو را قطع کند.

۱۵ خط راست از این گونه وجود دارد. هر یک از این خط‌های راست، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند که، هر بخش، شامل تعداد زوجی خانه است. در هر یک از این بخش‌ها، چند مهرهٔ دومینو وجود دارد که «بریده» نشده‌اند. این مهره‌ها، تعداد زوجی از خانه‌ها را اشغال می‌کنند. بقیهٔ خانه‌ها به وسیلهٔ مهره‌های دونیم‌شده پر شده‌اند. و چون، تعداد این خانه‌ها زوج است بنا بر این، تعداد مهره‌های دونیم شده هم باید زوج باشد.

به این ترتیب، هر یک از ۱۵ خط راست، دست کم دو تا از مهره‌های دومینو را نصف می‌کند و چون، هر مهره، تنها به وسیلهٔ یک خط راست می‌تواند نصف شود، در نتیجهٔ تعداد مهره‌های دونیم شده، از ۲ کمتر نیست. در حالی که، تعداد کل مهره‌ها، فقط ۱۸ تا است.

▽ جالب است، در این باره بررسی کنید که، برای چند مستطیل‌هایی با بعدهای $m \times n$ (m : عددی زوج). گزارهٔ مشابه درست است؟
۳۴. می‌توان عددها را بدردیف صعودی در نظر گرفت:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$

$$a_1 + a_n, \quad a_2 + a_{n-1}, \quad \dots, \quad a_{n-2} + a_3, \quad a_{n-1} + a_2$$

$$a_1 + a_{n-1} + a_n, \quad \dots \quad \dots \quad a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

...

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

روشن است که، در این جا، هر عدد از عدد قبلی بزرگتر است؛ بنا بر این، همه این عددها، با هم فرق دارند. تعداد آنها برابر است با

$$n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

یاد آوری می کنیم که، n عدد طبیعی نخستین را می توان مثالی برای

n عدد مختلف گرفت که، از آن، بیش از $\frac{1}{2}n(n+1)$ مجموع متفاوت نمی-

توان به دست آورد (این مجموع ها، عبارتند از همه عددهای طبیعی از ۱

$$\text{تا } (1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)).$$

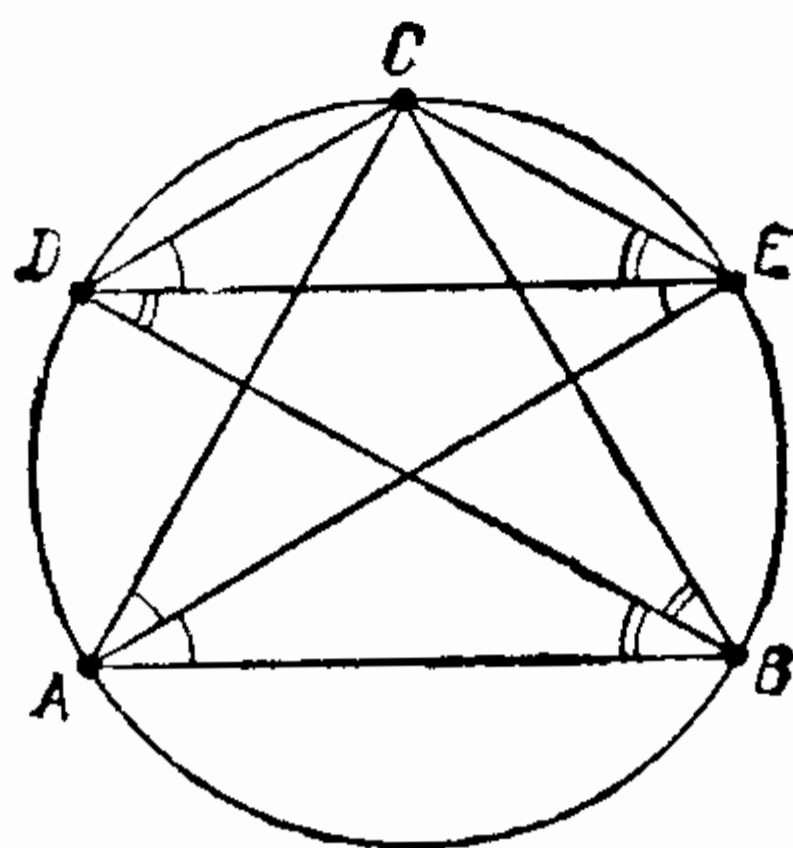
۳۵. از زاویه های برابر (شکل ۳۴ را ببینید)، نتیجه می شود که، نقطه

A ، روی محیط دایره ای است که از نقطه های C و D و E گذشته است؛ نقطه

B هم روی محیط همین دایره قرار دارد و، در ضمن $DE \parallel AB$.

۳۶. قدر نسبت تصاعد را d می گیریم و فرض می کنیم، $a = m^2$ یکی

از جمله های آن باشد (m ، عددی طبیعی است). در این صورت، عدد



شکل ۳۴

$$(m+kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2mk + k^2d)$$

هم، جمله‌ای از همان تصاعد است (به ازای هر عدد طبیعی k). به این ترتیب، بی‌نهایت جمله، در تصاعد، وجود دارد که هر کدام مجذور یک عدد طبیعی اند. ۳۷. پاسخ: نمی‌توان.

با رقم a ، ۹ زوج تشکیل می‌شود (با هر یک از ۹ رقم بقیه). اگر بخواهیم، برای هر زوج، ضلعی از ۴۵ ضلعی را، متناظر با آن، داشته باشیم، باید a را دست کم در پنج رأس آن قرار داد. چون باده رقم سروکار داریم، بنا بر این برای جادادن آن‌ها، به ۵۰ رأس نیاز داریم. به این ترتیب، نمی‌توان رقم‌های از ۰ تا ۹ را، به ترتیبی که مساله خواسته است، قرارداد (ضمیمه ۹). ∇ از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، عددهای ۰، ۱، ...، n را می-

توان در رأس‌های یک $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ضلعی منتظم، طوری قرارداد که، برای هر دو عدد، ضلعی پیدا شود که این دو عدد در دو انتهای آن باشند.

$$۳۸. پاسخ: $a_{۱,۲} = \pm \sqrt[۲۰]{۲^{۲۰} - ۱}$ ، $b_{۱,۲} = \mp \frac{۱}{۲} \sqrt[۲۰]{۲^{۲۰} - ۱}$$$

$$۱ - p = \frac{۱}{۴}، q = \frac{۱}{۴} \text{ (روی هم، دو گروه ضریب‌ها).}$$

با قرارداد $x = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a}{۲} + b\right)^{۲۰} + \left(\frac{۱}{۴} + \frac{p}{۲} + q\right)^{۱۰} = ۰$$

از آنجا $a = -2b$ ، اکنون، اتحاد به این صورت در می‌آید:

$$(2x - 1)^{۲۰} = (-2bx + b)^{۲۰} + (x^2 + px + q)^{۱۰}$$

ضریب $x^{۲۰}$ را، در دو طرف برابری، محاسبه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$۲^{۲۰} = ۲^{۲۰}b^{۲۰} + ۱ \Rightarrow b = \pm \frac{۱}{۲} \sqrt[۲۰]{۲^{۲۰} - ۱}$$

و اتحاد، به این صورت در می آید:

$$(x - \frac{1}{4})^2 = (x^2 + px + q)^1$$

از آن جا $(x - \frac{1}{4})^2 = x^2 + px + q$ ، یعنی $p = -1$ و $q = \frac{1}{4}$.

۳۹. پاسخ: 2×3^n . بعد از گام اول، مجموع همه عددها برابر

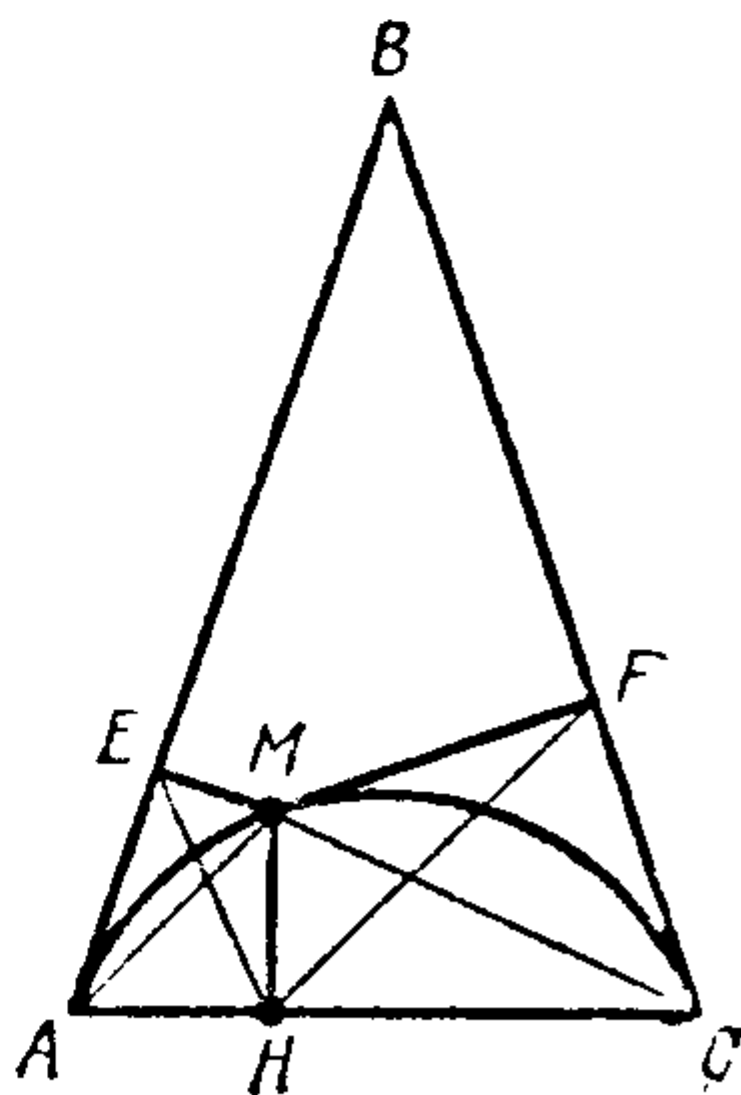
$$2 \times 3 = 6 \text{ می شود.}$$

مجموع همه عددها را. بعد از گام n ام، برابر S_n می گیریم. بد سادگی ثابت می شود که بعد از گام $(n+1)$ ام، مجموع همه عددها برابر $2S_n + S_n = 3S_n$ خواهد شد.

به این ترتیب، مجموع عددها، در هر گام سه برابر می شود، یعنی در گام n ام، برابر است با 2×3^n .

۴۰. پاسخ: کمانی از دایره، که بر ساق های مثلث در نقطه های A و C (دو انتهای قاعده) مماس است.

ABC را مثلث مفروض $(AB = BC)$. M را نقطه ای از مکان مجهول E و F و H را، به ترتیب، تصویرهای نقطه M بر ضلع های AB و BC و AC می گیریم (شکل ۳۵). چهار ضلعی های $AEMH$ و $CHMF$ متشابه اند: زاویه های متناظر برابرند و، بنابر شرط، دو ضلع مجاور، متناسب اند



شکل ۳۵

در ضمن، مثلث‌هایی که در این چهار ضلعی‌ها، به وسیلهٔ $\left(\frac{EM}{MH} = \frac{MH}{MF}\right)$

قطرها پدید آمده‌اند، متشابه‌اند: مثلث EMA با HMC ، و مثلث AMH با مثلث CMF . از آنجا

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMH} + \widehat{HMC} = \widehat{HMC} + \widehat{CMF} = \widehat{HMF}$$

به این ترتیب، زاویهٔ AMC ، مقداری ثابت دارد و، بنابراین، نقطهٔ M ، روی کمان دایره‌ای است که پاره‌خط راست AC را احاطه کرده است. می‌توان تحقیق کرد که، هر نقطه از این کمان، به کمان مطلوب تعلق دارد.

▽ اگر بخواهیم، این مکان را در تمامی صفحه، و نه فقط در درون مثلث، پیدا کنیم، آن وقت قطعه‌هایی از یک هذلولی، به این کمان دایره، اضافه می‌شود.

۴۱. پاسخ: زاویه‌های مثلث، ۹۰ درجه، ۴۵ درجه و ۴۵ درجه.

h_a و h_b را، طول ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های به طول a و b می‌-

گیریم. بنا بر شرط مسأله، $a \leq h_a$ و $b \leq h_b$ ؛ ولی در هر مثلثی $h_a \leq b$ و $h_b \leq a$ ، به نحوی که

$$a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$$

یعنی $a = b = h_a = h_b$ و، بنابراین، با مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، سروکار داریم.

۴۲. فرض می‌کنیم $m(m+1)$ ، برابر توان k ام یک عدد طبیعی باشد.

چون m و $m+1$ نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، هر کدام از آن‌ها، باید برابر توان k ام عددی طبیعی باشد. ولی این، ممکن نیست: اگر $m = a^k$ ، آن وقت

$$(a+1)^k > (a+1)a^{k-1} = a^k + a^{k-1} > m+1, \quad (k > 1)$$

۴۳. پاسخ: از عدد ۱، یک واحد بیشتر از عدد ۲، به دست می‌آید.

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع

رقم‌های آن بر ۹ (ضمیمهٔ ۳). بنابراین، در مسألهٔ ما، عدد ۱، از عددی

به دست می‌آید که در تقسیم بر ۹، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی از عددهای ۱، ۱۰، ۱۹، ۲۸، ۳۷، ...، ۹۹۹، ۹۹۱، ۹۹۹، ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و عدد ۲، از عددهایی که در تقسیم بر ۹، بد باقی‌مانده ۲ می‌رسند، یعنی از عددهای

$$۲، ۱۱، ۲۰، ۲۹، ۳۸، \dots، ۹۹۹، ۹۹۹، ۹۹۲$$

۴۴. گروه n عدد x_1, x_2, \dots, x_n را هر طور انتخاب کنیم، اگر همه آنها با هم برابر نباشند، بعد از چند گام، بزرگترین عدد گروه، کوچکتر؛ و کوچکترین عدد گروه، بزرگتر می‌شود. از این جا روشن است که، بزرگترین عدد گروه، نمی‌تواند همیشه عددی درست باشد، البته به شرطی که گروهی از عددهای درست و برابر (a, a, \dots, a) به دست نیاید.

فرض کنید، از گروه عددهای z_1, z_2, \dots, z_n ، عددهای برابر به دست آید:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} = \dots = \frac{z_{n-1} + z_n}{2} = \frac{z_1 + z_n}{2}$$

آن وقت، عددهای z_i ، يك در میان با هم برابر می‌شوند که، در حالت فرد بودن n ، غیر ممکن است.

فرض می‌کنیم، n ، عددی زوج باشد. ببینیم، از چه گروهی، می‌توان به گروه عددهای $(a, b, a, b, \dots, a, b)$ رسید. فرض کنید.

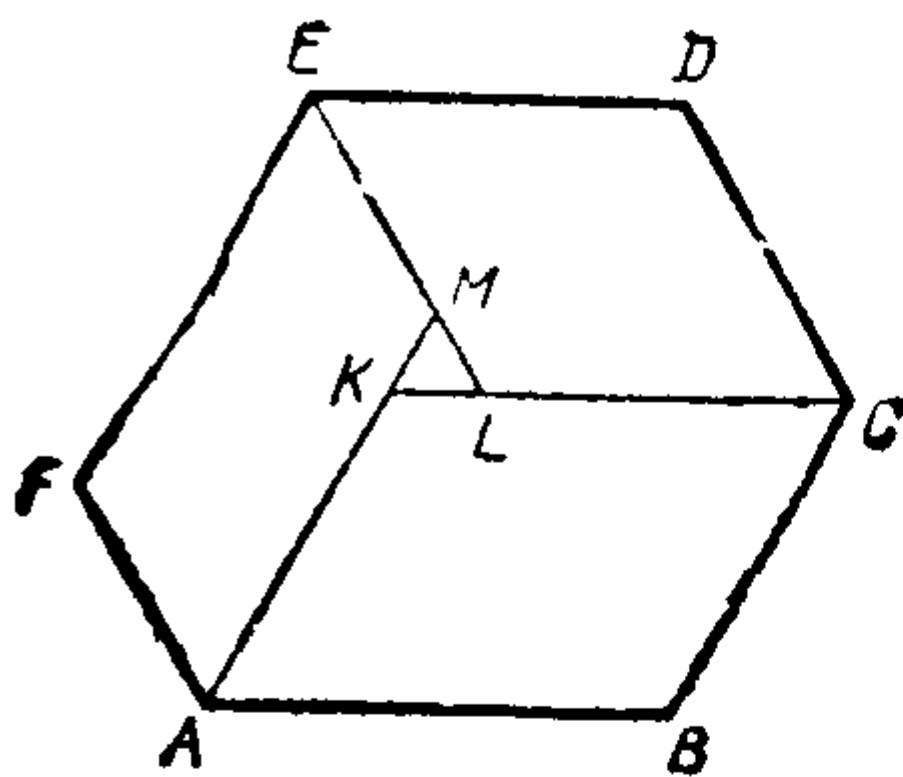
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2} = \dots = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} = a;$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2} = \dots = \frac{y_n + y_1}{2} = b$$

در این صورت

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2an; \quad y_2 + y_3 + \dots + y_n + y_1 = 2bn$$

یعنی $2an = 2bn$ و $a = b$.



شکل ۴۶

به این ترتیب، نمی‌توان به گروهی از عددهای دوبه‌دو مختلف رسید و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۵. (a) مقدار هر یک از زاویه‌های شش ضلعی برابر ۱۲۰ درجه و، بنا بر این، ضلع‌های روبه‌رو، با هم موازی‌اند. در ضمن، می‌توان فرض کرد $AB \geq DE$ (شکل ۳۶).

اکنون، متوازی‌الاضلاع‌های $ABCK$ ، $CDEL$ و $AFEM$ را می‌سازیم. اگر نقطه‌های K ، L و M منطبق بر هم نباشند، هر زاویه مثلث KLM برابر ۶۰ درجه می‌شود، یعنی

$$KL = LM = KM$$

و بنا بر این

$$AB - DE = CD - FA = FE - BC$$

(b) می‌توان فرض کرد $a_1 > a_4$. مثلث متساوی‌الاضلاع KLM را، با این ضلع‌ها می‌سازیم:

$$KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_3 - a_6 = a_5 - a_2$$

KL را به اندازه $LC = a_4$ ، LM را به اندازه $ME = a_6$ و MK را به اندازه $KA = a_2$ امتداد می‌دهیم و متوازی‌الاضلاع‌های $AKCB$ ، $CLED$ و $AFEM$ را می‌سازیم. $ABCDEF$ همان شش ضلعی مطلوب است.

۴۶. پاسخ: $x = y = 0$

x و y را عددهای درستی می‌گیریم که در معادله مفروض صدق کنند.

بعد از مجذور کردن‌های متوالی، به دست می‌آید:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = m \text{ و } \sqrt{x} = k$$

که در آن‌ها m و n ، عددهایی درست‌اند؛ در ضمن

$$m^2 = k(k+1) \quad (*)$$

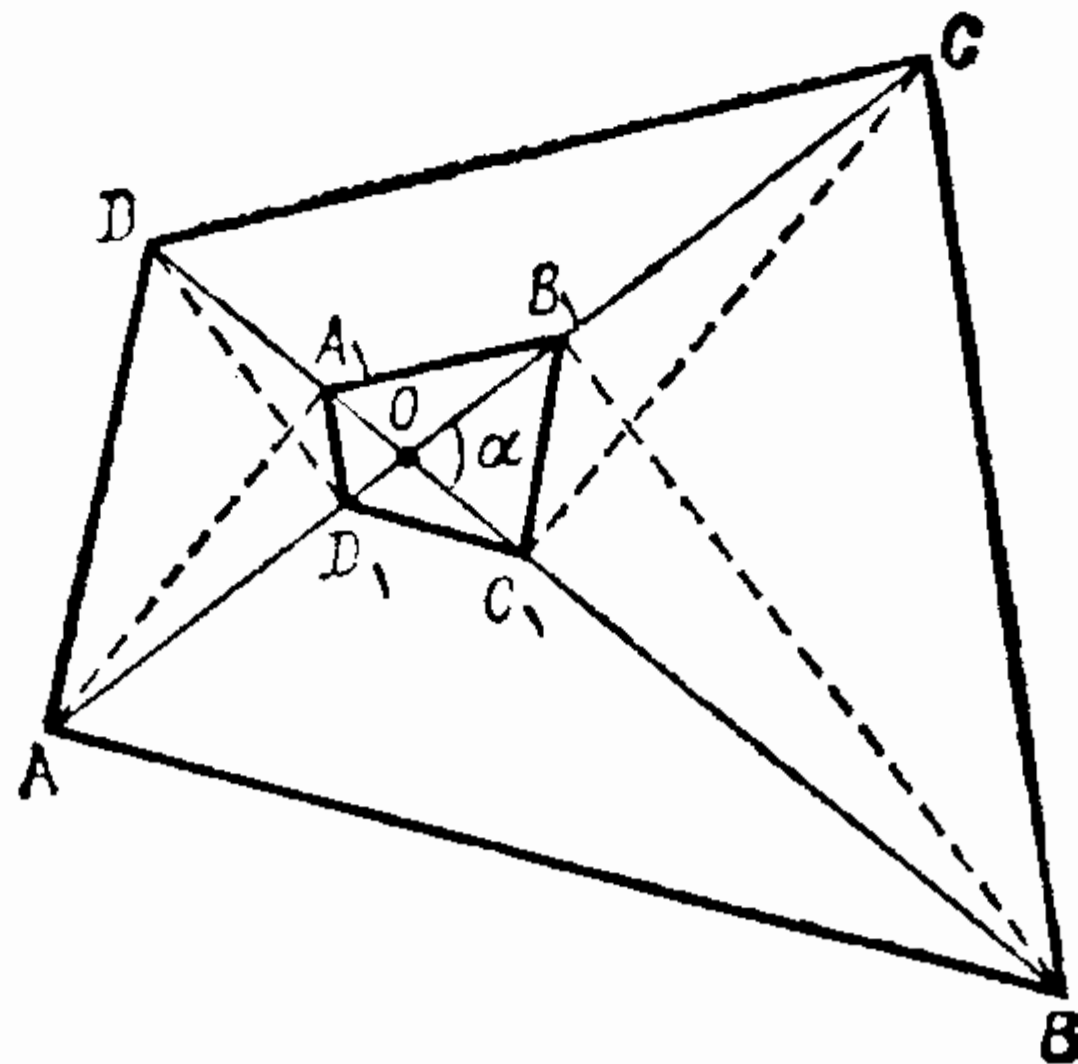
برای $k > 0$ باید داشته باشیم: $k^2 < m^2 < (k+1)^2$ ، در این صورت، به نابرابری‌های $k < m < k+1$ می‌رسیم که به معنای درست نبودن عدد m است. یعنی $k=0$ و بنا بر این $x=0$.

▽ متناقض بودن برابری (*) را، از مسأله ۳۲ هم می‌توان نتیجه گرفت. ۴۷. D_1, C_1, B_1, A_1 را پای عمودهایی می‌گیریم که، به ترتیب، از رأس‌های A, B, C, D بر قطرهای BD و AC رسم شده‌اند. فرض می‌کنیم، دو قطر، در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند و زاویه حاده بین دو قطر برابر α باشد (شکل ۳۷). در این صورت داریم:

$$OA_1 = OA \cdot \cos \alpha, \quad OB_1 = OB \cdot \cos \alpha,$$

$$OC_1 = OC \cdot \cos \alpha, \quad OD_1 = OD \cdot \cos \alpha$$

بنا بر این، مثلث‌های $A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OD_1, D_1OA_1$ با مثلث‌های AOB, BOC, COD, DOA متشابه‌اند و، ضریب تشابه، برابر است با



شکل ۳۷

$\cos \alpha$. از این جا، نتیجه می گیریم که چهارضلعی های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ هم، متشابه یکدیگرند.

∇ یادآوری می کنیم که می توان چهارضلعی دوم را، از چهارضلعی اول، با تبدیل های زیر به دست آورد: تقارن نسبت به نیمساز زاویه حاده بین دو قطر و، سپس، تجانس به مرکز O و ضریب $\cos \alpha$.

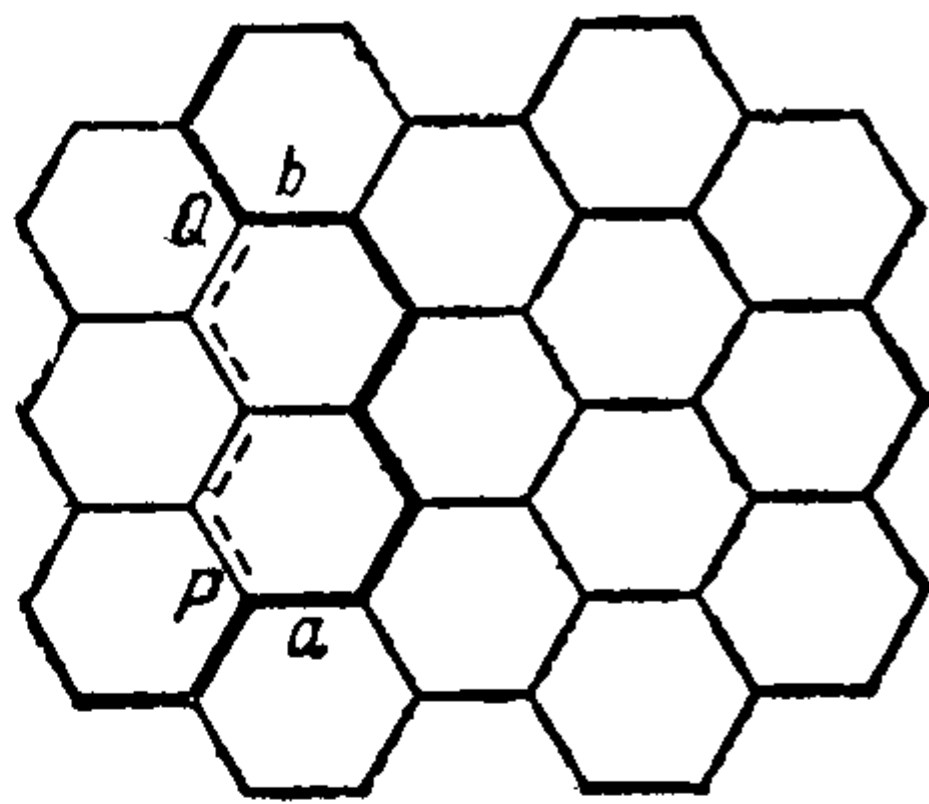
۴۸. پاسخ: n برابر است با عددی اول و یا $n = 9$.

اگر n را بتوان به صورت $n = ab$ ($a \geq 3$ ، $b \geq 3$ و $a \neq b$) نشان داد، آن وقت، در حاصل ضرب $(n-1) \times 2 \times \dots \times 1$ ، عامل های a ، $2a$ و b ، وجود دارد و، بنا بر این! $(n-1)$ بر $n^2 = a^2 b^2$ بخش پذیر می شود. اگر $n = p^2$ و p عددی اول باشد، آن وقت به ازای $4p \geq p^2 - 1$ ، در حاصل ضرب $(p^2 - 1) \times 3 \times \dots \times 1 = (p^2 - 1)!$ ، عامل های p ، $2p$ ، $3p$ و $4p$ وجود دارد و بر $n^2 = p^4$ بخش پذیر است. (نا برابری $0 \leq p^2 - 4p - 1$ ، برای هر عدد اول $p \geq 5$ برقرار است.)

دو امکان باقی می ماند: n عددی اول باشد (که در این صورت $(n-1)!$ ، حتی بر n هم بخش پذیر نیست) و یا $n = 9$ (که در این صورت! 8 ، بر 9 بخش پذیر است، ولی بر 81 بخش پذیر نیست).

∇ بنا بر قضیه ویلسون، به ازای هر عدد اول p ، عدد $(p-1)!$ ، همیشه در تقسیم بر عدد p ، باقی مانده ای برابر $p-1$ می دهد.

۴۹. پاره خط های راستی را که، حشره، روی آنها حرکت می کند، به ترتیب شماره گذاری می کنیم. یکی از سه پاره خط جهت دار شبکه را در نظر می گیریم و آن را افقی می نامیم. ثابت می کنیم، یا شماره های همه پاره خط های راست افقی مسیر عددی فرد و یا، همه این شماره ها، عددهایی زوج اند. a و b را دو پاره خط راست افقی مجاور می گیریم، به این مفهوم که، مسیر بین a و b ، شامل پاره خط های راستی با دو جهت دیگر باشند. این وضع ممکن نیست که، حشره، نوار قائمی از شش ضلعی ها را، ابتدا در «جائی» و سپس «به صورت برگشت» در «جای دیگر» قطع کند (آن طور که در شکل ۳۸ نشان داده شده است، زیرا در این حالت، می توان راه کوتاه تری برای



شکل ۳۸

حشره پیدا کرد (مسیری که P و Q را با نقطه چین به هم وصل کرده است). از این جا نتیجه می شود که، تعداد پاره خط های راست بینایی، بین a و b ، عددی فرد است و، حشره، روی این پاره خط های راست، در يك جهت حرکت می کند. به این ترتیب، همه پاره خط های افقی مسیر، یا شماره ای فرد دارند و یا شماره ای زوج (وحشره، روی آنها، در يك جهت حرکت می کند).

در باره پاره خط های راست مسیر، که در یکی از دو جهت دیگر قرار دارند، همین وضع درست است. از آن جا که، تنها با سه جهت سروکار داریم، یا همه پاره خط های با شماره زوج و یا همه پاره خط های با شماره فرد، در يك جهت اند. تعداد این گونه پاره خط ها برابر ۵۰ می شود.

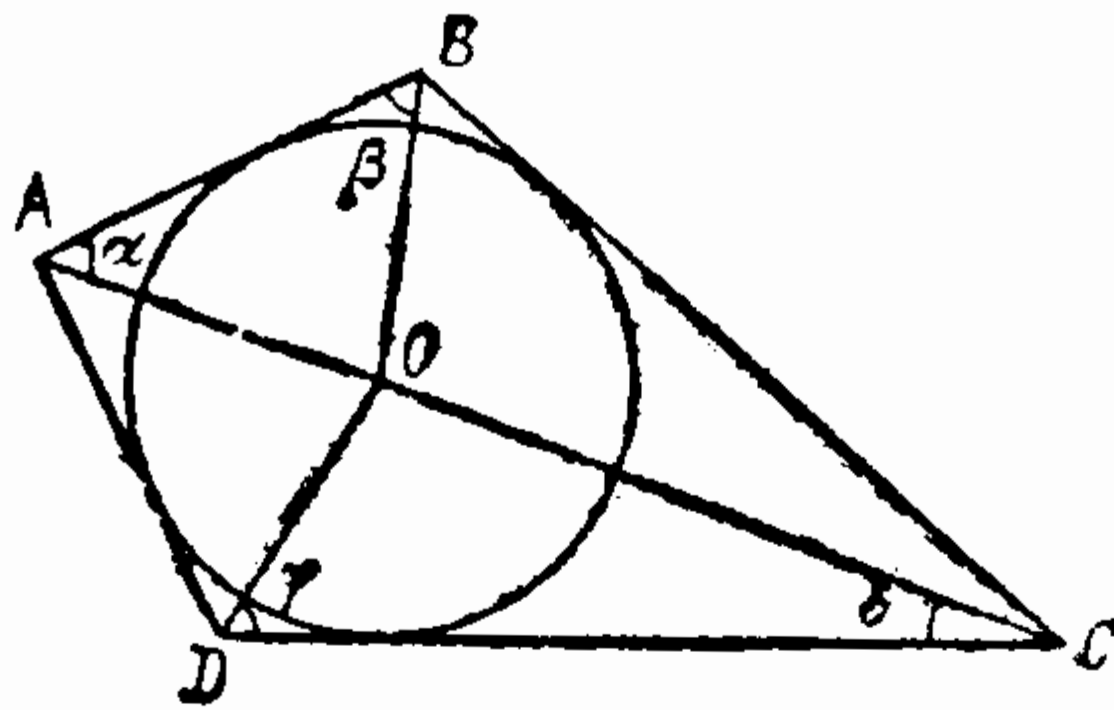
▽ هر مسیری از حشره روی شبکه را می توان، با آغاز از يك گره، به وسیله «واژه ای» شامل حرف های p و q و r داد (هر حرف، متناظر است با پاره خط راستی از مسیر که در یکی از سه جهت ممکن باشد). جالب است، به شرح واژه ای پردازیم که متناظر باشد با مسیری بسته (که به نقطه آغاز برگشته است) و یا مسیری که خودش را قطع نکرده باشد.

۵۰. O را مرکز دایره محاط در چهارضلعی $ABCD$ می گیریم (شکل

۳۹). داریم:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - \alpha - \beta, \quad \widehat{COD} = 180^\circ - \gamma - \delta$$

در ضمن $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{4} (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}) = 180^\circ$ بنا بر این



شکل ۴۹

$$\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$$

۵۱. می دانیم

$$k^n - b^n = (k - b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

یعنی $k^n - b^n$ بر $k - b$ بخش پذیر است.

به این ترتیب $(k^n - b^n) - (k^n - a) = a - b^n$ بر $k - b$ بخش پذیر

است؛ ولی این تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $a = b^n$.

۵۲. پاسخ: 2^{n-2} کسر.

روشن است که، در هر حال، در کسر حاصل، x_1 در صورت کسر قرار می گیرد. به همین ترتیب، تقریباً روشن است که، x_2 در هر حال، در مخرج کسر واقع می شود (علامت تقسیم، که قبل از x_2 قرار دارد، یا به خود x_2 مربوط است و یا به عبارتی شامل x_2).

بقیه حرف های x_3, x_4, \dots, x_n بسته به نوع پرانتز گذاری، می توانند در صورت یا در مخرج قرار گیرند؛ از این جا نتیجه می شود که، روی هم، 2^{n-2} کسر مختلف به دست می آید: هر یک از $n-2$ حرف x_3, x_4, \dots, x_n می تواند بدون ارتباط با حرف های دیگر، در صورت یا در مخرج باشد.

این حکم را، با روش استقرای ریاضی ثابت می کنیم. به ازای $n = 3$ ،

می توان دو کسر به دست آورد:

$$(x_1 : x_2) : x_3 = \frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} \quad \text{و} \quad x : (x_2 : x_3) = \frac{x_1 x_3}{x_2}$$

یعنی، به ازای $n = 3$ ، حکم درست است.

فرض می‌کنیم، حکم، برای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که،

در این صورت، به ازای $n = k + 1$ هم درست است.

فرض می‌کنیم، عبارت $x_1 : x_2 : \dots : x_k$ ، در یکی از حالت‌ها، بعد

از قرار دادن پرانتزها، به صورت کسر A درآید. اگر در این عبارت، به جای

x_k قرار دهیم $x_{k-1} : x_k$ ، آن وقت، x_{k+1} در جایی واقع می‌شود که x_k در

آن جانیست (اگر x_k در صورت باشد، x_{k+1} به مخرج می‌رود و بر عکس).

اکنون ثابت می‌کنیم، می‌توان x_{k+1} را در همان جایی قرار داد که

x_k در آن جا است. در کسر A ، بعد از گذاشتن پرانتزها، به ناچار به عبارتی

به صورت $(p : x_k)$ می‌رسیم که، در آن، p ، یا حرف x_{k-1} است و یا شامل

چند حرف؛ $(p : x_k)$ را به صورت $(p : (x_k \cdot x_{k+1})) = (p : x_k) : x_{k+1}$

تغییر می‌دهیم، روشن است که، در این صورت، به همان کسر A می‌رسیم که،

در آن، به جای x_k ، عبارت $x_k \cdot x_{k+1}$ قرار دارد. حکم به طور کامل ثابت شد.

۵۳. به سادگی دیده می‌شود که، مکعب را می‌توان به ۵ چهاروجهی

تقسیم کرد. در شکل ۴۵، این چهاروجهی‌ها، عبارتند از

$$AA'B'D', AB'BC, ACDD', B''C'D'C, ACD'B'$$

ثابت می‌کنیم که مکعب را نمی‌توان به تعداد کمتری چهاروجهی تقسیم

کرد. فرض کنید، مکعب را به چند چهاروجهی تقسیم کرده باشیم. دست کم

دو چهاروجهی وجود دارد که، قاعده‌های آنها، بروجه $ABCD$ از مکعب

قرار دارند. به همین ترتیب، دست کم دو چهاروجهی وجود دارد که، قاعده‌های

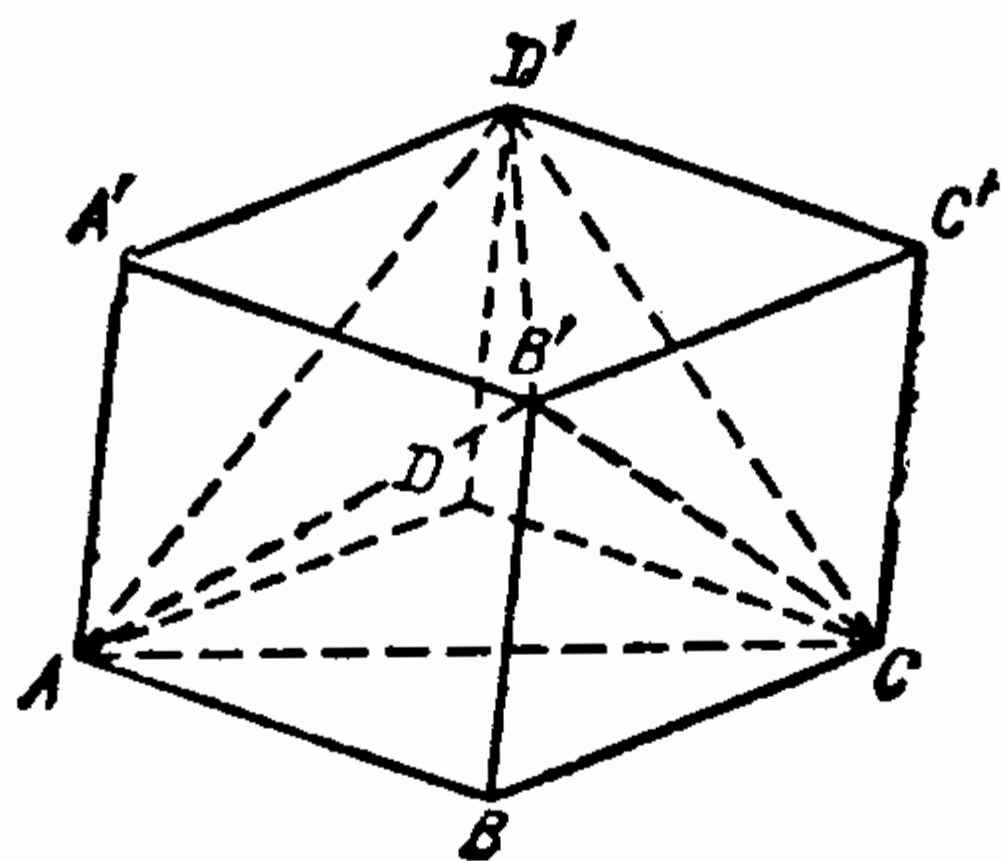
آنها، بروجه $A'B'C'D'$ واقع‌اند.

روشن است که این چهاروجهی‌ها، با دوتای اولی فرق دارند، زیرا

در يك چهاروجهی نمی‌توان دو وجه موازی پیدا کرد. به این ترتیب، با ۴

چهاروجهی سروکار داریم. حجم آنها، روی هم، از $\frac{2}{3}a^3$ تجاوز نمی‌کند،

یعنی کمتر از حجم مکعب است. بنابراین، مکعب را نمی‌توان به ۴ چهاروجهی



شکل ۴۰

تقسیم کرد.

۵۴. پاسخ: $41^2 = 1681$.

فرض کنید، عدد n^2 ، با شرط مساله سازگار باشد، در این صورت

$$n^2 = 100a^2 + b, \quad 0 < b < 100$$

به این ترتیب $n > 10a$ و بنابراین: $n \geq 10a + 1$ ؛ یعنی

$$b = n^2 - 100a^2 \geq 20a + 1 \Rightarrow 20a + 1 < 100$$

که از آنجا به دست می آید: $a \leq 4$.

به ازای $n = 41$ ، تنها عدد $n = 10a + 1 = 41$ با شرط مساله سازگار

است؛ اگر $n > 41$ ، آن وقت $42^2 - 40^2 > 100 \geq n^2 - 40^2$.

▽ مساله ۲۴۴، دنباله این مساله است.

۵۵. S_1, S_2, S_3, S_4 و $2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4$ را، به ترتیب، مساحت

و محیط مثلث های ABE, BCE, CDE و DAE فرض می کنیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{P_1}{S_1} + \frac{P_3}{S_3} = \frac{P_2}{S_2} + \frac{P_4}{S_4}$$

چون $ABCD$ ، دوزنقه است. بنابراین $S_1 = S_3 = S$. چون $ABCD$

یک چهارضلعی محیطی است، پس $AB + CD = BC + AD$. اگر به دو طرف

این برابری، مجموع دو قطر را اضافه کنیم، به دست می آید:

$$2p_1 + 2p_2 = 2p_2 + 2p_4$$

برای این که به برابری مورد نظر برسیم، کافی است دو طرف برابری اخیر را، بر $2S$ تقسیم و از رابطدهای ناشی از برابری‌های زیر استفاده کنیم:

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{p_2}{p_4}$$

$$\frac{p_2}{S} = \frac{p_4}{S_4} \cdot \frac{p_4}{S} = \frac{p_2}{S_2}$$

۵۶. پاسخ حداقل مقدار S_{min} برابر است با $\left[\frac{n}{2} \right]$ یعنی $\frac{n}{2}$

وقتی n زوج باشد و $\frac{n-1}{2}$ وقتی n فرد باشد.

(a) مقدار S ، مجموع همه حاصل ضرب‌های دو به دوی عددهای x_1, x_2, \dots, x_n را می‌توان به این صورت نوشت:

$$S = \frac{1}{2} [(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2]$$

از این جا معلوم می‌شود که $S \geq -\frac{n}{2}$.

اگر n عددی زوج باشد، نیمی از عددهای x_k را برابر ۱ و نیم دیگر

را برابر ۱- می‌گیریم؛ به دست می‌آید: $S = -\frac{n}{2}$. اگر n عددی فرد باشد،

چون S عددی درست است، $S \geq -\frac{n-1}{2}$. حداقل مقدار S وقتی به دست

می‌آید که، بین عددهای x_k ، به تعداد $\frac{n+1}{2}$ برابر ۱ و به تعداد $\frac{n-1}{2}$ برابر

۱- وجود داشته باشد.

(b) به مسأله (a) منجر می‌شود: هر يك از عددهای x_k را، می‌توان

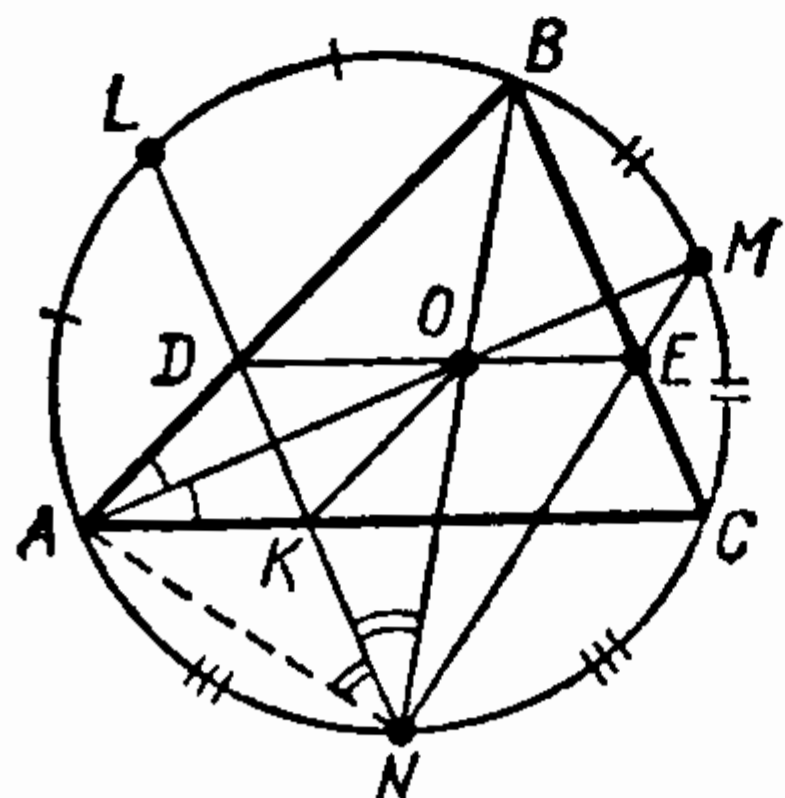
پشت سر هم، با ۱ یا ۱ — عوض کرد، به نحوی که مجموع همه حاصل ضرب‌های دو بدوی آنها، زیادتر نشود (قانون تعویض: a_1 را برابر ۱ — قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیه عددها غیر منفی باشد؛ و برابر ۱ قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیه عددها منفی باشد). بنابراین، در این جا هم، همان پاسخ بخش (a) به دست می‌آید.

۵۷. فرض کنید $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ، عددهایی باشند که روی کارت‌ها نوشته شده‌اند. اگر $a_1 + a_n > a_2 + a_{n-1}$ ، آن وقت اولی، عدد a_n را در خانه ۲ می‌گذارد (شکل ۴۱): دومی یکی از دو کارت a_1 یا a_2 را در یکی از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1 + a_n < a_2 + a_{n-1}$ ، آن وقت اولی عدد a_1 را در خانه ۲ و دومی عدد a_n یا a_{n-1} را در یکی از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$ ، اولی می‌تواند هر کدام از دو برنامه فوق را، به دلخواه اجرا کند (در این حالت، اگر بازی درست انجام شود، نتیجه کار، مساوی خواهد شد).

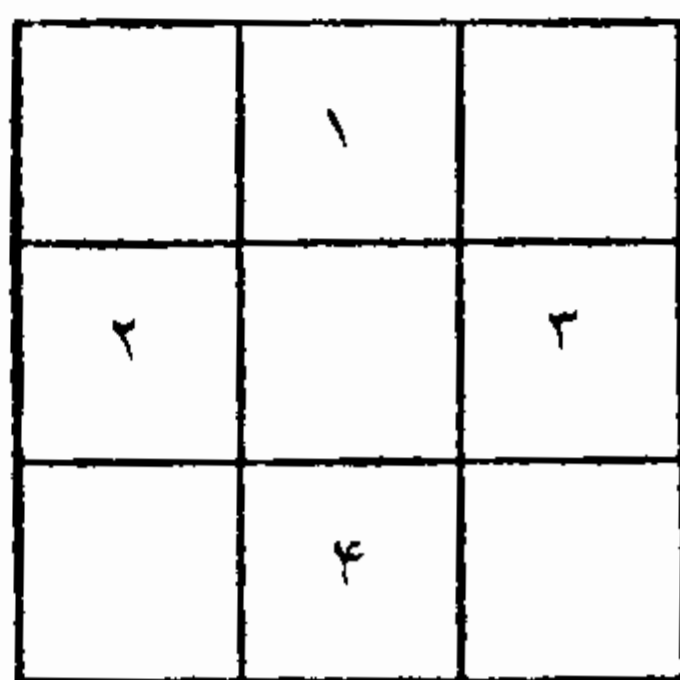
۵۸. L ، M و N را وسط ضلع‌های AB ، BC و CA ، O را مرکز دایره محاطی مثلث ABC ، D و K را نقطه‌های برخورد پاره‌خط راست LN با ضلع‌های AB و AC می‌گیریم (شکل ۴۲).

ثابت می‌کنیم، چهارضلعی $ADOK$ ، لوزی است (که در ضمن، مسأله ۲۳۷ هم حل می‌شود). برای این منظور، کافی است ثابت کنیم، قطرهای AO و DK ، محورهای تقارن این چهارضلعی هستند.

در واقع $AM \perp LN$ ، زیرا $\widehat{LB} + \widehat{BM} + \widehat{AN} = 180^\circ$ ، بنابراین



شکل ۴۲



شکل ۴۱

نقطه‌های D و K نسبت به خط راست AM قرینه یکدیگرند (AM نیمساز زاویه BAC است): همچنین، نقطه‌های A و O نسبت به خط راست LN قرینه یکدیگرند (LN نیمساز زاویه ANB است).

از این جا نتیجه می‌شود: $DO \parallel AC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد $EO \parallel AC$ که در آن، E را نقطه برخورد پاره خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب، نقطه‌های D و O و E روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است.

۵۹. اگر شماره «بلیت خوشبختی» برابر A باشد، آن وقت بلیت با شماره $A' = 999999 - A$ هم يك «بلیت خوشبختی» است و در ضمن، $A \neq A'$ از طرف دیگر داریم:

$$A + A' = 999999 = 1001 \times 999 = 13 \times 77 \times 999$$

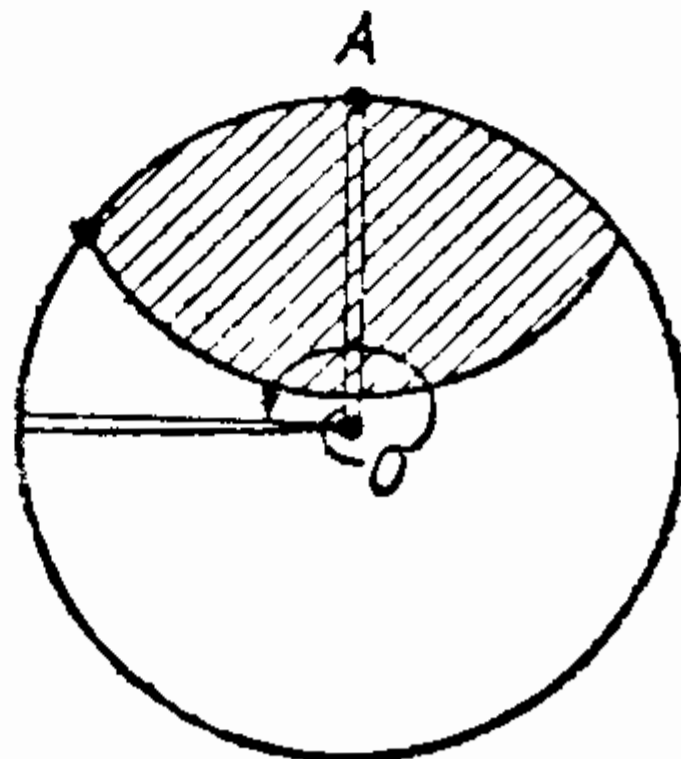
بنابراین، مجموع شماره‌های همه «بلیت‌های خوشبختی» بر ۱۳ بخش پذیر است. ۶۰. اگر ناوچه در نقطه A به دایره K که به وسیله تورافکن روشن

می‌شود، وارد شود، آن وقت بعد از فاصله زمانی $\frac{5\pi}{2} \cdot \frac{a}{v}$ در فاصله‌ای از

نقطه A قرار می‌گیرد که از $\frac{5\pi}{2} \cdot \frac{a}{v} \cdot \frac{v}{8}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی در یکی از

نقطه‌های اشتراك دایره K با دایره به شعاع $a < \frac{5\pi a}{16}$ و مرکز A (این

بخش مشترك دو دایره در شکل ۴۳، هاشور خورده است). به سادگی دیده



شکل ۴۳

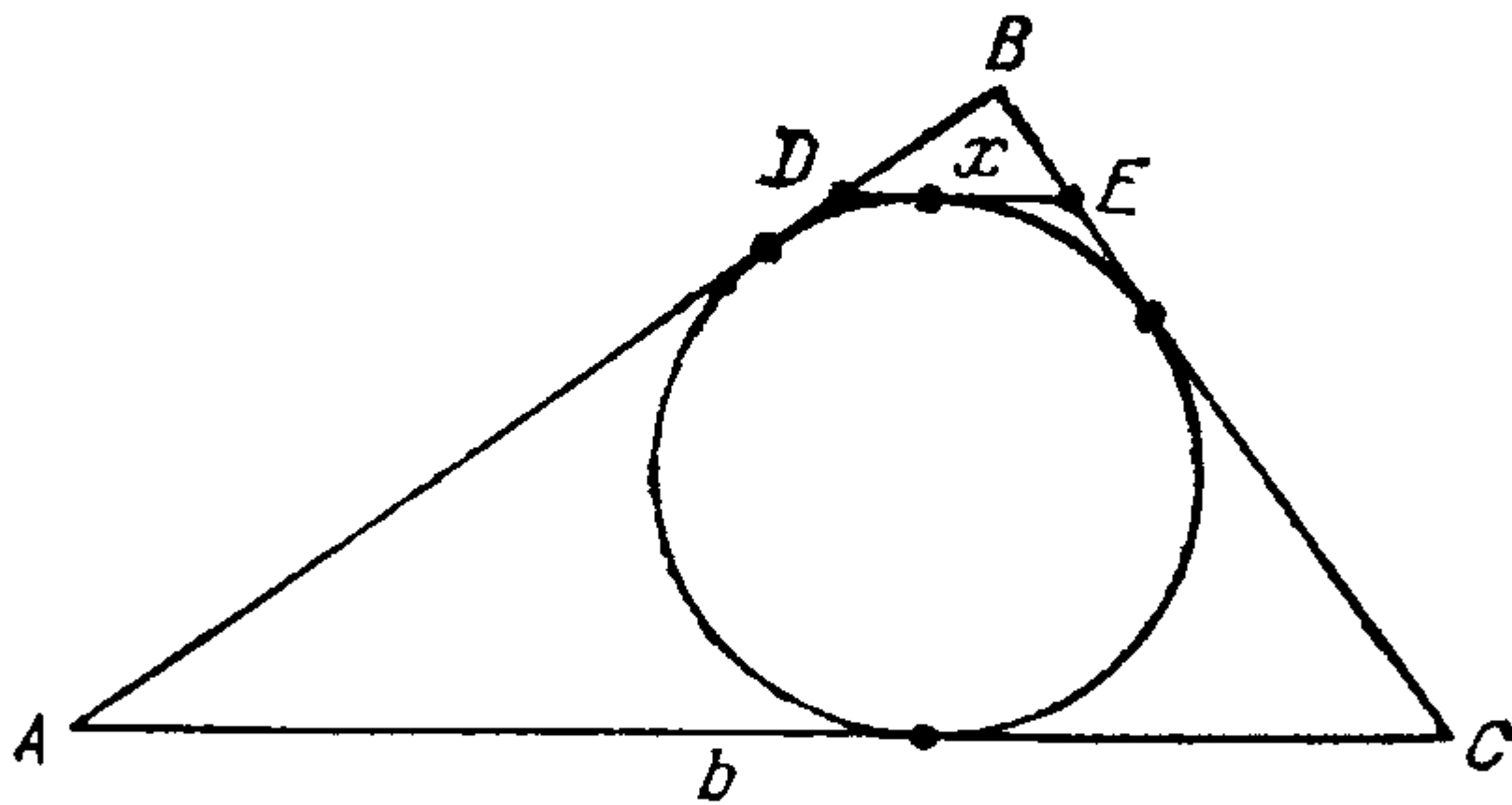
می‌شود که، در این مدت، پرتو نور افکن به اندازه زاویه‌ای برابر $\frac{5\pi}{4}$ می‌چرخد، همه بخش‌ها شورخورده را در معرض دید قرار می‌دهد. بنا بر این، ناوچه نمی‌تواند خود را از دید نور افکن مخفی نگاه دارد.

▽ با استدلالی ظریف تر، می‌توان ثابت کرد که، کمترین سرعت ناوچه برای عبور از دریاچه، برابر $v_{min} = v \cos \beta$ است که، در آن، β عبارت است از ریشه معادله $2\pi + \beta = \operatorname{tg} \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$): $v_{min} \approx 0.13v$.

۶۱. یکی از افراد را در نظر می‌گیریم. اگر چنین تقسیم‌ی از افراد ممکن باشد، آن وقت، بقیه ۹۹ نفر را باید بتوان به زوج‌هایی تقسیم کرد که، هر کدام از آن‌ها، با فرد انتهایی، به ننگه‌بانی پردازند. ولی این ممکن نیست، زیرا ۹۹، عددی فرد است.

▽ مسأله کلی را می‌توان به این ترتیب طرح کرد: به ازای چند مقدارهایی از n ، می‌توان از عضوهای مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ دستگاہی از سده تایی‌ها را طوری جدا کرد که، هر دو عضو، درست در یک سده تایی قرار گیرد. این دستگاہ، به دستگاہ «سه تایی‌های شتینر» معروف است.

۶۲. طول پاره خط راست مجهول را x و طول قاعده AC از مثلث ABC را b می‌گیریم (شکل ۴۴). محیط مثلث BDE برابر $2p - 2b$ می‌شود (با استفاده از ویژگی مماس‌های بردایره). از تشابه مثلث‌های ABC و BDE به دست می‌آید:



شکل ۴۴

$$x = \frac{1}{p}b(p-b) = \frac{1}{p} \left[\frac{p^2}{4} - \left(b - \frac{p}{2}\right)^2 \right]$$

حداکثر مقدار x برابر است با $\frac{p}{4}$ و وقتی به دست می آید که داشته باشیم:

$$b = \frac{p}{2}$$

۶۳. به سادگی ثابت می شود که، برای هر i و k ، داریم:

$$x_{ii} = 0, \quad x_{ik} = -x_{ki}$$

اگر n معادله $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ را، با ثابت نگه داشتن i و j ($k = 1, 2, \dots, n$) با هم جمع کنیم، به دست می آید:

$$nx_{ij} = s_i - s_j$$

که در آن، s_j مجموع همه عددهای به صورت x_{jk} ($k = 1, 2, \dots, n$) است. اکنون $a_i = \frac{s_i}{n}$ می گیریم، در این صورت $x_{ij} = a_i - a_j$ ؛ همان چیزی که می خواستیم.

۶۴. پاسخ: می توان.

در مربع $1 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ و روی خط راست $y = \frac{1}{2}$ ، به تعداد

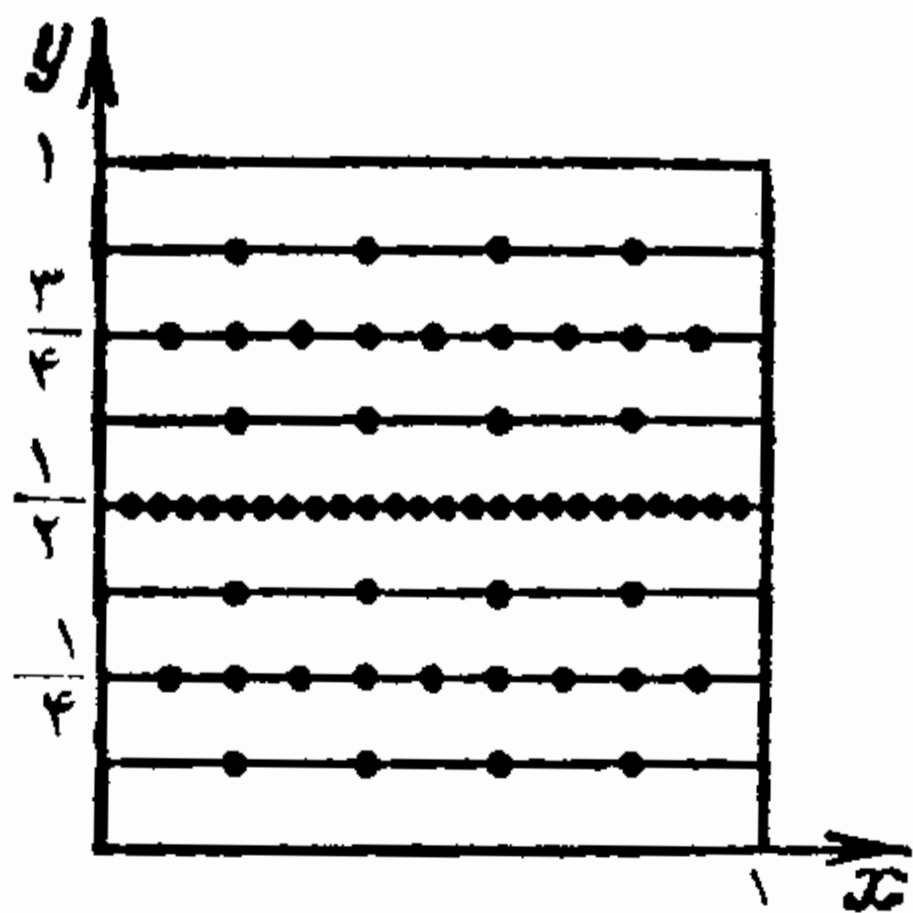
$c_0 = 200$ نقطه به طور یکنواخت قرار می دهیم: $\left(\frac{k}{201}, \frac{1}{2}\right)$ ، $k = 1, 2, \dots, 200$.

سپس، روی هر یک از خط های راست $y = \frac{1}{4}$ و $y = \frac{3}{4}$ ، به تعداد $c_1 = 100$

نقطه قرار می دهیم:

$$\left(\frac{k}{101}, \frac{1}{4}\right) \text{ و } \left(\frac{k}{101}, \frac{3}{4}\right), \quad k = 1, 2, \dots, 100$$

این روند را، برای $m = 2, 3, \dots, 7$ ، روی هر یک از خط های راست



شکل ۴۵

را قرار می‌دهیم (به‌ازای $m=7$ ، روی هر یک از ۱۲۸ خط راست متناظر آن، یک نقطه قرار می‌گیرد). تعداد کل نقطه‌ها، روی هم، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{k}{c_m + 1}, \frac{2l - 1}{2^{m+1}} \right), c_m = [2000 \times 2^{-m}]$$

این ساختمان، بدوسیله شکل ۴۵ روشن شده است.

$$\sum_{m=0}^7 2^m c_m = 2000 + 2 \times 1000 + 4 \times 500 + 8 \times 250 + 16 \times$$

$$\times 12 + 32 \times 6 + 64 \times 3 + 128 = 1704$$

روشن است که، هیچ یک از مستطیل‌های بدمساحت $\frac{1}{2000}$ را نمی‌توان

در فاصله بین این نقطه‌ها جا داد. اگر خط راست $y = \frac{1}{4}$ را قطع کند، قاعده

آن از $\frac{1}{201}$ بیشتر نیست؛ اگر خط راست $y = \frac{1}{4}$ را قطع نکنند، آن وقت

بدطور کامل در بالا و یا بدطور کامل در پایین این خط راست قرار می‌گیرد. در

ضمن، اگر خط راست $y = \frac{3}{4}$ یا $y = \frac{1}{4}$ را قطع کند، ارتفاع آن از $\frac{1}{4}$ و

قاعده آن از $\frac{1}{101}$ بیشتر نیست و غیره. اگر مستطیل، بدطور کامل بین خط‌های

راست به صورت $y = \frac{n}{256}$ ($n = 1, 2, \dots, 256$) قرار گیرد. آن وقت ارتفاع

آن، از $\frac{1}{256}$ تجاوز نمی کند.

۰۶۵. x_1, x_2, \dots, x_n را، عددهای مفروض می گیریم، به نحوی که، به ردیف صعودی، نسبت به بخش کسری آنها، $\alpha_i = x_i - [x_i]$ ، شماره گذاری شده باشند.

k عدد اول را، درجهت کوچکتر از خود، و بقیه را درجهت بزرگتر از خود گرد می کنیم. بدسادگی دیده می شود، حداکثر خطایی که در نتیجه گرد کردن به دست می آید، با محاسبه یکی از دو مجموع زیر، مشخص می شود:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad \text{و} \quad x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n$$

قدر مطلق خطای اول برابر است با

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq k\alpha_k$$

و قدر مطلق خطای دوم

$$(1 - \alpha_{k+1}) + \dots + (1 - \alpha_n) \leq (n - k)(1 - \alpha_{k+1})$$

بنابراین، باید k را طوری انتخاب کنیم که نا برابری های زیر برقرار باشند:

$$k\alpha_k \leq \frac{1}{4}(n+1) \quad \text{و} \quad (n-k)(1 - \alpha_{k+1}) \leq \frac{1}{4}(n+1)$$

برای این منظور، کافی است، بزرگترین مقدار k را پیدا کنیم که، به ازای آن،

نا برابری اول برقرار باشد: در این صورت $\alpha_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$ ، و، بنابراین،

نا برابری دوم هم برقرار خواهد بود:

$$1 - \alpha_{k+1} < 1 - \frac{n+1}{4(k+1)} \leq \frac{n+1}{4(n-k)}$$

$$\text{زیرا } 1 \leq \frac{(n+1)^2}{2(k+1)(n-k)} + \frac{n+1}{2(k+1)} + \frac{n+1}{2(n-k)} \geq 1, \text{ به ازای } 0 < k < n.$$

▽ وقتی n عددی فرد باشد، این ارزیابی خطاً دقیق است. مثلاً برای

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$$

ولی وقتی n عددی زوج باشد؛ می توان این ارزیابی خطا را، با تبدیل $\frac{n+1}{2}$

$$\text{به } \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{2}, \text{ اندکی بهتر کرد. مثلاً}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n}{2(n+1)}$$

۶۶. جهان گرد می تواند از رستوران در هر مسیری حرکت کند، تنها با این شرط که، از میدان، خیابانی را برای عبور انتخاب کند که، قبلاً، به تعدادی فرد از آن گذشته است. بدسادگی دیده می شود که، چنین خیابانی، برای هر تقاطعی، به جز ایستگاه، وجود دارد (در واقع، تعداد ورودهای جهان گرد به تقاطع، یکی بیشتر از تعداد خروج او از آن است)؛ همچنین، چنین مسیری، نمی تواند او را دوبار از خیابانی عبور دهد. چون تعداد خیابانها محدود است، جهان گرد سر آخر به ایستگاه می رسد.

۶۷. (a) داه حل اول. هر دو عضو کمیسیون، در بیش از يك نشست، با هم برخورد نمی کنند. در هر نشست، به تعداد $C_2^{45} = 990$ زوج وجود دارد. چون این افراد در ۴۰ نشست شرکت کرده اند، بنا بر این از عضوهای کمیسیونها، می توان به تعدادی که از $40 \times 45 = 1800$ یعنی کمتر نیست، زوج تشکیل داد. ولی از ۶۰ نفر (و یا کمتر از آن) می توان حداکثر به تعداد C_2^{60} ، یعنی $\frac{59}{2} \times 60$ زوج تشکیل داد که از ۱۸۰۰ کمتر است.

داه حل دوم. فرض می کنیم، N ، تعداد افراد کمیسیون از ۶۰ بیشتر

نباشد. در این صورت، چون $6 > \frac{40}{N} \times 10$ ، بنا بر این فردی پیدا می‌شود که، دست کم، در هفت نشست حضور داشته‌است. تعداد همه افرادی که، این شخص، با آنها برخورد دارد (در هر نشست با ۹ نفر)، برابر است با $9 \times 7 > 59$. تناقض.

(b) این مساله هم، کاملاً شبیه (a) حل می‌شود (هریک از دو راه حل).
 ∇ ارزیابی صورت مساله، در بخش (b)، کاملاً دقیق است: ۳۰ کمیسیون ۵ نفری را، با توجه به شرط مساله، می‌توان تشکیل داد.

$$68. \text{ پاسخ: } (b) (p-1)(q-1) \cdot \frac{1}{2}$$

اگر p و q دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند، هر عدد درست z به صورت $z = px + qy$ نشان داده می‌شود (ضمیمه ۲). همه این گونه نمایش‌ها، از یک z ثابت به صورت $z = pa + qb$ و با دستور کلی:

$$z = p(a - qt) + q(b + pt)$$

به دست می‌آیند که، در آن، t ، عددی است درست؛ در ضمن، نمایش منحصر به فردی وجود دارد که، برای آن داشته باشیم: $0 \leq x \leq q-1$.
 هر عدد درست z را متناظر با زوج عددهای درست (x, y) قرار می‌دهیم، بدینحوی که

$$0 \leq x \leq q-1, z = px + qy$$

در این تناظر، هر عدد، درست با یک زوج متناظر است؛ در ضمن، z ، تنها وقتی «خوب» است که داشته باشیم: $y \geq 0$: اگر $z = px + qy$ ، عددی، «خوب» باشد، آن وقت، به ازای $0 \leq r \leq q-1$ و $x = qt + r \geq 0$ ، این نمایش وجود دارد:

$$z = pt + q(y + t)$$

اکنون یادآوری می‌کنیم، اگر عدد $z = px + qy$ ، $0 \leq x \leq q-1$

«خوب» باشد، آن وقت عدد $z' = (q-1-x)p + (-1-y)q$ «بد» است و برعکس، اگر z «بد» باشد، آن وقت z' «خوب» است. نقطه‌های

$$(x, y) \text{ و } (q-1-x, -1-y)$$

نسبت به نقطه $(x_0, y_0) = \left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ متقارن‌اند، و خود عددهای z و z' نسبت به نقطه

$$z_0 = px_0 + qy_0 = \frac{1}{2}(pq - p - q)$$

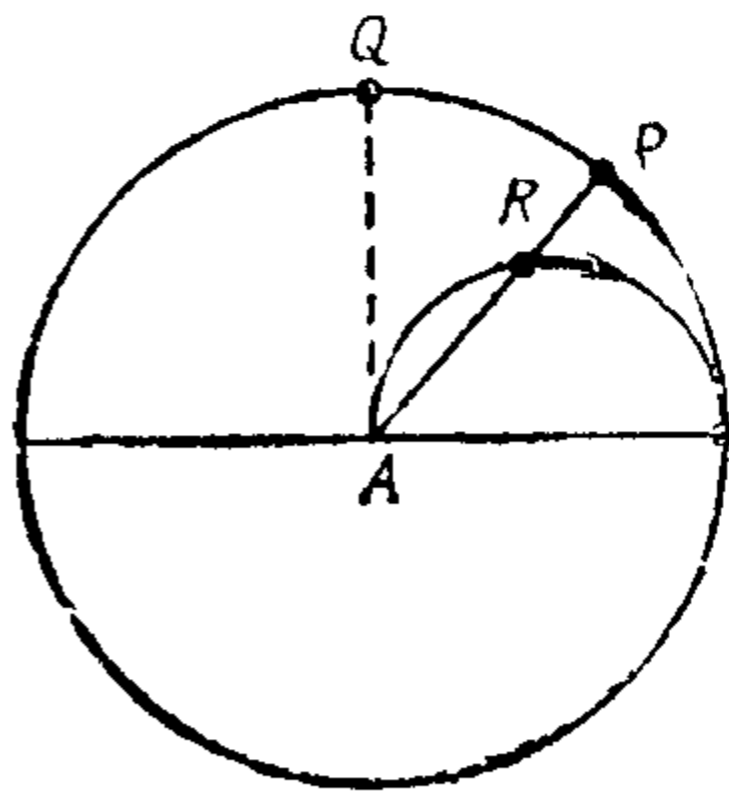
قرینه‌هم‌اند، زیرا $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$.

بد این ترتیب، ثابت شد که: a عدد «خوب» z متناظر است با عدد «بد» (متقارن با آن) $z' = c - z$ و برعکس.

چون کوچکترین عدد «خوب» صفر است، بنابراین، بزرگترین عدد «بد» c می‌شود؛ و همه عددهای «بد» روی هم:

$$\frac{1}{2}(c+1) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

▽ تعبیر هندسی حل این مسأله بسیار جالب است: (x, y) را نقطه‌هایی از یک شبکه واقع بر صفحه $z = px + qy$ را خط‌های راستی که از آن‌ها می‌گذرند، بگیریم و غیره.



شکل ۴۶

۶۹. پاسخ: بعد از $\frac{\pi}{200}$ ساعت.

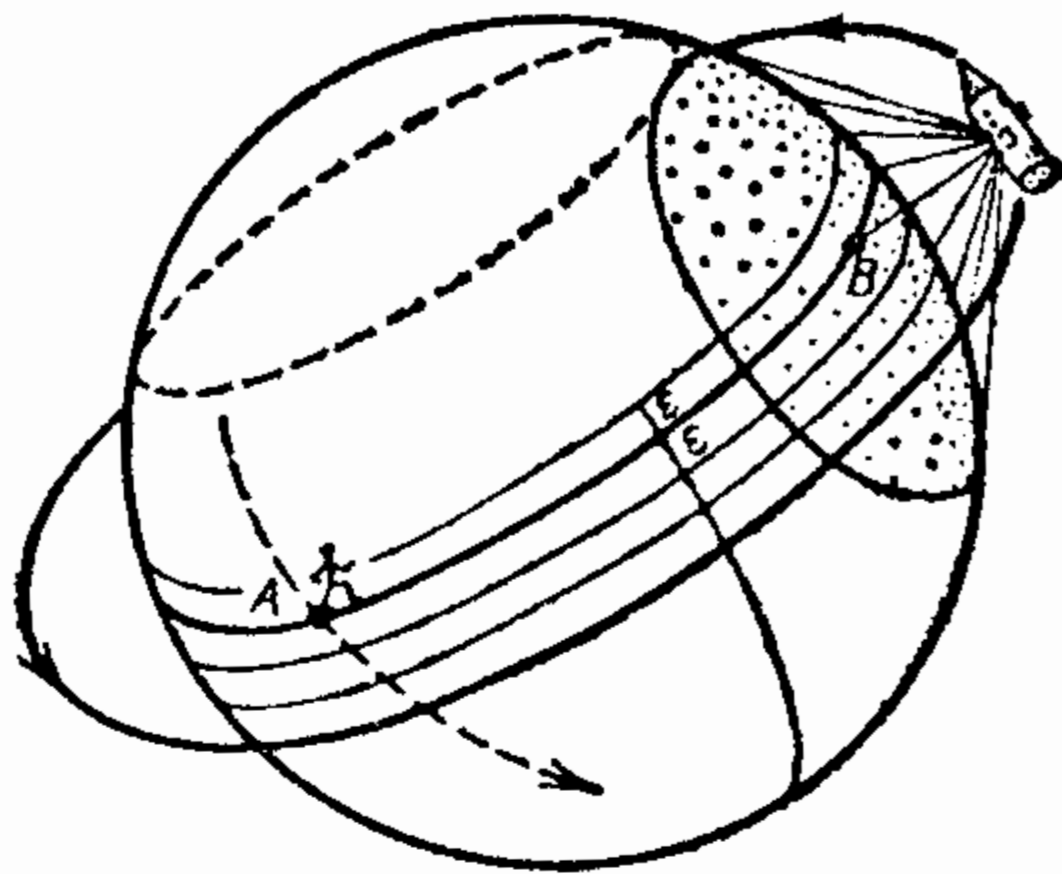
یادآوری می‌کنیم که، مسیر موشك، با توجه به شرط‌های مسأله، دایره‌ای با شعاعی برابر نصف شعاع مسیر هواپیماست (شکل ۴۶): مقدار کمان AR ، از نظر اندازه، دو برابر مقدار زاویه QAP است (زاویه بین مماس و وتر)؛ یعنی اندازه کمان QP ، بر حسب درجه، برابر نصف کمان AR ، بر حسب درجه است. بنابراین، طول این دو کمان (برای هر وضع R) با هم برابرند. برای رسیدن موشك به هواپیما، باید هواپیما ربع دایره و موشك نیمی از محیط دایره مسیر خود را طی کنند.

▽ البته، باید منحصر به فرد بودن مسیر موشك را، با توجه به شرط‌های مسأله، ثابت کرد (از شرکت کنندگان در المپیاد، این اثبات را نخواسته بودند). این اثبات، نتیجه‌ای از این حکم کلی است که: اگر تابعی در نقطه $t = 0$ مفروض و مشتق آن معلوم باشد. خود تابع منحصر به فرد است. اگر موشك، در زمان t فاصله $AR = AQf(t)$ از نقطه A را طی کند (در ضمن $f(0) = 0$)، آن وقت برای سرعت آن، در جهت عمود بر شعاع داریم: $f'(t) = \sqrt{1 - f^2(t)}$ و

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1 - f^2(t)}} = v, \quad (\arcsin f(t))' = v$$

و از آن جا $f(t) = \sin vt$.

۷۰. A و B را دو رأس چندوجهی می‌گیریم که به فاصله d از یکدیگر باشند. از نقطه‌های A و B ، دو صفحه عمود بر خط راست AB رسم می‌کنیم. روشن است که تمامی چندوجهی بین این دو صفحه قرار می‌گیرد. از هر رأس چندوجهی، صفحه‌ای عمود بر خط راست AB رسم می‌کنیم و از آن‌ها، دو صفحه مجاور را در نظر می‌گیریم. بین این دو صفحه، دست کم سه یال از چندوجهی وجود دارد. تصویر هر يك از این یال‌ها بر خط راست AB ، از طول خود یال بزرگتر نیست؛ در ضمن روشن است که، در بین آن‌ها، یال‌هایی وجود دارد که با AB موازی نیستند، بنابراین، مجموع طول‌های همه این یال‌ها از سه برابر طول AB ، یعنی $3d$ بیشتر است.



شکل ۴۷

به طور خلاصه، می توان راه حل را، این طور بیان کرد: تصویر بدنه چندوجهی روی AB ، دست کم سه بار آن را می پوشاند.

۷۱. شعاع سیاره را واحد می گیریم. دو نقطه از سطح سیاره را در نظر می گیریم که دوسریک قطر آن باشند (قطب ها). از این دو نقطه، نصف النهاری به نام «نصف النهار مبدا» را می گذرانیم و آن را به کمان های برابر به طول E تقسیم می کنیم و از هر نقطه تقسیم، مداری عبور می دهیم (شکل ۴۷).

برای سفینه، این برنامه جست و جو را می ریزیم: سفینه در فاصله ثابت $R > 1$ ، نسبت به مرکز سیاره، روی مدارهایی که مشخص کرده ایم پرواز می کند؛ در ضمن از نوار «شمالی» آغاز می کند و هر بار که به «نصف النهار مبدا» می رسد، در امتداد آن، خود را به مدار بعدی می رساند. فرض کنید: $R = \sqrt{2}$. در این صورت، از سفینه، «کلاهک کروی» به شعاع $\frac{\pi}{4}$ دیده می شود

(همه فاصله هارا، در روی سطح کره اندازه می گیریم).

از آن جا که E را می توان به داخل خواه کوچک گرفت، تنها باید تحقیق کرد، اگر نسبت سرعت ها بزرگتر از ۱۰ باشد، ساکن سیاره نمی تواند، در فاصله زمانی که سفینه یک مدار را دور می زند، از دید او خارج شود. و این، تقریباً روشن است. هر مدار از استوا کوتاه تر است. مرکز دایره دید سفینه، با سرعت دست کم $\frac{10}{\sqrt{2}}$ برابر سرعت موجود ساکن سیاره، جا به جا می شود. اگر این

موجود، مدار را در نقطه A قطع کند، آن وقت سفینه، در B قرار دارد،

و، بنابراین، یکی از دو کمان \widehat{AB} از مدار از π تجاوز نمی‌کند و، در زمانی که سفینه آن را طی می‌کند، ساکن سیاره می‌تواند از A ، به فاصله‌ای که بیشتر از $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi\sqrt{2}}{10}$ نیست از A دور شود، به نحوی که در لحظه بودن در A ، باید از سفینه دیده شود (قبل از دور زدن مدار یا بعد از آن).

۷۲. دو سیاره را که از هم به هم نزدیک‌ترند، در نظر می‌گیریم. روشن است، اخترشناسانی که روی این دو سیاره باشند، به یکدیگر نگاه می‌کنند. $n-2$ سیاره و $n-2$ اخترشناس باقی می‌مانند. اگر دست کم یکی از این اخترشناسان به یکی از همین دو سیاره انتخابی نگاه کند، آن وقت $n-3$ اخترشناس باقی مانده، برای مشاهده $n-2$ سیاره کفایت نمی‌کنند و یکی از سیاره‌ها، بدون مشاهده می‌ماند. ولی، اگر هیچ کدام از $n-2$ اخترشناس روبه یکی از دو سیاره انتخابی نداشته باشند، می‌توانیم دوباره به همان استدلال متوسل شویم: از $n-2$ سیاره، دو سیاره را که نسبت به دیگران، به هم نزدیک‌ترند در نظر می‌گیریم و غیره. چون n عددی فرد است، سر آخر، یک سیاره باقی می‌ماند که هیچ کدام از اخترشناسان، تلسکوپ خود را به طرف آن، نشانه نرفته‌است.

۷۳. (a) اگر نقطه P روی خط راست AD واقع باشد، درستی گزاره روشن است.

فرض می‌کنیم، نقطه P روی خط راست AD نباشد و O را وسط پاره خط راست AD می‌گیریم. نقطه P' ، قرینه P نسبت به O را پیدا می‌کنیم. چهار ضلعی‌های $BPCP'$ و $P'APD$ متوازی الاضلاع‌اند و داریم:

$$AP + PD = AP' + AP > P'B + BP = BP + PC$$

(b) بنا بر شرط، P نقطه‌ای دلخواه است. P را منطبق بر A می‌گیریم. در این صورت $AD \geq AB + AC$. اکنون P را منطبق بر D می‌گیریم. به دست می‌آید: $AD \geq BD + DC$. از مجموع این دو نابرابری، خواهیم داشت:

$$2AD \geq AB + AC + BD + CD$$

از طرف دیگر، همیشه داریم:

$$AD \leq AC + CD \text{ و } AD \leq AB + BD$$

در ضمن، در هر يك از این دو نابرابری، تنها وقتی به علامت برابری می‌رسیم که، سه نقطه، بر يك خط راست باشند. از مجموع دو نابرابری اخیر، به دست می‌آید:

$$2AD \leq BD + AB + AC + CD$$

از مقایسه این نابرابری با نابرابری قبل نتیجه می‌شود:

$$2AD = BD + AB + AC + CD$$

از آن جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که، نقطه‌های A و B و C و D ، روی يك خط راست اند و همه نابرابری‌های قبلی، برابری‌اند و، در نتیجه، نقطه‌های B و C ، روی پاره‌خط راست AD واقع‌اند و در ضمن $AB = CD$.

۷۴. پاسخ: چنین عددهایی برای x و y وجود ندارد.

فرض می‌کنیم: $x \geq y$. در این صورت

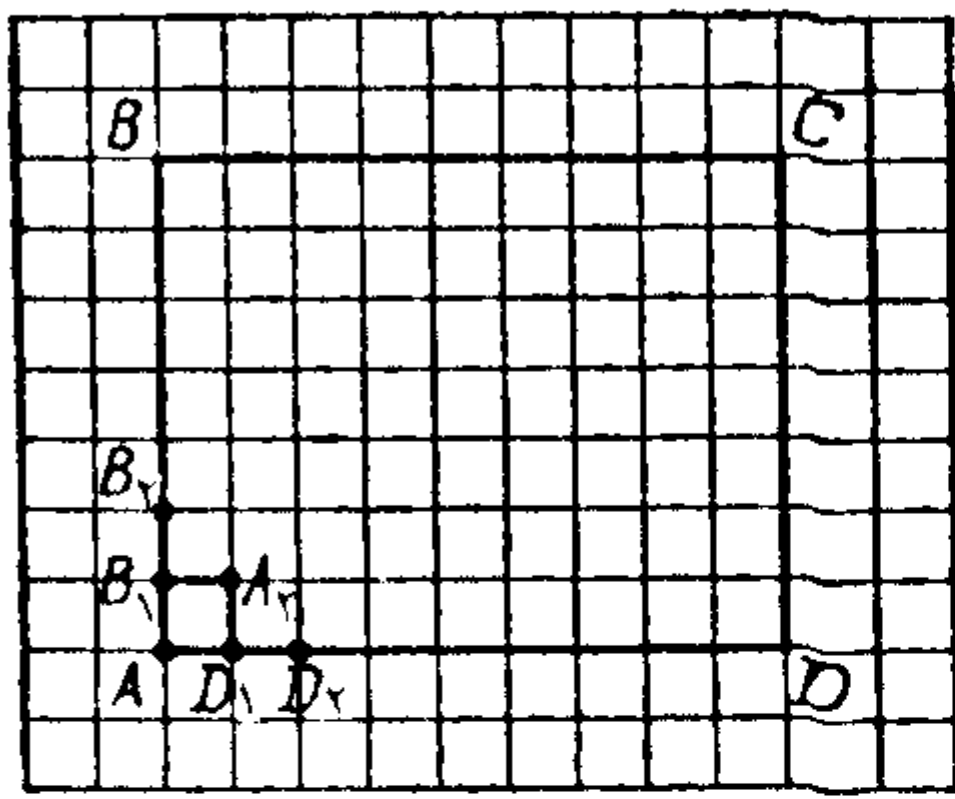
$$x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2$$

بنا بر این $x^2 + y$ ، که بین دو مجذور کامل متوالی قرار دارد، نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۷۵. (a) کافی است ثابت کنیم، k امین نفر از کلاس هشتم، قدی بلندتر از k امین نفر از کلاس هفتم دارد. A را k امین نفر کلاس هفتم، از لحاظ قد، فرض می‌کنیم. در این صورت، با خود A ، دست کم k دانش‌آموز کلاس هفتم وجود دارد که از A کوتاه‌تر نیستند. همه دانش‌آموزان کلاس هشتم، که پشت سر این k نفر قرار دارند، از A بلندترند. بنا بر این، k امین نفر کلاس هشتم، از لحاظ قد، از A بلندتر است.

(b) این مساله هم، به مساله (a) منجر می‌شود: کافی است همان استدلال را، برای هر دو ستون، داشته باشیم.

۷۶. مستطیل $ABCD$ را روی صفحه کاغذ شطرنجی با اندازه‌های $m \times n$ در نظر می‌گیریم (شکل ۴۸)، کوتاه‌ترین مسیرهایی را که از رأس‌های B_1, D_1, B_2, D_2, A_2 ، روی خط‌های شبکه به C می‌رسند، به ترتیب،



شکل ۴۸

اثبات $\frac{d_1}{b_1} = \frac{n}{m}$. می نامیم. در واقع، باید ثابت کنیم: $\frac{d_1}{b_1} = \frac{n}{m}$.
 را، با استقرا روی $m+n$ می دهیم (ضمیمه ۱)؛ در ضمن، اجباری نیست که نسبت $\frac{n}{m} = k$ را عددی درست فرض کنیم.

آغاز استقرا، $m=1$ یا $n=1$ ، روشن است. اکنون فرض می کنیم $m > 1$ و $n > 1$. بنا به فرض استقرا که درباره مستطیل های با اندازه های کوچکتر $n \times (m-1)$ و $(m-1) \times n$ در نظر گرفته ایم، داریم:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{n}{m-1} \text{ و } \frac{d_2}{a_2} = \frac{n-1}{m}$$

بنا بر این

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2 + a_2}{b_2 + a_2} = \frac{\frac{d_2}{a_2} + 1}{\frac{b_2}{a_2} + 1} = \frac{\frac{\frac{n-1}{m} + 1}{m-1} + 1}{\frac{n-1}{n} + 1} = \frac{n}{m}$$

▽ در واقع، ضمن حل این مساله، ثابت کردیم:

$$C_{m+n-1}^{m-1} = n C_{m+n-1}^m = (m+n-1) C_{m+n-2}^{m-1}$$

(در مساله ما $n=km$). با اطلاع از دستور مربوط به C_n^m (ضمیمه ۱۰)، می توان درستی این برابری ها را، به سادگی، تحقیق کرد. برعکس، می توان از این برابری ها، دستور مربوط به C_n^m را بیرون آورد.

۷۷. حکم مساله را، با روش استقرا ثابت می‌کنیم. به ازای $n=1$ ،
درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم، برای n عدد a_2, a_3, \dots, a_{n+1} ،
مجموع s' به صورت

$$\pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_{n+1}$$

وجود داشته باشد، به نحوی که $0 < s' \leq a_2$.
ولی در این صورت از دو حال بیرون نیست: یا $0 \leq s' \leq a_1$ که
از آنجا

$$0 \leq s = a_1 - s' \leq a_1$$

و یا $a_1 < s' \leq a_2 \leq 2a_1$ که در این صورت

$$s = s' - a_1 \leq a_2 - a_1 \leq a_1$$

که در هر حال، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

۷۸. حکم مساله را، برای هر n ضلعی محدب به مساحت S و محیط
 P ثابت می‌کنیم. طول ضلع‌های این n ضلعی را a_1, a_2, \dots, a_n می‌گیریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = P$$

مستطیلی با مساحت S و قاعده به طول P در نظر می‌گیریم؛ ارتفاع این مستطیل،
برابر $\frac{S}{P}$ می‌شود.

اکنون این مستطیل را، به کمک پاره‌خط‌های راست قائم، به n مستطیل با
قاعده‌های برابر a_1, a_2, \dots, a_n تقسیم می‌کنیم و هر يك از آن‌ها را، متناظر
با يك ضلع n ضلعی و در درون آن قرار می‌دهیم. بعضی از مستطیل‌ها، در
بخشی، روی هم قرار می‌گیرند و بعضی‌ها ممکن است به بیرون از n ضلعی
بروند؛ بنا بر این، از آن‌جا که مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر S و مساحت
چندضلعی هم برابر S است، این مستطیل‌ها نمی‌توانند، به طور کامل، سطح
چندضلعی را پوشانند. هر نقطه‌ای از سطح چندضلعی را، که به وسیله این

مستطیل‌ها پوشیده نشده باشد، می‌توان به عنوان مرکز دایره بد شعاع $\frac{S}{P}$ انتخاب

کرد.

∇ برای چهارضلعی می توان مساله را به طریق دیگری حل کرد، ولی برخی از شرکت کنندگان در المپیاد، آن را با روشی حل کرده اند که از آن می توان برای n ضلعی هم استفاده کرد.

۷۹. هر مسیر را با تعداد پاره خط های راستی بیان می کنیم که، از طریق آنها، می گذرد. n را طول کوتاه ترین مسیری می گیریم که از A به B می رود. حکم را، با استقرا روی n ثابت می کنیم.

برای $n=1$ ، به جز کوتاه ترین مسیر AB ، مسیری وجود دارد که از A به چهارراه $C \neq A$ می رود که از B به اندازه ۱ فاصله دارد و از B نمی گذرد. $n > 1$ می گیریم و فرض می کنیم، D نزدیکترین چهار راه به A ، در کوتاه ترین مسیر از A به B باشد. بنا بر فرض استقرا، دو مسیر غیر متقاطع p و q از D به B وجود دارد. از A در مسیر l حرکت می کنیم، به نحوی که از D عبور نکند. اگر این مسیر، با مسیرهای p و q برخوردی نداشته باشد، همه چیز ثابت شده است. ولی اگر مثلاً با p برخورد داشته باشد، از آن به بعد، باید مستقیماً روی p به سمت B رفت. این مسیر، q را قطع نخواهد کرد.

۸۰. PH و h^* را، به ترتیب، ارتفاع هایی از چهار وجهی می گیریم که از رأس های A و P گذشته باشند. h_a ، h_b و h_c را ارتفاع های مثلث ABC و PL را، ارتفاع مثلث PBC فرض می کنیم.

داریم: $S_{PBC} = HP \cdot S_{ABC}$ ؛ و چون $h^* \geq HP$ ، بنا بر این $S_{PBC} \leq S_{ABC}$. از این جا به دست می آید: $PL \leq h_a$ و از آن جا

$$HL < PL \leq h_a$$

به این ترتیب، فاصله H تا خط راست BC از h_a کوچکتر است، به نحوی که نقطه H ، در درون نواری قرار می گیرد که به وسیله دو خط راست موازی و به فاصله h_a از خط راست BC به وجود آمده است.

به همین ترتیب، ثابت می شود که H ، از AC و AB هم به فاصله ای، به ترتیب کمتر از h_c و h_b قرار دارد.

به این ترتیب، نقطه H ، به اشتراك هر سه نوار تعلق دارد، یعنی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ قرار دارد که نقطه‌های A ، B و C ، وسط ضلع‌های آن هستند. برعکس، اگر H نقطه دلخواهی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، و نقطه P را نزدیک به H طوری انتخاب کنیم که، خط راست PH ، عمود بر صفحه ABC باشد، آن وقت فاصله از نقطه P تا ضلع‌های مثلث ABC ، از ارتفاع‌های متناظر کمتر می‌شود و PH ، کوچکترین ارتفاع چهار وجهی $PABC$ در می‌آید.

۸۱. هر يك از نقطه‌های مفروض را به وسیله دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$

دور می‌زنیم. مجموع قطرهای این دایره‌ها برابر است با ۱۰۰. هر جا دو دایره با هم متقاطع در آیند، به جای آن‌ها، دایره‌ای قرار می‌دهیم که شامل این دو دایره شود و کوچکترین قطر ممکن را داشته باشد. به این ترتیب، مقدار مجموع قطرها افزایش پیدا نمی‌کند، ولی تعداد دایره‌ها کمتر می‌شود.

اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام، به دستگاهی از دایره‌ها می‌رسیم که دو به دو نسبت به هم غیرمتقاطع‌اند و مجموع قطرهای آن‌ها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. یادآوری می‌کنیم که، فاصله هر نقطه تا محیط دایره، از $\frac{1}{2}$ کمتر نیست.

r را کوچکترین فاصله بین دایره‌ها می‌گیریم. اگر $r > 1$ ، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر $r \leq 1$ ، آن وقت هر دایره را با دایره‌ای هم مرکز آن

عوض می‌کنیم، به نحوی که شعاع آن به اندازه $\frac{r}{3} - \frac{1}{2}$ کمتر باشد.

دستگاه دایره‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آید، با شرط‌های مساله، سازگار است.

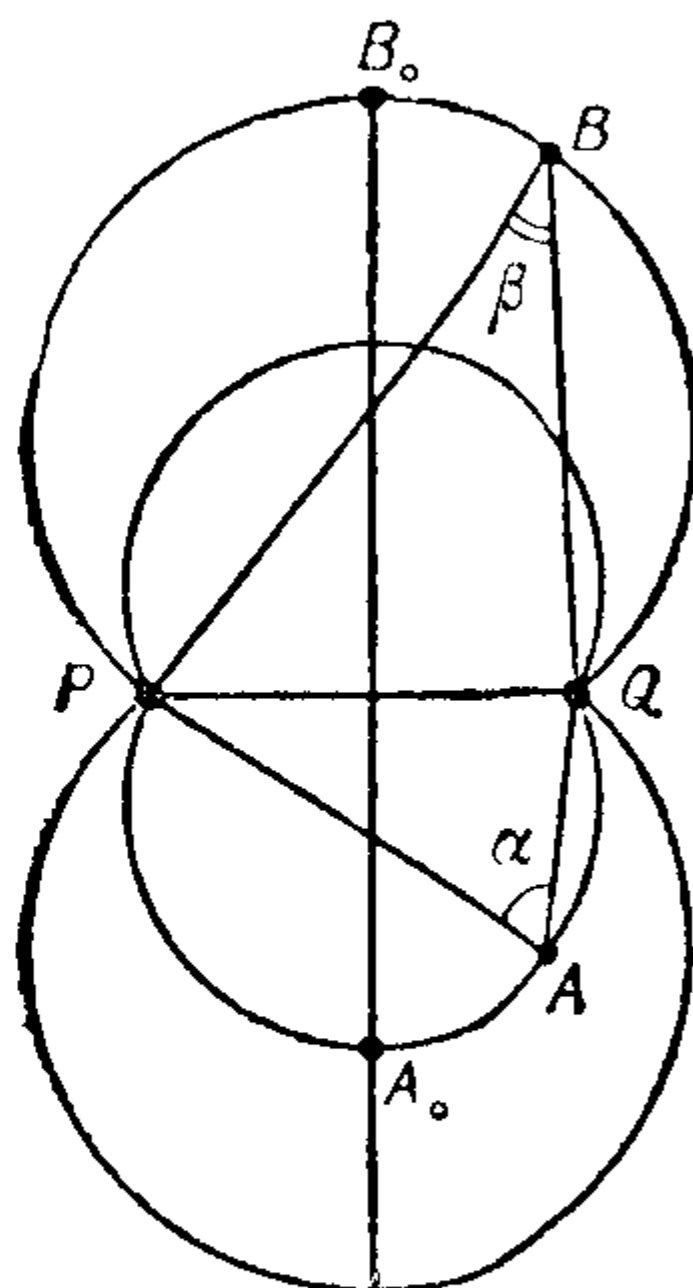
۸۲. پاسخ: $\frac{2d}{\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2}}$ کیلومتر در ثانیه.

فرض کنید. هواپیما در يك ثانيه از نقطه P تا نقطه Q پرواز کند:
 $PQ = r$. باید، با شرط ثابت بودن $AB = d$ ، حداقل مقدار ممکن r را پیدا
 کنیم. به جای این حداقل می توان به جست و جوی حداکثر مقدار $\frac{d}{r}$ رفت و.
 در ضمن، راحت تر است که r را ثابت بگیریم.

اکنون می توانیم، مساله را، بدین صورت تنظیم کنیم: بین همه نقطه های
 A و B از فضا، که از آن ها، پاره خط راست PQ ، به ترتیب، با زاویه های
 α و β دیده می شود، دو نقطه ای را پیدا کنیم که، برای آن ها، فاصله AB .
 حداکثر مقدار ممکن باشد.

چون $\widehat{PAQ} = \alpha$ ، بنابراین نقطه A روی کمان های در خور α قرار
 دارد که از P و Q گذشته اند (دو کمان) و. بد همین ترتیب، نقطه B روی
 کمان های در خور زاویه β قرار دارد که از P و Q گذشته اند (باز هم دو کمان)
 (شکل ۴۹). به سادگی ثابت می شود: به حداکثر فاصله AB وقتی می رسیم
 که، دو نقطه A و B «متقابل قطری» باشند (در شکل، نقطه های A_0 و B_0).
 برای چنین موقعیتی از A و B خواهیم داشت:

$$\frac{2d}{r} = \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2}$$



شکل ۴۹

که از آن، پاسخ مساله به دست می آید.

۸۳. پاسخ: ۳۰.

برنامه‌ای را که بازی کن دوم باید اجرا کند تا به این مجموع برسد، شرح می‌دهیم. عددها را، به زوج‌های (۱، ۲)، (۳، ۴)، ...، (۲۰، ۱۹) تقسیم می‌کنیم. هر بار که اولی، علامتی را جلو یک عدد می‌گذارد، به جز ۱۹ و ۲۰، دومی باید عدد دیگر همان زوج را، با علامت مخالف، نشانده‌گذاری کند. اگر اولی علامتی را جلو یکی از دو عدد زوج آخر، یعنی (۱۹، ۲۰) قرارداد، دومی همان علامت را جلو عدد دیگر زوج قرار می‌دهد. روشن است که مجموع نهائی، از لحاظ قدر مطلق، حداقل برابر می‌شود با

$$10 + 20 - 1 - 1 - \dots - 1 = 30$$

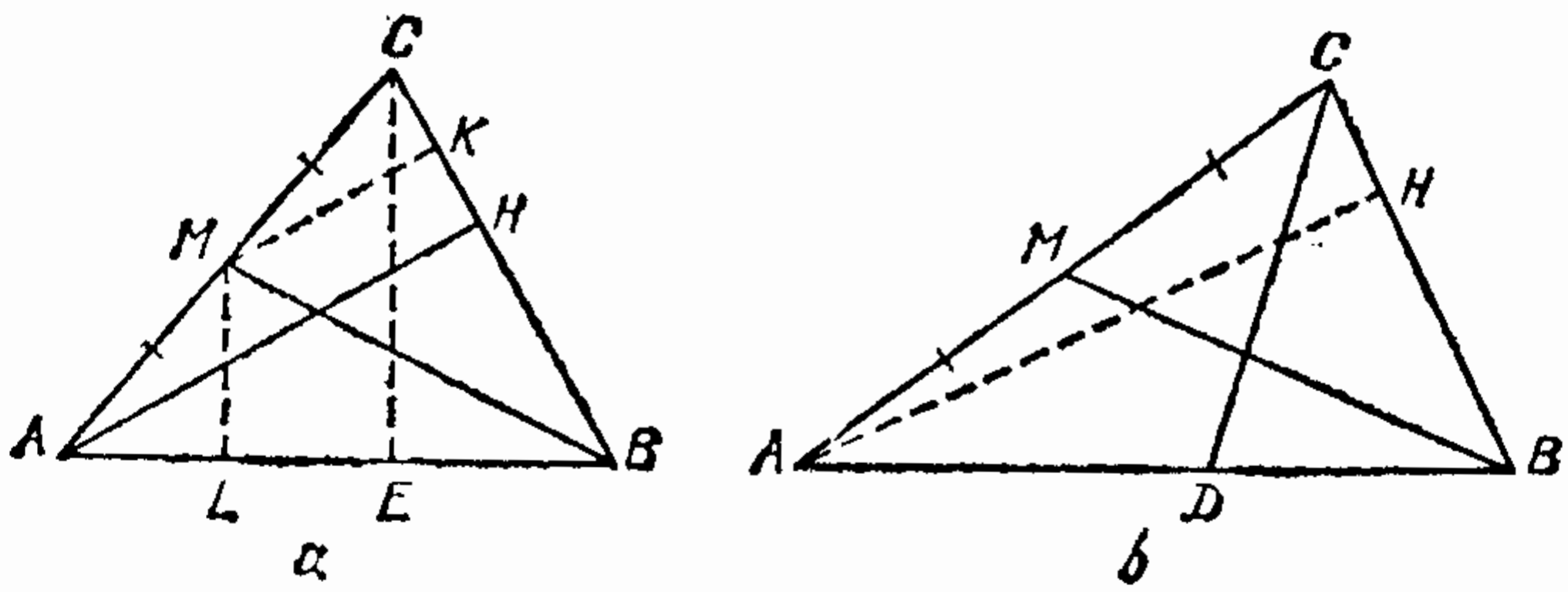
۹ بار

اکنون ثابت می‌کنیم، بازی کن اول، می‌تواند مانع آن شود که دومی بیش از ۳۰ را به دست آورد، به شرطی که در هر حرکت خود، جلو بزرگترین عدد از عددهای باقی مانده، علامتی را بگذارد که مخالف علامت مجموع، در آن لحظه، باشد (اگر مجموع برابر صفر بود، باید علامت مثبت را انتخاب کند). یکی از مرحله‌ها را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، k امین حرکت، آخرین حرکتی باشد که، در نتیجه آن، مجموع تغییر علامت داده است (و این شامل حرکت‌هایی است که، قبل از آن، مجموع برابر صفر است). در $k - 1$ حرکت اول، آگاهانه، از عددهای ۲۰، ۱۹، ۱۸، ...، $(k - 1) - 20$ استفاده شده است، به نحوی که حداکثر قدر مطلق مجموع، که می‌تواند بعد از حرکت k ام به دست آید برابر است با

$$20 - (k - 1) + 20 - k = 41 - 2k$$

در هر یک از $k - 10$ حرکت بعدی، مقدار مجموع دست کم یک واحد کاهش پیدا می‌کند، زیرا اولی، هر بار، از قدر مطلق مجموع، بزرگترین عدد باقی مانده را، مثلاً m ، کم می‌کند، در حالی که دومی نمی‌تواند، بیش از $m - 1$ ، به آن اضافه کند. در نتیجه، مجموع نمی‌تواند از

$$41 - 2k - (10 - k) = 31 - k \leq 30$$



شکل ۵۰

تجاوز کند.

۸۴. a) مقدار زاویه B از مثلث قائم الزاویه برابر یا کوچکتر از ۳۰ درجه است، بر حسب آن که، ضلع رو به روی به زاویه B ، طولی برابر با نصف طول وتر و یا کوچکتر از آن داشته باشد.

اگر از این مطلب، در مثلث‌های BML و BMK استفاده کنیم (شکل

۵۰، a)؛ $(MK \perp BC)$ ، به دست می‌آید: $\widehat{MBC} = ۳۰^\circ$. زیرا

$$BM = AH = ۲MK$$

و $\widehat{MBA} < ۳۰^\circ$ ، زیرا $BM = AH \geq EC = ۲ML$. بنابراین

$$\widehat{B} = \widehat{MBC} + \widehat{MBA} < ۶۰^\circ$$

یادآوری می‌کنیم که «حاده بودن زاویه‌های مثلث» ضرورت دارد؛ بدون آن، حکم مساله درست نیست.

b) از مساله a) نتیجه می‌شود: $\widehat{B} \leq ۶۰^\circ$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، ضلع AC از دو ضلع دیگر کوچکتر نیست؛ در این صورت

$$\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq ۶۰^\circ, \widehat{C} \leq \widehat{B} \leq ۶۰^\circ$$

(در هر مثلث، زاویه بزرگتر، رو به روی به ضلع بزرگتر است) و از این نابرابری‌ها بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = ۶۰^\circ$$

برای اثبات، توجه می‌کنیم که BM ، کوچکترین میانه است، زیرا میانۀ وارد بر BC از ارتفاع $AH = BM$ کوچکتر نیست، و میانۀ وارد بر ضلع AB از نیمساز CD کوچکتر نیست (آخر، نیمساز CD ، ضلع AB را به

نسبت $\frac{AC}{BC}$ تقسیم می‌کند)؛ شکل ۵۰، b). ولی در هر مثلث، میانۀ بزرگتر متناظر

است با ضلع کوچکتر: کافی است توجه کنیم که، مرکز ثقل مثلث ABC (نقطه برخورد میانه‌ها) با راس C ، در یک طرف عمود منصف AC قرار دارند.

۸۵. a) اگر مجموع دو عدد a و b ، تنها از رقم‌های ۹ تشکیل شده باشد، به معنای آن است که، ضمن جمع دو عدد، در هیچ مرتبه‌ای، مجموع رقم‌ها از ۹ بیشتر نشده است. بنابراین، اگر $S(x)$ را به معنای مجموع رقم‌های عدد x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$S(a+b) = S(a) + S(b)$$

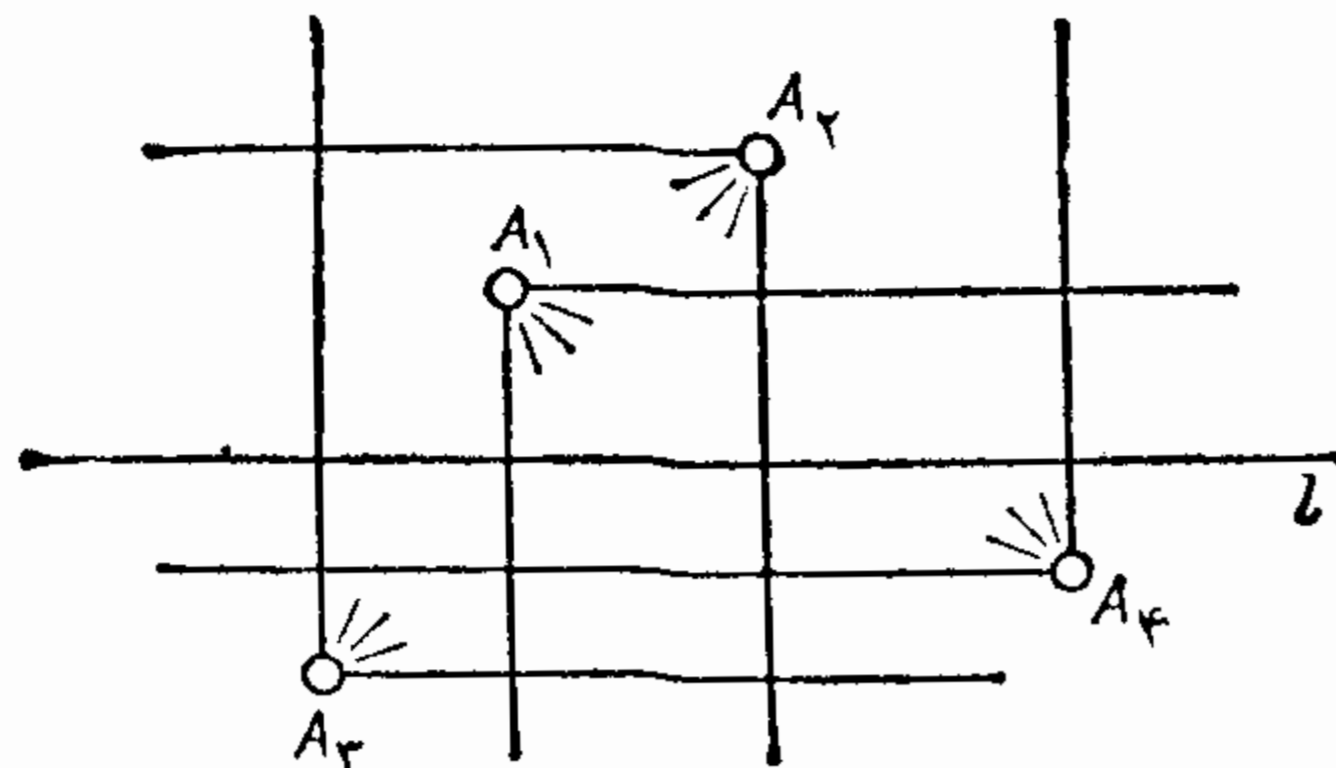
ولی اگر $S(a) = S(b)$ ، آن وقت $S(a+b)$ عددی زوج است و نمی‌تواند برابر با 9×1967 باشد.

b) اگر رقم آخر عدد a برابر صفر نباشد، آن وقت مجموع آن با رقم آخر b ، برابر ۱۰ می‌شود و، بنابراین، باید مجموع رقم‌ها در هر یک از نه مرتبه بعدی برابر ۹ باشد. از این جا نتیجه می‌شود

$$2S(a) = 9 \times 9 + 10 = 91$$

که ممکن نیست.

۸۶. a) خط راست l را طوری رسم می‌کنیم که، در هر نیم صفحه‌ای



شکل ۵۱

که به دست می آید، دو نورافکن وجود داشته باشد. روشن است که (شکل ۵۱)، با دو نورافکنی که در یکی از نیم صفحه‌ها قرار دارد، می توان تمامی نیم صفحه دیگر را روشن کرد.

(b) صفحه‌ای رسم می کنیم که از بین هشت نقطه مفروض، چهار نقطه در يك طرف، و چهار نقطه در طرف دیگر آن قرار گیرند. با استفاده از مسأله (a)، می توان به سادگی ثابت کرد، نورافکن‌هایی در چهار نقطه یکی از نیم فضاها قرار دارند، می توانند تمامی نیم فضای دیگر را روشن کنند.

این مسأله را می توان تعمیم داد: n زاویه دلخواه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را با شرط

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$$

می توان در n نقطه مفروض صفحه طوری قرار داد که تمامی صفحه را بپوشانند. (۸۷. a) پاسخ: نمی توان.

هیچ دو عددی از عددهای ۰، ۱، ۲، ۸، ۹ نمی توانند مجاور هم باشند؛ بنابراین، این عددها، باید يك در میان قرار گیرند. ولی عدد ۷ را نمی توان در هیچ کدام از ۵ جای باقی مانده قرار داد؛ همچنین، برای ۳ هم جایی پیدا نمی شود (امتحان کنید!).

(b) پاسخ: نمی توان.

استدلال را می توان شبیه (a) انجام داد. هیچ دو عددی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۳ نمی توانند مجاور هم باشند؛ از بین این عددها، تنها ۱ می تواند در مجاورت ۴ و تنها ۱۲ می تواند در مجاورت ۱۰ قرار گیرد. در این صورت ۱۰ و ۴ در کنار هم قرار می گیرند که شرط مسأله را نقض می کند.

▽ جالب است که برای ۱۴ عدد (و ظاهراً برای هر $n \geq 14$)، می توان

برای مسأله جوابی پیدا کرد:

۱۲، ۸، ۳، ۶، ۲، ۵، ۱۰، ۴، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۱۳، ۹، ۱۲

۸۸. عدد 5^{1000} به ۵ ختم شده است. فرض کنید، k امین رقم این عدد،

از راست به چپ، برابر ۵ و همه بقیه رقم‌های سمت راست آن مخالف ۵ باشد. به

این عدد، عدد $10^{k-1} \times 5^{1000}$ را اضافه می کنیم. در این صورت، عددی به

دست می آید که بر 5^{1000} بخش پذیر است و k رقم آخر آن مخالف صفر است. با ادامه این روند، می توان عددی بدست آورد که ۱۰۰۰ رقم آخر آن مخالف صفر باشد. اکنون، همه رقم ها، بد جز ۱۰۰۰ رقم آخر را حذف می کنیم. روشن است که عدد حاصل، باز هم بر 5^{1000} بخش پذیر است.

۸۹. پاسخ: $(-1, 0)$ ، $(-1, -1)$ ، $(0, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(5, 2)$ ، $(2, -6)$.

اگر دو طرف معادله را ۴ برابر و، سپس، به هر دو طرف یک واحد اضافه کنیم، به دست می آید:

$$(2x+1)^2 = (2y^2+y)^2 +$$

$$+3y^2+4y+1 = (2y^2+y+1)^2 - (y^2-2y)$$

اگر y عددی درست و غیر از عددهای -1 ، 0 ، 1 و 2 باشد، آن وقت

$$3y^2+4y+1 > 0, y^2-2y > 0$$

در ضمن

$$(2y^2+y)^2 < (2x+1)^2 < (2y^2+y+1)^2$$

این نابرابری ها نشان می دهند که $(2x+1)^2$ ، بین دو مجذور کامل متوالی قرار دارد و این، برای عددهای درست x ممکن نیست. اگر در معادله مقادیرهای $y = -1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ و $y = 2$ قرار دهیم، پاسخ بدست می آید.

۹۰. پاسخ: ۲۹۵۲ جمله.

ثابت می کنیم، طول دنباله (تعداد جمله ها)، وقتی جمله دوم آن برابر

n و بزرگترین جمله باشد، از $d_n = \frac{3(n+1)}{2}$ تجاوز نمی کند و، در ضمن،

برای دنباله

$$1, 1, \dots, 1, n-2, 1, n-1, n-1, n-1, n-1$$

تعداد جمله ها، درست برابر با d_n است.

استدلال را با استقرا انجام می دهیم. برای $n \leq 4$ ، درستی حکم به

سادگی قابل تحقیق است ($d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 6, d_4 = 7$). حداکثر طول دنباله‌ای را ارزیابی می‌کنیم که این‌طور آغاز شده است:

$$a, n, n-a, a, \dots (a < n)$$

و فرض می‌کنیم؛ حکم مورد نظر، برای عددهای کوچکتر از n درست باشد.

بد ازای $1 \leq a < \frac{n}{2}$ ، طول دنباله از $d_{n-a} + 1$ تجاوز نمی‌کند. زیرا اگر جمله

اول a را برداریم، می‌توان آغاز دنباله را این‌طور نوشت:

$$n-2a, n-a, \dots$$

بد ازای $\frac{n}{2} \leq a < n-1$ ، طول دنباله از $d_a + 2$ تجاوز نمی‌کند (کافی است

دو جمله اول را برداریم). بنا بر این، باید تحقیق کنیم که، برای این مقادیرهای a ، این، نابرابری‌ها برقرارند:

$$d_{n-a} + 1 \leq d_n, d_a + 2 \leq d_n$$

به ازای $a = n-1$ ، برای دنباله

$$1, 1, \dots, n-3, n-2, n-1, n-1, n, n-1$$

کافی است سه جمله اول را برداریم و دو جمله بعدی را جا به جا کنیم و، سپس در باره برابری $d_n = d_{n-3} + 3$ تحقیق کنیم.

اگر این استدلال کلی را در باره $n = 1967$ بکار ببریم، پاسخ به دست

می‌آید.

$$d_{1967} = \left[\frac{3 \times 1968}{2} \right] = 2952$$

۹۱. اگر شاه از گوشه چپ و پایین صفحه، روی قطر به طرف گوشه

راست و بالای صفحه برود، به ناچار در یکی از حرکت‌ها، زیر ضرب به رخ سفید قرار می‌گیرد.

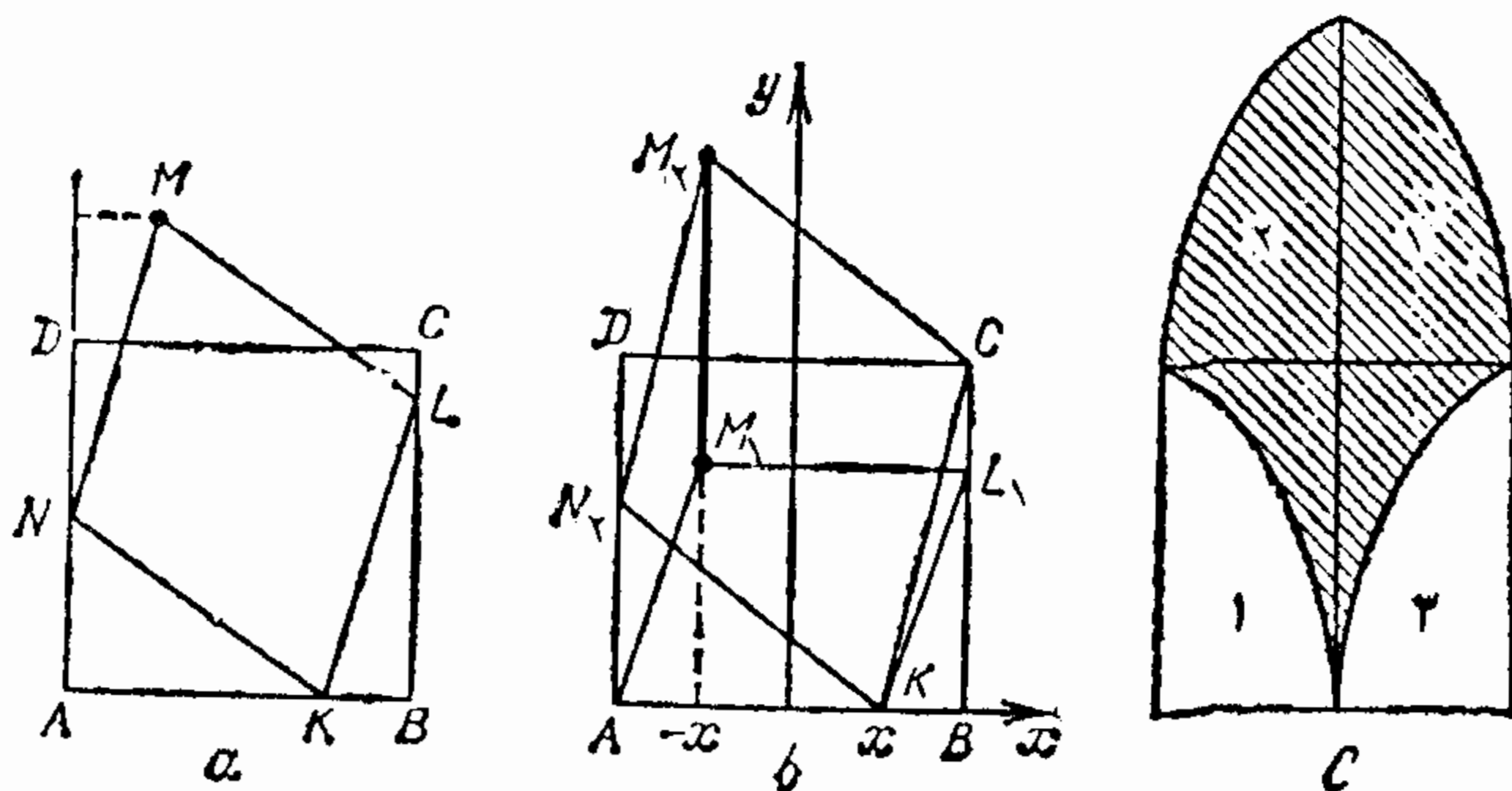
برای اثبات، کافی است توجه کنیم که، بعد از حرکت اول شاه، باید

همه رخ‌های سفید، بالای سومین ردیف افقی و سمت راست سومین ردیف قائم باشند.

به همین ترتیب، قبل از حرکت شاه به گوشه راست بالا، باید همه رخ‌ها، زیر ردیف ۹۹۸ افقی و سمت چپ ردیف ۹۹۸ قائم واقع باشند. شاه، روی هم، قبل از آخرین حرکت خود در روی قطر، ۹۹۷ حرکت انجام می‌دهد. در ضمن، هر رخ، به ازای حرکت شاه، باید دو حرکت داشته باشد (تغییر ردیف افقی و ردیف قائم که در ابتدا روی آن‌ها قرار دارد)؛ ولی تعداد رخ‌ها برابر ۴۹۹ است، در حالی که باید 2×499 حرکت انجام دهد و $2 \times 499 = 998 > 997$.

۹۲. پاسخ: $S = 1$.

K ، L و N را رأس‌هایی از لوزی می‌گیریم که، به ترتیب، بر ضلع‌های AB ، BC و AD از مربع واقع‌اند. (شکل ۵۲، a). طول پاره‌خط راست KB ، برابر است با فاصله از نقطه M تا خط راست AD . بنا بر این، اگر نقطه K را ثابت نگه داریم، آن وقت موضع نقطه M ، پاره‌خط راست M_1M_2 را، که با ضلع AD موازی است، پرمی‌کند. در ضمن، نقطه M_1 ، پایین‌ترین موضع نقطه M ، متناظر با حالتی است که N_1 بر A منطبق باشد؛ به همین ترتیب، نقطه M_2 ، با حالت $L_2 = C$ تطبیق می‌کند. برای این که موضع نقطه‌های M_1 و M_2 را معین کنیم (در رابطه با



شکل ۵۲

موضع نقطه K)، دستگاه محورهای مختصات را، به آن گونه که در شکل ۵۲، b دیده می‌شود، در نظر می‌گیریم.

به سادگی می‌توان محاسبه کرد که، اگر طول نقطه K برابر $0 < x$ باشد، آن وقت، خواهیم داشت:

$$M_1 = (-x, \sqrt{2x}) \text{ و } M_2 = (-x, \sqrt{1-2x+1})$$

با استفاده از تقارن مجموعه نقطه‌های M ، نسبت به محور OY ، معلوم می‌شود که، این مجموعه، به صورت شکلی درمی‌آید که هاشور زده‌ایم، برای محاسبه مساحت، لزومی ندارد از محاسبه انتگرالی استفاده کنیم؛ در شکل ۵۲، C ، دو شکلی که با عددهای ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند، برابرند.

۹۳. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، عدد k ، نسبت به عدد ۱۰ اول است. در واقع، عددی وجود دارد که با رقم ۱ آغاز می‌شود و بر k بخش پذیر است؛ مقلوب چنین عددی هم، بر k بخش پذیر است و به رقم ۱ ختم می‌شود. اکنون، عددی را انتخاب می‌کنیم که با ۵۰۰ آغاز شود و بر k بخش پذیر باشد:

$$\overline{500abc \dots z}$$

(a, b, c, \dots, z ، رقم‌های این عددند). در این صورت، باید هر یک از عدد-های زیر، بر k بخش پذیر باشند:

$$\overline{z \dots cba005} \quad (1) \text{ عدد}$$

(۲) مجموع دو عدد

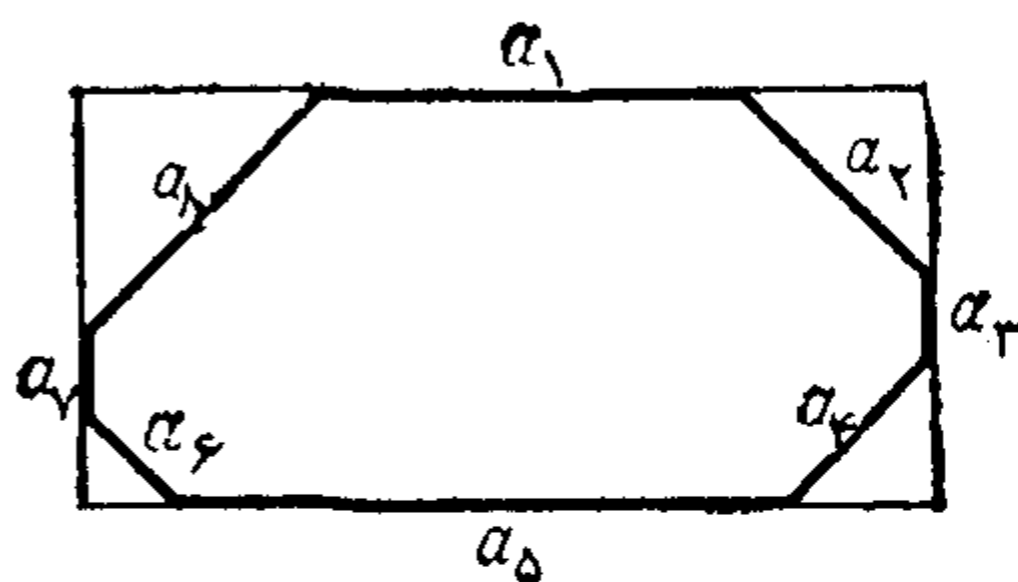
$$z \dots cba00500 \dots 0 +$$

$$500abc \dots z$$

$$\overline{z \dots cba01000ab \dots z} \quad \text{یعنی عدد}$$

(۳) مقلوب عدد اخیر، یعنی عدد $z \dots ba00010ab \dots z$

(۴) تفاضل این دو عدد



شکل ۵۳

$$z \dots ba \circ 1 \circ \circ ab \dots z -$$

$$z \dots ba \circ \circ \circ 1 ab \dots z$$

یعنی عدد 9900000 .

به این ترتیب دیده می شود که عدد 99 ، بر k بخش پذیر است.

۹۴. a_1, a_2, \dots, a_8 را، به ترتیب، طول ضلع های هشت ضلعی می-

گیریم (شکل ۵۳). از برابری زاویه ها، بلافاصله نتیجه می شود که، ضلع های رو به رو، با هم موازی اند. دو ضلع رو به روی a_1 و a_5 و همچنین دو ضلع رو به روی a_3 و a_7 را ادامه می دهیم، مستطیلی به دست می آید که، از آن می توان هشت-ضلعی را «با بریدن گوشه ها» به دست آورد.

از برابری ضلع های رو به رو در مستطیل، به دست می آید:

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{a_6}{\sqrt{2}} + a_5 + \frac{a_4}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_8 + a_2 - a_6 - a_4)$$

چون a_i عددی درست است و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ عددی گنگ، بنا بر این $a_5 = a_1$ به همین

ترتیب، برابری بقیه ضلع های رو به رو هم ثابت می شود.

۹۵. پاسخ: $3111 > 1714$.

نا برابری های زیر، درستی پاسخ را نشان می دهند:

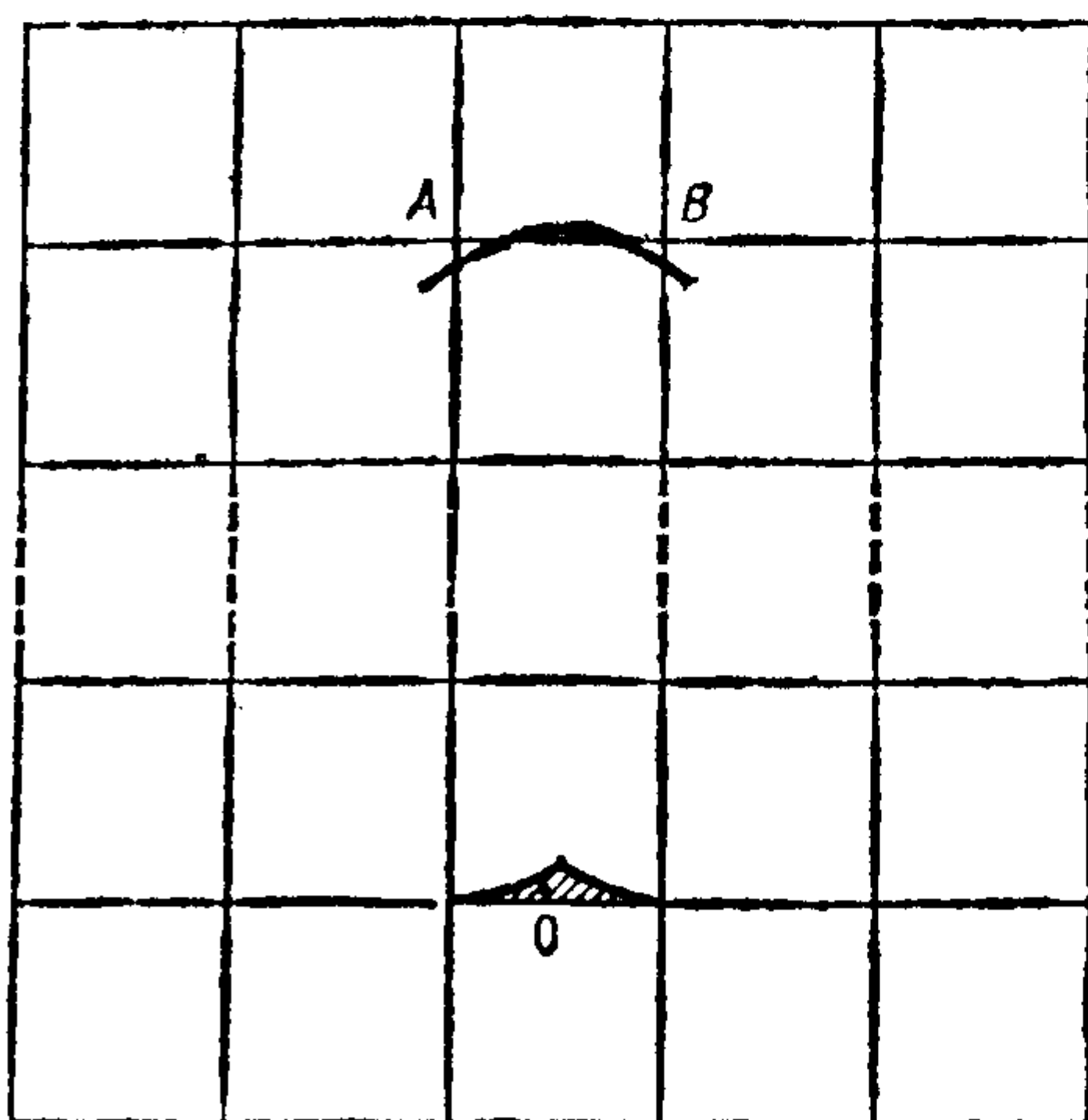
$$1714 > 1614 = 256 > 255 = 3211 > 3111$$

۹۶. پاسخ: 800 یا 799 .

خط‌های راست شبکه را افقی و قائم می‌نامیم. دایره به قطر ۲۰۰، وقتی که از گره‌های شبکه عبور نکند و بر خط‌های راست شبکه مماس نباشد، ۲۰۰ خط راست افقی و ۲۰۰ خط راست قائم را قطع می‌کند و، در ضمن هر کدام از آن‌ها را دوبار. بنا بر این، حداکثر تعداد نقطه‌های برخورد برابر است با ۸۰۰. این ۸۰۰ نقطه، محیط دایره را به ۸۰۰ بخش تقسیم می‌کنند. هر یک از این بخش‌ها در درون یکی از خانه‌ها قرار دارد. بنا بر این، حداکثر ممکن برای تعداد خانه‌ها، ۸۰۰ است.

با وجود این، ممکن است، دو بخش از این بخش‌ها متعلق به یک خانه باشند، یعنی محیط دایره خانه‌ای را دوبار قطع کند (شکل ۵۴). ثابت می‌کنیم، از این گونه خانه‌های «خاص» بیش از یکی نمی‌تواند وجود داشته باشد. ببینیم، وقتی محیط دایره ضلع AB از خانه‌ای را دوبار قطع می‌کند، نقطه O ، مرکز دایره، در کجا می‌تواند قرار گیرد؟

فاصله مرکز O از دایره به قطر ۲۰۰، تا هر یک از نقطه‌های A و B ، از ۱۰۰ بیشتر، ولی فاصله آن از خط راست AB از ۱۰۰ کمتر است؛ بنا بر این، نقطه O ، در بیرون دایره‌های به شعاع ۱۰۰ و به مرکزهای A و B ، بین خط‌های قائم شبکه که از A و B می‌گذرند و در درون نوار به عرض ۲۰۰ با محور



شکل ۵۴

افقی AB واقع است. همه این نقطه‌ها، درون دو مثلث منحنی الخط را پرمی کنند (یکی از این مثلث‌ها را، روی شکل، هاشور زده‌ایم).

روشن است که، برای پاره‌خط‌های راست متفاوت AB ، چنین مجموعه‌هایی، دارای نقطه‌های مشترک نیستند و، بنا بر این، بیش از یک خانه «خاص» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۹۷. ابتدا ثابت می‌کنیم، می‌توان گروهی از دانشجویان را انتخاب کرد که، در آن، با هر زبان، درست دو نفر آشنا باشند.

هر دانشجو را با حرف اول زبانی که می‌داند، معرفی می‌کنیم: a به معنای دانشجوئی است که زبان انگلیسی را می‌داند، ولی با دو زبان دیگر آشنا نیست؛ f دانشجوئی است که با دو زبان اسپانیائی و فرانسوی آشناست ولی انگلیسی نمی‌داند؛ و ai یعنی دانشجوئی که هر سه زبان را می‌داند. $N_a, N_i, N_f, N_{ai}, N_{if}, N_{af}$ و N_{aif} را به معنای تعداد دانش-آموزان هر نوع می‌گیریم.

اگر $N_{ai} \neq 0$ ، $N_{af} \neq 0$ و $N_{if} \neq 0$ ، آن وقت گروه مورد نظر (ai, af, if) است.

اگر یکی از عددها، مثلاً N_{ai} ، برابر صفر، N_{af} مخالف صفر و N_{if} مخالف صفر باشد، آن وقت $N_a \neq 0$ و $N_i \neq 0$ و گروه مورد نظر ما، چنین می‌شود:

$$(af, if, a, i)$$

اگر $N_{ai} = N_{af} = 0$ ، $N_{if} \neq 0$ و $N_{aif} \neq 0$ ، آن وقت، این گروه را انتخاب می‌کنیم:

$$(aif, uf, a)$$

اگر $N_{aif} = 0$ ، $N_{if} \geq 2$ ، گروه

$$(if, if, a, a)$$

و اگر $N_{if} = 1$ ، گروه (if, a, a, i, f) را انتخاب می‌کنیم.

اگر $N_{ai} = N_{af} = N_{if} = 0$ ، می‌توان یکی از این سه گروه را

انتخاب کرد:

(aif, a, i, f) یا (a, i, f, a, i, f) یا (aif, a, i, f)

دنباله کارروشن است. از این گروه‌ها، که در هر کدام از آنها هر زبان را درست دو نفر می‌داند، پنج بار انتخاب می‌کنیم، اولین گروهی به دست می‌آید که، در آن، با هر زبان درست ۱۵ نفر آشنایی دارد. بعد دومین گروه از این گونه را درست می‌کنیم و غیره.

∇ در حالت کلی، وقتی در گروهی از دانشجویان، با هر يك از سه زبان درست n نفر آشنا باشند، برای هر عدد زوج $p < n$ ، می‌توان گروهی انتخاب کرد که، در آن، با هر زبان p نفر آشنا باشد (شرط زوج بودن p ، شرطی لازم است).

۹۸. برای اثبات، کافی است از این اتحادها استفاده کنیم:

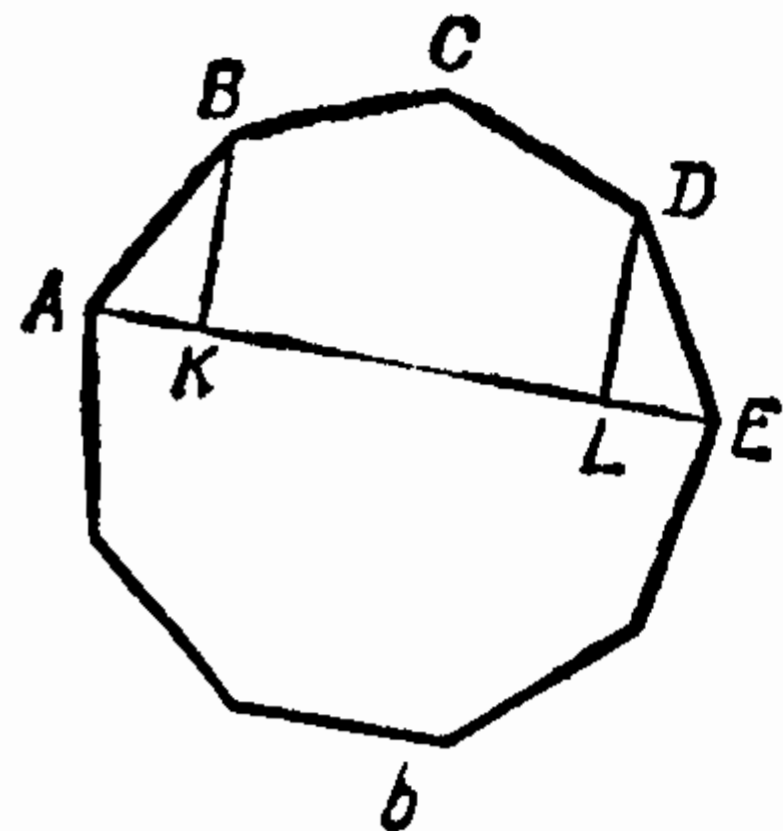
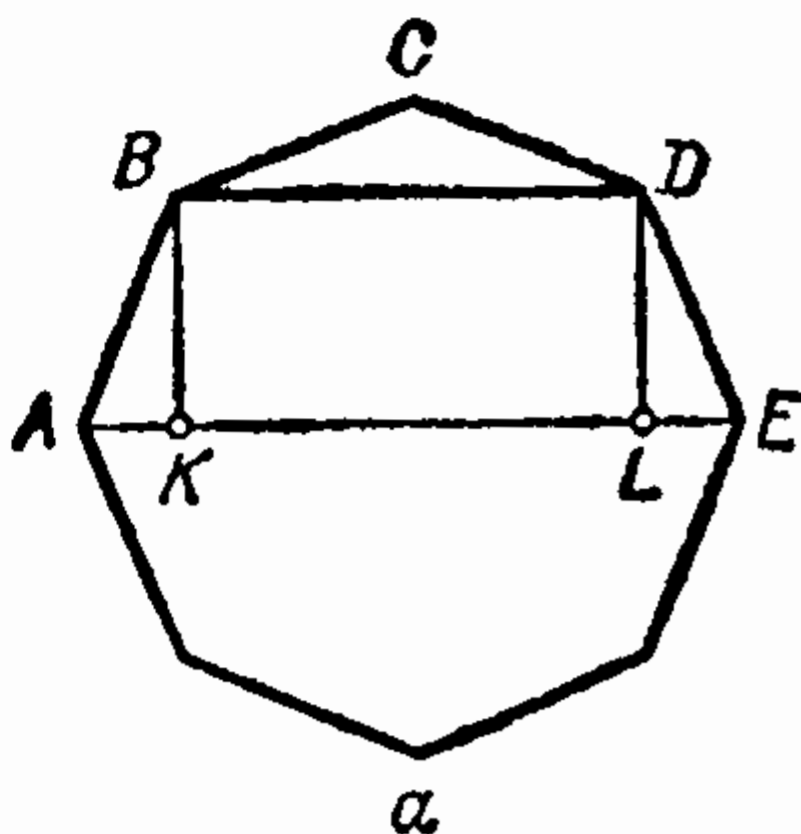
$$\frac{2k}{x^2 - k^2} = \frac{1}{x - k} - \frac{1}{x + k},$$

$$\frac{11}{(x - 11 + k)(x + k)} = \frac{1}{x - 11 + k} - \frac{1}{x + k}$$

۹۹. پاسخ: $n = 9$.

a_n را طول ضلع و D_n و d_n را، به ترتیب، طول بزرگترین و کوچکترین قطر n ضلعی می‌گیریم. برای $n = 4$ و $n = 5$ ، همه قطرها برابرند. برای $n = 6$ و $n = 7$ داریم $D_n - d_n < a_n$. برای $n = 8$ (شکل ۵۵)، عمودهای DL و BK را از دو انتهای قطر کوچکتر BD بر قطر بزرگتر AE فرود می‌آوریم.

به سادگی روشن می‌شود که $\widehat{ABK} = 22/5^\circ < 30^\circ$.



شکل ۵۵

$$AB = a_8 > 2AK = D_8 - d_8$$

برای $n=9$ (شکل ۵۵، b) داریم: $\widehat{ABK} = 30^\circ$ و بنا بر این

$$AB = a_9 = 2AK = D_9 - d_9$$

سپس، فرض می‌کنیم، n ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط باشد. روشن

است که، به ازای $n > 9$ ، داریم: $D_n \geq D_9$ و $d_n < d_9$. بنا بر این

$$D_n - d_n > D_9 - d_9 = a_9 > a_n$$

۱۰۰. ثابت می‌کنیم $18 < a_{100} < 14$. برای $k > 1$ داریم:

$$a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}, \quad (a_k > 1)$$

$$\text{بنا بر این } a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3.$$

اگر در نابرابری اخیر، $n, \dots, 3, 2, k$ بگیریم و، سپس، همه

نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم (با در نظر گرفتن $a_1 = 1$)، به دست می‌آید:

$$2n - 1 < a_n^2 < 3n - 2$$

از آنجا $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$ که، به ازای $n=100$:

$$14 < a_{100} < 18$$

∇ بدون دشواری می‌توان ثابت کرد، که، دنباله $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ به سمت حدی

میل می‌کند و، در ضمن، می‌توان این حد را پیدا کرد.

۱۰۱. مثلث $A'B'C'$ را به موازات خود منتقل می‌کنیم تا نقطه O'

بر نقطه O منطبق شود. رأس‌های مثلثی را که به این طریق به دست می‌آید،

مثل سابق، A' ، B' و C' می‌نامیم.

چون $\widehat{A'OB'} = \widehat{A_1OB_1}$ و $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB_1}{OA_1}$ (بنا بر فرض)، بنا بر این

دو مثلث $B'OA'$ و A_1OB_1 متشابه‌اند و

$$\widehat{OA_1B_1} = \widehat{OB'A'} \text{ و } \widehat{OB_1A_1} = \widehat{OA'B'}$$

چون بر چهار ضلعی OA_1CB_1 می‌توان یک دایره محیط کرد (به قطر OC)، بنا بر این

$$\widehat{B_1CO} = \widehat{OA_1B_1} \text{ و } \widehat{A_1CO} = \widehat{OB_1A_1}$$

در نتیجه مثلث‌های A_1OC و $C'O A'$ ، همچنین، مثلث‌های BOC و $C'OB_1$ با هم متشابه‌اند، یعنی پاره‌خط راست OC' بر خط راست OC قرار دارد و

$$OC \cdot O'C' = OA \cdot O'A' = OB \cdot O'B'$$

به همین ترتیب، می‌توان مثلث‌های $B'OC'$ و $C'O A'$ را مورد مطالعه قرار داد.

۱۰۲. اثبات را، با استقرای روی n می‌دهیم. به ازای $n = 1$ ، درستی

حکم روشن است. فرض می‌کنیم، حکم برای $n = k$ درست باشد.

۱! $(k+1) < a$ می‌گیریم. a را به $k+1$ تقسیم می‌کنیم:

$$a = d(k+1) + r$$

که در آن $d \leq k!$ و $r < k+1$. بنا بر فرض استقرا داریم:

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_l$$

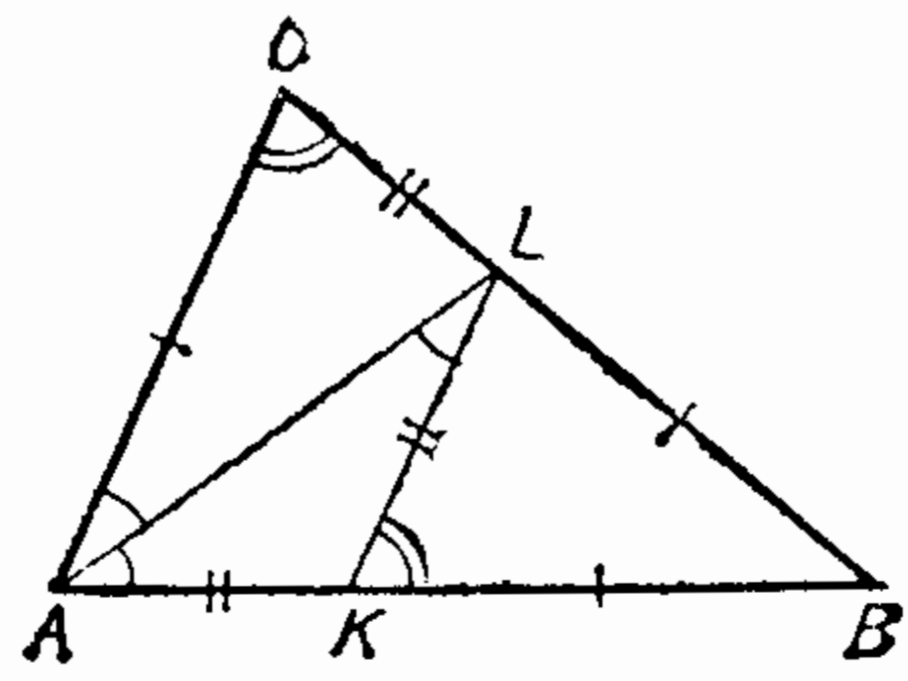
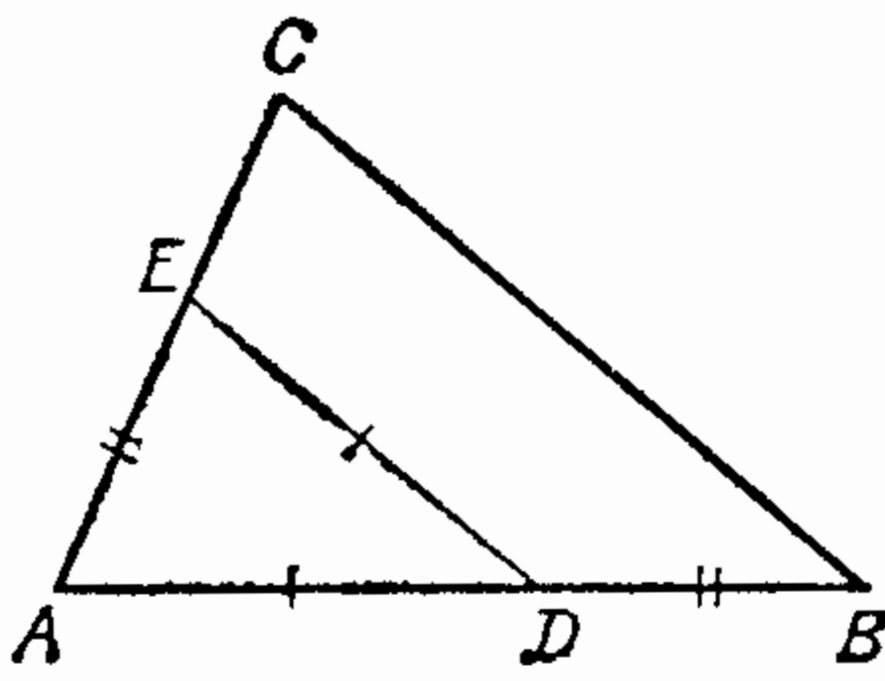
که در آن، d_i ها مقسوم‌علیه‌های مختلف عدد $k!$ هستند و $k \leq l$. در این صورت

$$a = d_1(k+1) + d_2(k+1) + \dots + d_l(k+1) + r$$

در این مجموع، بیش از $k+1$ جمله وجود ندارد و، هر کدام از آن‌ها، مقسوم‌علیه‌ی از $(k+1)$ هستند؛ در ضمن، همه آن‌ها با هم فرق دارند.

۱۰۳. با انتقال موازی، نقطه D را به نقطه B می‌رسانیم؛ در این

صورت، مثلث ADE منجر به مثلث KBL می‌شود، که در آن $KL \parallel AC$ ، و



شکل ۵۶

به جز آن، $KB = LB$ (شکل ۵۶).

اگر فرض کنیم: $\widehat{KAL} = \widehat{KLA} = \alpha$ ، آن وقت خواهیم داشت:

$$\widehat{BKL} = 2\alpha, \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 2\alpha$$

دو مثلث BKL و ACL با هم برابرند و

$$\widehat{ALC} = \widehat{KLB} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5}$$

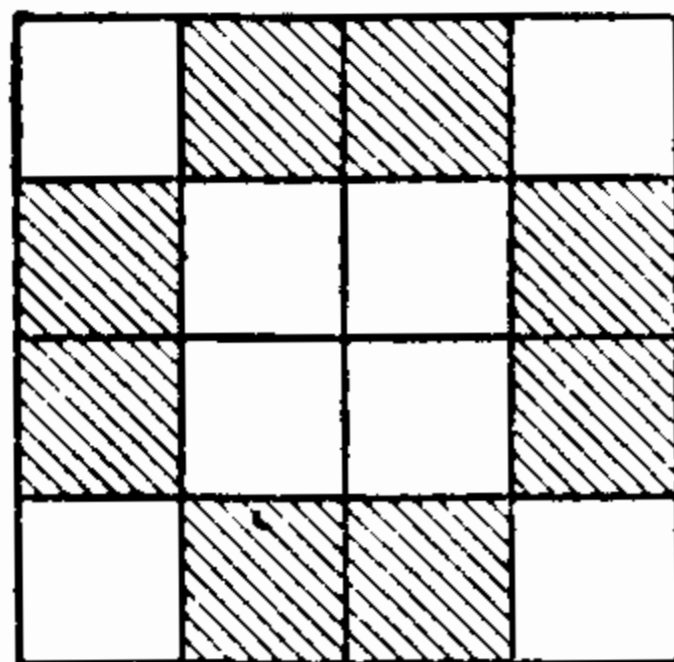
و $LC = AK = BD$ ، یعنی طول پاره خط راست BD ، برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع $R = AC$.

۱۰۴. از نقطه A ، عمود AH را بر صفحه BCD و، سپس، از نقطه

H ، عمودهای HK ، HL و HM را، به ترتیب، بر ضلع‌های BC ، BD و CD فرود می‌آوریم. هر یک از هرم‌های $ABKL$ ، $ACKM$ و $ADML$ به وسیله کره متناظر خود پوشیده می‌شود.

۱۰۵. (a) به سادگی دیده می‌شود که، هر خط راست موازی با ضلع

یا قطر مربع، تعداد زوجی از هشت خانه هاشور خورده در شکل ۵۷ را قطع می‌کند. بنابراین، تعداد منفی‌های واقع در این خانه‌ها را، نمی‌توان از زوج به فرد یا از فرد به زوج تغییر داد (ضمیمه ۱۳).



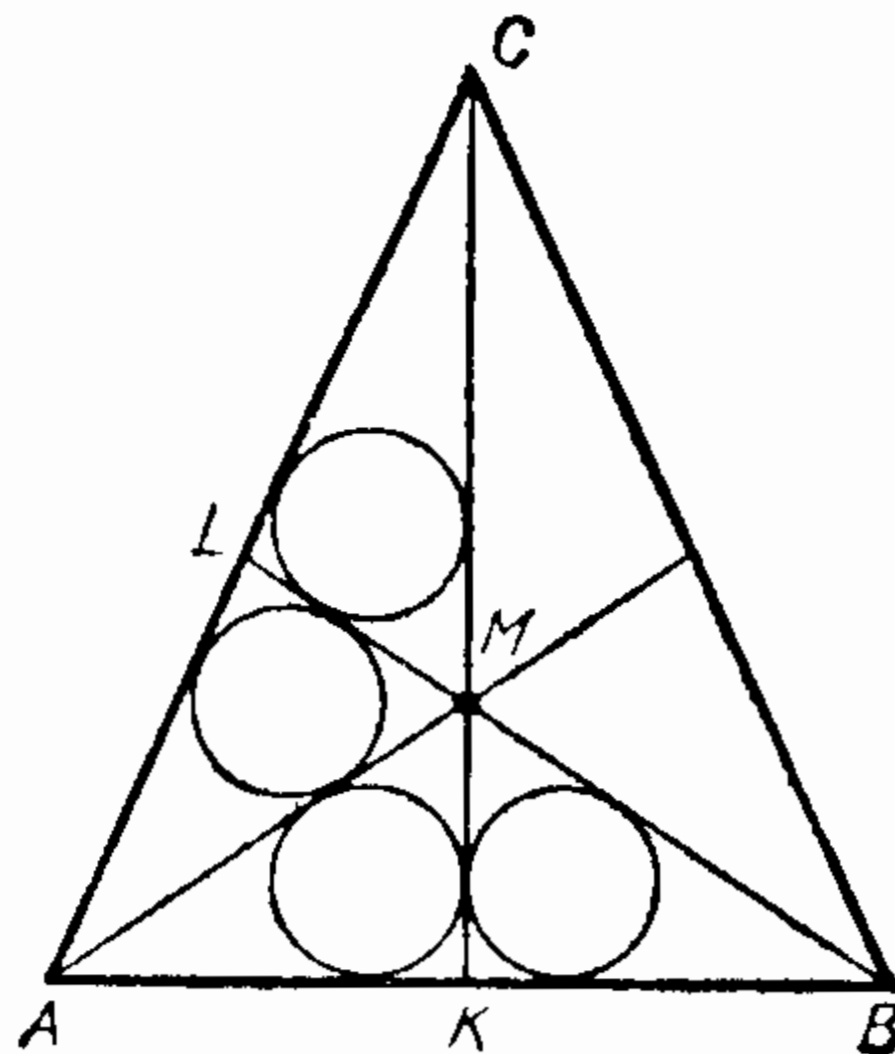
شکل ۵۷

(b) از مربع 8×8 می توان مربع 4×4 را طوری جدا کرد که علامت منفی در آن، شبیه حالت مسأله (a) قرار گرفته باشد و، در نتیجه، این مسأله، به همان مسأله قبل منجر می شود.

۱۰۶. هر شش مثلثی که با رسم میاندها، در یک مثلث، بدو جود می آیند، مساحتی برابر دارند. از برابری شعاع های دایره های محیطی و با توجه به دستور $S = pr$ ، برابری محیط های چهار تا از این مثلث ها ثابت می شود. از برابری محیط های دو مثلث AMK و BMK (شکل ۵۸)، نتیجه می شود*: $MK = MB$ ، یعنی MK ارتفاع مثلث AMB است و در نتیجه $AC = BC$.

اگر شعاع دایره های محیطی در مثلث های AKM و ALM برابر باشند، آن وقت این مثلث ها برابر می شوند (به عنوان مثلث هایی که مساحت ها، قاعده ها و محیط های برابر دارند): در ضمن $AL = AK$ ، یعنی $AC = AB$ و مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

اگر محیط های دو مثلث CLM و KMB برابر باشند، آن وقت، با استفاده از برابری طول های دو مماسی که از یک نقطه بر دایره ای رسم می شوند، اگر r را فاصله نقطه M تا نقطه تماس با دایره متناظر بگیریم، به دست می آید:



شکل ۵۸

(* بدون شك، از این چهار مثلث با محیط برابر، دست کم دو تا، چسبیده به یک ضلع اند، و در این جا، آن ها را چسبیده به ضلع AB گرفته ایم.

$$CL + LM + CM = 2CL + 2x = 2BK + 2x$$

که از آنجا نتیجه می‌شود: $AC = AB$.

۱۰۷. اثبات حکم این مساله، اثبات نامتناهی بودن مجموعه عددهای

اول را، که به اقلیدس تعلق دارد، به یاد می‌آورد (ضمیمه ۲).

فرض می‌کنیم، معادله $x^2 + x + 1 = py$ ، تنها برای تعداد محدودی

از عددهای اول p_1, p_2, \dots, p_m ، دارای جواب‌های درست (x, y) باشد.

بر $P = p_1 p_2 \dots p_m$ می‌گیریم. در این صورت، عدد $P^2 + P + 1$ ، بر

هیچ کدام از عددهای p_1, p_2, \dots, p_m بخش پذیر نیست و، بنا بر این، دارای

مقسوم‌علیه اول q است که برابر با هیچ کدام از این عددها نیست. ولی معادله

$$x^2 + x + 1 = qy$$

دارای جواب درست $\left(P \cdot \frac{P^2 + P + 1}{q} \right)$ است. تناقض حاصل، درستی حکم

مساله را ثابت می‌کند.

۱۰۸. پاسخ: حداکثر عدد c_1 ، برابر ۲۴ است.

اگر همه داوران در انتخاب مقام اول، هم‌رأی باشند، آن وقت $c_1 = 9$.

اگر داوران، مقام اول را به دو نفر داده باشند، آن وقت یکی از دو نفر از

۵ داور مقام اول را گرفته است و از چهار داور بقیه، مقامی که او، از چهارم

پایین تر نبوده است؛ بنا بر این

$$c_1 \leq 5 \times 1 + 4 \times 4 = 21$$

اگر داوران به ۳ نفر مقام اول را داده باشند، چون بقیه مقام‌هایی که

این ۳ نفر از داوران دریافت کرده‌اند، از چهار تجاوز نمی‌کند، مجموع

مقام‌های همه این سه هنرمند، از

$$1 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 72$$

بیشتر نیست و، بنا بر این $c_1 \leq 24$. در حالتی که از بین داوران، به چهار

هنرمند، مقام اول را داده باشند، مجموع کل مقام‌های آنها حداکثر برابر

۹۰ و مجموع نمره‌های یکی از آن‌ها، حداکثر ۲۲ می‌شود. حالتی که ۵ نفر یا بیشتر، مقام اول را گرفته باشند، ممکن نیست (مقام‌های اول تا چهارم برای آن‌ها کفایت نمی‌کند).

به این ترتیب $24 \leq c_1$. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مثالی برای $c_1 = 24$ ساخت.

فرض کنیم، داوران، به هر یک از سه هنرمند بهتر مقام‌های

۴، ۴، ۳، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱

به هر یک از سه هنرمند بعدی مقام‌های

۶، ۶، ۵، ۵، ۵، ۲، ۲، ۲

و به بقیه مقام‌های دلخواهی بدهند. در این صورت ردیفی به دست می‌آید که در آن $c_1 = 24$.

۱۰۹. برای هر m ($1 \leq m \leq n$)، بین زوج (a_k, b_k) ($1 \leq k \leq m$)،

یکی از نابرابری‌های $a_k \geq b_k$ یا $b_k \geq a_k$ ، دست کم برای $\frac{m}{2}$ زوج برقرار است.

مثلاً فرض کنید $b_k \geq a_k$ ، دست کم در $\frac{m}{2}$ زوج برقرار باشد. اگر

b_i را، کوچکترین عدد از بین عددهای b_k بگیریم، آن وقت $b_i \leq \frac{2}{m}$. به

این ترتیب $\frac{4}{m} \leq 2b_i \leq a_i + b_i$ و چون $i \leq m$ ، بنا بر این

$$a_m + b_m \leq a_i + b_i \leq \frac{4}{m}$$

۱۱۰. حکم مساله را می‌توان با استقرای روی n ، تعداد دانش‌آموزان،

ثابت کرد. ولی در این جا آن را بر اساس قضیه زیر (که تقریباً روشن است)

ثابت می‌کنیم: مجموع 2^k حاصل ضرب x_1, x_2, \dots, x_k ، که در آن (x_1, x_2, \dots, x_k)

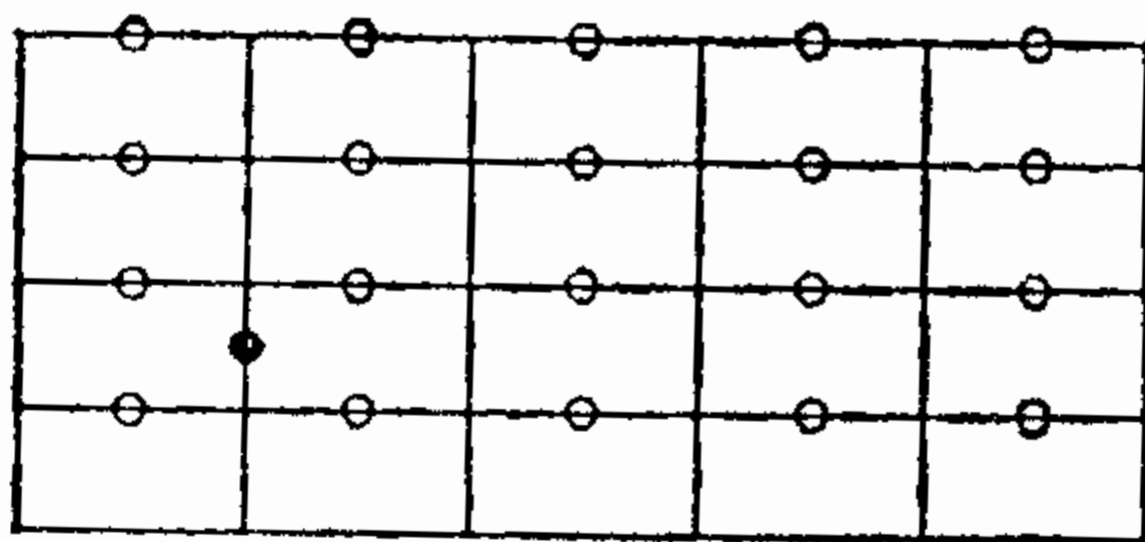
عبارتند از همه انتخاب‌های ممکن از عددهای $+1$ و -1 ، برابر است با

صفر (برای اثبات کافی است، k برابری $0 = (-1) + 1$ را در هم ضرب و سمت چپ را به همه روش‌های ممکن ضرب جمله‌ها منجر کنیم). بددانش-آموزان، شماره‌های از ۱ تا n را می‌دهیم. برای هر فهرستی از شماره‌های $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ (در این جا $k < n$)، مجموع وزن وزنه‌هایی را، که روی آن‌ها، این فهرست نوشته شده است، با $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ نشان می‌دهیم، در ضمن وزنه‌های یکی از کفه‌ها را (که در ابتدا سنگین‌تر است) با علامت مثبت و وزنه‌های کفه دیگر را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. در این صورت، حکم مورد نظر به این صورت درمی‌آید: برای چند جمله‌ای به صورت

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{n-1n} x_{n-1} x_n + a_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + a_{n-2n-1n} x_{n-2} x_{n-1} x_n + \dots + a_{12 \dots n} x_1 x_2 \dots x_n$$

که در آن، مجموع ضریب‌ها، مثبت است، همیشه می‌توان گروه x_1, x_2, \dots, x_n را از اعدادهای 1 و -1 طوری در نظر گرفت که مقدار $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ منفی باشد. [اختلاف وزن کفه‌های ترازو را نشان می‌دهد، به شرطی که $x_i = -1$ برای آن دانش‌آموزانی که وزنه خود را جا به جا کرده‌اند و $x_i = 1$ برای بقیه دانش‌آموزان). این باقی می‌ماند که توجه کنیم، مجموع مقدارهای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در هر انتخابی - حتی مجموع مقدارهای هر يك از جمله‌های تشکیل دهنده آن - برابر صفر است؛ بنا بر این $f(1, 1, \dots, 1) > 0$ ، در این صورت باید انتخابی پیدا شود که، برای آن، مقدار f منفی باشد (ضمیمه ۹).

۱۱۱. پاسخ: حداقل تعداد پاسبان‌ها برابر $(n-1)(m-1)$ است. اگر پاسبان‌ها به صورتی که مورد نظر است، مستقر شده باشند، آن وقت شبکه خیابان‌ها، به k قطعه تقسیم می‌شود که شامل مسیرهای بسته نیستند، در غیر این صورت، مسیر بسته‌ای پیدا می‌شود که، در طول آن، حتی يك پاسبان وجود ندارد. اگر قطعه باقی‌مانده شبکه، شامل p چهارراه باشد، آن وقت در آن، درست $p-1$ پاره خط راست از خیابان‌ها وجود دارد (مسئله ۸ را



شکل ۵۹

ببینید). چون روی هم به تعداد mn چهارراه داریم، بنا براین، تعداد پاره-خط‌های راستی که، در آن‌ها، پاسبان وجود ندارد، برابر $mn - k$ می‌شود. تعداد کل پاره‌خط‌های راست خیا بان‌ها برابر $2mn - m - n$ است. بنا براین، تعداد پاره‌خط‌های راستی که اشغال می‌شود برابر است با

$$mn - m - n + k \geq (m - 1)(n - 1)$$

نمونه استقرار $(m - 1)(n - 1)$ پاسبان. در شکل ۵۹ نشان داده شده

است.

۱۱۲. از K به نقطه O ، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم، تا دایره را در L قطع کند. وسط پاره‌خط راست AC را D و نقطهٔ برخورد AC با BL را E می‌نامیم. کافی است ثابت کنیم $ED = DK$ (در این صورت، DO ؛ خط راستی می‌شود که وسط دو ضلع مثلث EBK را به هم وصل کرده است).

توجه می‌کنیم: تجانس بی‌مرکز B که دایرهٔ محاطی مثلث ABC را به دایرهٔ محاطی خارجی آن (مماس بر AC و امتدادهای BA و BC) تبدیل می‌کند، نقطهٔ L را به نقطهٔ E منجر خواهد کرد که، در ضمن، نقطهٔ تماس ضلع AC با دایرهٔ محاطی خارجی خواهد بود. با توجه به برابر بودن طول‌های دو مماسی که از یک نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، دو مجموع $AK + AE$ و $CK + CE$ با هم برابر می‌آیند (هر کدام برابر با پاره‌خطی از خط‌های راست BA و BC هستند و، خود این دو پاره‌خط راست، با هم برابرند؛ دو پاره‌خط راستی که این نقطه‌های تماس دو دایرهٔ محاطی و محاطی خارجی با خط‌های راست BA و BC قرار دارند). در نتیجه

$$AK + AE = CK + CE \text{ و } AE = KC$$

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, \dots, |a_{n+1}| = |a_n + 1|$$

را مجذور، سپس، با هم جمع می‌کنیم. بعد از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$a_{n+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n \geq 0$$

$$\text{و از آن جا } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq -\frac{n}{2}$$

راه حل دیگر را (با استقرا)، می‌توان با توجه به این نکته به دست

آورد که: اگر زوج جمله‌های متوالی را $a_n \geq 0$ و $a_{n-1} = -a_n - 1$ با

مقدار متوسط $-\frac{1}{2}$ بگیریم، بدنباله قابل قبولی منجر می‌شود.

$\nabla -\frac{n}{2}$ ، برای مجموع عددها در این دنباله، ارزیابی دقیقی است.

به عنوان مثال، می‌توان هر انتخابی را که به جمله $1 -$ و یا (وقتی که n عددی فرد باشد)، به صفر ختم می‌شود، در نظر گرفت.

۱۱۴. $\widehat{ABC} = \beta$ ، $\widehat{ABD} = \beta_1$ و $\widehat{DBC} = \beta_2$ می‌گیریم. اگر از

قضیه سینوس‌ها در دو مثلث AOB و BOC استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BC}{OC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$$

چون AB و BC گویا هستند. کافی است گویا بودن نسبت سینوس‌ها

را ثابت کنیم.

به کمک قضیه کسینوس‌ها و با توجه به گویا بودن طول ضلع‌ها و قطر‌ها.

نتیجه می‌شود که $\cos \beta$ ، $\cos \beta_1$ و $\cos \beta_2$ عددهایی گویا هستند. به عنوان نمونه

$$\cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \cdot BC}$$

به این ترتیب. عدد $\sin \beta_1$ ، $\sin \beta_2$ هم گویا در می‌آید، زیرا

$$\cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2$$

و در نتیجه، با توجه به برابری $\sin^2 \beta_2 = 1 - \cos^2 \beta_2$ ، نسبت $\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$ هم، عددی گویا می شود.

۱۱۵. روی خط راست BC ، نقطه C_1 را طوری انتخاب می کنیم که چهارضلعی ABC_1E متوازی الاضلاع باشد در این صورت، مثلث های ABE ، BEC و BEC_1 محیطی برابر پیدا می کنند. از این جا نتیجه می شود که دو نقطه C و C_1 بر هم منطبق اند. بنابراین $BC = AE$. به همین ترتیب، ثابت می شود $BC = ED$.

۱۱۶. حداکثر سرعت گرگ را v می گیریم. از نقطه ای که گرگ در آن جا ایستاده است، دو خط راست موازی با قطرهای مربع رسم می کنیم. محل برخورد این خط های راست را با محیط مربع $C_1C_2C_3C_4$ می نامیم. چون سرعت جا به جایی هر یک از نقطه های C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 ، از مقدار

$v < \frac{3}{4}v$ بیشتر نیست، بنا بر این، سگ های تو انند در هر لحظه در این چهار نقطه باشند و در نتیجه، مانع فرار گرگ بشوند.

۱۱۷. \overline{abcd} را چهار رقم آخر می گیریم. در دنباله، به ناچار باید ردیف $abcd$ و ردیف $abcd$ وجود داشته باشد (در غیر این صورت، با اضافه کردن ۰ یا ۱، به انتهای آن، ویژگی a) برقرار می شود که در نتیجه ویژگی b) را نقض می کند). بنا بر این، در دنباله، سه بار به ردیف $abcd$ برمی خوریم و چون ۰ یا ۱ نمی تواند بیش از یکبار در جلو آن قرار گیرد، بنا بر این، جلوی یکی از این ردیف ها، هیچ رقمی وجود ندارد.

▽ برای هر n (و در حالت خاص، برای $n=5$)، می توان 2^n رقم ۰ و ۱ را روی محیط دایره طوری قرار داد که، ضمن حرکت در جهت عکس عقربه های ساعت، به هر «واژه» به طول n از ۰ و ۱، درست یکبار برخورد کنیم. همین حکم درباره حرف های الفبا هم، برای $k \geq 2$ حرف، درست است (در این صورت، تعداد واژه های به طول n ، برابر k^n است).

۱۱۸. اگر دو نابرابری اول را درهم ضرب کنیم، به دست می آید:

$$(a+b)^2 < ab+cd$$

ولی $(a+b)^2 \geq 4ab$ و بنا بر این $ab+cd \geq 4ab$ یعنی $cd \geq 3ab$.

اگر دو نابرابری دوم و سوم را درهم ضرب کنیم، به دست می آید:

$$ab(ab+cd) > (a+b)^2 cd \geq 4abcd$$

از آن جا $ab+cd > 4cd$ ، یعنی $ab > 3cd$.

به این ترتیب، به طور هم زمان، به دست می آید:

$$ab > 3cd \text{ و } cd > 3ab$$

که ممکن نیست.

۱۱۹. پاسخ: $a=5$.

فرض کنید $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ که در

آن a ، b و c عددهایی درست اند ($a > 0$) و $0 < x_1 < 1$ و $0 < x_2 < 1$.

$f(0)$ و $f(1)$ ، عددهایی درست و مثبت اند، بنا بر این $f(0)f(1) \geq 1$ ،

$$\text{یعنی } a^2 x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geq 1$$

اکنون توجه می کنیم که همیشه $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ ، در ضمن برابری تنها

برای $x = \frac{1}{2}$ ممکن است. چون عددهای x_1 و x_2 مختلف اند و $x_1(1-x_1)$

و $x_2(1-x_2)$ عددهایی مثبت، بنا بر این

$$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < \frac{1}{16}$$

بنا بر این $a^2 > 16$ و $a > 4$.

به ازای $a=5$ ، معادله درجه دوم $5x^2 - 5x + 1 = 0$ به دست می-

آید که دارای دو ریشه مختلف در بازه $[0, 1]$ است.

۱۲۰. حکم مساله را می توان با استقرا حل کرد.

حکم به ازای $n=1$ درست است: $\frac{1}{1 \times 1} = 1$ ؛ برای عبور از $n-1$

به n ، باید همه کسرهای $\frac{1}{pq}$ را، که در آن‌ها p و q نسبت به هم اول اند،

$p < q$ و $p+q=n$ ، حذف کنیم و، در عوض، همه کسرهای به صورت $\frac{1}{pn}$

را، که در آن $n > p$ و p نسبت به هم اول اند، اضافه کنیم.

فرض کنید $\frac{1}{pq}$ یکی از کسرهای حذف شده باشد. چون

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p(n-p)} = \frac{1}{pn} + \frac{1}{(n-p)n}$$

براین، حذف آن از مجموع، به وسیله دو کسر جدید $\frac{1}{pn}$ و $\frac{1}{(n-p)n}$ (که

ا شرط، سازگارند) جبران می‌شود. به این ترتیب، با عبور از $n-1$ به n ، مقدار مجموع تغییر نمی‌کند.

۱۲۱. از دستگاه نقطه‌های مفروض، دو نقطه را انتخاب می‌کنیم که فاصله

بین آن‌ها، بیشترین مقدار باشد: این نقطه‌ها را A و B می‌نامیم.

ثابت می‌کنیم، هر یک از زاویه‌های XAY (یا XYB)، که در آن X

و Y دو نقطه از نقطه‌های مفروض اند، از 120° درجه کوچکتر است. در واقع،

ضلع AB در هر یک از مثلث‌های AXB و AYB ، بزرگترین ضلع است، بنابراین

$$\widehat{AXB} > 120^\circ \text{ و } \widehat{AYB} > 120^\circ$$

یعنی $\widehat{XAB} < 60^\circ$ و $\widehat{YAB} < 60^\circ$ ، و چون در هر کنج سه وجهی، هر زاویه

مسطح کوچکتر از مجموع دو زاویه دیگر است، بنابراین

$$\widehat{XAY} < \widehat{XAB} + \widehat{YAB} < 120^\circ$$

به این ترتیب، باید شماره‌گذاری را از A آغاز و به B ختم کرد. یاد-

آوری می‌کنیم که، همه فاصله‌های بین نقطه‌های مفروض تا نقطه A ، با هم

فرق دارند. در واقع، اگر داشته باشیم: $AX = AY$ ، آن وقت مثلث AXY متساوی الساقین می شود و، در ضمن، $\widehat{XAY} > 120^\circ$ ؛ و روشن است که چنین وضعی ممکن نیست. نقطه های مفروض را شماره گذاری می کنیم: $A_1 = A$ ، A_2 نزدیکترین نقطه دستگاه به A ، A_3 نزدیکترین نقطه به A از بین بقیه نقطه ها، ...، A_k نزدیکترین نقطه به A که هنوز شماره ای نگرفته اند، ...، $A_n = B$. ثابت می کنیم، این شماره گذاری، با شرط مساله سازگار است.

چون $\widehat{A_1 A_i A_n} > 120^\circ$ (به ازای $1 < i < k \leq n$)، بنابراین کافی است ثابت کنیم $\widehat{A_i A_j A_k} > 120^\circ$ ($1 < i < j < k < n$).

چون در دستگاه نقطه های A_1, A_2, \dots, A_k ، نقطه های A_1 و A_i بیشترین فاصله را نسبت به هم دارند، بنابراین $\widehat{A_i A_k A_j} < 120^\circ$ (این مطلب را، در ابتدای حل، ثابت کردیم).

ثابت می کنیم $\widehat{A_k A_i A_j} < 120^\circ$ ، در واقع، چون $\widehat{A_1 A_i A_j} > 120^\circ$ و $\widehat{A_1 A_i A_k} > 120^\circ$ ، اگر فرض کنیم $\widehat{A_k A_i A_j} \geq 120^\circ$ ، آن وقت مجموع زاویه های مسطحه در کنج سه وجهی به رأس A_i از 360° درجه بیشتر می شود. به این ترتیب $\widehat{A_i A_j A_k} > 120^\circ$ به ازای هر $1 \leq i < j < k \leq n$.

∇ در این مساله، در واقع ثابت کردیم که نسبت « $\widehat{A_i A_j A_k} > 120^\circ$ » همان ویژگی هایی را دارد که نسبت « A_j بین A_i و A_k قرار دارد» (برای نقطه های واقعی بر خط راست)، یعنی این نسبت، امکان «مرتب کردن» یک مجموعه مفروض را به دست می دهد. مقدار 120° درجه را نمی توان با مقدار کمتری عوض کرد.

۱۲۲. پاسخ: ۱۵۸، ۱۳۵، ۱۸۰، ۱۱۷.

x_1, x_2, x_3, x_4 را عددهای مجهول، S را مجموع آنها و a را رقم سمت چپ هر یک از آنها فرض می کنیم. روشن است که

$$100a \leq x_i < 100(a+1), \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

با استفاده از این نابرابری، به دست می آید:

$$x_i + 300a \leq S < x_i + 300(a+1)$$

از آنجا

$$1 + \frac{300a}{x_i} \leq \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{300(a+1)}{x_i}$$

$$1 + \frac{3a}{a+1} \leq \frac{S}{x_i} < 4 + \frac{3}{a}$$

بنابراین

به ازای $a=1$ به نابرابری $7 < \frac{S}{x_i} \leq 2/5$ و به ازای $a \geq 2$ نابرابری

$$3 < \frac{S}{x_i} < 5/5 \text{ به دست می آید. تحقیق می کنیم.}$$

چون $\frac{S}{x_i}$ به ازای سه تا از عددها، عددی درست است، بنابراین حالت

$a \geq 2$ ممکن نیست (بین 3 و 5/5 تنها دو عدد درست وجود دارد). به این

ترتیب $a=1$ و خارج قسمت های درست را باید بین عددهای 3، 4، 5، 6

جست و جو کرد. ولی 3 و 6 نمی توانند با هم، دو تا از خارج قسمت ها باشند،

زیرا نسبت هر دو عدد بین 100 و 199 از 2 کمتر است. دو حالت باقی می ماند:

(1) سه خارج قسمت 3 و 4 و 5 هستند؛ (2) سه خارج قسمت 4 و 5 و 6 هستند.

در هر دو حالت، S بر 60 بخش پذیر است: $S = 60k$. در حالت اول، عددهای

مجهول به صورت $12k$ ، $15k$ ، $20k$ و $13k$ در می آیند.

تنها به ازای $k=9$ ، رقم اول همه عددها برابر می شوند که، از آنجا،

جواب به دست می آید. در حالت دوم، گروه عددهای $10k$ ، $12k$ ، $15k$ ،

$23k$ ، به ازای هیچ مقداری از k ، با شرط های مساله سازگار نیستند. زیرا

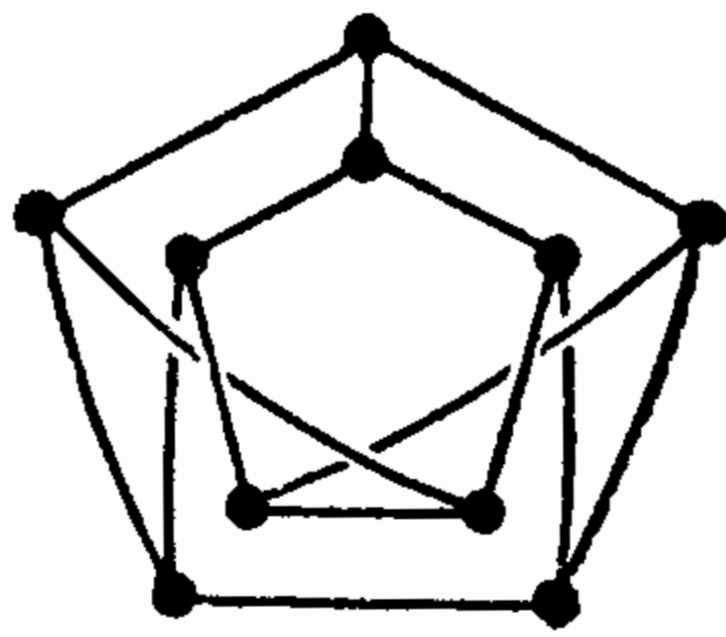
نسبت دو عدد $23k$ و $10k$ از 2 بزرگتر است.

۱۲۳. پاسخ: ۱۰ شهر.

از هر شهر A می توان حداکثر به سه شهر پرواز کرد و، از هر کدام از سه

شهر اخیر، به جز A ، تنها به دو شهر می توان با هواپیما پرواز کرد. به این ترتیب،

تعداد شهرها، نمی تواند از $2 \times 3 + 3 + 1$ ، یعنی ۱۰ بیشتر باشد.



شکل ۶۰

در شکل ۶۰ نشان دادیم که چگونه می‌توان در کشوری که ۱۰ شهر دارد، این خط‌های هوایی را برقرار کرد.

▽ گراف شکل ۶۰، اغلب به عنوان نمونه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به نام «گراف پترسن» معروف است.

۱۲۴. a $ABCDE$ را پنج ضلعی محدب مفروض به ضلع a ، و K

را وسط قطر بزرگتر آن AD می‌گیریم؛ در این صورت $\widehat{AKE} = \widehat{EKD} = 90^\circ$.

چون $AC \leq AD$ ، بنابراین $\widehat{BAC} > \widehat{DAE}$ و در نتیجه $\widehat{BAK} > \widehat{KAE}$. از

این جا معلوم می‌شود که، نقطه‌های A و B ، در یک طرف خط راست EK قرار دارند. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطه‌های C و D هم در یک طرف خط

EK واقع اند. از این جا، بلافاصله، به دست می‌آید: $\widehat{BKA} < 90^\circ$ و

$$\widehat{CKD} < 90^\circ$$

فرض می‌کنیم $\widehat{BKC} \geq 90^\circ$ ، در این صورت $BK < a$ و $CK < a$ ، و

از آن جا که $AK < a$ و $KD < a$ ، بنابراین $\widehat{AKB} > 60^\circ$ و $\widehat{CKD} > 60^\circ$ (ضلع بزرگتر مثلث، روبه روبه زاویه بزرگتر آن است)؛ ولی این ممکن نیست،

$$\widehat{AKB} + \widehat{BKC} + \widehat{CKD} = 180^\circ \quad \text{زیرا}$$

و در نتیجه $\widehat{BKC} < 90^\circ$. ثابت کردیم که نقطه K ، با شرط‌های مسأله سازگار است.

(b) اگر روی امتداد پاره خط راست EK ، نقطه M را خیلی نزدیک

به نقطه K انتخاب کنیم، آن وقت، همه زاویه‌های AMB ، BMC ، CMD ،

EMA و DME ، حاده می‌شوند، بنابراین، نقطه M نمی‌تواند به هیچ کدام از نیم دایره‌های به قطر ضلع‌های پنج ضلعی متعلق باشد.

۱۲۵. اگر نفر اول، عدد ۱ — را جلو x (با توان واحد) قرار دهد و در

حرکت بعدی خود، در جای خالی باقی مانده، قرینه عددی را بگذارد که دومی در نوبت خود انتخاب کرده است، آن وقت به چند جمله‌ای

$$x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a)$$

می‌رسد؛ و ریشه‌های این چند جمله‌ای، ۱ و -1 و a ، عددهایی درست‌اند. ۱۲۶. پاسخ: ۹۰ بازی.

فرض کنیم، بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشد که بازی خود را انجام داده‌اند. تیم A را در نظر می‌گیریم که کمترین تعداد بازی‌ها را انجام داده باشد و، تعداد این بازی‌ها را، k می‌گیریم. هر یک از k تیمی که با A بازی کرده‌اند، و خود تیم A ، دست کم k بازی داشته‌اند. از $(19 - k)$ تیمی که با A بازی نکرده‌اند، هر کدام با هر یک از $(18 - k)$ تیم باقی‌مانده بازی داشته‌اند، در غیر این صورت، سه تیم پیدا می‌شود که، در بین آن‌ها، هیچ دو تیمی با هم بازی نکرده‌اند. به این ترتیب، دو برابر همه بازی‌هایی که باید تیم‌ها انجام داده باشند، دست کم برابر است با

$$k^2 + k + (19 - k)(18 - k) = 2k^2 - 36k + 18 \times 19 = \\ = 2(k - 9)^2 + 180 \geq 180$$

نمونه حالتی که، طبق شرط‌های مسأله، درست ۹۰ بازی انجام شده باشد، به این ترتیب به دست می‌آید که ۲۰ تیم را به دو گروه ۱۰ تیمی تقسیم کنیم، تیم‌های هر گروه، همه با هم بازی کرده‌اند، ولی هیچ تیمی از گروه اول با هیچ تیمی از گروه دوم بازی نکرده است.

▽ اگر هر تیم را با یک نقطه نشان دهیم و هر دو تیمی را که با هم بازی نکرده‌اند، به وسیله پاره‌خط راستی به هم وصل کنیم، یک گراف به دست می‌آید که، با رعایت شرط‌های مسأله، گرافی بدون مثلث خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که، در چنین گرافی، اگر n رأس داشته باشد، حداکثر

$\left[\frac{n^2}{4} \right]$ یال وجود دارد.

راه‌حلی که در مساله انتخاب کرده‌ایم، شبیه اثبات «پیش قضیه مربوط به صلیب» است که در حل ۱۵۶ و ارزیابی ۲۴۶، C آورده‌ایم. ۱۲۷. نابرابری مساله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1$$

$$n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right) > 1 - \cos \frac{\pi}{n+1} \quad \text{و یا}$$

یعنی

$$n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \cdot \sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}$$

و نابرابری اخیر درست است، زیرا

$$\sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin \frac{2\pi n}{2n(n+1)} = \sin \frac{\pi}{n+1} > \sin \frac{\pi}{2(n+1)},$$

$$n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \geq \sin \frac{n\pi}{2n(n+1)} = \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$$

در این‌جا، از نابرابری $|n \sin \alpha| \geq |\sin n\alpha|$ استفاده کرده‌ایم که به سادگی، و به کمک استقرا، ثابت می‌شود.

۱۲۸. $a_{i_1} = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم a_{i_2} بزرگ‌ترین

عدد در مخرج کسر با صورت a_{i_1} ؛ a_{i_2} بزرگ‌ترین عدد در مخرج کسر با صورت a_{i_1} ؛ و به‌طور کلی، a_{i_k} بزرگ‌ترین عدد در مخرج کسر با صورت $a_{i_{k-1}}$ باشد.

روشن است که، سر آخر، به $a_{i_r} = a_{i_{r-1}}$ می‌رسیم.

اگر شماره‌های ۱، ۲، ...، n را روی محیط دایره‌ای قرار دهیم، آن

وقت i_k و i_{k+1} (همچنین i_1 و i_r) یا در مجاورت هم و یا یک در میان قرار

می گیرند، یعنی $r \geq \frac{n}{2}$

مجموع مفروض، بزرگتر است از

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}} \right) = \frac{1}{2} S$$

اگر از نابرابری واسطه‌ها استفاده کنیم (ضمیمه ۸)، آن وقت

$$\frac{S}{r} \geq \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \cdot \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \dots \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1$$

یعنی S از r کمتر نیست. بنابراین، مجموع مفروض، از $\frac{n}{2}$ بزرگتر است.

▽ می‌توان نابرابری قوی‌تری را ثابت کرد:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (*)$$

(این فرضیه را، شاپیرو، ریاضی‌دان امریکایی، در سال ۱۹۵۴ مطرح کرد). در واقع، این نابرابری به تدریج برای عددهای فرد $11 \leq n$ و عددهای زوج $12 \leq n$ ثابت شد، ولی برای عددهای زوج $14 \leq n$ و عددهای فرد $27 \leq n$ نادرست از آب درنیامد (ابتدا، مثال‌های نقض‌کننده عددهای بزرگ

n به دست آمد). ارزیابی دقیق $\gamma_n \frac{n}{2}$ ، که باید در (*) به جای $\frac{n}{2}$ قرار داد،

برای هر n ، نامعلوم بود، ولی و. گ. درین‌فلد، یکی از شرکت‌کنندگان موفق در المپیاد، در سال ۱۹۶۹ موفق شد به نتیجه جالبی برسد: او بهترین ارزیابی

را برای $\gamma_n \frac{n}{2}$ پیدا کرد، که برای هر مقدار n درست است. این عدد،

$\gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ ، عبارت است از عرض نقطه برخورد مماس مشترک نمودار

تابع‌های $y = e^{-x}$ و $y = \frac{2}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$ با محور Oy : $\gamma \approx 0.1989$.

۱۲۹. فرض می‌کنیم، مساله حل شده است. چون خط راست CY بر خط راست AX عمود است، بنابراین $CY \parallel BX$. K را نقطه برخورد پاره‌خط‌های راست AB و XY می‌گیریم. روشن است که دو مثلث CKY و KBX برابرند. در نتیجه $CK = KB$.

برای رسم، کافی است از وسط پاره‌خط راست CB ، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم تا محیط دایره را در دو نقطه X و Y قطع کند.

۱۳۰. سه عدد x ، y و $\frac{1}{xy}$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$x + y + \frac{1}{xy} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

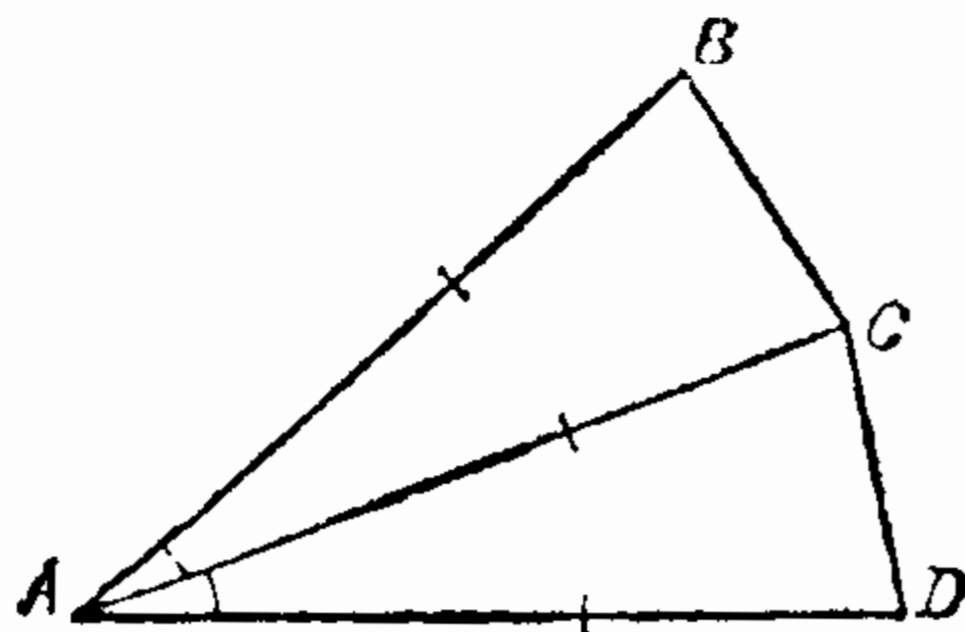
این نابرابری را، بعد از تبدیل‌های ساده، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(x-1)(y-1)\left(\frac{1}{xy}-1\right) > 0$$

۱۳۱. پاسخ: حداکثر دو ضلع. نمونه‌ای از چندضلعی را که، دو ضلع

آن برابر با قطر بزرگتر است، در شکل ۶۱ ببینید.

فرض می‌کنیم، تعداد چنین ضلع‌هایی، بیشتر از ۲ باشد. دو ضلع AB و CD از این ضلع‌ها را، که رأس مشترکی ندارند، در نظر می‌گیریم (این انتخاب ممکن است، زیرا وقتی چندضلعی دارای قطر باشد، مسلماً مثلث نیست). در این صورت، دست کم یکی از قطرهای AC یا BC ، طولی بزرگتر از



شکل ۶۱

طول ضلع AB دارد. اگر این قطرها، در نقطه K یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت

$$AC + BD = AK + KC + BK + KD > AB + CD = 2AB$$

۱۳۲. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. دو عدد را زیر هم می‌نویسیم و آن‌ها را، به صورت ستونی، با هم جمع می‌کنیم. چون آخرین رقم مجموع، عددی فرد است، بنا بر این، ضمن جمع نخستین رقم‌ها، مجموعی فرد به دست می‌آید. بنا بر این، از مرتبه قبل، واحدی به این مرتبه، ضمن جمع، منتقل نشده است. و این به معنای آن است که، مجموع رقم‌ها در ستون دوم و، همچنین، مجموع رقم‌ها در ستون ماقبل آخر، از ۱۰ کمتر است. توجه می‌کنیم که از ستون دوم به مرتبه سوم هم، واحدی منتقل نشده است، زیرا این وضع تنها وقتی پیش می‌آید که مجموع رقم‌های مرتبه دوم برابر ۹ باشد و مجموع رقم‌های مرتبه اول بزرگتر از ۱۰؛ ولی در این صورت، در مرتبه دوم مجموع، رقم ۰ به دست می‌آید.

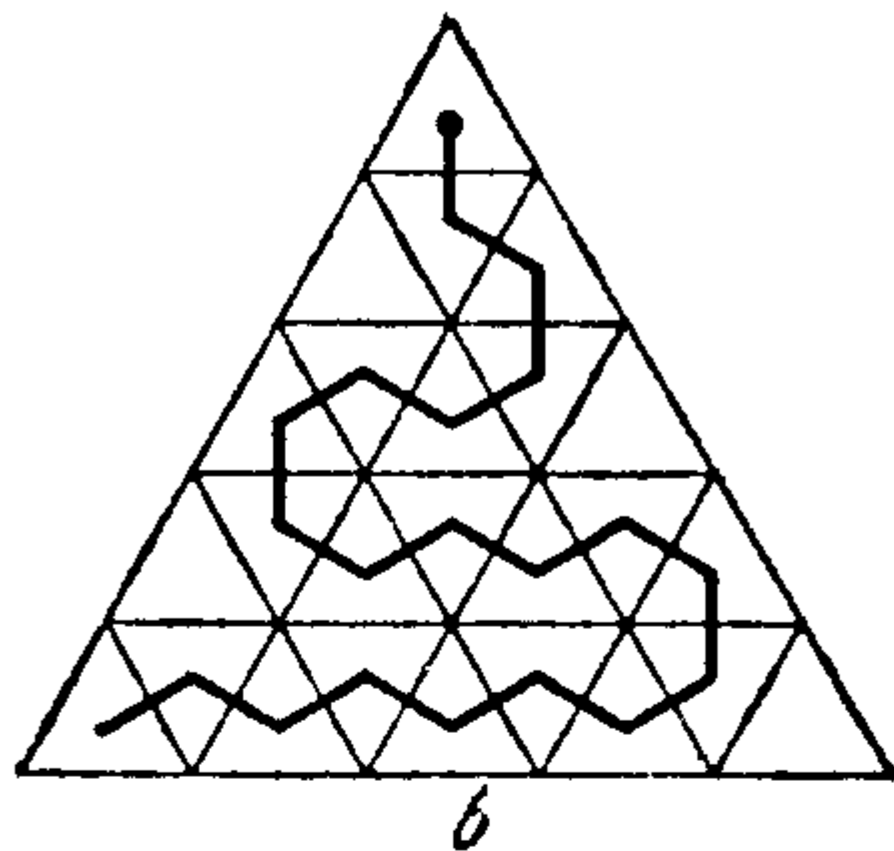
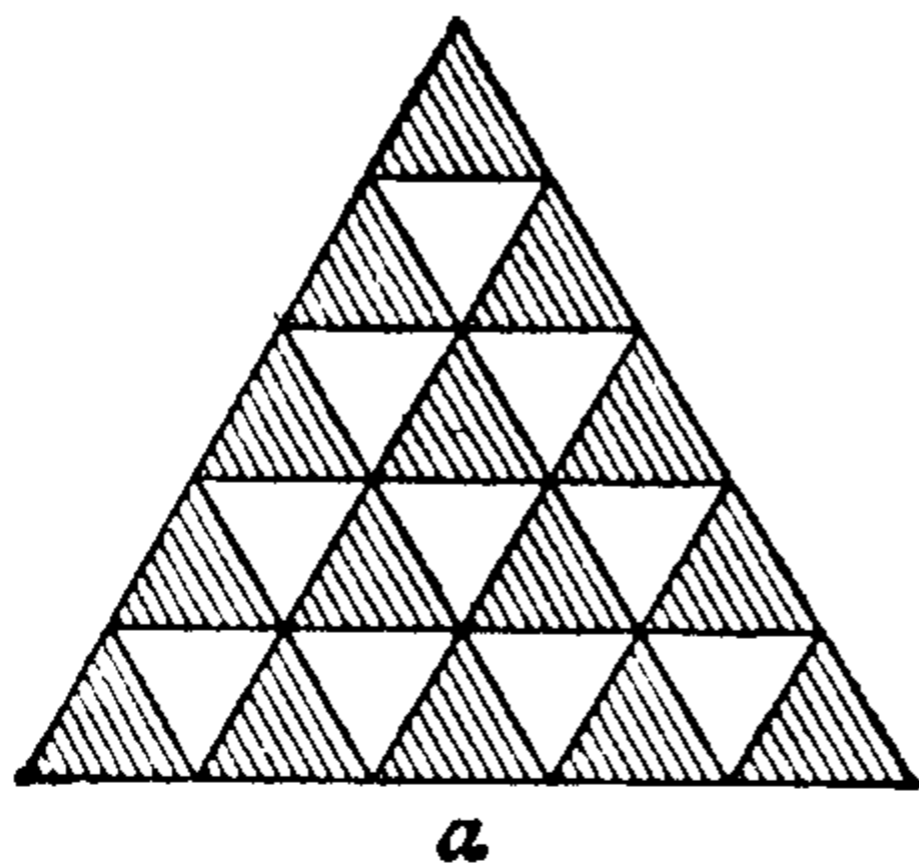
اکنون، دورقم آخر و دورقم اول را، از عدد مفروض حذف می‌کنیم و از همین استدلال، برای عدد ۱۳ رقمی، سپس ۹ رقمی و بالاخره ۵ رقمی تکرار می‌کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که، به مرتبه وسط مجموع، واحدی از مرتبه قبل منتقل نشده است. ولی رقم‌های وسط دو جمله جمع، با هم برابرند و رقم وسط مجموع، عددی زوج می‌شود.

همان طور که از حل مسأله دیده می‌شود، این حکم برای هر عددی که $4k + 1$ رقم داشته باشد، درست است. مثال‌های ساده‌ای (مثل $21 + 12$ ، $605 + 506$ ، ...) نشان می‌دهند که حکم، برای عددهایی که با تعداد رقم‌های دیگری باشند، درست نیست.

۱۳۳. (b) مثلث‌ها را به دورنگ درمی‌آوریم، شبیه شکل a .

تعداد مثلث‌های سیاه، به اندازه k ، از تعداد مثلث‌های سفید بیشتر است.

بنا بر این تعداد مثلث‌های سفید برابر $\frac{1}{4}(k^2 - k)$ و تعداد مثلث‌های سیاه برابر



شکل ۶۲

$\frac{1}{2}(k^2 + k)$ است. در «زنجیره»، رنگ مثلث‌ها، یک در میان سیاه و یک در میان سفید است. بنابراین تعداد مثلث‌های سیاه «زنجیره» نمی‌تواند از $\frac{1}{2}(k^2 - k) + 1$ بیشتر باشد. در نتیجه، تعداد کل مثلث‌های «زنجیره»، از

$$\frac{1}{2}(k^2 - k) + \frac{1}{2}(k^2 - k) + 1 = k^2 - k + 1$$

بیشتر نیست. در شکل ۶۲، نمونه «زنجیره‌ای» داده شده است که، در آن، تعداد مثلث‌ها، درست برابر $k^2 - k + 1$ است.

۱۳۴. طول پاره‌خط‌های راست مفروض را $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ می‌گیریم.

فرض می‌کنیم، با هیچ سه پاره خط راستی از این پنج پاره خط، نتوان مثلثی با زاویه‌های حاده ساخت. در هر مثلثی که یکی از زاویه‌های آن حاده نباشد، مجذور ضلع بزرگتر، از مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر بزرگتر و یا با آن برابر است. بنا بر این، باید داشته باشیم:

$$c^2 \geq a^2 + b^2, d^2 \geq c^2 + b^2, e^2 \geq d^2 + c^2$$

که اگر آن‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$e^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

یعنی $e \geq a + b$ ، یعنی از پاره‌خط‌های راست e ، a و b نمی‌توان مثلثی تشکیل داد.

۱۳۵. راه حل اول. فرض می‌کنیم $\widehat{BAC} < 45^\circ$ ، در این صورت

$$\widehat{ACH} > 45^\circ, \widehat{BCH} < 45^\circ, \widehat{CBA} > 45^\circ, BC < AC$$

بنابراین، میانه CP در درون مثلث ACH قرار می‌گیرد و با میانه BM در نقطه K متعلق به پاره خط راست OM برخورد دارد (O را نقطه برخورد BM ،

$$AD \text{ و } CH \text{ گرفته‌ایم). از این جا، با توجه به } PK = \frac{1}{4}KC$$

$$OH:OC < \frac{1}{4}$$

ولی بنا به ویژگی نیمساز زاویه مثلث

$$OH:OC = AH:AC$$

یعنی $AH < \frac{1}{4}AC$ و، بنابراین $\widehat{ACH} < 30^\circ$. تناقض.

دو حل دوم. ثابت می‌کنیم، اگر داشته باشیم: $\widehat{BAC} < 45^\circ$ ، آن وقت

$\widehat{ACB} > 90^\circ$. نقطه B_1 را روی خط راست AB طوری انتخاب می‌کنیم که $HB_1 = AH$. نیمساز زاویه AB_1C ، که آن را B_1F می‌نامیم، از نقطه O می‌گذرد (در این نقطه، دو نیمساز دیگر از زاویه‌های مثلث AB_1C به هم رسیده‌اند). بنا به ویژگی نیمساز

$$AF:FC = AB_1:B_1C$$

ولی $AB_1:B_1C > 1$ ، زیرا $\widehat{B_1AC} < 45^\circ$. به این ترتیب، نقطه B_1 بین

نقطه‌های A و B قرار می‌گیرد و، بنابراین $\widehat{B_1CA} > 90^\circ$.

۱۳۶. همه زوج رقم‌های ممکن را، که در عددهای مختلف در یک مرتبه

واقع‌اند، در نظر می‌گیریم، چون زوج عددها ۱۰، بنا بر این همه این گونه

زوج‌ها برابر $10n$ است. در ضمن، زوج رقم‌های مختلف، یعنی زوج (۱، ۲)

در هر ردیف از ۴ کمتر و از ۶ بیشتر نیست، به نحوی که، از بین $10n$ زوج انتخابی،

تعداد کل زوج‌های (۱، ۲)، بین $4n$ و $6n$ قرار دارد.

از طرف دیگر، چون هر دو عدد، در m مرتبه خود بر هم منطبق‌اند، بنا بر این

هر دو عدد، $n - m$ زوج (۲، ۱) می‌دهد. به این ترتیب، تعداد کل چنین زوج‌هایی برابر است با $10(n - m)$ در نتیجه

$$4n \leq 10(n - m) \leq 6n \Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}$$

۱۳۷. ثابت می‌کنیم، از بین هر ۱۹۹ عدد درست، می‌توان ۱۰۰ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد. در ضمن تنها از این دو گزاره درست استفاده می‌کنیم: بین هر سه عدد، یا دو عدد زوج وجود دارد و یا دو عدد فرد (که روشن است)؛ از این هر ۹ عدد درست، می‌توان ۵ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۵ بخش پذیر باشد.

گزاره کلی زیر را P_m می‌نامیم: از بین هر $2m - 1$ عدد درست می‌توان m عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها بر m بخش پذیر باشد (به زبان دیگر، می‌توان m عدد انتخاب کرد که، واسطه حسابی آن‌ها، عددی درست باشد). ابتدا، یک پیش قضیه ثابت می‌کنیم.

پیش قضیه ۱. اگر گزاره‌های P_k و P_m درست باشند، گزاره P_{km} هم درست است.

فرض کنید $2km - 1$ عدد درست مفروض باشد. از این عددها، با توجه به P_m ، می‌توان m عدد را، با واسطه حسابی درست، انتخاب کرد؛ از بقیه $2km - m - 1$ عدد، دوباره m عدد از این گونه جدا می‌کنیم؛ سپس از بقیه $2km - 2m - 1$ عدد، باز هم یک گروه m عددی با همین ویژگی در نظر می‌گیریم و غیره. وقتی که این روند انتخاب را $2k - 1$ بار تکرار کنیم، به تعداد $2k - 1 = m - 1 = (2k - 1)m - 1$ عدد باقی می‌ماند، یعنی می‌توانیم $2k - 1$ بار از P_m استفاده کنیم. اکنون واسطه‌های حسابی را در $2k - 1$ گروه انتخابی پیدا می‌کنیم (این واسطه‌ها، عددهایی درست‌اند). از بین این واسطه‌ها، با توجه به P_k ، می‌توان k عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها بر k بخش پذیر باشد. در این صورت روشن است که، مجموع km عدد از عددهای اولیه که در k گروه وارد شده‌اند، بر km بخش پذیر می‌شود، پیش-قضیه ۱ ثابت شد.

چون $1000 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ ، با توجه به P_2 و P_5 و سه بار استفاده از پیش قضیه ۱، درستی P_{1000} روشن می‌شود. تنها این مانده است که P_5 را مورد آزمایش قرار دهیم.

باقی مانده‌های تقسیم ۹ عدد مفروض بر ۵ را r_1, r_2, \dots, r_9 می‌نامیم:

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_9 \leq 4$$

حالتی که بین r_i ها ($1 \leq i \leq 9$)، ۵ عدد برابر وجود داشته باشد، یا حالتی که بین آن‌ها، سه عدد برابر پیدا نشود (و بنا بر این، به همه باقی مانده‌های ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ برخورد کنیم)، روشن است. دو حالت می‌ماند: وقتی که باقی مانده‌ای در بین r_i ها، ۳ بار و یا ۴ بار تکرار شده باشد. در ضمن می‌توان این باقی مانده را $r = 0$ گرفت؛

اگر $r \neq 0$ ، می‌توان به هر ۹ عدد، $5 - r$ را اضافه کرد (با این اضافه کردن، شرط «مجموع ۵ عدد باید بر ۵ بخش پذیر باشد»، تغییر نمی‌کند). اگر پیش قضیه مفید زیر را در نظر داشته باشیم، می‌توانیم خود را از آزمایش حالت‌های مختلف خلاص کنیم.

پیش قضیه ۲. از هر q عدد درست، می‌توان چند عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها بر q بخش پذیر باشد. (برای اثبات پیش قضیه درباره عددهای a_1, a_2, \dots, a_n ، کافی است q عدد زیر را در نظر بگیریم:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

این عددها، در تقسیم بر q ، یا به باقی مانده‌های مختلف می‌رسند و یا دست کم دو تا از آن‌ها، باقی مانده‌های برابر پیدا می‌کنند که، در این صورت، تفاضل آن‌ها بر q بخش پذیر می‌شود.)

بنا بر پیش قضیه ۲، از بین ۵ باقی مانده r_i که مخالف صفرند، می‌توان چند عدد (از ۲ تا ۵) انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها بر ۵ بخش پذیر باشد و، سپس، به تعدادی که لازم است، از باقی مانده‌های صفر به آن‌ها اضافه کرد. ∇ می‌توان ثابت کرد، گزاره P_n ، برای هر عدد طبیعی n درست است

(با توجه به پیش قضیه ۱، کافی است آن را برای عددهای اول n ثابت کنیم).
 بررسی مسأله زیر می تواند جالب باشد: حداقل عدد طبیعی $F_d(n)$ چقدر باشد
 تا از هر $F_d(n)$ بردار با مختصات درست بتوان چند بردار انتخاب کرد، به
 نحوی که در مجموع بردارها، همه مختصات، بر n بخش پذیر باشند؟ (در این جا،
 n عددی طبیعی و d ، تعداد بعدهاست: $d=2$ برای بردارهای واقع بر صفحه،
 $d=3$ برای بردارهای واقع در فضا.)

۱۳۸. راه حل اول. P را نقطه تماس دایره محاطی با ضلع BC و
 PQ را قطر دایره محاطی مثلث می گیریم. در حل مسأله ۱۱۲ ثابت کردیم
 $AQ \parallel MO$ ، بنا بر این $AEOQ$ متوازی الاضلاع است، به نحوی که
 $OQ = AE = r$.

راه حل دوم. a, b و c را، به ترتیب، طول ضلع های مقابل به راس های
 A, B و C از مثلث می گیریم. می توان فرض کرد $b > c$. از نقطه O عمود OP
 را بر BC رسم می کنیم. در این صورت

$$MC = \frac{a}{2}; PC = \frac{a+b-c}{2}; HC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC - MC}{PC - MC} = \frac{2HC - a}{b - a} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2}{a(b - c)} = \frac{b + c}{a};$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} = \frac{EH}{r} = \frac{a + b + c}{a} = \frac{b + c}{a} = 1$$

که از آن جا $AE = r$.

۱۳۹. اگر عدد k به صورت $k = a_n a_{n-1} \dots a_1$ و عدد t شامل $m > n$

رقم برابر ۹ باشد: $1 = 10^m - \underbrace{99 \dots 9}_m = t$. آن وقت

$$kt = a_n a_{n-1} \dots (a_0 - 1) \underbrace{99 \dots 9 (9 - a_n) (9 - a_{n-1}) \dots (9 - a_1) (10 - a_0)}_{\text{رقم } m}$$

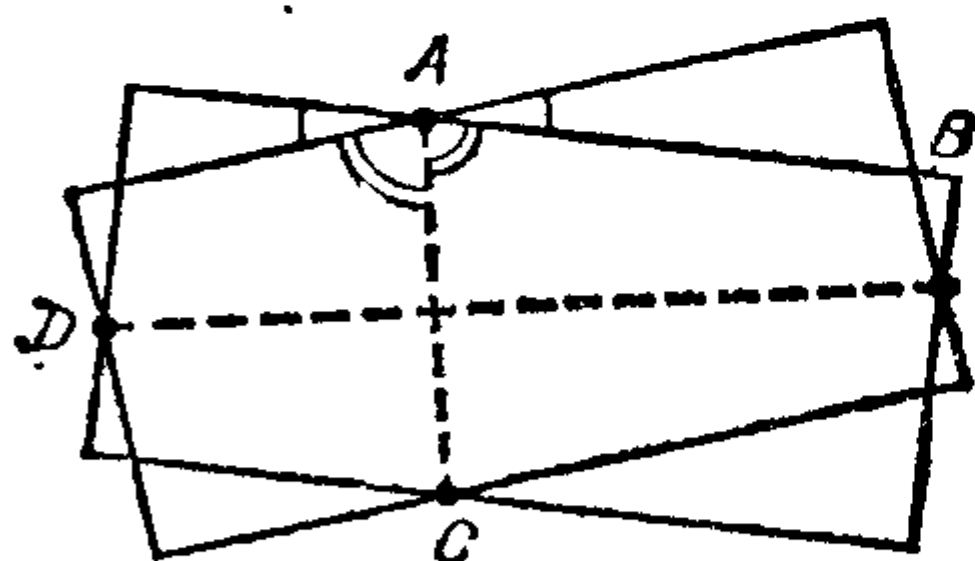
که مجموع رقم‌های آن با مجموع رقم‌های عدد t یکی است: این مجموع برابر است با $9m$.

۱۴۰. a و b را طول ضلع‌های هر يك از مستطیل‌ها می‌گیریم. اگر محیط‌های دو مستطیل در هشت نقطه یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت روی هر ضلع هر مستطیل، دو نقطه برخورد با دو ضلع مجاور مستطیل دیگر وجود دارد. اگر روی ضلعی، کمتر از دو نقطه برخورد وجود داشته باشد، آن وقت روی هم، کمتر از هشت نقطه برخورد به دست می‌آید. بنا بر این، ضلع یکی از مستطیل‌ها، نمی‌تواند دو ضلع موازی را در دیگری قطع کند.

A و C را نقطه‌های برخورد ضلع‌های به طول a ، B و D را نقطه‌های برخورد ضلع‌های به طول b می‌گیریم (شکل ۶۳). به سادگی ثابت می‌شود که پاره‌خط‌های راست AC و BD ، نیمسازهای بین ضلع‌هایی هستند که، به ترتیب، از A و C ، B و D گذشته‌اند. بنا بر این $AC \perp BD$. مساحت S از چهار ضلعی $ABCD$ ، برابر است با $AC \cdot BD$ و چون $AC \geq b$ و $BD \geq a$ ، بنا بر این $S \geq \frac{1}{2}ab$.

۱۴۱. ثابت می‌کنیم، هر عددی از این گونه، بر 11111 بخش پذیر است و، بنا بر این، نمی‌تواند توانی از 2 باشد. برای این منظور، توجه می‌کنیم که 10^5 ، ضمن تقسیم بر 11111 ، به باقی مانده واحد می‌رسد، زیرا $10^5 = 9 \times 11111 + 1$. بنا بر این، هر يك از اعدادی حاصل، در تقسیم بر 11111 ، به همان باقی مانده‌ای می‌رسد که در تقسیم مجموع همه اعدادی واقع بر کارت، به آن می‌رسیم.

در ضمن، به سادگی ثابت می‌شود که، هر يك از این گونه اعدادها، بر 9



شکل ۶۳

بخش پذیر است. ولی مجموع عددهای واقع بر کارت‌ها، برابر است با

$$\frac{11111 + 99999}{2} (10^5 - 1)$$

یعنی، این مجموع، بر ۱۱۱۱۱ بخش پذیر است.

۱۴۲. $D_1 = \{0, 1, \dots, 9\}$ را مجموعه‌ده رقم، $A_1 = \{0, 2, \dots, 8\}$

را مجموعه رقم‌های زوج و $B_1 = \{1, 3, \dots, 9\}$ را مجموعه رقم‌های فرد

می‌گیریم. به طور کلی، برای هر n ، D_n را به معنای مجموعه همه عددهایی

که تعداد رقم‌هایشان از n تجاوز نمی‌کند، و A_n و B_n را، زیرمجموعه‌های از

D_n می‌گیریم که، به ترتیب، مجموع رقم‌های هر یک از عضوهای آنها، زوج

و فرد باشد ($D_n = A_n \cup B_n$). اگر عددی را هم که از صفرها تشکیل شده

است به حساب آوریم، A_n و B_n به تعداد $5 \times 10^{n-1}$ عضو خواهند داشت.

مجموع همه عضوهای x از مجموعه X را $\sum x$ با شرط $x \in X$ می‌نامیم. باید

ثابت کنیم، $\sum a^k$ با شرط $a \in A_n$ ، برابر است با $\sum b^k$ با شرط $b \in B_n$ ؛ این

مجموع را با $S_n^{(k)}$ نشان می‌دهیم.

به ازای $n=2$ ، $k=1$ ، حکم مسأله، منجر به برابری روشن زیر می-

شود (که در آن، $a \in A_1$ ، $p \in A_1$ ، $b \in B_1$ ، $q \in B_1$):

$$\sum (10a + p) + \sum (10b + q) = \sum (10a + q) + \sum (10b + p)$$

هر دو طرف برابرند با $5(\sum 10d + \sum r)$ به شرط $d \in D_1$ ، $r \in D_1$ ،

و q ، در این یا آن مجموع، ۵ بار تکرار شده است.

عمل‌های بعدی را روی نمونه $n=3$ روشن می‌کنیم. مجموع را به

شرط $a \in A_1$ ، $p \in A_2$ ، $b \in B_1$ ، $q \in B_2$ (و در ضمن $d \in D_1$ ، $r \in D_2$) پیدا می‌کنیم:

$$\sum (10a + p)^2 + \sum (10b + q)^2 = 50 \times 10^2 (\sum a^2 + \sum b^2) +$$

$$+ 2 \times 10 (\sum a \cdot p + \sum b \cdot q) + 5 \sum p^2 + 5 \sum q^2 =$$

$$= 10^2 \sum d^2 + 2 \times 10 (\sum a \cdot \sum p + \sum b \cdot \sum q) + 5 \sum r^2 =$$

$$= 5 \times 10^2 \sum d^2 + 20 \sum dS_r^{(1)} + 5 \sum r^2$$

به همین ترتیب، مجموع $\sum (10a + q)^2 + \sum (10b + p)^2$ را هم، می توان تبدیل کرد. در این جا، از اتحادهای زیر استفاده کرده ایم:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad \sum uv = \sum u \cdot \sum v$$

(در دومی، مجموع نسبت به همه $u \in U$ و $v \in V$).

اکنون، حکم کلی را، با استقرای روی n ، ثابت می کنیم. در ضمن، از دستورهایی زیر هم، استفاده خواهیم کرد:

$$(x + y)^k = x^k + C_k^1 x^{k-1} y + C_k^2 x^{k-2} y^2 + \dots + C_k^{k-1} x y^{k-1} + y^k = x^k + \sum C_k^l x^{k-l} y^l + y^k;$$

$$\sum uv = \sum u \sum v$$

(در دستور اول، مقدارهای C_k^l ، ضریب های دو جمله ای $(1 \leq l < k-1)$ ، در استدلال ها، نقشی ندارند). فرض می کنیم، برای عددهای n رقمی و هر $1 < k < n$ ، برابری لازم ثابت شده باشد:

$$\sum p^j = \sum q^j = S_n^{(j)}, \quad (p \in A_n, q \in b_n)$$

مجموع توان های k ام عددها از A_{n+1} را $(k < n+1)$ تبدیل می کنیم (در این جا، مجموع ها را با شرط $a \in A_1, p \in A_n, b \in B_1, q \in B_n, d \in D_1, r \in D_n$ و $1 \leq j < k-1$ در نظر گرفته ایم):

$$\begin{aligned} & \sum (10a + p)^k + \sum (10b + q)^k = \\ & = 5 \times 10^{n-1} \times 10^k (\sum a^k + \sum b^k) + \\ & + \sum C_k^j \cdot 10^{k-j} (\sum a^{k-j} p^j + \sum b^{k-j} q^j) + 5 (\sum p^k + \sum q^k) = \\ & = 5 \times 10^{n+k-1} \sum d^k + \sum_j C_k^j \cdot 10^{k-j} S_k^{(j)} \sum d^{k-j} + 5 \sum r^k \end{aligned}$$

روشن است که مجموع توان های k ام عددها از B_{n+1} هم، با همین عبارت بیان می شود (تنها باید جای حرف های p و q را عوض کرد).

▽ اتحادهای مشابهی. برای هر دستگاه عددنویسی به مبنای l درست است، به شرطی که l ، عددی زوج باشد؛ مثلاً در عددنویسی به مبنای ۲، که برای عددهای نه چندان بزرگ n ، می توان به طور مستقیم مورد تحقیق قرارداد.

۱۴۳. دستگاه بردارهای واحد e_1, e_2, \dots, e_m (با مبدا مشترک O)

را متقارن می گوینیم. وقتی که ضمن دوران به اندازه زاویه $\frac{2k\pi}{m}$ (به ازای

مقداری مثل $k < m$) بر خودش منطبق شود. مجموع بردارهای چنین دستگاهی به روشنی، برابر است، زیرا این مجموع، ضمن دوران به اندازه زاویه

$$2\pi < \frac{2k\pi}{m} \text{ تغییر نمی کند.}$$

در حالت خاص، بردارهایی که به رأس های متوالی يك m ضلعی منتظم

منتهی می شوند، دستگاهی متقارن را تشکیل می دهند که، در آن، $k = 1$.

همه بردارهای واحد به مبدا O را در معرض تبدیل $e \rightarrow D'e$ قرار

می دهیم (l ، مضرب دوران است): زاویه بین جهت اولیه Ox با e را l برابر

می کنیم و بردار حاصل را با $D'e$ نشان می دهیم. ضمن تبدیل D' ، هر دستگاه

متقارن به دستگاهی متقارن منجر می شود. تنها با این شرط که kl بر m بخش-

پذیر نباشد (زاویه $\frac{2k\pi}{m}$ ، بین بردارهای مجاور e_i و e_{i+1} برابر می شود؛ اگر

از $\frac{2kl\pi}{m}$ مضرب 2π را کم کنیم، معلوم می شود که، زاویه بین $D'e_{i+1}$ و $D'e_i$

برابر $\frac{2\pi}{m}$ است که، در آن، π عبارت است از باقی مانده تقسیم kl بر m).

در حالتی هم که kl بر m بخش پذیر باشد (و در حالت خاص، به ازای $k = m$)،

آن وقت همه بردارهای $D'e_i$ ، در يك بردار متحد می شوند.

بعد از این نکته ها، به حل مساله می پردازیم. فرض می کنیم توانسته

باشیم رأس های يك m ضلعی منتظم را، با چند رنگ، طوری رنگ کرده باشیم

که رأس های هم رنگ، تشکیل چند ضلعی های منتظم داده باشند. l ضلعی، q_1

ضلعی، q_2 ضلعی، ...، q_s ضلعی، که در آن‌ها $q_1 < q_2 < \dots < q_s$ ، $l < q_1$ دستگاه متقارن بردارهایی را که به رأس‌های n ضلعی رسیده‌اند، می‌توان به $s+1$ دستگاه متقارن شامل l ، q_1 ، q_2 ، ... و q_s بردار تقسیم کرد. تا این جا، هیچ تناقضی وجود ندارد: مجموع بردارهای هر یک از این دستگاه‌ها و، همچنین، مجموع کل آن‌ها، برابر بردار \mathbf{o} است ولی اگر همه بردارها را در معرض تبدیل با ضرب دوران l قرار دهیم، تناقض پدید می‌آید: همه l بردار دستگاه اول در یک بردار متحد می‌شوند، به نحوی که مجموع آن‌ها، مخالف \mathbf{o} است، و بقیه دستگاه‌ها - از q_i بردار ($i = 1, 2, \dots, s$) و از همه n بردار - منتظم باقی می‌مانند، چون زاویه بین بردارهای مجاور در آن‌ها

$$\frac{2\pi l}{q_1} < 2\pi, \frac{2\pi l}{q_2} < 2\pi, \dots, \frac{2\pi l}{n} < 2\pi$$

به نحوی که، مجموع در آن‌ها، برابر \mathbf{o} باقی می‌ماند.

▽ اگر بردارها را همچون عددهای مختلط در نظر بگیریم، اندیشه «دوران با ضرب l » یا «دوران از مرتبه l » روشن تر می‌شود: تبدیل D^l ، خیلی ساده، یعنی به توان رساندن $z \rightarrow z^l$ از عدد مختلط z ، $|z|=1$ ، دستگاه متقارن بردارها، عبارت است از تصاعد هندسی $u, uz, uz^2, \dots, uz^{n-1}$ که، در آن، $|u|=1$ و z برابر است با یکی از ریشه‌های n ام واحد ($z \neq 1$)؛ اگر آوند (آرگومان) عدد z - زاویه بین بردارهای مجاور دستگاه - برابر $\frac{2k\pi}{m}$ باشد، آن وقت می‌توان ثابت کرد که، چنین دستگاهی، شامل بردارهایی است که به رأس‌های $\frac{m}{d}$ ضلعی منتظم می‌روند که، در آن، d مقسوم‌علیه‌ی m است، $d < m$ ؛ در ضمن به هر رأس، d بردار می‌رود.

حل این مساله نشان می‌دهد که، هر تقسیمی از مجموعه عددهای درست \mathbf{Z} را به چند تصاعد حسابی غیر متقاطع (که از هر دو طرف نامتناهی باشند)، تنها با این روش می‌توان انجام داد: \mathbf{Z} به d تصاعد با قدر نسبت‌های برابر d تقسیم می‌شود، سپس ممکن است یکی (یا چند تا) از آن‌ها به تصاعدهایی

با قدر نسبت‌های برابر تقسیم شود و غیره. کاربرد عددهای مختلط در حل مساله‌های نظری مربوط به عددها را، «روش مجموع‌های مثلثاتی» گویند.

۱۴۴. این مساله را می‌توان با روش استقرار حل کرد. به ازای $n=1$ باید عدد ۲ را انتخاب کرد. اگر $A=2^n \cdot B$ ، عددی n رقمی و بر 2^n بخش پذیر باشد، آن وقت، یکی از عددهای $A+2 \times 10^n$ یا $A+1 \times 10^n$ بر 2^{n+1} بخش پذیر خواهد بود، زیرا یکی از عددهای $B+5^n$ یا $B+2 \times 5^n$ زوج است. ∇ برای هر n ، تنها يك جواب به دست می‌آید؛ از این گذشته، همه عددهای n رقمی، که از رقم‌های ۱ و ۲ تشکیل شده باشند، ضمن تقسیم بر n ، به باقی مانده‌های مختلف می‌رسند. با استفاده از این نکته، می‌توان راه حل دیگری برای مساله پیدا کرد.

۱۴۵. مساله (a) نتیجه‌ای از مساله (b) است، بنابراین تنها به حل این مساله کلی ترمی پردازیم.

نقطه‌های D_k و B_k از خط راست OA_k به يك فاصله‌اند. بنابراین $S_{OA_k B_k} = S_{OA_k D_k}$. اگر n برابری از این گونه را در هم ضرب کنیم و هر مساحت را به صورت ضرب قاعده $A_k B_k$ یا $A_k D_k$ در نصف ارتفاع متناظر بنویسیم (این ارتفاع، برابر است با فاصله از نقطه O تا ضلع چندضلعی)، به برابری مورد نظر می‌رسیم: طول ارتفاع‌ها، در حاصل ضرب‌ها، حذف می‌شوند.

∇ در مساله (a)، با توجه به شرط‌ها، نیروهای $\vec{A_k C_k}$ که در نقطه‌های A_k بر صفحه سخت $A_1 A_2 A_3$ اثر می‌کنند، یکدیگر را خنثا می‌کنند، زیرا صفحه بی‌حرکت می‌ماند؛ مجموع نیروها (به عنوان بردارها) و مجموع گشتاورهای آنها برابر صفر است، زیرا گشتاور هر يك از این نیروها، نسبت به نقطه O ، برابر صفر است.

برای مثلث، برابری حاصل ضرب‌هایی که در صورت مساله آمده، نه تنها لازم، بلکه در ضمن کافی است تا خط‌های راست $A_k C_k$ در يك نقطه O بهم برسند.

۱۴۶. (a) پاسخ: ۱۱ پرسش.

اگر همه ۱۵ عدد واقع در يك سطر، و یکی از عددهای واقع در سطر

دیگر را بدانیم، به سادگی می‌توانیم بقیهٔ عددها را بازسازی کنیم. ولی اگر تنها از ۱ عدد اطلاع داشته باشیم، نمی‌توانیم همهٔ عددها را، به صورت يك ارزشی، پیدا کنیم؛ از يك طرف، در هر ستون، باید دست کم یکی از عددها را بشناسیم، در غیر این صورت می‌توان به هر دو عدد این ستون، عدد دلخواه x را اضافه کرد، بدون این که شرط مساله به هم بخورد؛ از طرف دیگر، دست کم در یکی از ستون‌ها باید هر دو عدد را بشناسیم، زیرا در غیر این صورت، می‌توان عدد دلخواه y را، به عنوان تفاضل دو عدد در هر ستون در نظر گرفت و، سپس، جدول را ساخت.

(b) اثبات را می‌توان با روش استقرای ریاضی داد. $n \geq m$ می‌گیریم و استقرا را نسبت به $m+n$ می‌دهیم. اگر در یکی از n ستون، همهٔ عددها مجهول باشند، آن وقت روشن است که، عددها، به صورت يك ارزشی به دست نمی‌آیند. و اگر در هر يك از n ستون عددهای معلومی وجود داشته باشد، آن وقت (با توجه به این که تعداد کل $m+n-2$ عدد معلوم، از $2n-2$ تجاوز نمی‌کند)، ستونی پیدا می‌شود که در آن، تنها يك عدد معلوم است، و بقیهٔ جدول $m \times (n-1)$ ، که بعد از حذف این ستون باقی می‌ماند، تنها شامل $m+(n-1)-2$ عدد معلوم است و، بنابر فرض استقرا، نمی‌توان جدول را به صورت يك ارزشی بازسازی کرد.

▽ ارزیابی مربوط به این مساله، دقیق است: جدول به صورت

$$\begin{array}{cccc}
 x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
 x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & \dots & x_n + y_1 \quad (*) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_1 + y_{m-1} & x_2 + y_{m-1} & \dots & x_n + y_{m-1}
 \end{array}$$

را می‌توان، به وسیلهٔ $m+n-1$ عدد واقع در سطر اول و ستون اول، بازسازی کرد. پاسخ به پرسش ظریف تر - چه انتخاب Γ از عددهای جدول $m \times n$ برای این منظور مناسب است - می‌تواند به زبان نظریهٔ گراف‌ها، تنظیم شود (ضمیمهٔ ۱۱).

«گراف دو بخشی» Γ را با $m+n$ رأس $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ در نظری می گیریم که، در آن، برخی از رأس های A_i با برخی از رأس های B_j مربوط باشد؛ به این ترتیب، مجموعه ای مثل $\tilde{\Gamma}$ از زوج های (i, j) - عضو- های جدول $m \times n$ ، بدست می آید ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). برای این که، به وسیله این انتخاب $\tilde{\Gamma}$ از زوج عددها، بتوان تمامی جدول را به صورت يك ارزشی بازسازی کرد، لازم و کافی است که، گراف Γ ، مرتبط باشد. در درخت با $m+n$ رأس، با توجه به مسأله ۸، باید درست $m+n-1$ یال وجود داشته باشد. اگر Γ ، يك درخت باشد، آن وقت هر گروه $m+n-1$ عددی را، که خانه های $(i, j) \in \Gamma$ را اشغال کرده اند، می توان طوری تکمیل کرد که، جدول حاصل، شکل مورد نظر (*) را داشته باشد.

۱۴۷. شکل های F_1 و F_2 را که از شکل مفروض F (اجتماع دایره ها) با انتقال به اندازه بردارهای به طول 0.001 و با زاویه 90° درجه بین آنها، به دست آمده اند، در نظر می گیریم.

سه شکل F ، F_1 و F_2 ، یکدیگر را نمی پوشانند و در درون مربع به ضلع $1/001$ قرار دارند. بنا بر این، مساحت S هر يك از آنها، کمتر است از

$$\frac{1}{3} (1/001)^2 < 0.134$$

∇ به همین ترتیب، برای مسأله فضایی مشابه این مسأله، می توان

$$\text{ارزیابی } 0.126 < \frac{1}{4} (1/001)^2 \text{ را به دست آورد.}$$

در روی صفحه، می توان ارزیابی را دقیق تر کرد و، مثلاً، ثابت کرد که

$$S < 0.1287$$

۱۴۸. مقدار آب ظرف های A ، B و C را، به ترتیب، a ، b و c لیتر می گیریم ($0 < a \leq b \leq c$). کافی است با چند بار جابه جایی آب ظرف ها، به آن جا برسیم که، در یکی از ظرف ها، کمتر از a لیتر آب وجود داشته باشد (با تکرار این روند، می توانیم مقدار آب را در یکی از ظرف ها، مرتباً کاهش

دهیم تا به صفر برسد). از تقسیم b بر a به دست می آید: $b = ad + r$ ($0 \leq r < a$). از B و C در ظرف A آب می ریزیم (در A ، $2a$ ، $2^2 a$ ، $2^3 a$ ، ... لیتر آب خواهد بود) تا جایی که از B به اندازه da لیتر آب خارج شده باشد؛ در نتیجه، در B به اندازه $a < r$ لیتر باقی می ماند. این عمل ممکن است، زیرا هر عدد طبیعی را می توان (و در ضمن تنها به یک طریق) به صورت مجموع بعضی از اعداد 1 ، 2 ، 2^2 ، ...، 2^k نوشت: بخش همگامی متناظر $2^k a$ ، باید از B و بقیه آن از C ریخته شود.

در ضمن، مقدار آبی که از C ریخته می شود، باید از مقدار آبی که از B ریخته می شود، بیشتر نباشد. به این ترتیب، آبی که در C وجود دارد، کفایت می کند.

۱۴۹. این شرط که ریشه های سه جمله ای های

$$f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1 \text{ و } f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$$

حقیقی اند و، نسبت به هم، به طور متناوب قرار دارند. هم ارز با این است که نمودارهای $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ در نقطه (x_0, y_0) واقع در زیر محور طول، یکدیگر را قطع کرده باشند: $y < 0$. اگر معادله $f_1(x) = f_2(x)$ را حل کنیم، به دست می آید:

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}, \quad y_0 = R(p_1 - p_2)^2$$

که در آن داریم:

$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1)$$

∇ عبارت R ، تنها وقتی برابر صفر می شود که f_1 و f_2 ریشه های مشترک (و احتمالاً مختلط) داشته باشند. این چند جمله ای شامل ضریب های دو چند جمله ای f_1 و f_2 را (از هر درجه ای)، «بر آیند» آن ها گویند.

۱۵۰. اگر صفحه ها موازی باشند، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می کنیم، دو صفحه، موازی نباشند در این صورت، تصویر جسم بر خط راست l ، فصل مشترک دو صفحه را می توان به عنوان تصویر هر یک از تصویرهای

جسم بر این یا آن صفحه، بر خط راست l به دست آورد. (همه جا، صحبت بر سر تصویر قائم است: مجموعه پای عمودها.) ولی تصویر هر دایره بر خط راستی واقع در صفحه خودش، برابر است با قطر دایره.

۱۵۱. در نتیجه هر عمل، مجموع S از حاصل ضرب‌های دو به دوی عددهای مجاور افزایش می‌یابد. در واقع، در این مجموع، $ab+bc+cd$ به $ac+cb+bd$ تبدیل می‌شود و اگر $(a-d)(b-c) < 0$. آن وقت $ab+cd < ac+bd$ ولی، مجموع S ، بد تعداد محدودی می‌تواند مقدارهای مختلف را اختیار کند (ضمیمه ۱۳).

۱۵۲. مساله کلی (b) را حل می‌کنیم. فرض کنید، خط راست l محیط چند ضلعی محیطی را در دو نقطه R و Q قطع و این محیط را به دو بخش برابر تقسیم کند. در این صورت، اگر O را مرکز دایره محاطی چند ضلعی بگیریم، خط شکسته شامل پاره‌خط‌های راست OQ و OR ، مساحت چند ضلعی را

به دو بخش برابر تقسیم خواهد کرد (این مطلب، شبیه دستور $S = \frac{1}{2} Pr$ برای

مساحت یک چند ضلعی محیطی به محیط P ثابت می‌شود). ولی می‌دانیم، خط راست PQ هم، مساحت چند ضلعی را نصف می‌کند، بنا بر این نقطه O بر خط راست PQ واقع است.

∇ حل این مساله جالب است که: برای مثلث و برای n ضلعی محیطی، چند خط راست از این گونه وجود دارد؟

۱۵۳. حکم مساله، برای n عدد، با شرط $n > 4$ ، درست است و با برهان خلف ثابت می‌شود. فرض می‌کنیم، مجموع یا تفاضل هر دو عدد دلخواه از عددهای مختلف

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$$

بین بقیه $n-2$ عدد وجود داشته باشد. چون $a_n + a_i > a_n$ ، بنا بر این باید داشته باشیم: $(1 \leq i \leq n-1) a_n - a_i = a_{n-i}$. وقتی $n = 2k$ عددی زوج باشد، به دست می‌آید: $a_n - a_k = a_k$ ، یعنی تفاضل a_k و a_n در بین بقیه عددها وجود ندارد. وقتی $n = 2k + 1$ عددی فرد باشد، زوج (a_{n-1}, a_i)

را در نظر می‌گیریم: برای آنها

$$a_{n-1} + a_1 = a_n, \quad a_{n-1} + a_i > a_n \quad (2 \leq i \leq n-2)$$

و بنابراین باید برابری $a_{n-1} - a_i = a_{n-i-1}$ برقرار باشد و، در حالت خاص $a_{n-1} - a_k = a_k$ که باز هم به تناقض می‌رسد.

(۱۵۴. a) ۱۲ راس دوازده ضلعی را، به ۶ جفت رأس رو به رو تقسیم

می‌کنیم: $A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, \dots, A_6A_{12}$. در هر عمل، در هر زوج، تنها یکی از رأس‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، در جفت‌های A_2A_8, A_6A_{12}, \dots بعد از عمل $(2k-1)$ ام علامت‌های مختلف و بعد از عمل $(2k)$ ام علامت‌های یکسان وجود خواهد داشت (در جفت A_1A_7 همه چیز برعکس است). به این ترتیب، حالتی پیش نمی‌آید که در جفت A_2A_8 علامت‌های مختلف و در جفت A_3A_9 علامت‌های یکسان داشته باشیم.

(b) چهار گروه و در هر گروه سه رأس را در نظر می‌گیریم: A_1, A_5, A_9 ،

A_2, A_6, A_{10} ، A_3, A_7, A_{11} و A_4, A_8, A_{12} و مثل حالت قبل استدلال می‌کنیم. فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی هر گروه، در هر عمل تغییر می‌کند و در دو گروه A_2, A_6, A_{10} و A_3, A_7, A_{11} فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی، یکسان است.

(c) رأس‌ها را به سه گروه A_1, A_4, A_7, A_{10} ، A_2, A_5, A_8, A_{11} و A_3, A_6, A_9, A_{12}

تقسیم و به همان ترتیب استدلال می‌کنیم.

∇ به طور کلی می‌توان روشن کرد، اگر در هر عمل k رأس متوالی

یک n ضلعی را تغییر علامت دهیم، پشت سر هم چه وضعی پیش می‌آید. پاسخ

این است: هر گروه $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ از عددهای $\varepsilon_k = \pm 1$ در رأس‌های n ضلعی

را با گروه d عدد

$$(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

به ترتیب زیر مقایسه می‌کنیم (d ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n و k است):

$$x_i = \varepsilon_i \varepsilon_{i+d} \dots \varepsilon_{i+n-d}$$

در این صورت، دو گروه (ε_i) و (ε'_i) ، تنها در حالتی به یکدیگر منجر

می‌شوند که یا گروه‌های متناظر آن‌ها (x_i) و (x'_i) یکی باشند و یا $\frac{k}{d}$ عددی

زوج و گروه‌های (x_i) و (x'_i) متقابل باشند: $x_i = -x'_i$ (برای هر i).

۱۵۵. می‌توان از روش «نصف کردن» استفاده کرد. مربع بزرگ K_0

را از صفحه شامل $2^n \times 2^n$ خانه جدا می‌کنیم، به نحوی که همهٔ خانه‌های سیاه را فراگیرد و بیش از چهار برابر آن‌ها، خانه سفید داشته باشد. در این

صورت، مساحت خانه‌های سیاه، کمتر از $\frac{1}{5}$ مساحت مربع K_0 است. K_1 را

به چهار مربع K_1 ، و در هر کدام $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ خانه، تقسیم می‌کنیم. در

هر یک از مربع‌های K_1 ، خانه‌های سیاه، بیش از $\frac{4}{5}$ مساحت را پر نمی‌کنند،

به نحوی که یا با هر دو شرط (۱ و ۲) سازگار است و یا می‌توان آن را

دوباره به چهار مربع K_2 تقسیم کرد و غیره، تا جایی که مربع‌های 2×2

به دست آید که، از آن‌ها، همهٔ مربع‌های سفید را کنار می‌گذاریم و مربع‌های

شامل یک، دو یا سه خانه سیاه را نگه می‌داریم.

▽ شبیه این مساله را می‌توان برای خط راستی که به پاره‌خط‌های

راست واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$)، و برای فضا که

به مکعب‌های واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{9}$ و $\frac{8}{9}$) تنظیم کرد.

۱۵۶. پاسخ: کمترین تعداد A_n از مکعب‌ها که با شرط سازگار باشند،

برابر است با

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2} n^2 & (\text{برای } n \text{ زوج}) \\ \frac{1}{2} (n^2 + 1) & (\text{برای } n \text{ فرد}) \end{cases}$$

در حالت‌های خاص: $A_2 = 2$ ، $A_3 = 5$ ، $A_4 = 8$ ، $A_5 = 12$ ، $A_{10} = 50$.

اثبات این که با تعداد کمتری مکعب، نمی‌توان به نتیجهٔ مطلوب رسید،

به این صورت است: برای تنظیم مکعب‌های کوچک که با شرط مساله سازگار باشند، در هر خانه از وجه پایینی مکعب اصلی عددی را می‌نویسیم که نشان دهد چند مکعب کوچک روی آن خانه قرار دارد. اکنون از يك پيش قضيه استفاده می‌کنیم.

پيش قضيه. در جدولی $n \times n$ عددهای درست غیرمنفی را قرار داده‌ایم؛ در ضمن، برای هر جفت سطر و ستونی که، در برخورد آن‌ها، عدد صفر قرار دارد، مجموع $1 - 2n$ عدد موجود در آن‌ها (که «صلیبی» را تشکیل داده‌اند)، از n کمتر نیست. در این صورت، مجموع همه عددهای جدول، از $\frac{n^2}{2}$ کمتر نخواهد بود.

اثبات این پيش قضيه، با استدلالی خیلی شبیه حل مساله ۱۲۶ به دست می‌آید.

اگر کمترین مجموع را در سطرها و ستون‌ها برابر $n < m$ بگیریم (فرض کنید، این کمترین مجموع، متعلق به سطر اول باشد)، آن وقت، در این سطر، حداقل $n - m$ صفر وجود دارد؛ و در هر يك $n - m$ ستونی که از آن‌ها آغاز می‌شود، حداقل مجموع عددها برابر $n - m$ است. ولی در هر يك از m ستون بقیه، مجموع عددها، از m کمتر نیست و، به این ترتیب، مجموع کل، حداقل برابر است با

		۴	۳	۵
		۳	۵	۴
		۵	۴	۳
۱	۲			
۲	۱			

$n = 5$

					۶	۷	۸	۹	۱۰
					۷	۸	۹	۱۰	۶
					۸	۹	۱۰	۶	۷
					۹	۱۰	۶	۷	۸
					۱۰	۶	۷	۸	۹
۱	۲	۳	۴	۵					
۲	۳	۴	۵	۱					
۳	۴	۵	۱	۲					
۴	۵	۱	۲	۳					
۵	۱	۲	۳	۴					

$n = 10$

شکل ۶۴

$$(n-m)^2 + m^2 \geq \frac{n^2}{2}$$

نمونه استقرار ۱۲ مکعب واحد در مکعب $5 \times 5 \times 5$ و ۵۰ مکعب واحد در مکعب $10 \times 10 \times 10$ را در شکل ۶۴ داده‌ایم که، در آن، عدد واقع در خانه، شماره قشری را نشان می‌دهد که، مکعب واحد، در روی این خانه، واقع شده است. به همین ترتیب، می‌توان نمونه لازم برای بقیه مقادارهای n را ساخت.

۱۵۷. باید برای هر نقطه (x, y) از صفحه، نقطه (m, n) را، با مختصات درست، طوری پیدا کنیم که، به ازای آن، مقدار $f_a(x-m, y-n)$ حداقل مقدار ممکن باشد و مرز بالای این حداقل

$$\bar{f}_a(x, y) = \min_{m, n} f_a(x-m, y-n)$$

را پیدا کنیم. مقدار $\sqrt{f_a(x_1-x_2, y_1-y_2)}$ را فاصله بین نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌نامیم. شبیه فاصله عادی

$$\sqrt{f_0(x_1-x_2, y_1-y_2)} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

یادآوری می‌کنیم که، برای این فاصله، ارزیابی دقیق، چنین است:

$$\bar{f}_0(x, y) \leq \frac{1}{2}$$

در واقع، برای هر مربع $m - \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2}$ ، $n - \frac{1}{2} \leq y \leq n + \frac{1}{2}$ ،

فاصله از هر نقطه (x, y) آن تا مرکز (m, n) آن، از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ بیشتر نیست؛

در ضمن، برای هر رأس این مربع، این فاصله برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، یعنی

$$f_0(x, y) = \frac{1}{2}$$

بقیه «فاصله‌های» $\sqrt{f_a}$ ($0 < a < 2$) را هم مورد بررسی قرار می-

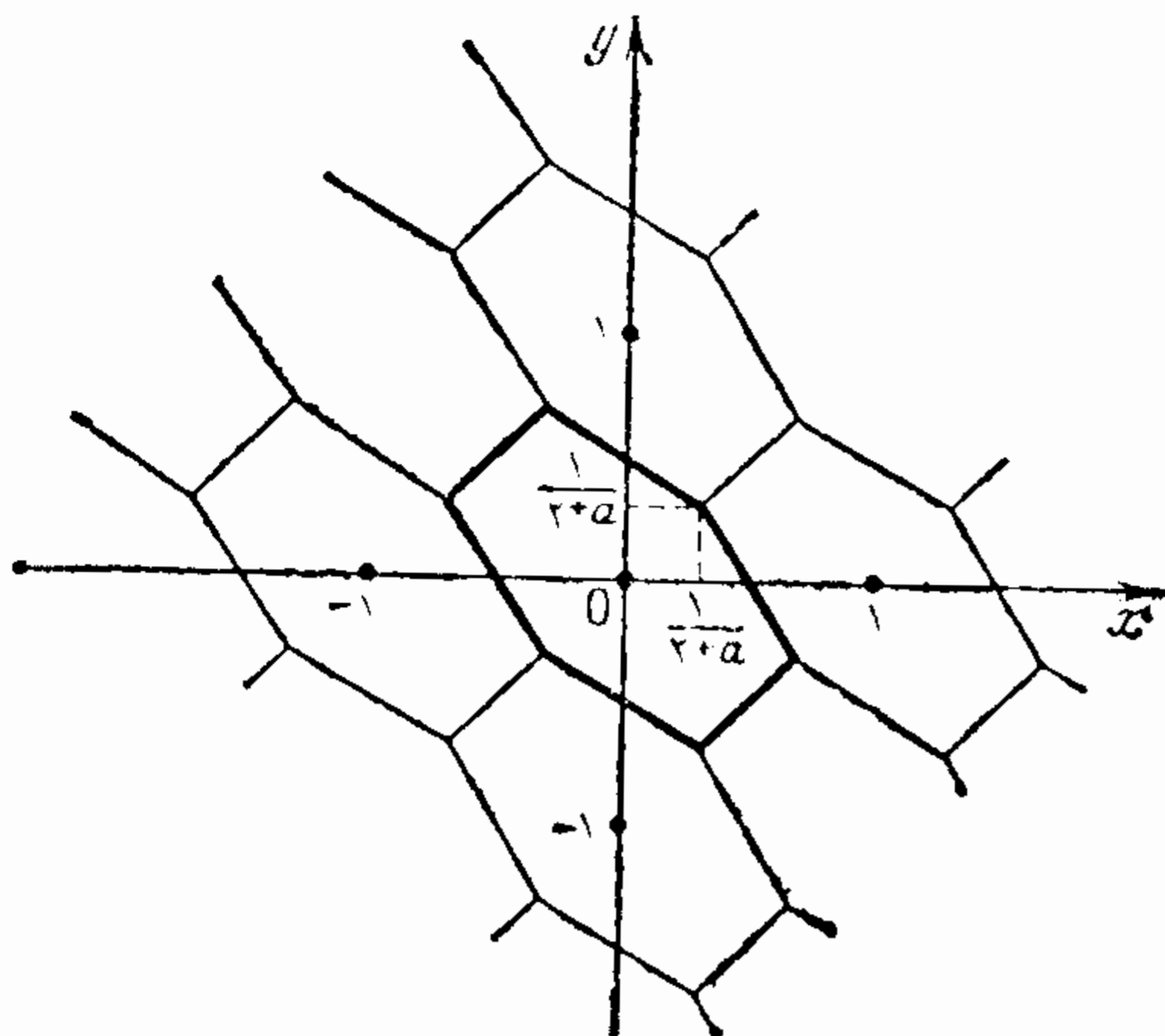
دهیم. صفحه را به شکل‌های $\Phi_{m,n}$ با معیار زیر تقسیم می‌کنیم: نقطه (x, y) به $\Phi_{m,n}$ تعلق دارد، وقتی که «فاصله» از آن تا (m, n) کمتر (یا نه بیشتر) از فاصله آن تا هر نقطه دیگر شبکه باشد (منظور از شبکه، مجموعه نقطه‌های با مختصات درست است). کافی است شکل $\Phi_{0,0}$ را با مرکز $(0,0)$ پیدا کنیم؛ بقیه به کمک آن، با انتقال مرکزها روی بردار با مختصات (m, n) به دست می‌آیند؛ چون ضمن این انتقال‌ها، «فاصله» \sqrt{f} حفظ می‌شود، بنا بر این نظامی هم که به وسیله آن، نقطه‌های حوزه با این یا آن مرکز انتخاب می‌شوند، حفظ می‌شود. اکنون از این نکته استفاده می‌کنیم که مجدورفاصله، f ، تابع درجه دومی از مختصات است. مجموعه نقطه‌هایی که به $(0,0)$ نزدیک‌ترند تا به (m, n) ، یک نیم صفحه را تشکیل می‌دهند؛ نابرابری

$$x^2 + axy + y^2 \leq (x-m)^2 + a(x-m)(y-n) + (y-n)^2$$

هم‌ارز است با نابرابری خطی

$$(2m+an)x + (2n+am)y \leq m^2 + amn + n^2$$

برای این که شکل $\Phi_{0,0}$ را پیدا کنیم، باید اشتراک همه این نیم صفحه‌ها را نسبت به همه مقادیرهای (m, n) ، به جز $(0,0)$ به دست آوریم. برای این منظور، کافی است تنها شش تا از آنها را که متناظر با شش زوج



شکل ۶۵

$(\pm 1, 0)$ ، $(1, -1)$ و $(-1, 1)$ هستند، در نظر بگیریم. این مطلب وقتی روشن می‌شود که قانع شویم، اشتراك این شش نیم صفحه (این اشتراك، يك شش ضلعی محدب است: $-1 \leq 2x + ay \leq 1$ ، $-1 \leq ax + 2y \leq 1$ ، $-1 \leq x - y \leq 1$) با تصویرهای خود، ضمن انتقال موازی روی بردارهای (m, n) ، برخورد ندارد (اگر دقیق‌تر بگوییم، با آنها، تنها در بخشی از مرزها مشترك است؛ شکل ۶۵). به این ترتیب، $\Phi_{0,0}$ نمی‌تواند کوچکتر از این شش ضلعی باشد و، بنابراین، بر آن منطبق است. ما کزیمم $f_a(x, y)$ به ازای $(x, y) \notin \Phi_{0,0}$ ، در رأس‌های این شش ضلعی به دست می‌آید، زیرا ضمن حرکت پاره‌خطی از هر خط راست

$$x = b + ut, \quad y = c + vt$$

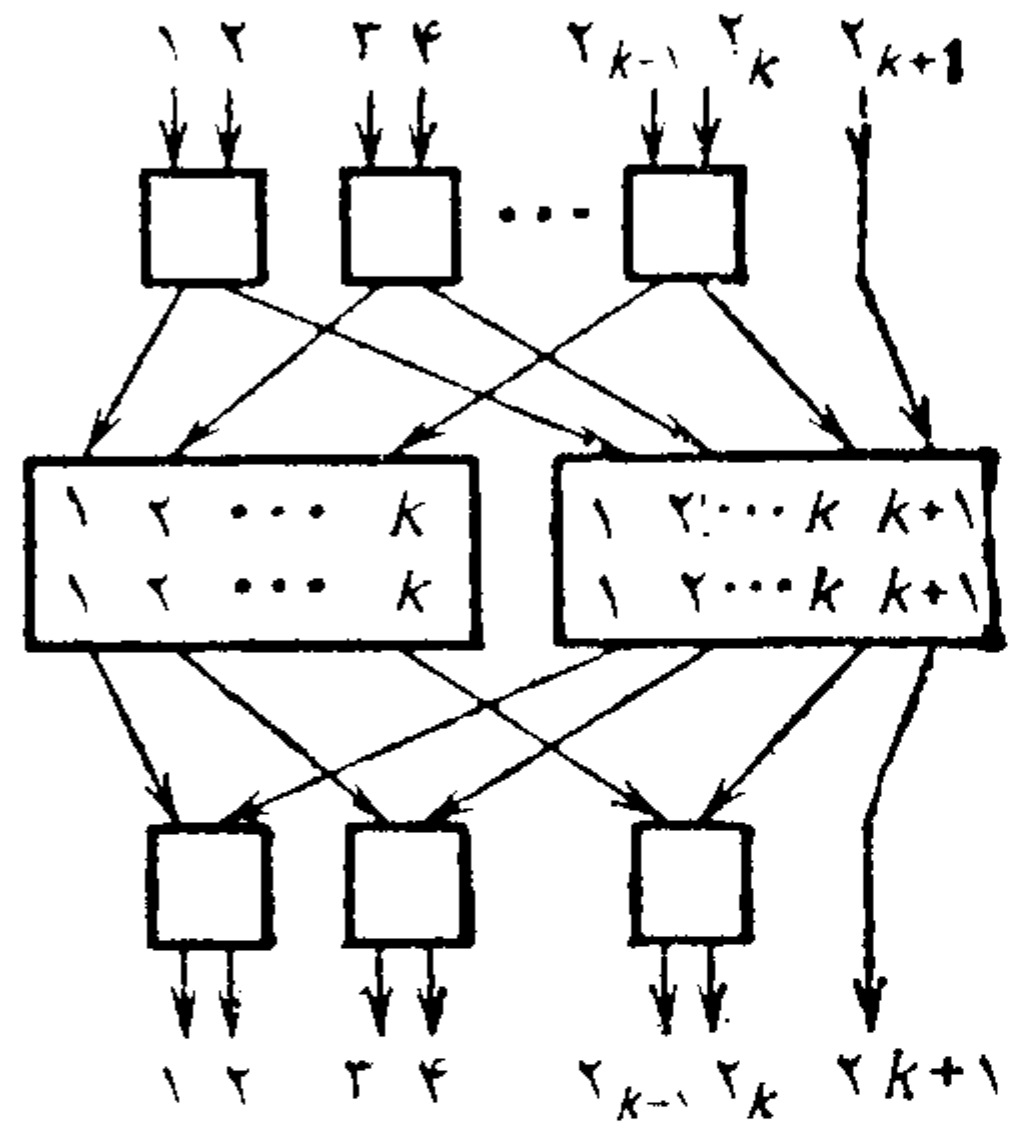
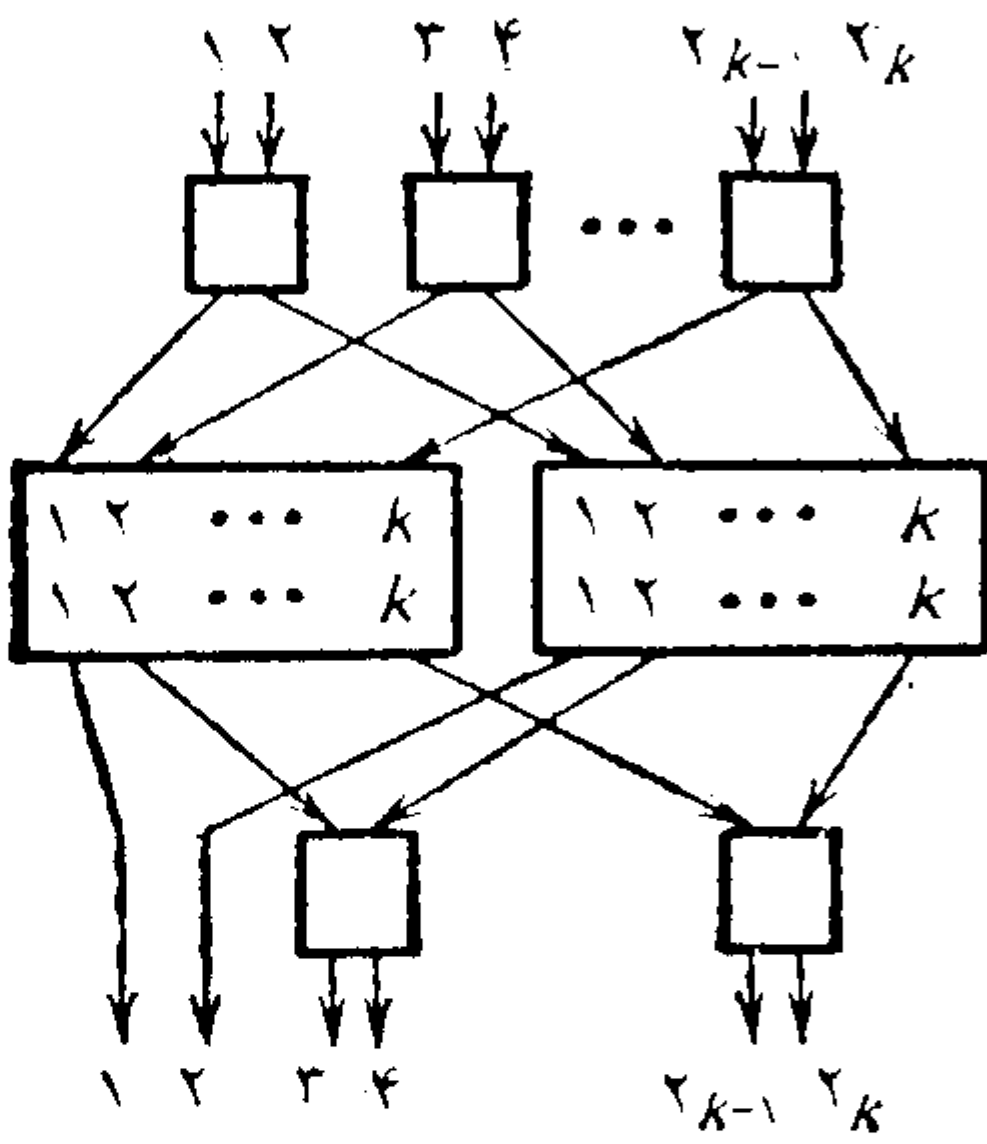
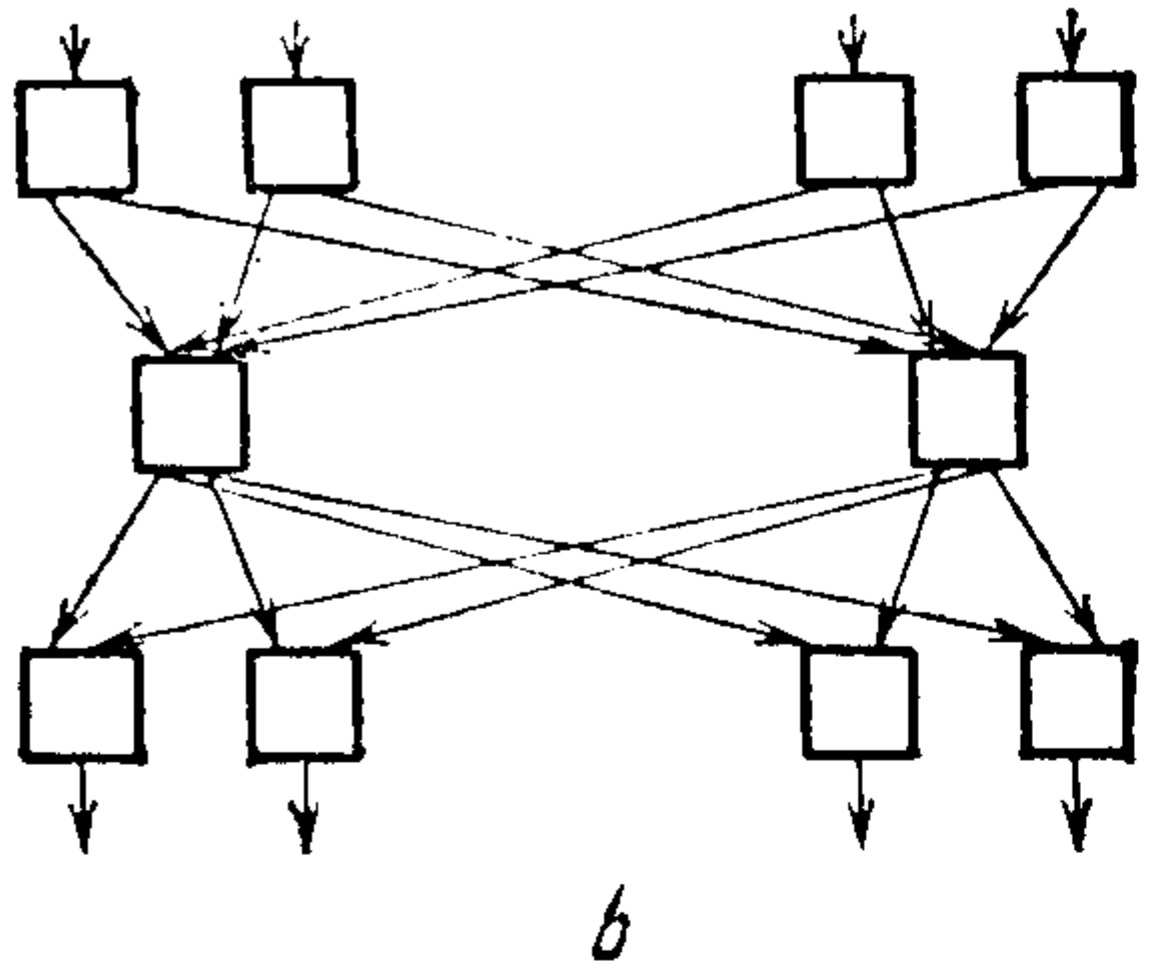
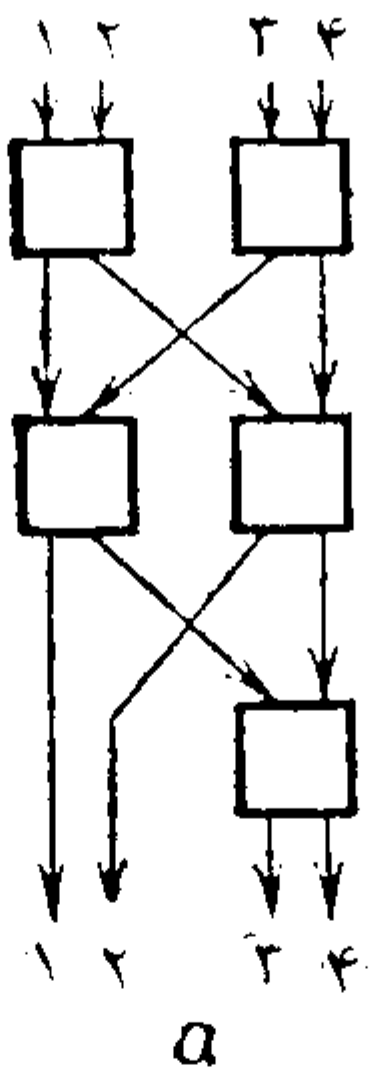
مجذور فاصله $f_a(b + ut, c + vt)$ ، به صورت سه جمله‌ای درجه دومی به t بستگی دارد که، در آن، ضریب t^2 برابر $u^2 + auv + v^2$ و مثبت است، به نحوی که f_a در دو انتهای پاره‌خط به ما کزیمم خود می‌رسد. با پیدا کردن مختصات رأس‌ها (شکل ۶۵) و قرار دادن آنها در عبارت f_a ، ارزیابی دقیقی برای f_a ، به دست می‌آید: $f_a \leq \frac{1}{a+2}$ ، همین ارزیابی برای $a=2$ هم درست است، وقتی که $f_2(x, y)$ ، به طور ساده عبارت است از مجذور

$$f_2(x, y) \leq \frac{1}{4}$$

فاصله بین $x+y$ و نزدیکترین عدد درست:

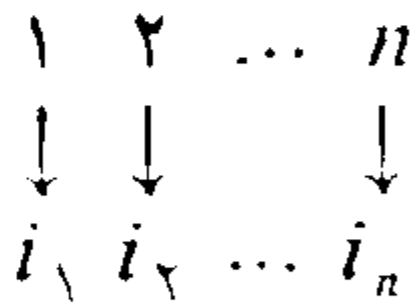
∇ اندیشه اصلی حل این مساله - تقسیم صفحه به حوزه‌هایی شامل مرکزهای مفروض، به نحوی که هر نقطه متناظر با نزدیکترین مرکز باشد - در مساله‌های مختلف آنالیز، هندسه و نظریه عددها کاربرد دارد.

۱۵۸. ابتدا حداقل کلیدهای تبدیل لازم را تخمین می‌زنیم (ارزیابی از پایین). چون هر کلید تبدیل می‌تواند در دو موقعیت قرار گیرد، بنابراین طرح شامل m کلید، می‌تواند 2^m موقعیت مختلف داشته باشد. اگر بخواهیم هر n اتصال مختلف n ورودی و n خروجی برای تعداد m کلید تحقق یابد:



c

شکل ۶۶



که در آن (i_1, i_2, \dots, i_n) هر تبدیلی از عددهای $1, 2, \dots, n$ است، باید نابرابری $2^m \geq n$ برقرار باشد، یعنی، تعداد کلیدها در طرح «همه کاره»، حداقل برابر $\log_2(n!)$ باشد.

در حالت خاص، برای $n=3$ به دست می آید: $2^m \geq 6$ ، یعنی $m=3$ ؛ به سادگی روشن می شود که، طرح مربوط به شکل ۸، b (در صورت مساله)، نمونه ای از «طرح همه کاره مرتبه ۳» است. برای $m=4$ به دست می آید: $2^4 = 16 \geq 24 = 4!$ ، از آن جا $m \geq 5$ در واقع، طرح همه کاره با ۵ کلیدرامی توان ساخت: تحقیق کنید، طرح شکل ۶۶، a، به ازای $2^5 = 32$ وضع مختلف

کلید، همهٔ 2^4 تبدیل ممکن از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ را تحقق می‌بخشد. اثبات طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۸، که در شکل ۸، C (در صورت مساله) داده شده است؛ در عمل ممکن نیست: عدد $8!$ ، عدد خیلی بزرگی است، ولی می‌توان قانون ساده‌ای را پیدا کرد و، به کمک آن، روشن کرد که هر تبدیل مفروض φ از ۸ عنصر $k \rightarrow i_k$ ($k \in \{1, 2, \dots, 8\}$)، روی طرح وجود دارد. این قانون باید نشان دهد که، از طریق هر بلوک A یا B - هر يك از ۸ ارتباط $k \rightarrow \varphi(k) = i_k$ تحقق می‌یابد. در ضمن باید این شرط‌ها هم برقرار باشند:

اگر $k - l = 4$ یا $i_k - i_l = 4$ ، آن وقت ارتباط‌های $k \rightarrow i_k$ و $l \rightarrow i_l$ باید از بلوک‌های مختلف A و B بگذرند.

روشن است که، این شرط‌ها، برای نبودن «چسبندگی» (موقعیتی که در آن، در شبکهٔ تلفنی، دو ورودی به يك خروجی، یا برعکس، مربوط شده باشد)، لازم و کافی است.

قانون مورد نیاز ما، چنین است:

دو زوج $z \rightarrow \varphi(z)$ و $l \rightarrow \varphi(l)$ را «مجاورهای» زوج $k \rightarrow \varphi(k)$ می‌نامیم، وقتی که داشته باشیم: $|k - z| = 4$ و $|\varphi(k) - \varphi(l)| = 4$ ، در این صورت، همهٔ زوج‌های $k \rightarrow \varphi(k)$ به گروه‌هایی (دوره‌ایی) تقسیم می‌شوند که، برای هر کدام از آن‌ها، دو «مجاور» وجود دارد؛ در ضمن این دوره‌ها، شامل تعداد زوجی از این زوج‌ها خواهند بود. در هر دور، به تناوب، ارتباط $k \rightarrow \varphi(k)$ از طریق بلوک A و یا از طریق بلوک B تحقق می‌یابد و، بنا بر این، «مجاورها» از طریق بلوک‌های مختلف، به هم ارتباط پیدا می‌کنند.

اکنون از «همهٔ کاره‌های مرتبهٔ ۴» بلوک‌های A و B ، «همه‌کارهٔ مرتبهٔ

۸» تمامی طرح نتیجه می‌شود:

به همین ترتیب، می‌توان «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ 2^{k+1} » را با آغاز از دو «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ 2^k » و، باز هم، $2^k \times 2$ کلید ساخت. اگر از «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۴» با ۵ عضو آغاز کنیم (و این البته، بهتر از آن است که از کلید همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۲ آغاز کنیم و، به جای شکل ۶، a از طرح همه‌کارهٔ

مرتبه ۴ - شکل ۶۶، b - از ۱۰ عضو را به دست آوریم، آن وقت به ازای $n = 2^k$ ، طرح شامل $\frac{11n}{4} - 2n \log_2 n$ کلید خواهد بود (و در حالت خاص $n = 8$ ، ۲۶ کلید)، که برای هر $n \neq 2^k$ ، ارزیابی از بالا را، برای تعداد کلیدها در طرح «همه کاره مرتبه n » از ردیف $2n \log_2 n$ می‌دهد. تنها بهتر است، برای ساختن طرح (شکل ۶۶، c)، از «همه کاره مرتبه k » به همه کاره $2k$ و $2k + 1$ برویم و ارزیابی از بالا را، تا $n \log_2 n$ بهبود بخشیم. توجه کنیم که، برای مقادیرهای بزرگ n ، داریم:

$$\log_2 n \approx n(\log_2 n - \log_2 e)$$

۱۵۹. نقطه برخورد خط‌های راست CD و QN را R و مرکز مستطیل $ABCD$ را O می‌نامیم. از $OM = ON$ نتیجه می‌شود: $PC = CR$ و، بنا بر این، مثلث PNR متساوی الساقین است (NC ، هم ارتفاع و هم میانه این مثلث است).

حکم مساله، از برابری‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{MNP} = \widehat{NPR}, \widehat{QNM} = \widehat{QRP}$$

۱۶۰. $[a_1, b_1]$ را، پاره‌خط راستی با حداقل انتهای راست فرض می‌کنیم. اگر تعداد پاره‌خط‌های شامل نقطه b_1 ، از ۷ بیشتر باشد، مساله حل شده است. اگر این تعداد، کمتر یا برابر ۷ باشد، آن وقت دست کم ۴۳ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست $[a_1, b_1]$ قرار گرفته‌اند، در بین آنها، نقطه $[a_2, b_2]$ را، با حداقل انتهای راست در نظر می‌گیریم. در این صورت یا b_2 متعلق به ۸ پاره‌خط راست است و یا ۳۶ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست b_2 قرار دارند. با ادامه این استدلال، یا به نقطه‌ای برخورد می‌کنیم که به ۸ پاره‌خط راست تعلق دارد و یا ۷ پاره‌خط راست $[a_1, b_1]$ ، $[a_2, b_2]$ ، ...، $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شوند که برخوردی با هم ندارند. در سمت راست این ۷ پاره‌خط راست، دست کم $50 - 7k$ پاره‌خط راست دیگر وجود خواهد داشت، یعنی دست کم یک پاره‌خط

راست $[a_n, b_n]$ در سمت راست $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ پیدا می‌شود.

∇ درست به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که در بین $mn+1$ پاره‌خط واقع بر یک خط راست یا $m+1$ پاره‌خط دو به دو نامتقاطع وجود دارد و یا $n+1$ پاره‌خطی که دارای نقطهٔ مشترک‌اند. در این جا، مسالهٔ دیگری شبیه این مساله را می‌آوریم: از بین $mn+1$ عدد طبیعی می‌توان یا زنجیره‌ای از $m+1$ عدد طبیعی انتخاب کرد که، هر کدام از آنها، بر عدد قبلی خود بخش پذیر باشد و یا $n+1$ عدد که، از آنها، هیچ کدام بر دیگری بخش پذیر نباشد. این‌ها، حالت‌های خاصی از قضیهٔ کلی دیلوآورس‌اند: در هر مجموعهٔ مرتب جزئی، که دارای $mn+1$ عضو است، یا زنجیره‌ای از $m+1$ عضو وجود دارد که به ردیف صعودی‌اند و یا $n+1$ عضو که دو به دو نسبتی باهم ندارند.

برای این که، این قضیه را، در مورد مسالهٔ مربوط به پاره‌خط‌ها به کار بریم، باید این طور به حساب آوریم که: یک پاره‌خط وقتی «بزرگتر» از دیگری است که، به طور کامل، در سمت راست آن واقع باشد؛ در این صورت، پاره‌خط‌های «دو به دو نامتقاطع»، بدیناچار نقطهٔ مشترکی نخواهند داشت (این نقطهٔ مشترک، عبارت است از سمت چپ‌ترین نقطه از انتهای راست آن‌ها).

۱۶۱. پاسخ: $x = 1972$.

به سادگی می‌توان نوشت:

$$4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 2^{54} (1 + 2 \times 2^{1945} + 2^{2x-54})$$

و برای این که مقدار داخل پرانتز مجذور کامل باشد، باید داشته باشیم:

$$2x - 54 = 2 \times 1945 \Rightarrow x = 1972$$

اکنون اگر فرض کنیم $x > 1972$ ، آن وقت.

$$2^{2(x-27)} < 1 + 2 \times 2^{1945} + 2^{2(x-27)} < (2^{x-27} + 1)^2$$

یعنی عدد مفروض، بین مجذورهای دو عدد متوالی قرار می‌گیرد.

۱۶۲. ابتدا درستی این دو گزاره را ثابت می‌کنیم:

الف) اگر $a^k + b^k$ بر $a^n + b^n$ بخش پذیر باشد، آن وقت $a^{k-n} - b^{k-n}$ هم بر $a^n + b^n$ بخش پذیر است.

ب) اگر $a^t - b^t$ بر $a^n + b^n$ بخش پذیر باشد، آن وقت $a^{t-n} + b^{t-n}$ هم بر $a^n + b^n$ بخش پذیر است.

این دو گزاره، با توجه به این که a و b نسبت به هم اول اند، از اتحادهای

زیر نتیجه می شوند:

$$a^k + b^k = a^{k-n}(a^n + b^n) - b^n(a^{k-n} - b^{k-n});$$

$$a^t - b^t = a^{t-n}(a^n + b^n) - b^n(a^{t-n} + b^{t-n})$$

ضمن تقسیم m بر n می توان نوشت:

$$m = qn + r, \quad (0 \leq r < n)$$

اگر q مرتبه، n را از m کم کنیم، r به دست می آید.

از شرط مساله و گزاره های الف) و ب) نتیجه می شود که: $a^r + (-1)^q b^r$

بر $a^n + b^n$ بخش پذیر است، ولی $a^n + b^n < |a^r + (-1)^q b^r| \leq 0$. بنا بر این

$r = 0$ (و در ضمن، q عددی است فرد).

۱۶۳. فرض می کنیم، در برخی سطرهای جدول، به عددهای یکسان

برخورد کنیم. در بین این سطرها، بالاترین سطر را با شماره n ، و عددهای

برابر در این سطر را با p و q نشان می دهیم.

چون در $(n-1)$ امین سطر، عددهای برابر وجود ندارد، باید p و q

از عددهای r و s این سطر و با عمل های متفاوت به دست آمده باشند: فرض

کنید $p = r^2$ و $q = s + 1$ ؛ در این صورت $s = r^2 - 1$.

در مسیر از بالاترین عدد a به طرف s ، می توان هم به مجذور کردن

و هم به اضافه کردن یک واحد، برخورد کرد. بزرگترین عددی که مجذور

شده است، می تواند $r - 1$ باشد (زیرا $s = r^2 - 1$). و این به معنای آن است

که، عدد s ، می تواند از آخرین مجذور کاملی که در مسیر واقع است و دست

کم بعد از $2r - 2 = (r - 1)^2 - 1 - r^2$ گام به دست آمده باشد؛ در ضمن،

در هر گام، یک واحد اضافه شده است. به این ترتیب، عدد s ، از عدد a ،

دست کم بعد از $2r - 1$ گام به دست آمده است (یعنی $2r - 1 \geq n - 2$). ولی عدد r هم، در همان سطر s واقع است و برای رسیدن از a به چنین عددی، دست کم $a + 2r - 1 > r$ گام لازم است. به این ترتیب، در مسیر به دست آمدن s ، مجذور کردنی وجود نداشته است، به نحوی که q در انتهای سمت راست قرار دارد و کوچکترین عدد در سطر n است؛ چیزی که با فرض $p = q$ تناقض دارد.

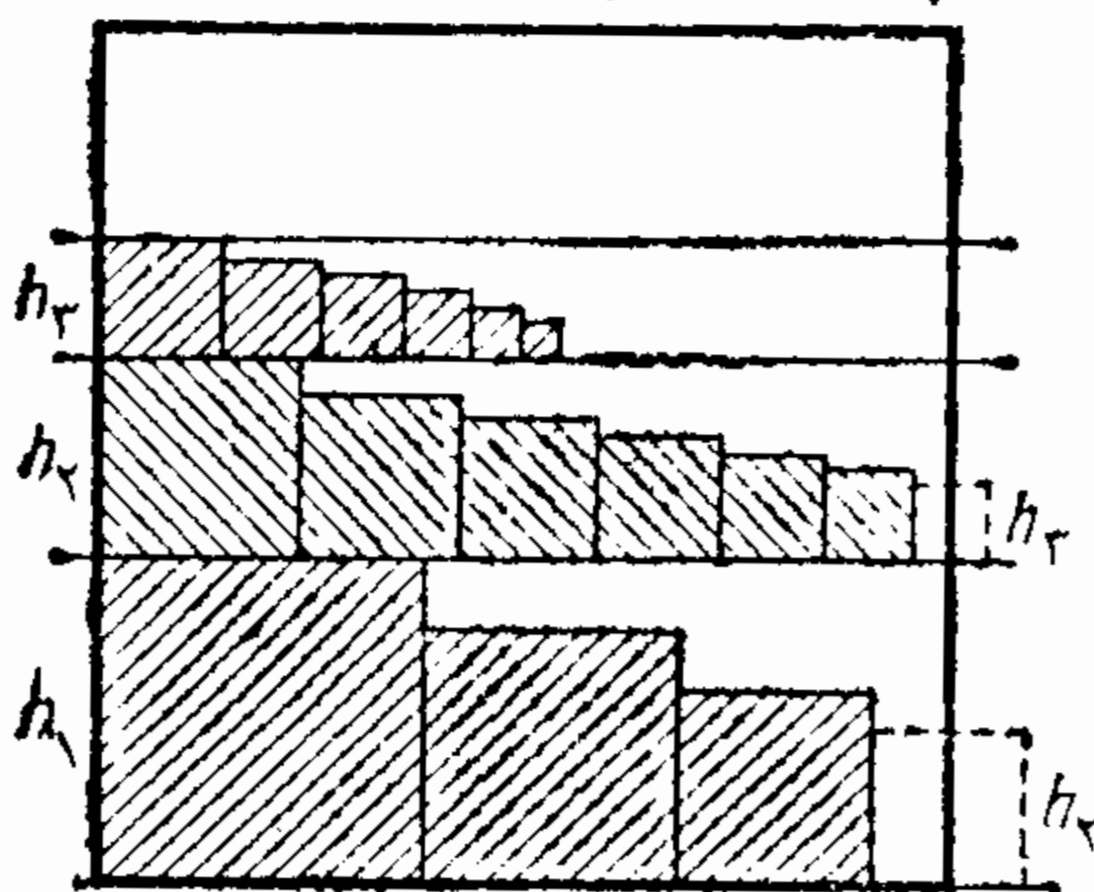
▽ با تجزیه و تحلیل راه حل مساله، روشن می شود که، عمل مجذور کردن را، می توان با هر تابع f که مقدارهای طبیعی را قبول می کند عوض کرد، به شرطی که داشته باشیم:

$$f(n+1) - f(n) > n+1$$

۱۶۴. مربع ها را به ردیف نزولی ضلع ها و با آغاز از بزرگترین

مربع 2×2 ، از چپ بدراست، روی ضلع پایینی مربع به مساحت $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ قرار می دهیم (شکل ۶۷)؛ وقتی به جایی رسیدیم که جایی برای مربع بعدی نمانده باشد - یعنی از ضلع سمت راست مربع به ضلع $\sqrt{2}$ خارج شود - به ضلع بالای مربع چپ می رویم، این ضلع را به صورت خط راست افقی ادامه می دهیم و ردیف جدید را آغاز می کنیم. ضلع مربع هایی را که به ضلع سمت چپ مربع به ضلع $\sqrt{2}$ چسبیده اند، به ترتیب، h_1, h_2, h_3, \dots می گیریم. باید ثابت کنیم، ارتفاع

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots < \sqrt{2}$$



شکل ۶۷ $\sqrt{2}$

یعنی، این مربع‌های سمت چپ، از ضلع بالایی مربع به ضلع $\sqrt{2}$ بیرون نمی‌روند.

مجموع مساحت‌های این مربع‌ها را ارزیابی می‌کنیم. در ذهن خود، هر مربع سمت چپ به ضلع h_k را ($k = 2, 3, \dots$) به انتهای ردیف قبلی ($k-1$) منتقل می‌کنیم. این مربع از ضلع سمت راست مربع به ضلع $\sqrt{2}$ بیرون می‌زند، بنابراین بعد از این روند، مساحت مربع‌های ردیف ($k-1$)، کمتر از $h_k (\sqrt{2} - x)$ نخواهد بود؛ در ضمن در ردیف اول، مربع بزرگتر سمت چپ را به حساب نمی‌آوریم. به این ترتیب، مجموع مساحت‌های همه مربع‌ها - که بنا بر فرض برابر واحد است - کمتر از

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h_2 + h_3 + \dots) = x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x)$$

نخواهد بود. از این جا می‌توان h را ارزیابی کرد. چون $\sqrt{2} - x > 0$ بنا بر این از نابرابری $x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leq 1$ نتیجه می‌شود:

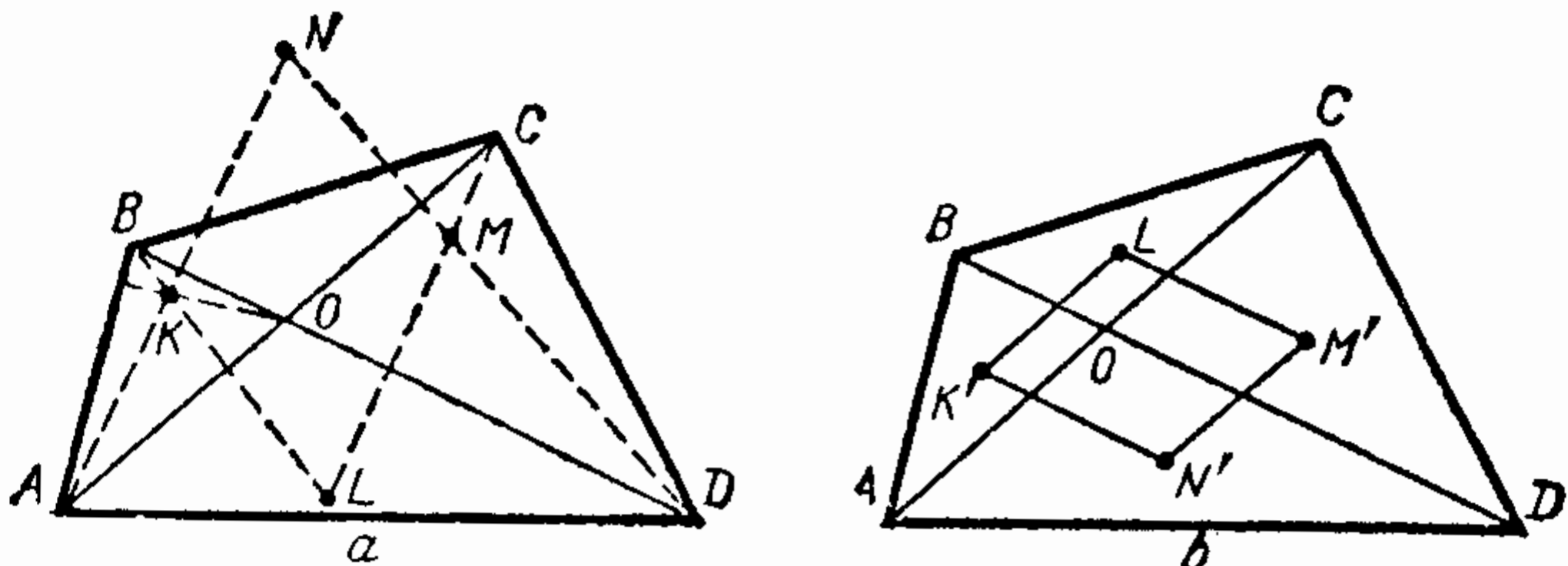
$$h \leq \frac{1 - x^2}{\sqrt{2} - x} + x = \sqrt{2} \left(\frac{1 - x^2}{2 - x\sqrt{2}} + x \right) \leq \sqrt{2}$$

زیرا مقدار داخل پرانتز به صورت $1 + \frac{1}{t}$ است و از ۲ کمتر نیست (برابری

تنها به ازای $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ممکن است).

۱۶۵. K, L, M, N را، به ترتیب، محل برخورد ارتفاع‌های

مثلث‌های AOB, BOC, COD می‌گیریم. این نقطه‌ها، رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، زیرا دو ضلع آن روی خط‌های



شکل ۶۸

راستی قرار دارند که از A و C بر BD عمود شده‌اند و دو ضلع دیگر آن روی خط‌های راستی که از B و D بر AC عمود شده‌اند (شکل ۶۸، a).

نقطه‌های K' ، L' ، M' و N' ، محل برخورد میانه‌های مثلث‌های AOB ، BOC ، COD و DOA ، رأس‌های متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند که دو ضلع آن موازی BD هستند و پاره‌خط راست AC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و دو ضلع دیگر آن با AC موازی‌اند و BD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند (شکل ۶۸، b).

روشن است که، ضلع‌های متناظر این دو متوازی‌الاضلاع، برهم عمودند. ثابت می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع‌ها متشابه‌اند؛ از آنجا نتیجه می‌گیریم که، اگر یکی از آن‌ها را به اندازه 90° درجه دوران دهیم، نه تنها ضلع‌ها، بلکه قطرهای آن‌ها هم باهم موازی می‌شوند، یعنی $K'M' \perp KM$ (و $L'N' \perp LN$). برای اثبات تشابه دو متوازی‌الاضلاع، باید نسبت ضلع‌ها برابر باشند. طول ضلع‌های $K'L'$ و KN برابرند با $\frac{1}{3} AC$ و $\frac{1}{3} BD$. تصویر ضلع KL بر BD ، بر تصویر پاره‌خط راست AC بر BD ، منطبق است. بنابراین

$$KL = AC \cdot \cot \varphi$$

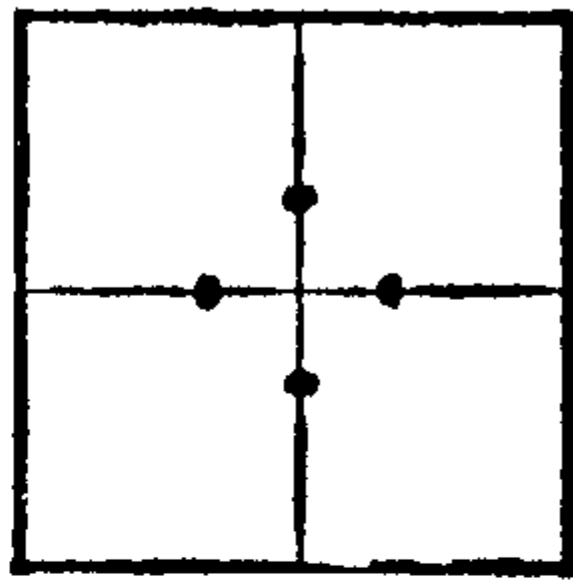
که در آن، φ ، زاویه حاده بین خط‌های راست AC و BD است. به همین ترتیب

$$KN = BD \cdot \cot \varphi$$

به این ترتیب، ضلع‌های دو متوازی‌الاضلاع به نسبت $AC:BD$ هستند، یعنی باهم منشأ‌بداند.

در حالتی که φ ، زاویدای قائمه باشد، نقطه‌های K ، L ، M و N برهم منطبق می‌شوند و مساله مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱۶۶. هر خط راست، مربع را به دو ذوزنقه (یا دو مستطیل)، با نسبت مساحت‌های ۲:۳ تقسیم می‌کند. پاره‌خط راستی هم که وسط دو ضلع روبه‌روی



شکل ۶۹

مربع را به هم وصل می‌کند (که در ضمن، از وسط ساق‌های دوزنقه‌ها هم می‌گذرد)، به وسیله ساق مایل دوزنقه، به‌همین نسبت قطع می‌شود؛ و این، از آن‌جا ناشی می‌شود که، مساحت دوزنقه برابر است با حاصل ضرب ارتفاع در پاره‌خط راستی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند.

از این‌گونه نقطه‌ها، که پاره‌خط راست بین وسط دو ضلع روبه‌روی مربع را به نسبت ۲:۳ تقسیم می‌کنند، روی هم چهار تا وجود دارد (شکل ۶۹) و، بنابراین، از بین ۹ خط راست منروض، دست‌کم سه تا از یکی از این نقطه‌ها می‌گذرند (ضمیمه ۹).

۱۶۷. با استفاده از قضیه مربوط به زاویه‌های محاطی، مجموع سه زاویه A_1 ، A_3 و A_5 را می‌توان به عنوان نصف مقدار زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} & (\widehat{A_7 A_1 A_1}) + (\widehat{A_2 A_3 A_4}) + (\widehat{A_4 A_5 A_6}) = \\ & = 720^\circ + \widehat{A_6 A_7} \end{aligned}$$

بنابر شرط مساله، نقطه O در درون هفت ضلعی است و، بنابراین کمان $A_6 A_7$ نمی‌تواند از 180° درجه بیشتر و یا با آن برابر باشد، یعنی

$$\widehat{A_1} + \widehat{A_3} + \widehat{A_5} < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$$

۱۶۸. چهار مرتبه این تفاضل را، به ترتیب از چپ به راست، r_4, r_3, r_2, r_1 می‌نامیم. بازی به دو مرحله تجزیه می‌شود: «آغاز» و «پایان» - مرحله دوم وقتی شروع می‌شود که نفر دوم، رقمی را در مرتبه بزرگتر r_1 قرار می‌دهد. روشن است که در مرحله «آغاز»، نفر اول نباید رقم‌های کوچک (از ۰ تا ۳) یا رقم‌های بزرگ (از ۶ تا ۹) را نام ببرد. زیرا نفر دوم، این رقم را، در

۲۱ می گذارد (رقم کوچکتر را در عدد اول، و رقم بزرگتر را در عدد دوم) و در این صورت، نفر دوم برنده می شود: اگر اختلاف رقم های اول از ۳ بیشتر نباشد، اختلاف عددها از ۳۹۹۹ بیشتر نمی شود. برعکس، اگر اولی از رقم ۴ (یا ۵) شروع کند، آن وقت، دومی می تواند به تفاضلی برسد که از ۴۰۰۰ کمتر نباشد: او در حرکت خود، $r_1 = (4)$ یا $r_1 = (5)$ قرار می دهد، سپس همه رقم های ۰ (یا ۹) را، اگر اولی نام ببرد، در مرتبه های r_2 ، r_3 و r_4 می گذارد، تا وقتی که کار به پایان برسد؛ در این صورت، اولی نمی تواند به وضعی بهتر از $\begin{matrix} 4000 \\ 0000 \end{matrix}$ (یا $\begin{matrix} 9999 \\ 5999 \end{matrix}$) برسد. برای دومی برنامه های تنظیم کردیم که حکم a را ثابت می کند.

ولی، اگر دومی رقم های ۴ و ۵ را در مرتبه های r_2 تا r_4 قرار می داد و، در لحظه مناسب، کار را تمام می کرد، آیا نمی توانست به تفاضل بیشتری برسد؟ برای این که اولی مانع این امر شود، باید مرتبه r_i را با کوچکترین i که در آن یکی از رقم ها عدد و دیگری ستاره است و یا دو عدد مختلف در آن قرار دارد، در نظر بگیرد. اگر r_i برابر (4) یا (5) باشد، باید رقم ۵ را نام ببرد و اگر با (4) یا (5) رو به رو شود، رقم ۴ را (اگر همه ردیف ها بر هم منطبق و یا r_i به صورت (4) باشد، می توان هر کدام از دو عدد، و مثلاً ۵، را نام برد؛ با این برنامه ریزی، اولی به موقعیت خطرناک $r_i = (4)$ برخورد نمی کند). بعد از حرکت دومی، اولی می تواند ۰ را نام ببرد (وقتی که در r_i ، رقم در عدد بالا گذاشته شده باشد و یا ۹ را (وقتی رقم، در r_i پایین گذاشته شود). بدین ترتیب، برنامه حرکت اولی، برای اثبات b روشن می شود.

∇ اگر با عددهایی سروکار داشته باشیم که دارای $n \geq 1$ رقم باشند، می توان ثابت کرد که، به شرط بازی درست، برای تفاضل، عدد $4 \times 10^{n-1}$ به دست می آید.

۱۶۹. پاسخ: حداکثر مقدار S برابر است با $\sqrt{2}$ و به ازای $x = \sqrt{2}$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ به دست می آید.}$$

باید روشن کنیم که، به ازای چه حداکثری از s ، نابرابری‌های

$$x \geq s, \quad y + \frac{1}{x} \geq s, \quad \frac{1}{y} \geq s$$

به طور هم زمان برقرارند (در ضمن، دست کم یکی از آن‌ها باید برابری باشد). s عددی است مثبت و، مثلاً برای $s = 1$ ، نابرابری‌ها متوافق‌اند (مثلاً، برای $x = 1$ و $y = 1$ و یا $x = 1$ و $y = \frac{1}{2}$). از این نابرابری‌ها

می‌توان نتیجه گرفت:

$$y \leq \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{s}, \quad s \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{s}$$

از آن‌جا $s^2 \leq 2$ و $s \leq \sqrt{2}$. حالتی وجود دارد که هر سه نابرابری، به

برابری تبدیل می‌شوند: $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در ضمن $s = \sqrt{2}$.

۱۷۰. حکم، برای مثلث ABC به سادگی ثابت می‌شود: اگر نقطه

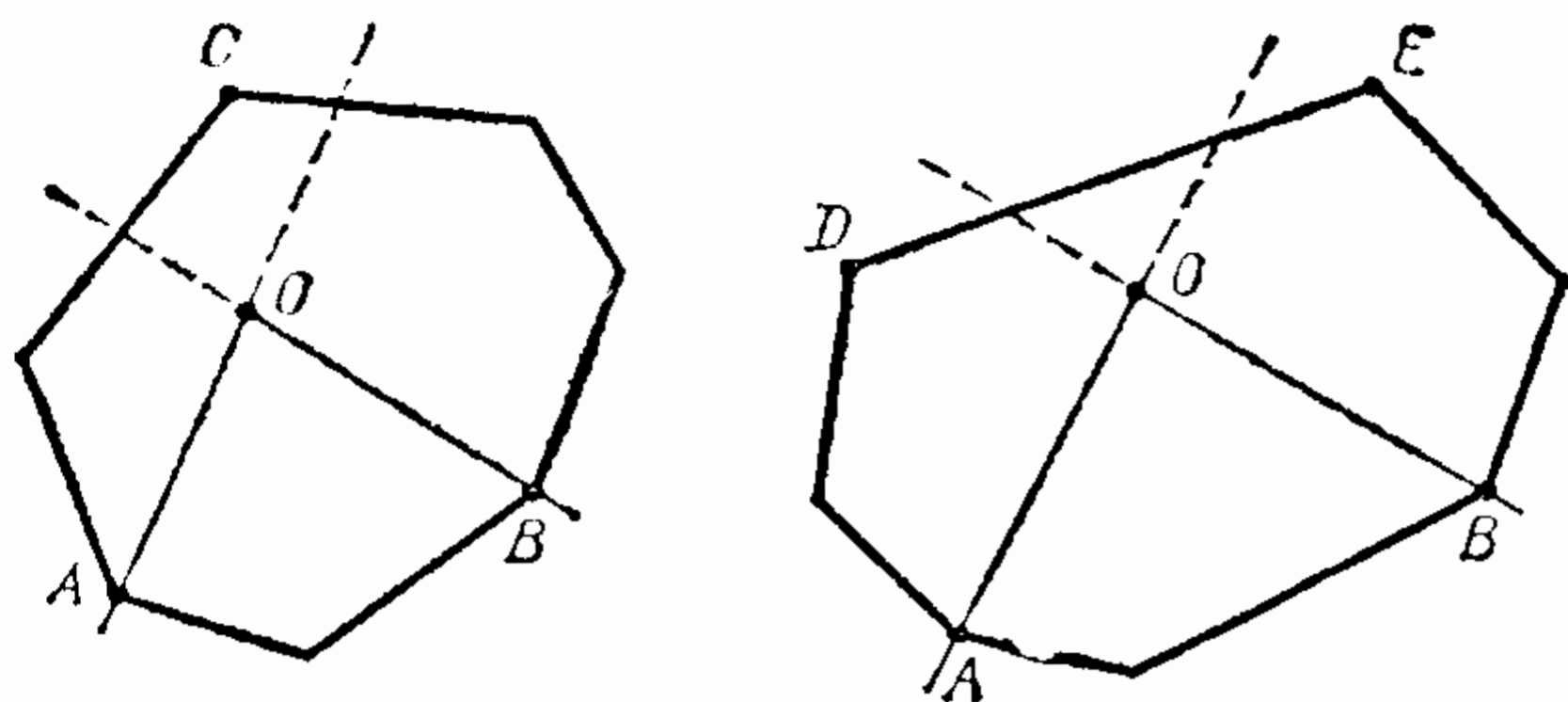
O در درون مثلث و، در ضمن، مثلث‌های AOB ، BOC و COA متساوی‌الساقین باشند، آن وقت از بین زاویه‌های AOB ، BOC و COA ، دست کم دو تا، از

120° درجه بیشترند. این زاویه‌ها را BOC و AOB می‌گیریم. در این صورت

$$AO = BO = OC$$

اکنون با استفاده از این حالت خاص، به عنوان پیش قضیه، حکم مساله

را برای چندضلعی ثابت می‌کنیم. اگر A و B دو رأس دلخواه از چندضلعی

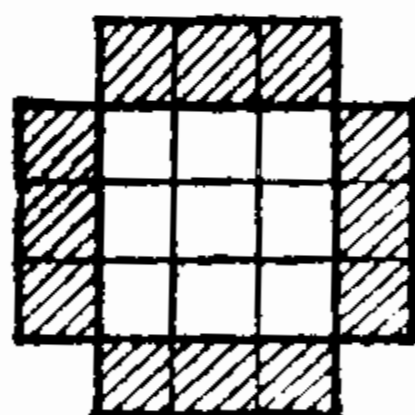


شکل ۷۰

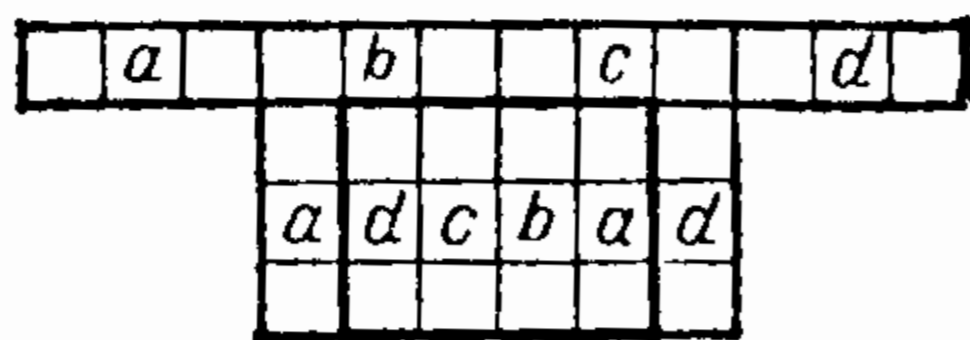
باشند، آن وقت یا در درون زاویدای که از امتدادهای AO و BO در نقطه O تشکیل می‌شود، رأس E از چندضلعی قرار دارد و یا ضلع‌های این زاویه، ضلع ED از چندضلعی را قطع می‌کند (شکل ۷۰). در حالت اول، نقطه O در درون مثلث ABC واقع است و، همان‌طور که در بالا ثابت کردیم، $AO = BO = CO$ ؛ در حالت دوم، نقطه O در درون مثلث‌های ADE و BDE قرار دارد و بنابراین $AO = DO = EO = BO$.

۱۷۱. پاسخ: نمی‌توان.

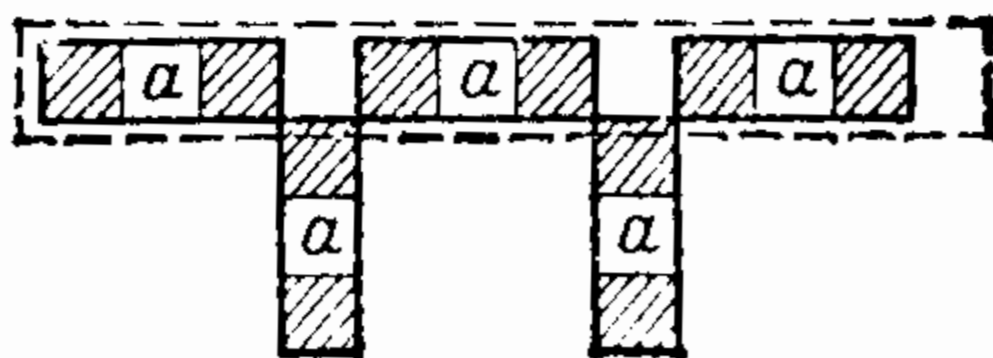
یکی از کوتاه‌ترین روش‌هایی را می‌آوریم که ما را به تناقض می‌رساند. دو شکل را «یکسان» می‌نامیم، وقتی که، در آن، تعداد صفرها، واحدها و رقم‌های ۲، یکی باشد. مستطیل‌های هاشورخورده در شکل ۷۱، a را «یکسان» می‌گیریم (مربعی 3×3 ، با هر یک از این شکل‌ها، مستطیلی 3×4 تشکیل می‌دهد، بنابراین کافی است از شکل استاندارد برای چهار مستطیل 3×4 «یکسان» که در مربع 3×3 مشترک‌اند، این مربع را حذف کنیم تا چهار مستطیل باقی‌مانده، «یکسان» باشند). نوار 1×12 هم دارای همان محتوی



a



b



c

شکل ۷۱

استاندارد مستطیل 3×4 است (در شکل ۷۱، b ، مستطیل‌های «یکسان»، با یک حرف نشان داده شده‌اند)، یعنی در این نوار پنج تا رقم ۲ وجود دارد. اکنون، مستطیل‌های a را با اندازه‌های 3×1 در نظر می‌گیریم (که در مرز صفحه کاغذ نباشند)، که دست کم شامل دو تا رقم ۲ باشند؛ از چنین مستطیل‌هایی در هر مستطیل 3×4 ، که از چهار مستطیل 3×1 تشکیل شده و شامل پنج رقم ۲ است، پیدا می‌شود. آن‌ها را، آن‌طور که در شکل ۷۱، c (به صورت نقطه چین) نشان داده شده است، در ردیف به صورت مستطیل 1×12 قرار می‌دهیم. در این نوار، دست کم، 3×6 ، یعنی ۶ رقم ۲ وجود دارد. تناقض.

۱۷۲. پاسخ: کمترین مقدار S برابر است با $1 - 2^{-n}$ ، و وقتی به

$$x_k = 2^{-k} \left(1 - 2^{-n} \right) \text{ دست می‌آید که داشته باشیم:}$$

فرض می‌کنیم:

$$y_0 = 1, y_k = 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

در این صورت $y_n = 2$ و $x_k = y_k - y_{k-1}$. اگر هیچ کدام از عددهای مفروض، از S تجاوز نکنند، یعنی

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_k} = 1 - \frac{y_{k-1}}{y_k} \leq S$$

آن وقت $1 - S \leq \frac{y_{k-1}}{y_k}$. اگر این نابرابری‌ها را، برای مقدارهای k از ۱

تا n ، در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$(1 - S)^n \leq \frac{y_0}{y_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow S \geq 1 - 2^{-\frac{1}{n}}$$

S وقتی به این مقدار می‌رسد که، برای هر k داشته باشیم:

$$2^{-\frac{1}{n}} = 1 - s = \frac{y_{k-1}}{y_k}$$

یعنی وقتی که y_k ها، تشکیل يك تصاعد هندسی به قدر نسبت $2^{\frac{1}{n}}$ بدهند:

$$y_1 = 2^{\frac{1}{n}}, y_2 = 2^{\frac{2}{n}}, \dots, y_n = 2$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$x_k = 2^{\frac{k}{n}} - 2^{\frac{k-1}{n}}$$

۱۷۳. در جدول مسابقه همه عددهای زوج را با ۰ و همه عددهای فرد

را با ۱، نشان می‌دهیم. جدول حاصل را A و عضوهای آن را a_{ij} می‌نامیم $(i, j = 1, \dots, n)$ ، وقتی تیم‌های i ام و j ام مساوی کرده باشند و $a_{ij} = 0$ در حالت عکس آن. جدولی که با صورت مساله سازگار باشد، متقارن است و عددهای روی قطرها برابر صفر است:

$$a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} = 0 \quad (j \text{ و } i \text{ برای هر } i \text{ و } j) \quad (1)$$

شرطی را که در جدول ظاهر می‌شود، با توجه به صورت مساله، می‌توان به این ترتیب تنظیم کرد: برای هر انتخاب $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از صفرها و واحدها، به جز $0 = (0, \dots, 0)$ ، دست کم یکی از عددهای

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (A)$$

فرد است. برای هر گروهی از تیم‌ها، انتخاب x را در نظر می‌گیریم. با این شرط که، اگر زامین تیم جزو گروه باشد $x_j = 1$ ، و اگر تیم j ام جزو گروه نباشد $x_j = 0$ ؛ در ضمن، y_i برابر است با تعداد تساوی‌هایی که تیم i ام با این گروه داشته است. گروه (y_1, \dots, y_n) را، که از x به کمک جدول A و طبق قانون (A) به دست می‌آید، Ax می‌نامیم. از آنجا که، تنها به اختلاف بین عددهای زوج و فرد علاقه‌مندیم، بهتر است تنها با در نظر گرفتن دو عدد ۰ و ۱، و به حساب آوردن $1 + 0 = 1 + 0 = 1$ و $0 + 1 = 0 + 0 = 0$ ، کار را ساده کنیم (در ضمن، قانون‌های ضرب و همه قانون‌های دیگر حساب، به بقوت

خود باقی است). در این صورت، y هم، انتخابی از 0 و 1 خواهد بود. در ضمن، نیاز اصلی ما از جدول، به این صورت درمی آید:

$$(2) \quad \text{اگر } x \neq 0, \text{ آن وقت } y = Ax \neq 0.$$

این گونه جدول A را «رو به راه» می نامیم.

اکنون که، از بازی ها کی، خود را به طور کامل، به جبر رسانده ایم، می توانیم به حل مساله پردازیم: باید ثابت کنیم، وقتی n عددی زوج باشد، شرط های (۱) و (۲) نمی توانند با هم برقرار باشند. جدول A را، با حفظ این شرط ها، ساده می کنیم.

اگر در جدول A ، سطر دوم را به سطر اول اضافه کنیم، شرط (۲) خراب نمی شود: اگر

$$Ax = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

آن وقت، برای جدول جدید A' ، خواهیم داشت:

$$A'x = y' = (y_1 + y_2, y_2, \dots, y_n)$$

و اگر $y \neq 0$ ، آن وقت $y' \neq 0$. همچنین، اگر ستون دوم جدول A را به ستون اول آن اضافه کنیم، باز هم شرط (۲) بهم نمی خورد: اگر

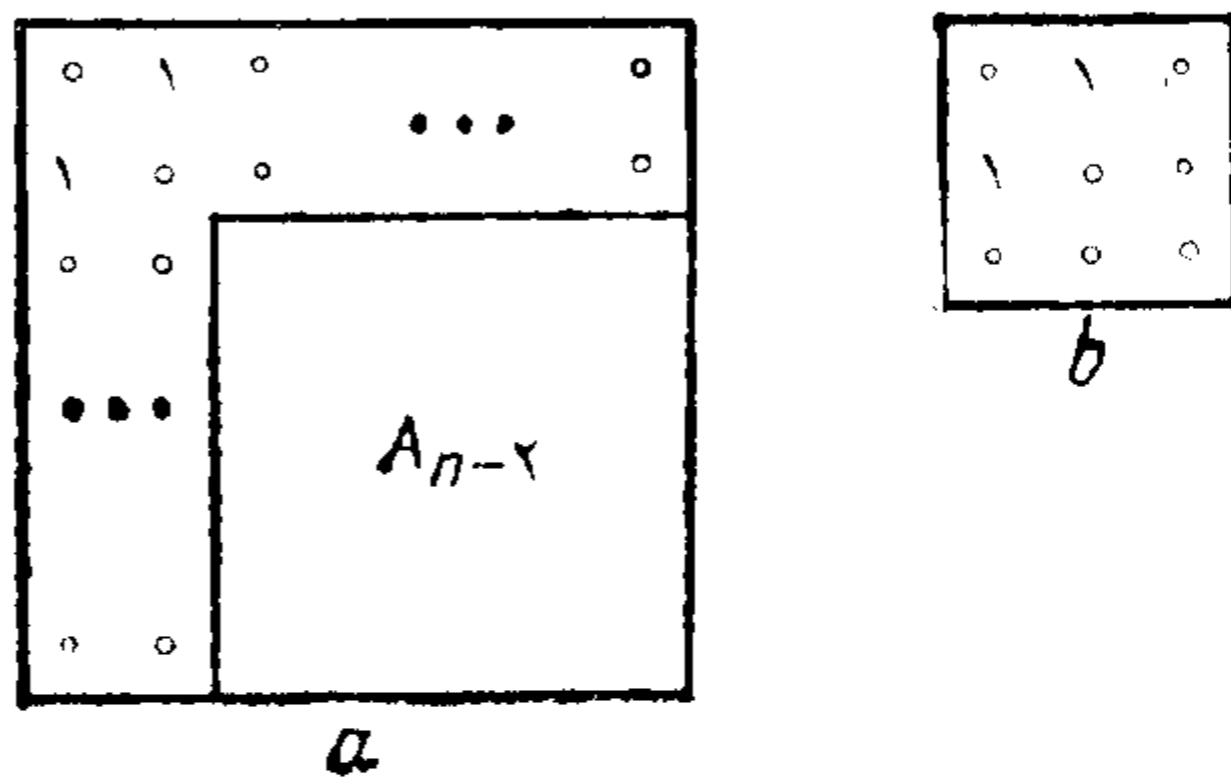
$$Ax = y, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

آن وقت، برای جدول جدید A'' خواهیم داشت:

$$A''x'' = y, x'' = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$$

و اگر $x \neq 0$ ، آن وقت $x'' \neq 0$. روشن است که، به همین ترتیب، می توان زامین سطر را به زامین سطر و یا زامین ستون را به زامین ستون اضافه کرد؛ همچنین اگر دو تبدیل را با هم و به طور هم زمان انجام دهیم، آن وقت، جدول جدید، نه تنها نسبت به (۲) بلکه در ضمن نسبت به تقارن (۱) هم، «رو به راه» خواهد بود (در ضمن، قانون $1 + 1 = 0$ ، صفرها را در قطرها حفظ می کند).

اکنون سعی می کنیم، جدول A را ساده کنیم. می توان فرض کرد که، «دو



شکل ۷۲

تیم اول، با هم بازی کرده اند»، یعنی $a_{12} = a_{21} = 1$. اگر سطر اول (و همچنین ستون اول) را بدستور (یا ستونی) که در آن، واحدها در ستون دوم (وسطر متناظر آن) قرار گرفته اند، اضافه کنیم، آن وقت از همه این واحدها، خلاص می شویم؛ به همین ترتیب بد کمک سطر دوم (و ستون دوم)، از واحدهای ستون اول (و واحدهای سطر اول) خلاص می شویم و به جدول A_{n-2} ، به صورتی که در شکل ۷۲، نشان داده شده است، می رسیم. اگر دو سطر اول و دو ستون اول را از جدول حذف کنیم، به جدول A_{n-2} با اندازه های $(n-2) \times (n-2)$ می رسیم که، مثل قبل، با شرط های (۱) و (۲) سازگار است؛ در واقع برای هر

$$x = (0, 0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$$

داریم $AX = 0$ و جدول باقی مانده A_{n-2} ، درست به همان ترتیب، مختصات

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$$

را تبدیل می کند. اگر ساده کردن جدول را، به همین ترتیب ادامه دهیم، به جدول های A_{n-4}, A_{n-6}, \dots می رسیم. اگر n عددی فرد باشد، سر آخر به جدول 3×3 می رسیم که، بعد از ساده کردن، جدول A_3 در شکل ۷۲، به دست می آید. ولی این جدول «رو به راه» نیست: اگر $x = (0, 0, 1)$ ، آن وقت $A_3 x = 0$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

▽ مضمون این مسأله با این قضیه جبر خطی تفاوتی ندارد که: ماتریس چپ $n \times n$ ، وقتی n عددی فرد باشد، «رو به راه نیست». این قضیه، در حوزه دو عنصر ۱ و ۰، تا حدی دشوار تر می شود.

۱۷۴. حل مسأله (b) را می آوریم. متخصص می تواند به این ترتیب

عمل کند.

۱. متخصص، سکه اول را در کفه چپ و سکه هشتم را در کفه راست

ترازو می گذارد و چون کفه راست سنگین تر است، قاضی اطمینان پیدا می کند که سکه اول تقلبی و سکه هشتم واقعی است.

۲. سکه های دوم، سوم و هشتم را در کفه راست و سکه های نهم، دهم

و اول را در کفه چپ می گذارد. کفه چپ سنگین تر است، و قاضی قانع می شود که سکه های دوم و سوم تقلبی و سکه های نهم و دهم واقعی اند.

۳. در کفه چپ، سکه های چهارم، پنجم، ششم، هفتم، هشتم، نهم و دهم؛

و در کفه راست، بقیه سکه ها را قرار می دهد. کفه راست سنگین تر است و قاضی می بیند که در آن، سکه های واقعی بیشتر از کفه چپ است، همچنین،

در کفه چپ، تعداد سکه های تقلبی بیشتر از کفه راست است و این ثابت می کند که، سکه های چهارم، پنجم، ششم و هفتم تقلبی و سکه های ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴

حقیقی اند.

▽ به همین ترتیب می توان $2^k - 1$ سکه تقلبی و $2^k - 1$ سکه حقیقی

را، ضمن k مرتبه استفاده از ترازو، از هم جدا کرد (برای هر $k \geq 1$).

۱۷۵. فرض می کنیم، عدد $D = A^2$ ، که با شرط های مسأله سازگار

است، وجود دارد. روشن است که عدد A به ۵ ختم شده است، بنا بر این $A = 10a + 5$ از این جا

$$D = 100a(a+1) + 25$$

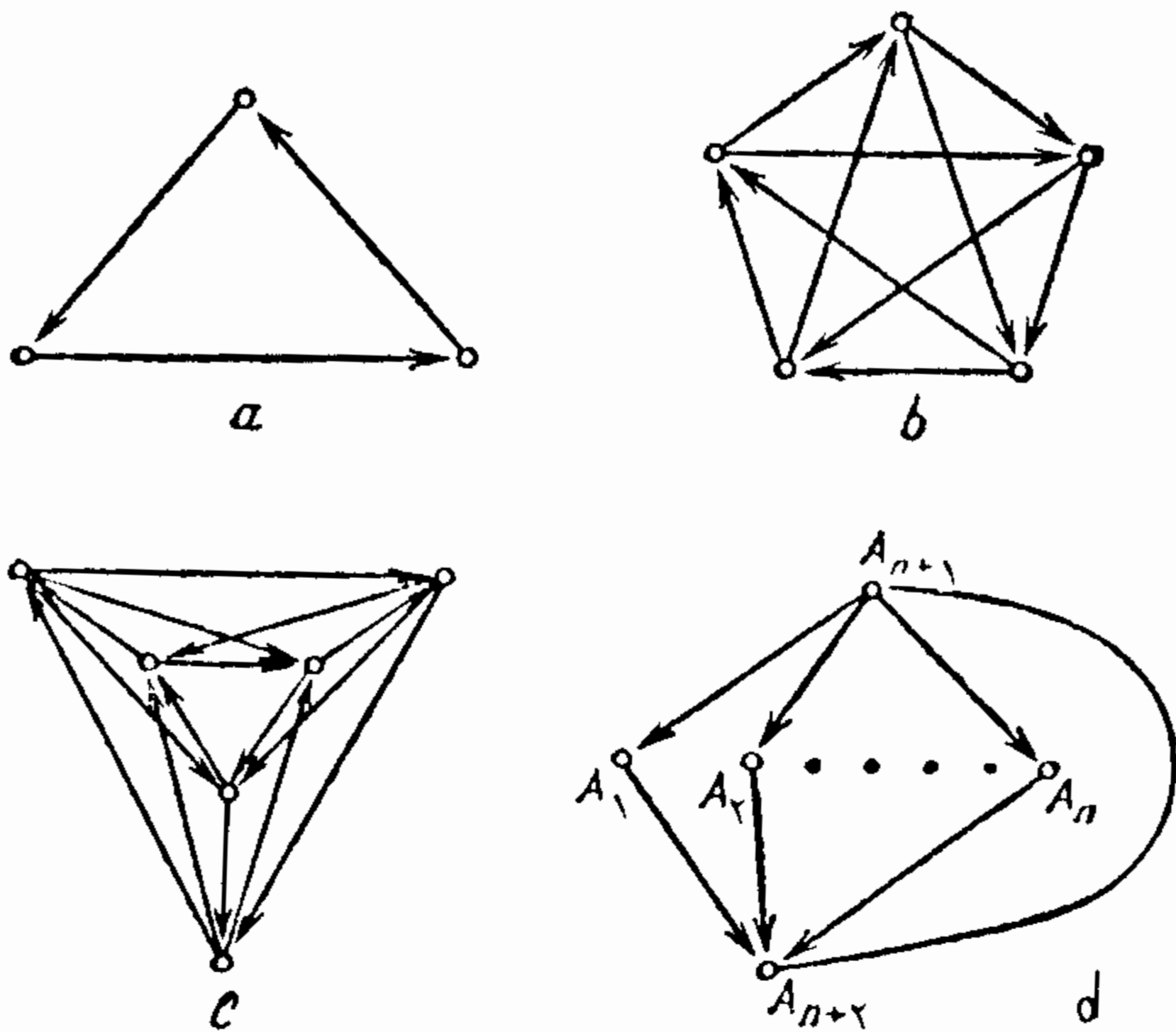
به ۲۵ ختم می شود عدد $a(a+1)$ به ۲، ۶ یا صفر ختم می شود. بنا بر این،

سومین رقم از سمت راست عدد D برابر ۶ است (۰ بین رقم های عدد D وجود ندارد، از رقم ۲ هم دو بار استفاده نمی شود)، یعنی $D = 1000k + 625$.

می بینیم که D ، بر $5^3 = 125$ ، و بنا بر این بر 5^4 بخش پذیر است. یعنی k بخش پذیر بر ۵ است و، بنا بر این، رقم چهارم عدد از سمت راست باید برابر

۰ یا ۵ باشد، که ممکن نیست.

۱۷۶. مسأله با استقرار حل می شود. برای $n=3$ ، $n=5$ و $n=6$ ،



شکل ۷۳

دستگاه لازم پیکان‌ها، در شکل‌های ۷۳، a ، b و c نشان داده شده است. در شکل ۷۳، d یکی از روش‌هایی نشان داده شده است که، به کمک آن می‌توان از دستگاه شامل n نقطه A_1, A_2, \dots, A_n (که با پیکان‌هایی به صورت مورد-نظر بهم وصل شده‌اند)، به دستگاه لازم برای $n+2$ نقطه $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ رسید. برای این منظور، به پیکان‌های موجود، این پیکان‌ها را اضافه می‌کنیم: از A_{n+1} به سمت همه نقطه‌های A_1, A_2, \dots, A_n و، سپس، از هر یک از نقطه‌های A_1, A_2, \dots, A_n به سمت A_{n+2} و، سرانجام، از A_{n+2} به سمت A_{n+1} .

در این صورت، بنا بر اصل استقرای ریاضی، حکم مساله برای عددهای فرد $n \geq 3$ و عددهای زوج $n \geq 6$ درست است.

برای $n=4$ ، نمی‌توان چنین دستگاهی را پیدا کرد.

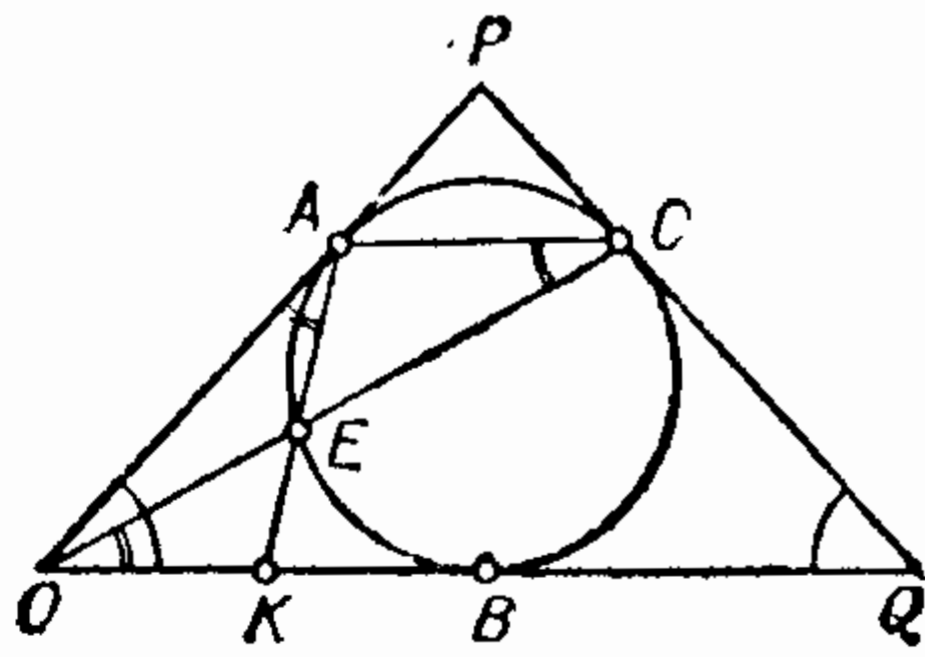
۱۷۷. مماس بر دایره مفروض را در نقطه C رسم می‌کنیم و نقطه‌های

برخورد آن را با ضلع‌های زاویه، P و Q می‌نامیم. چون $AP = PC$ ، پس

مثلث APC و، همراه با آن، مثلث OPQ متساوی‌الساقین است. بنا بر این

(شکل ۷۴):

$$AO = CQ = OB = BQ$$



شکل ۷۴

توجه می‌کنیم: $\widehat{OAE} = \widehat{OCA} = \widehat{COQ}$ و $\widehat{AOB} = \widehat{CQB}$. از تشابه دو مثلث OAK و QOC نتیجه می‌شود:

$$\frac{OK}{OA} = \frac{CQ}{OQ} = \frac{1}{2}$$

یعنی $OK = \frac{OA}{2} = \frac{OB}{2}$. برابری دو زاویه OAE و ACO از قضیهٔ مربوط

به زاویهٔ بین مماس و وتر (زاویهٔ ظلّی) نتیجه می‌شود.

۱۷۸. فرض کنید: $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $g(x) = cx^2 + bx + a$

چون $f(1) = g(1)$ و $f(-1) = g(-1)$ ، بنابراین $|g(1)| \leq 1$ و $|g(-1)| \leq 1$ ، به جز این، $|c| = |f(0)| \leq 1$.

فرض می‌کنیم، برای مقداری از x داشته باشیم: $|g(x)| > 2$. در این-

صورت، اگر رأس سهمی را با مختصات $(x_0, g(x_0))$ بگیریم، داریم: $|x_0| \leq 1$ و $|g(x_0)| > 2$. از طرف دیگر، $g(x)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$$

در این برابری به جای x ، از بین دو عدد 1 و -1 ، آن را که به x_0 نزدیکتر است، قرار می‌دهیم (برای روشن بودن وضع، این عدد را $+1$ می‌گیریم). در این صورت $|1 - x_0| \leq 1$ و بنابراین

$$|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0)^2| \leq g(1) + |c| < 1 + |c| \leq 2$$

که با نابرابری $g(x) > 2$ متناقض است.

مثال $f(x) = 2x^2 - 1$ نشان می‌دهد که ارزیابی $|g(x)| \leq 2$ را نمی‌توان بهتر کرد. (در این حالت $(g(x)) = -x^2 + 2$.)

۱۷۹. پاسخ: بزرگترین شماره ممکن برای برنده، برابر است با ۲۵.

چون بازی کن با شماره k (بدون در نظر گرفتن تنیس بازان قوی‌تر)،

تنها ممکن است به دو تنیس باز با شماره‌های $k+1$ و $k+2$ بیازد، بنا بر این،

بعد از هر دور بازی، در بین پیروزشدگان، هیچ‌کس نمی‌تواند بیش از دو

ردیف جلوتر رفته باشد؛ بدین ترتیب، شماره برنده همه دورها، نمی‌تواند

از ۲۱ بیشتر باشد. با وجود این، ثابت می‌کنیم، تنیس باز با شماره ۲۱،

نمی‌تواند برنده مسابقه باشد. برای این منظور، باید بعد از دور اول بازی،

شماره‌های ۳ و ۴، شماره‌های ۱ و ۲ را از میدان بیرون کرده باشند (در غیر این

صورت، شماره برنده از ۲۱ کمتر می‌شود)؛ در دور دوم باید شماره‌های ۵ و

۶، شماره‌های ۳ و ۴ را شکست دهند و غیره تا آن‌جا که، در دور نهم بازی،

که شماره‌های ۱۹ و ۲۰ بر شماره‌های ۱۷ و ۱۸ پیروز می‌شوند. به این ترتیب،

شماره ۲۱ به فینال، که در آن باید دو نفر با هم روبرو شوند، نمی‌رسد.

این مطلب باقی می‌ماند که نمونه‌ای از مسابقه را بیاوریم که، در آن،

تنیس باز شماره ۲۵ بد پیروزی می‌رسد. برای این منظور، همه تنیس بازان

را، به دو گروه ۵۱۲ نفری تقسیم می‌کنیم. در گروه اول، شماره‌های ۱۹ و ۲۵ و

۵۱۵ نفر از ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می‌دهیم. مسابقه گروه را طوری

تنظیم می‌کنیم که شماره ۲۵ برنده شود (روشن است که، این امر، ممکن است).

در گروه دوم شماره‌های ۱ تا ۱۸ و بقیه ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می-

دهیم و مسابقه را طوری تنظیم می‌کنیم که نفر شماره ۱۸ پیروز شود. اگر

مسابقه را، بدشکلی که در بالا شرح دادیم، تنظیم کنیم، این امر ممکن است: در

دور اول شماره‌های ۳ و ۴. از شماره‌های ۲۰۱ می‌برند، در دور دوم ۵ و ۶ از

۳ و ۴ می‌برند و غیره تا جایی که شماره‌های ۱۷ و ۱۸ از شماره‌های ۱۵ و ۱۶

برنده شوند و، بعد از آن، در دور نهم، شماره ۱۸ از شماره ۱۷ ببرد. در فینال

شماره‌های ۱۸ و ۲۵ با هم روبرو می‌شوند و، بنا بر این، شماره ۲۵ می‌تواند

برنده باشد.

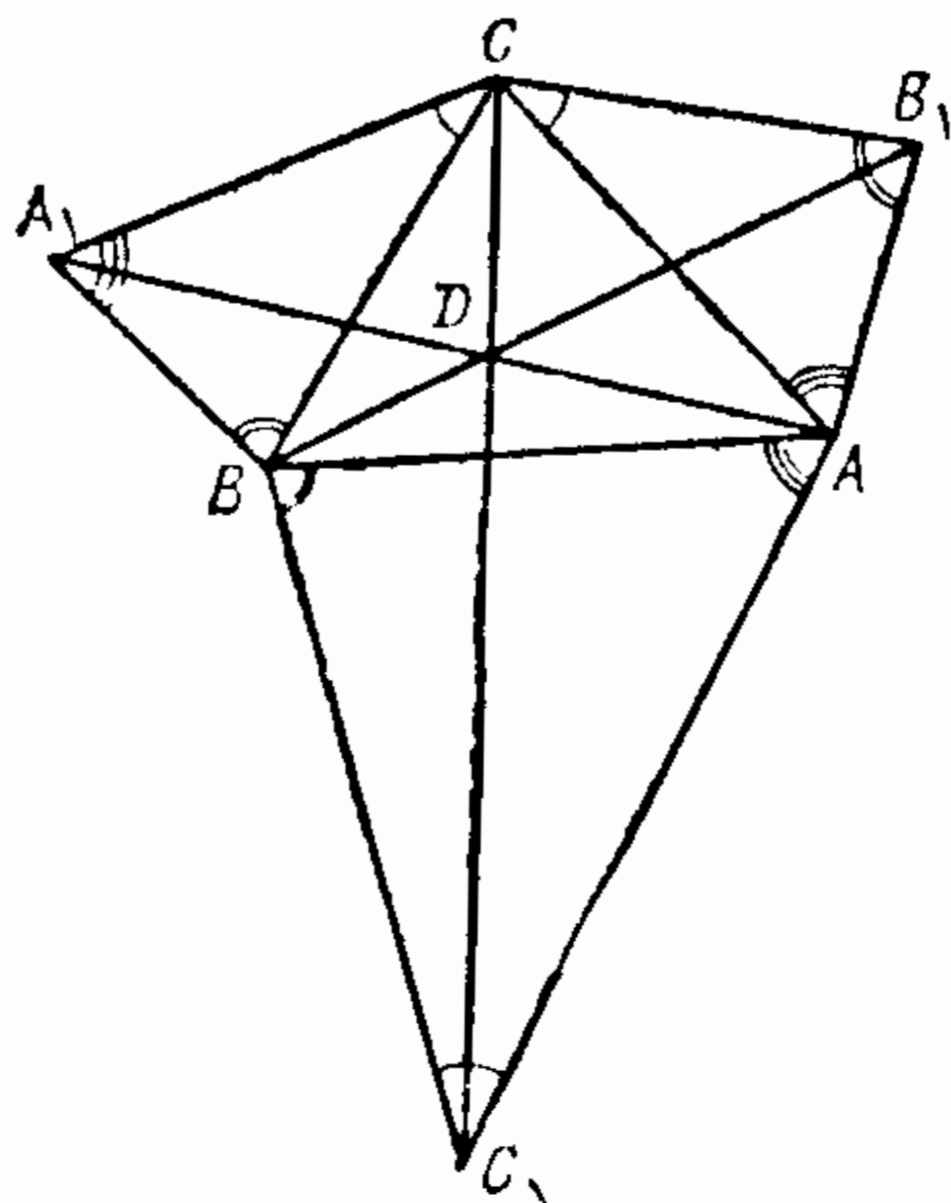
▽ با استقرای ریاضی می توان ثابت کرد که، اگر با 2^n بازی کن سروکار داشته باشیم، بزرگترین شماره‌های که می تواند برنده شود، شماره 2^n است.

۱۸۰. اگر معادله $f(x) = x$ ریشه حقیقی نداشته باشد، به معنای آن است که به ازای همه مقادیرهای x ، یا $f(x) > x$ (اگر $a > 0$) و یا $f(x) < x$ (اگر $a < 0$)، ولی در این صورت، یا $f(f(x)) > f(x) > x$ و یا $f(f(x)) < f(x) < x$ و این به معنای آن است که معادله $f(f(x)) = x$ ریشه حقیقی ندارد.

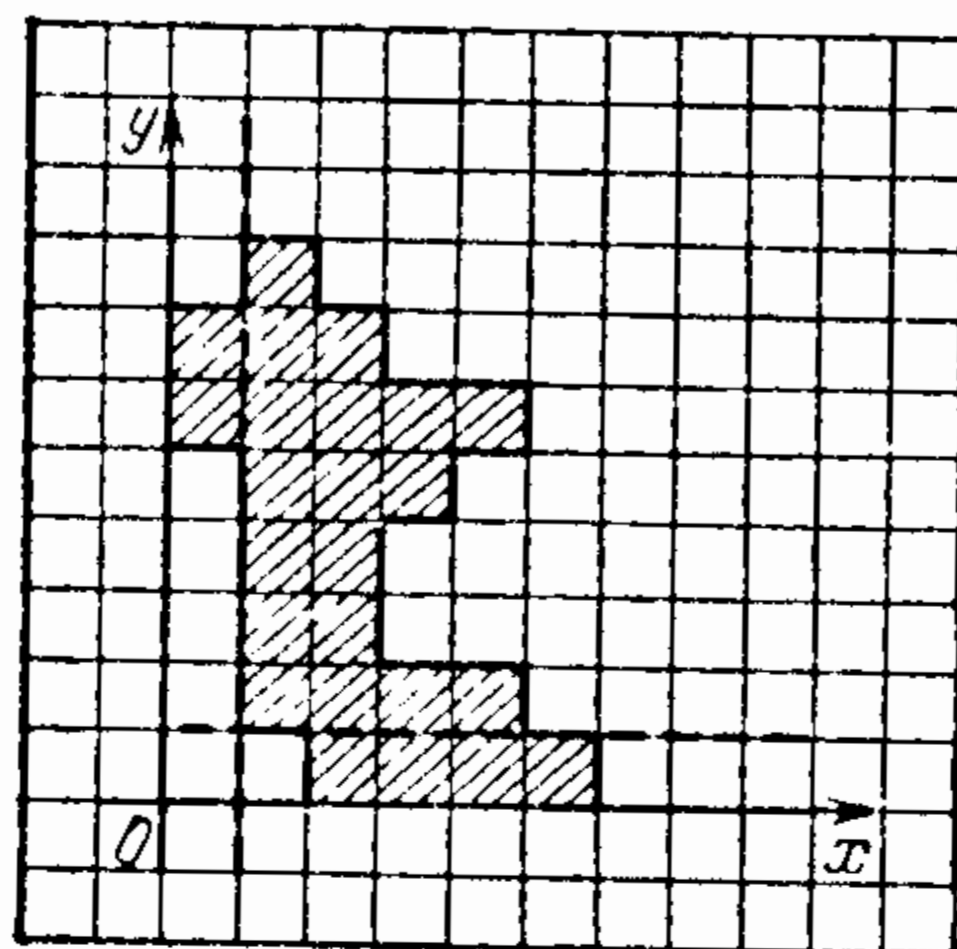
▽ حکم مساله، نه تنها برای سه جمله‌ای درجه دوم، بلکه برای هر تابع پیوسته‌ای درست است.

۱۸۱. (a) یادآوری می کنیم که، اگر، به مجموعه مفروض خانه‌های سیاه، باز هم چند خانه سیاه اضافه کنیم، آن وقت بعد از رنگ آمیزی، تنها می تواند خانه‌های سیاه اضافی، حاصل شود، به مجموعه نخستین M از خانه‌ها، خانه‌هایی اضافه می کنیم تا مربع سیاه $m + m$ خانه‌ای بدست آید.

بعد از $1 - 2m$ گام، از مربع (و در نتیجه، از M) چیزی باقی نمی ماند. (b) مجموعه خانه‌های سیاه را، که از M بعد از 1 گام بدست می آید، M_1 می نامیم. با استقرای نسبت به n ثابت می کنیم، برای هر مجموعه M از n خانه، M_n مجموعه‌ای تهی است. این مطلب، به ازای $n = 1$ روشن است. فرض می کنیم، M_n تهی است، برای مجموعه‌هایی که کمتر از n خانه دارند، ثابت شده باشد و مجموعه M را، شامل n خانه، در نظر می گیریم. می توان M را در صفحه مختصات (O, x, y) در ربع $x \geq 0$ و $y \geq 0$ در نظر گرفت، بدینحوی که در نوار $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ ، دست کم یک خانه از M وجود داشته باشد (شکل ۷۵). در این صورت، بنا بر فرض استقرای M_{n-1} با ربع $x \geq 1$ اشتراکی ندارد (خانه‌هایی که در نوار $0 \leq x \leq 1$ قرار دارند، اثری بر اصل مطلب، به ازای $x \geq 1$ ندارند). بنا بر این، M_{n-1} در نوار $0 \leq x \leq 1$ واقع است. به همین ترتیب می توان ثابت کرد که M_{n-1} تنها شامل یک خانه است و M_n تهی می شود.



شکل ۷۶



شکل ۷۵

۱۸۲. D را نقطه برخورد AA_1 و BB_1 می‌گیریم. چون دو زاویه A_1CA و B_1CB با هم برابرند (شکل ۷۶) و $A_1C \cdot BC = AC \cdot B_1C$ دو مثلث A_1CA و B_1CB با هم متشابه‌اند و بنا بر این زاویه‌های DBC و DA_1C با هم برابر می‌شوند. بدین ترتیب، نقطه‌های A, D, B و A_1, C, D, B_1 روی محیط یک دایره‌اند. بدهمین ترتیب، ثابت می‌شود که نقطه‌های A, D, C و B_1, C, D, A_1 هم روی محیط یک دایره واقع‌اند. یعنی نقطه برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های AB_1C و A_1BC است.

اکنون توجه می‌کنیم که

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{ADB_1} = 180^\circ - \widehat{AC_1B}$$

بنا بر این نقطه‌های A, D, B, C_1 روی محیط یک دایره‌اند. به این ترتیب، D ، نقطه برخورد هر سه دایره محیط بر مثلث‌هاست و طبق آن چه قبلاً ثابت شد، خط راست CC_1 هم از نقطه D می‌گذرد.

۱۸۳. این مساله را می‌توان با استقرای ریاضی حل کرد. در این جا از راه حل دیگری استفاده می‌کنیم.

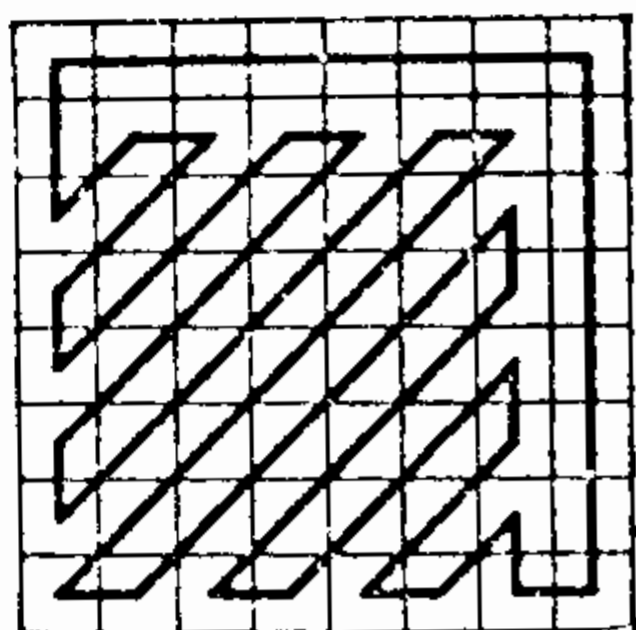
افراد را از ۱ تا N شماره گذاری و فرد با شماره i را به شرطی با فرد شماره j آشنا می‌کنیم که داشته باشیم: $|i - j| \leq \frac{N}{2}$. به سادگی دیده

می‌شود که، در این صورت، تعداد آشنایهای یکسان تنها بین افراد با شماره‌های k و $N - k$ خواهد بود. به این ترتیب، هیچ سه نفری، تعداد آشنایهای مساوی ندارند.

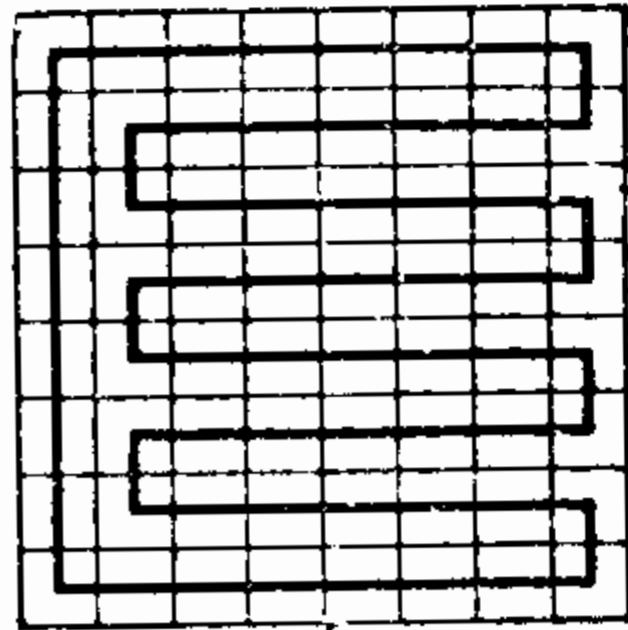
۱۸۴. (a) شکل ۷۷. b را ببینید.

(b) هر يك از ۲۸ میدان کناری را روی صفحه شطرنج جدا می‌کنیم. شاه ضمن دور زدن صفحه، در هر يك از آن‌ها خواهد بود. این میدان‌ها را به همان ردیفی که شاهدهیدن کرده است، شماره گذاری می‌کنیم. مسیر شاه به ۲۸ قطعه تقسیم می‌شود: از میدان ۱ به میدان ۲، از میدان ۲ به میدان ۳، ...، از میدان ۲۸ به میدان ۱. فرض می‌کنیم، مسیر شاه برخوردی با خود نداشته باشد، بنا بر این، خانه‌های ۱ و ۲، ۲ و ۳، ...، ۲۷ و ۲۸، ۲۸ و ۱، خانه‌های مجاور حاشیه باریک را تشکیل می‌دهند. (اگر مثلاً خانه‌های ۱ و ۲ مجاور نباشند، آن وقت این خانه‌ها، حاشیه کناری را به دو بخش تقسیم می‌کنند و مسیر شاه، از هر خانه یکی از این بخش‌ها، به هر خانه دیگری، بخش «۱ - ۲» را قطع می‌کند که با شرط مسأله در تناقض است.) ولی برای این که شاه در خانه مجاور حاشیه بیفتد، باید در یکی از گام‌ها، از خانه‌ای به خانه‌ای با رنگ دیگری برود، یعنی حرکت خود را در جهت قائم یا جهت افقی انجام دهد. از این جهت نتیجه می‌شود که، در مسیر شاه، کمتر از ۲۸ حرکت ممکن نیست. (c) روشن است که، طول مسیر شاه، از ۶۴ کمتر نیست و چنین مسیری وجود دارد (شکل ۷۷-b).

از طرف دیگر ثابت کردیم که مسیر شاه، کمتر از ۲۸ پاره خط راست به طول واحد ندارد. بنا بر این، شاه می‌تواند حداکثر ۳۶ حرکت قطری داشته باشد، به نحوی که تمامی مسیر او از $28 + 36\sqrt{2}$ بیشتر



a



b

شکل ۷۷

نمی‌شود (نمونه چنین مسیری در شکل ۷۷، a داده شده است).

$$۱۸۵. \text{ چون } \frac{1}{2}bc \leq \frac{1}{2}b^2 \leq 1; \text{ پس } b \geq \sqrt{2}.$$

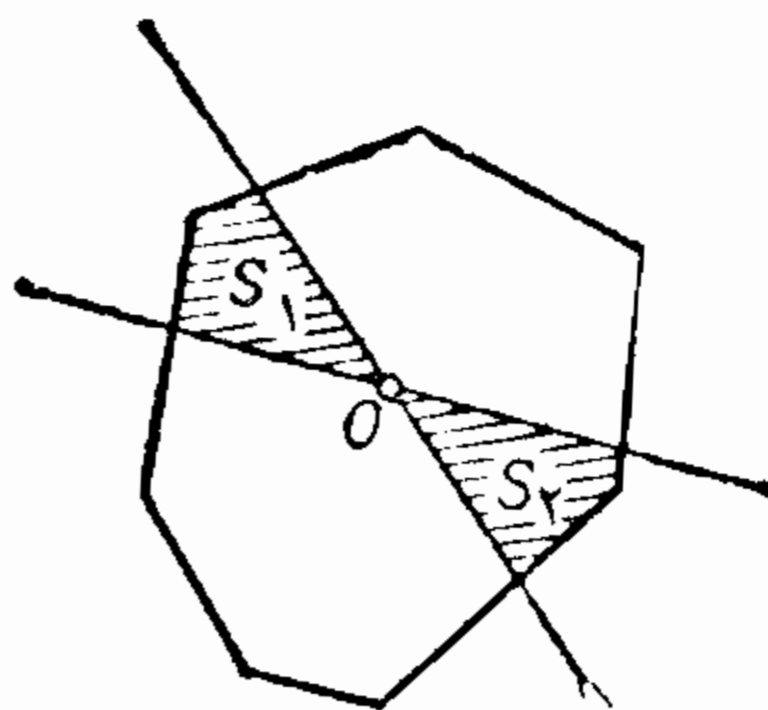
۱۸۶. هر دو خط راستی را که از نقطه O ، واقع در درون n ضلعی می‌گذرند و مساحت n ضلعی M را نصف می‌کنند، باهم، در نظر می‌گیریم. در این صورت، بین دوزاویه روبه‌رو که به وسیله این دو خط راست تشکیل شده است، بخش‌های برابری از مساحت n ضلعی واقع است (S_1 و S_2 روی شکل ۷۸).

چندضلعی M' را قرینه چندضلعی M نسبت به O فرض می‌کنیم. اگر از نقطه O ، k خط راست طوری عبور کند که، هر کدام از آن‌ها مساحت را نصف کند، آن وقت در هر یک از $2k$ زاویه که به وسیله این k خط راست در صفحه به وجود می‌آید، باید نقطه برخوردی از محیط‌های M و M' وجود داشته باشد. ولی روی هر ضلع چندضلعی M ، بیش از دو نقطه از این گونه نقطه‌های برخورد وجود ندارد. یعنی، اگر M دارای n ضلع باشد، تعداد نقطه‌های برخورد از $2k$ کمتر و از $2n$ بیشتر نیست، از این جا $k \leq n$.

۱۸۷. اگر $x_2 \geq x_1$ ، آن وقت نابرابری نتیجه‌ای از اتحاد زیر است:

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ & = 4(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \\ & \quad + x_4x_5 + x_5x_1) + 4x_5(x_2 - x_1) + 4x_1x_4 \end{aligned}$$

و اگر $x_1 > x_2$ ، به همان ترتیب، از اتحاد زیر استفاده می‌شود:



شکل ۷۸

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5)^2 = \\ & = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ & \quad 4x_3(x_1 - x_2) + 4x_2x_4 \end{aligned}$$

▽ به طور کلی، نابرابری

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1)$$

برای $c_2 = 2$ ، $c_3 = 3$ و $c_4 = 4$ برقرار است (در ضمن، به ازای این مقدارهای n ، نابرابری برای همه مقدارهای x_i برقرار است و لزومی ندارد x_i ها، مثبت باشند). همچنین، به ازای همه مقدارهای $n \geq 5$ (و $x_i > 0$)، برای $c_n = 4$ برقرار است. حکم اخیر از اثباتی که برای $n = 5$ داشتیم، به کمک استقرا به دست می آید: اگر به صورت دوری حرکت کنیم و شماره‌ها را طوری بگیریم که x_{n-1} کوچکترین باشد، آن وقت

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq \\ & \geq -4x_1x_n + 4x_1x_{n-1} + 4x_nx_{n-1} \end{aligned}$$

زیرا

$$4x_{n-1}(x_2 + \dots + x_{n-1}) + (x_{n-1} - 2x_1)(x_{n-1} - 2x_n) \geq 0$$

۱۸۸. پاسخ: ۲۹ متوازی السطوح.

یادآوری می کنیم که متوازی السطوح با معلوم بودن یکی از رأس‌ها و سه صفحه «میانه» (صفحه‌هایی که، هر کدام از آنها، از رأس‌های متوازی السطوح به یک فاصله‌اند، یعنی از مرکز متوازی السطوح می گذرند و با دو وجه آن موازی‌اند)، به طور یک ارزشی معین می شود. برای چهار نقطه مفروض K, L, M, N ، (به شرطی که روی یک صفحه نباشند)، هفت صفحه وجود دارد که از این نقطه‌ها به یک فاصله‌اند (آنها، چهاروجهی $KLMN$ را در یال‌های «میانه» قطع می کنند). از این هفت صفحه، سه صفحه را می توان به $C_V^3 = 35$ طریق انتخاب کرد.

وایی ما به سه صفحه‌های نیاز داریم که در یک نقطه به هم رسیده باشند. بنابراین، از بین این سه‌تایی‌ها، باید آن‌هایی را که با یک خط راست موازی‌اند، کنار گذاشت. از این گونه صفحه‌های سه‌تایی، ۶ مورد وجود دارد: این‌ها گروه‌های سه‌تایی صفحه‌هایی هستند که بایکی از ۶ یال چهاروجهی موازی‌اند. با انتخاب یکی از $29 = 35 - 6$ گروه سه‌تایی از صفحه‌های «میان»، می‌توانیم به وسیله چهار رأس مفروض، یک متوازی‌السطوح بسازیم؛ برای این منظور، کافی است از چهار نقطه مفروض، صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های «میان» رسم کنیم.

۱۸۹. پاسخ: (a) ۱۰ پرسش؛ (b) ۱۱؛ (c) ۱۲؛ (d) ۵۰.

(a) ۳۰ عدد را به ۱۰ گروه سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و حاصل ضرب عددهای هر گروه را می‌پرسیم. روشن است که با تعداد کمتری پرسش نمی‌توان به نتیجه رسید، زیرا هر عدد باید در یکی از گروه‌های سه‌تایی وارد شده باشد. (b) حاصل ضرب هفت عدد اول را می‌توان به کمک حاصل ضرب‌های $a_1 a_2 a_3$ ، $a_1 a_4 a_5$ و $a_1 a_6 a_7$ پیدا کرد؛ و بقیه ۲۳ عدد را، مثل حالت (a)، به گروه‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم. روشن است که، در این حالت هم، نمی‌توان با تعداد کمتری پرسش به نتیجه رسید.

(c) حاصل ضرب ۵ عدد اول را از روی $a_1 a_2 a_3$ ، $a_1 a_2 a_4$ و $a_1 a_2 a_5$ به دست می‌آوریم و بقیه عددها را به گروه‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم. از آن‌جا که هر عدد باید در یک گروه سه‌تایی وارد شده باشد، بنا بر این روشن است که، تعداد پرسش‌ها نمی‌تواند از ۱۱ کمتر باشد. در ضمن، یکی از عددها، درست در دو گروه سه‌تایی وارد شده است (اگر در بیش از دو گروه وارد شده باشد، آن وقت عددی پیدا می‌شود که در هیچ کدام از گروه‌ها وارد نشده است). در حاصل ضرب ۱۱ گروه سه‌تایی، مجذور این عدد وجود دارد و، بنا بر این، حاصل ضرب همه این عددها روشن نمی‌شود.

(d) با ۵۰ پرسش می‌توان از حاصل ضرب‌های $a_1 a_2 a_3$ ، $a_2 a_3 a_4$ ، $a_2 a_4 a_5$ ، \dots ، $a_5 a_1 a_2$ اطلاع پیدا کرد. از حاصل ضرب این‌ها، مکعب حاصل-ضرب همه عددها به دست می‌آید که بر حاصل ضرب خود عددها منطبق است.

کمتر از ۵۰ پرسش کافی نیست. اگر حاصل ضرب یکی از گروه‌های
سدتایی، و مثلاً $a_1 a_2 a_3$ را بدانیم، آن وقت، دو نوع انتخاب از حاصل ضرب-
های مختلف وجود دارد که، برای آن‌ها، حاصل ضرب همه بقیه سدتایی‌ها،
یکی است: گروهی که در آن

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$$

و بقیه عددها مساوی ۱ - باشند و گروهی که همه عددها برابر ۱ باشند. در
گروه اول، حاصل ضرب همه سدتایی‌ها به جز $a_1 a_2 a_3$ برابر ۱ و در گروه
دوم حاصل ضرب همه سدتایی‌ها برابر ۱ می‌شود.

∇ برای n عدد که، بین آن‌ها، می‌توان از حاصل ضرب سه عدد
اطلاع پیدا کرد، مثل مسالدهای (a) و (b) و (c)، کمترین تعداد پرسش، برای
 $n = 3k$ برابر k ، برای $n = 3k + 1$ برابر $k + 1$ و برای $n = 3k + 2$
برابر $k + 2$ است. ولی اگر بخواهیم از حاصل ضرب عددهای واقع بر
محیط دایره اطلاع داشته باشیم (و در هر پرسش تنها بتوانیم حاصل ضرب
سه عدد مجاور را مشخص کنیم)، وقتی n بر ۳ بخش پذیر باشد، به $\frac{n}{3}$ پرسش
و وقتی n بر ۳ بخش پذیر نباشد، به $\frac{n}{3}$ پرسش نیاز داریم.

$$۱۹۰. پاسخ: $5^2 - 36 = 11$$$

رقم آخر عدد $6^k = 36^k$ برابر ۶ و رقم آخر 5^k برابر ۵ است. بنا بر این،
عدد $|6^k - 5^k|$ یا به ۱ ختم می‌شود (اگر $5^k > 6^k$) و یا به ۹ (زمانی $5^k < 6^k$).
برابری $6^k - 5^k = 1$ ممکن نیست. زیرا در این صورت باید داشته
باشیم:

$$5^k = (6^k - 1)(6^k + 1)$$

و عدد $6^k - 1$ بر ۵ بخش پذیر نیست. به ازای $k = 1$ و $l = 2$ بدست می‌آید:

$$36^k - 5^l = 11$$

برابری $6^k - 5^l = 9$ هم ممکن نیست. زیرا 5^l ، به ازای عددهای طبیعی

۱، بر ۳ بخش پذیر نیست.

۱۹۱. (a) پاسخ: نه همیشه. مثلاً، اگر روی هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع

یا ضلع به طول ۲، مثلث‌های متساوی الساقین به ارتفاع $\frac{1}{10}$ بسازیم، همه

ضلع‌های شش ضلعی حاصل، بیشتر از واحد است. در حالی که طول هر قطر آن از ۲ تجاوز نمی‌کند.

(b) پاسخ: همیشه.

بین قطرهای AD ، BE و CF ، دو قطر پیدا می‌شود که زاویه بین آن.

α ، از 60° درجه کمتر نیست. این دو قطر را، مثلاً، AD و BE می‌گیریم.

متوازی الاضلاع $BEDK$ را می‌سازیم. چون

$$BE = DK > 2, AD > 2, \widehat{DAK} = \alpha > 60^\circ$$

بنا بر این $AK > 2$ ، ولی $AB + BK \geq AK$ ، بنا بر این یا $AB > 1$ و یا

$$ED = BK > 1$$

۱۹۲. از تشابه مثلث‌های O_1K_1P و PK_2O_2 (طبق نام گذاری‌های

شکل ۷۹) به دست می‌آید $PK_2 = Rr$ ، همچنین از تشابه مثلث‌های

$A_1K_1O_1$ و $A_2K_2O_2$ نتیجه می‌شود: $K_2A_2 = Rr$ ، A_1K_1 ، اکنون بدون

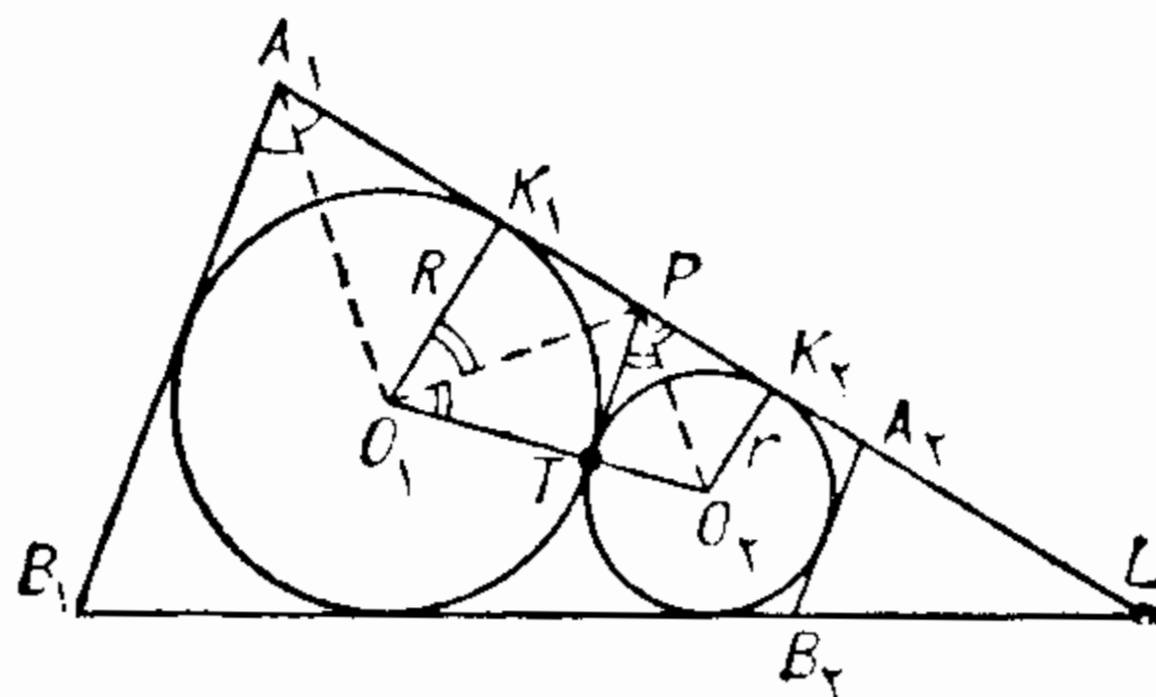
زحمت، به دست می‌آید:

$$K_1P = PK_2 = \sqrt{Rr} \text{ و } A_1K_1 + K_2A_2 \geq 2\sqrt{Rr}$$

(واسطه حسابی، از واسطه هندسی، کمتر نیست). بنا بر این، اگر نقطه A_2 ، که

برای آن $K_2A_2 = \sqrt{Rr}$ ، بین K_2 و L واقع باشد، آن وقت طول کوچکترین

ساق دوزنقه برابر می‌شود با



شکل ۷۹

$$A_1 K_1 + K_1 K_2 + K_2 A_2 = 2\sqrt{Rr}$$

و اگر $A_2 K_2 \geq K_2 L$ ، یعنی

$$\sqrt{Rr} \geq \sqrt{Rr} \cdot \frac{2r}{R-r} = q, R \geq 3r$$

آن وقت

$$A_1 A_2 > 2\sqrt{Rr} + q + \frac{Rr}{q} = \sqrt{Rr} \cdot \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$$

به این ترتیب، به ازای $R > 3r$ ، حداقل طول ساق برابر $2\sqrt{Rr}$ می شود. اگر هم $R \leq 3r$ ، آن وقت ذوزنقه با کوچکترین ساق وجود ندارد.

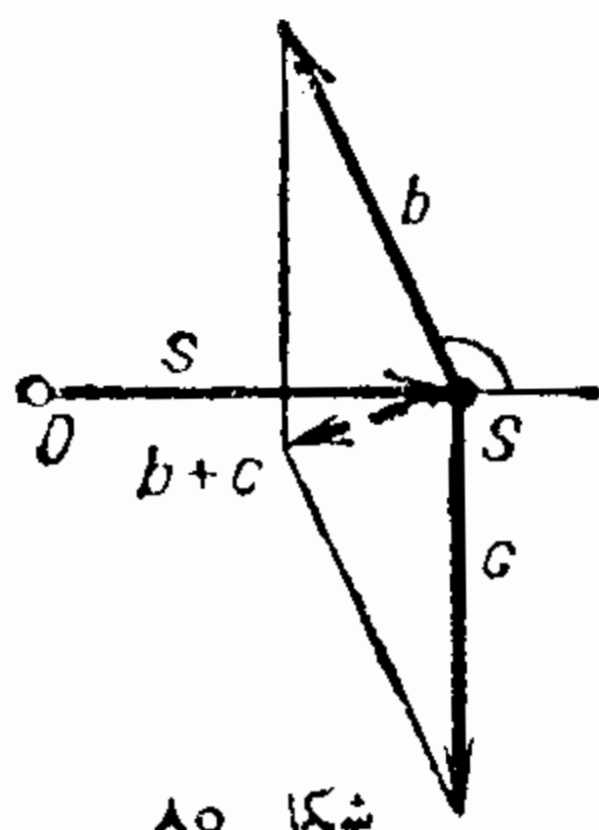
در ضمن، می توان حکم کرد که طول ساق، از $\sqrt{Rr} \cdot \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ بیشتر

است (این ارزیابی، دقیق است).

۱۹۳. همه بردارها را، به مبدا نقطه‌ای مثل O می گیریم.

ثابت می کنیم، اگر k بردار به مجموع $s = \vec{OS}$ (شکل ۸۵) و $|s| \leq 1$ انتخاب کنیم، آن وقت، از بین بقیه بردارها می توان یا یک بردار a را انتخاب کرد که برای آن $|s+a| \leq 1$ و یا دو بردار b و c را می توان در نظر گرفت که برای آن‌ها $|s+b+c| \leq 1$. در واقع، اگر بین بقیه بردارها

بردار a وجود دارد که برای آن $(a, s) > 120^\circ$ ، آن وقت $|a+s| \leq 1$. ولی اگر چنین برداری وجود نداشته باشد، آن وقت، چون در هر دو طرف خط راست DS ، بردارهایی از دستگاه وجود دارد، می توان به عنوان b



شکل ۸۵

برداری را انتخاب کرد که، در یکی از دو نیم صفحه، بزرگترین زاویه را با s بسازد. به همین ترتیب، بردار c را در نیم صفحه دیگر در نظر می گیریم. روشن است که یکی از دوزاویه $(\widehat{c \cdot s})$ یا $(\widehat{b \cdot s})$ منفرجه است و، بنابراین، $(b \cdot c) > 120^\circ$ مثلاً فرض کنید $(b \cdot s) > 90^\circ$ در این صورت $|s + b| < \sqrt{2}$ ، وای، $(b + c \cdot s) > 120^\circ$ و در نتیجه $|s + b + c| \leq 1$. به این ترتیب، اگر به دستگاه با مجموع s ، ابتدا بردار b و سپس بردار c را اضافه کنیم، بعد از هر گام، مجموع از $\sqrt{2}$ کوچکتر است.

$\sqrt{2}$ ثابت کردیم که در صورت مسأله، می توان 2 را با $\sqrt{2}$ عوض کرد. با استدلالی ظریف تر می توان ثابت کرد که همیشه می توان بردارها را طوری شماره گذاری کرد که مجموع k بردار اول آن از $\frac{\sqrt{5}}{2}$ بیشتر نباشد؛

در ضمن، ارزیابی اخیر، کاملاً دقیق است: مثال $2n + 1$ بردار که یکی از

آنها $(-1, 0)$ ، n عدد آنها $(\frac{1}{n}, \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})$ و n عدد دیگر آن

$(\frac{1}{n}, -\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})$ باشند، نشان می دهد که عدد $\frac{\sqrt{5}}{2}$ را نمی توان کوچکتر کرد.

قضیه مشابهی وجود دارد، که آن را پیش قضیه شتینر گویند. و آن را می توان در فضای m بعدی ثابت کرد (برای هر «نرم» و طولی از بردارها)؛ در ضمن، ثابت تناظر شتینر از m تجاوز نمی کند.

۱۹۴. پاسخ: از بین عددهای a ، b و c ، دو عدد برابر 0 و 0 می برابر ± 1 (روی هم، شش جواب).

کافی است در اتحاد مفروض، پشت سر هم قرار دهیم:

$$x = y = z = 1; \quad x = y = 0 \text{ و } z = 1; \quad x = 1 \text{ و } y = -1 \text{ و } z = 0$$

به این دستگاه می رسیم:

$$|a + b + c| = 1, \quad |a| + |b| + |c| = 1$$

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2$$

چون $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$ ، بنا بر این a, b, c هم علامت اند،

یعنی $ab \geq 0, bc \geq 0, ca \geq 0$ ولی در نابرابری

$$|a-b| + |b-c| + |c-a| \leq 2|a| + 2|b| + 2|c| = 2$$

(برای نابرابری، از $|a-b| \leq |a| + |b|$ استفاده کرده ایم)؛ برای تنها

وقتی برقرار است که داشته باشیم: $ab \leq 0, bc \leq 0, ac \leq 0$. از این جا

نتیجه می شود:

$$ab = bc = ac = 0$$

یعنی دو عدد از سه عدد a, b, c برابر صفر و سومی (با توجه به یکی از معادله های دستگاه)، از لحاظ قدر مطلق، برابر واحد است.

۱۹۵. F را نقطه برخورد خط راست BH با خط راست AD می-

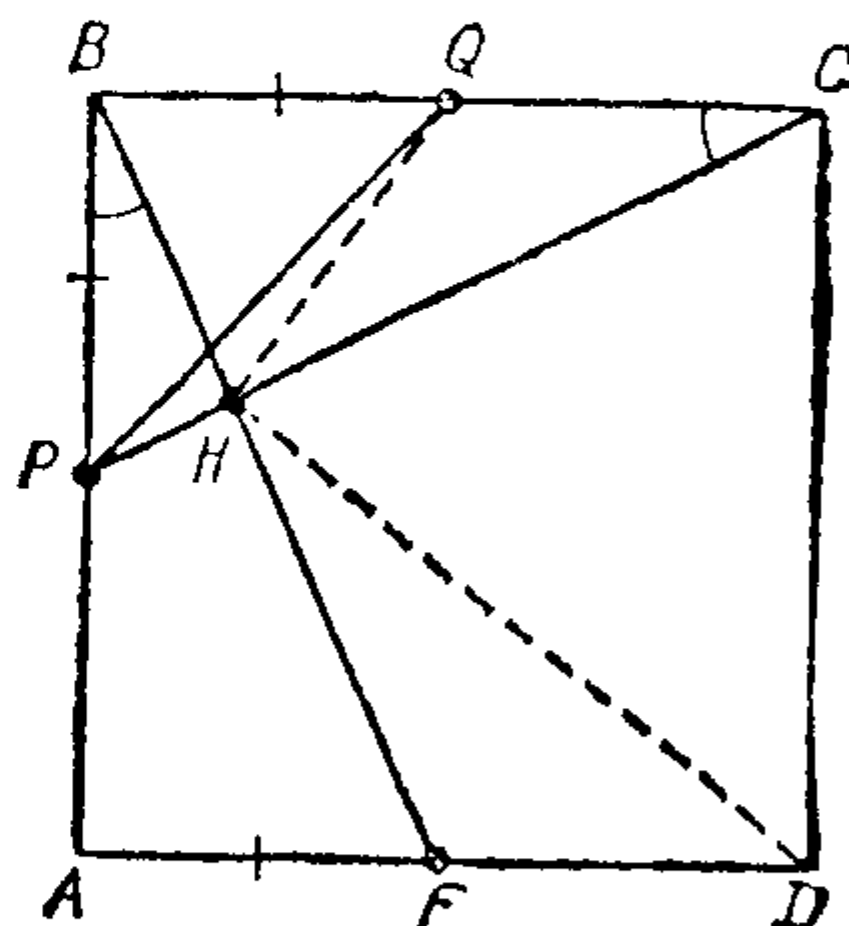
گیریم (شکل ۸۱) از نابرابری مثلث های ABF و BPC (در یک ضلع مجاور به زاویه قائمه و یک زاویه حاده) نتیجه می شود:

$$AF = BP = BQ \text{ و } FD = CQ$$

بنابراین، چهارضلعی $QCDF$ یک مستطیل است.

دایره محیط بر این مستطیل، از نقطه H می گذرد، زیرا FC قطر این

دایره است و در ضمن $\widehat{FHC} = 90^\circ$. چون DQ قطر مستطیل است، بنا بر این



شکل ۸۱

$$\widehat{DHQ} = 90^\circ$$

۱۹۶. برای اثبات کافی است به این نکته توجه کنیم که، ضمن تغییر رنگ هر نقطه «ویژه»، از تعداد پاره‌خط‌های راستی که در دو انتهای خود دو رنگ مختلف دارند، دست کم یکی کم می‌شود. بنا بر این، تجدید رنگ را تنها به تعداد محدودی می‌توان انجام داد و، بعد از آن، نقطه «ویژه‌ای» باقی نمی‌ماند.

۱۹۷. پاسخ: $n = k$ و k برابر ۱، ۸ یا ۹.

اگر n^k دارای k رقم و k^k دارای n رقم باشد، آن وقت

$$10^{k-1} \leq n^k < 10^k \quad \text{و} \quad 10^{n-1} \leq k^k < 10^n$$

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $n \geq k$. در این صورت $n^k < 10^n$ ، یعنی $n < 10$ و $k < 10$. کافی است تحقیق کنیم:

$$2^2 < 100, 3^2 < 1000, 4^2 < 10000, 5^2 < 10^4, 6^2 < 10^5.$$

$$7^2 < 10^6, 10^2 < 8^2 < 10^3, 10^4 < 9^2 < 10^9$$

۱۹۸. مثلث ABC را دور نقطه C به اندازه 90° درجه طوری دوران می‌دهیم که نقطه A به نقطه B برود. در این صورت، نقطه E به نقطه F واقع بر خط راست AC می‌رود که، برای آن داریم:

$$FB \parallel CL \parallel DK \quad \text{و} \quad FC = BD$$

بنا بر این $BL = LK$.

۱۹۹. (a) می‌توان.

موش در هر جا که باشد، باید گردها را طوری قرار داد که موش، روی پاره‌خط راست بین آنها و موازی یکی از قطرهای صفحه شطرنج باشد. با هر حرکت موش، گردها طوری حرکت می‌کنند که باز هم، مثل قبل، موش در بین آنها، روی خط راستی موازی قطر قرار گیرد.

(b) از جایی که موش قرار دارد، دو پاره‌خط راست موازی قطر را رسم و خانه‌های این پاره‌خط‌های راست را استثنا می‌کنیم. در یکی از چهار

بخشی که به این وسیله روی صفحه شطرنج پیدا می‌شود، گره‌های وجود ندارد و موش باید در همین بخش، روی مسیر قطری به سمت کناره صفحه برود. روشن است که گره‌ها نمی‌توانند به او برسند، زیرا بعد از هر حرکت گره‌ها، در برابر موش و در جهت حرکت او، بخشی از صفحه وجود دارد که گره‌های در آن پیدا نمی‌شود.

۲۰۰. (a) برای این که ردیف مورد نظر را به دست آوریم، در نیمی از سطر، عددهای زوج و در نیم دیگر سطر، عددهای فرد را می‌نویسیم. در این صورت، اگر دو عدد از دو نیمه مختلف سطر را در نظر بگیریم، نصف مجموع آنها، عددی درست نمی‌شود و، بنابراین، برابر با عددی واقع در بین آنها نخواهد بود. سپس، در هر یک از دو نیمه سطر، مشابه همان عمل را انجام می‌دهیم: هر یک از دو نیمه را به دو گروه چهارتایی تقسیم می‌کنیم و در آنها، عددهای به صورت $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$ را قرار می‌دهیم. در این صورت نصف مجموع دو عدد در هر یک از دو نیمه سمت چپ عددی فرد و در هر یک از دو نیمه سمت راست عددی زوج است و، بنابراین، برابر با عددی در بین آن دو عدد نیست. سپس، هر یک از چهار بخش را، به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ در ضمن در این جا، نقش «زوج» و «فرد» به عهده عددهایی است که در تقسیم بر ۸ به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند و غیره. نتیجه ردیف عددها، به این صورت درخواهد آمد:

۲۶، ۱۰، ۱۸، ۲، ۳۰، ۱۴، ۲۲، ۶، ۲۶، ۱۲، ۲۰، ۴، ۳۲، ۱۶، ۲۴، ۸

۲۵، ۹، ۱۷، ۱، ۲۹، ۱۳، ۲۱، ۵، ۲۷، ۱۱، ۱۹، ۳، ۳۱، ۱۵، ۲۳، ۷

(b) برای این که حکم مساله را برای هر تعداد N عدد ثابت کنیم، کافی است اثبات را، برای $N = 2^n$ بیاوریم (عددهای اضافی را می‌توان حذف کرد: مثلاً، اگر ردیف عددها را برای تعداد $2^7 = 128$ عدد به دست آوریم، می‌توان عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را از بین آنها حذف کرد و ردیف لازم را برای $N = 100$ عدد به دست آورد). اندیشه اصلی راه حل، در (a) نشان داده شد؛ اثبات کوتاه‌تر را می‌توان با روش استقرای روی n به دست آورد.

حکیم مساله برای $n=1$ و $n=2$ درست است: ردیف‌های (۲، ۱) و (۳، ۱، ۲) به دست می‌آید. اگر (a_1, a_2, \dots, a_N) ردیف مورد نظر $N=2^n$ عدد ۱، ۲، ...، N باشد، آن وقت

$$2a_1, 2a_2, \dots, 2a_N, 2a_1-1, 2a_2-1, \dots, 2a_N-1$$

ردیف مورد نظر برای $2N=2^{n+1}$ عدد خواهد بود: درستی حکم برای هر يك از دو نیمه این ردیف، با توجه به فرض استقرا، با شرط لازم مساله سازگارند.

۲۰۱. پاسخ: ۱۵ عدد (۱۱۱، ۲۲۲، ...، ۹۹۹، ۴۰۷، ۵۱۸، ۶۲۹، ۳۷۰، ۴۸۱، ۵۹۲).

\overline{abc} را عدد مجهول می‌گیریم: بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 6\overline{abc}$$

از آنجا

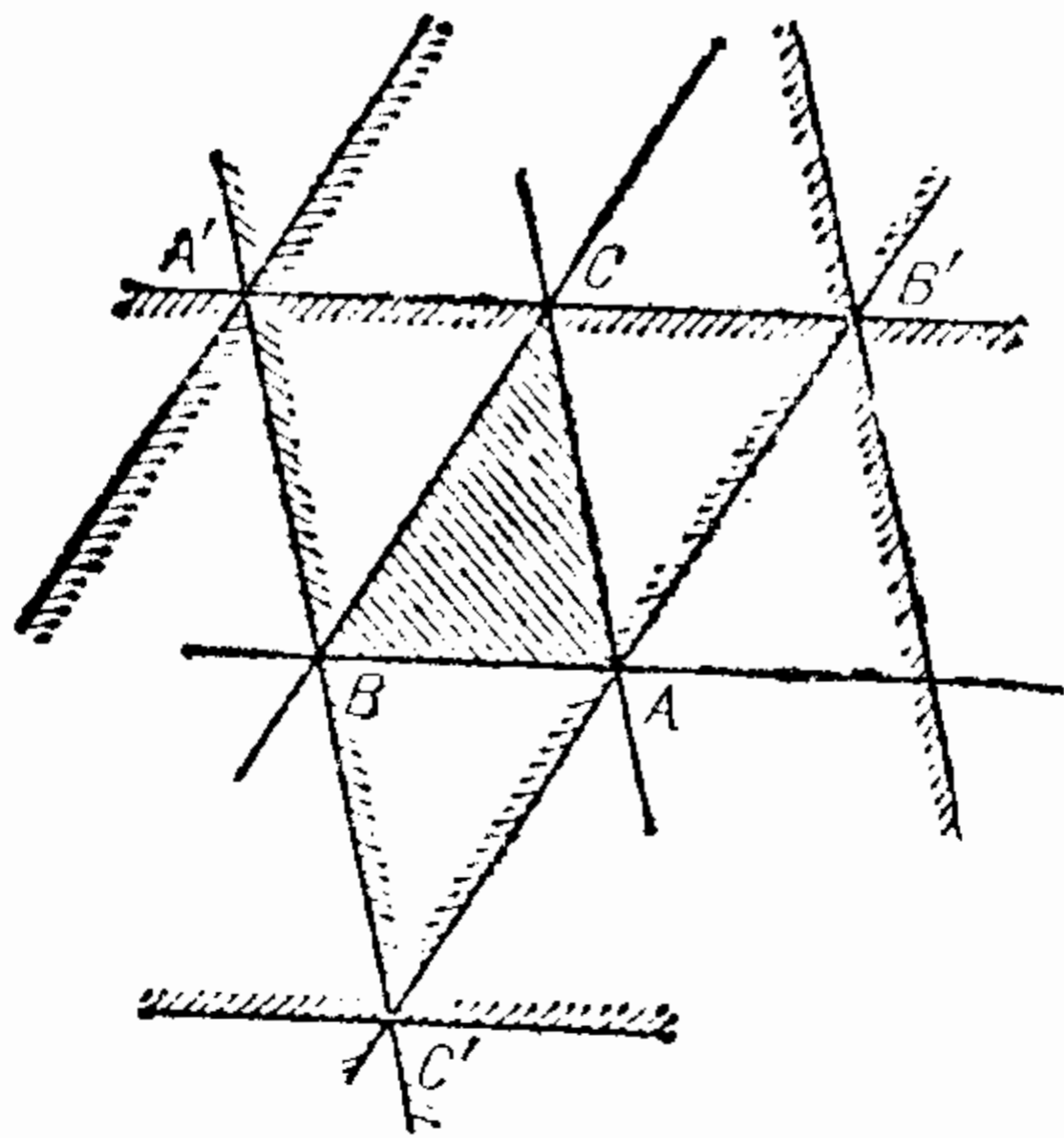
$$222(a+b+c) = 6(100a+10b+c) \Rightarrow 7a = 3b + 4c$$

این معادله را می‌توان، با آزمایش همه حالت‌ها، حل کرد (مثلاً a را، به ترتیب، برابر ۱، ۲، ...، ۹ گرفت و در هر مورد، معادله حاصل را با توجه به این که b و c دو رقم‌اند، حل کرد). ولی با اندکی تغییر در معادله، می‌توان راه حل کوتاه‌تری به دست آورد. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$7(a-b) = 4(c-b)$$

از آنجا یا $a=b=c$ ، و یا $a-b=4$ و $c-b=7$ (که در این صورت $0 \leq b \leq 2$)؛ و یا $b-a=4$ و $b-c=7$ (که در این صورت $7 \leq b \leq 9$).

۲۰۲. مجموعه رأس‌های چندضلعی مفروض P را در نظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، سه رأس A ، B و C را طوری انتخاب می‌کنیم که، مساحت مثلث ABC ، حداکثر باشد. (روشن است که، مساحت مثلث ABC ، از مساحت هر مثلثی که بتوان در چندضلعی P جا داد، کمتر نیست. در این‌جا، از



شکل ۸۲

حالت‌های خاص این حقیقت استفاده خواهیم کرد.

M را نقطه‌ای از چندضلعی P می‌گیریم. چون مساحت مثلث MBC از مساحت مثلث ABC بیشتر نیست، بنابراین M در نواری قرار دارد که، محور تقارن آن، خط راست BC و عرض آن دو برابر ارتفاعی از مثلث ABC است که از رأس A گذشته باشد. اگر به همین استدلال دربارهٔ مثلث‌های MCA و MAB متوسل شویم، معلوم می‌شود که، همهٔ نقطه‌های چندضلعی، متعلق به اشتراك سه نوار حاصل اند، مثلث $A'B'C'$ (شکل ۸۲)، که مساحت آن برابر است با $4S_{ABC}$.

∇ شبیه این استدلال را در مسألهٔ ۸۰ داشتیم. در واقع در آنجا، ثابت کردیم، مثلث $A'B'C'$ ، مجموعهٔ نقطه‌های M است که، برای آن‌ها، همهٔ سه مساحت S_{MCA} ، S_{MBC} ، S_{MAB} از S_{ABC} تجاوز نمی‌کنند.

(a. ۲۰۳) تابع f در بازهٔ $[0, 1]$ غیر نزولی است، زیرا از $0 \leq y \leq x \leq 1$

نتیجه می‌شود:

$$f(x) = f((x-y) + y) \geq f(x-y) - f(y) \geq f(y)$$

به جز این، برای همهٔ مقادیر x ، داریم: $f(2x) \geq 2f(x)$. با توجه به این نکته‌ها، به دست می‌آید:

$$\text{به ازای } \frac{1}{4} < x \leq 1: f(x) \leq f(1) \leq 2x$$

$$\text{به ازای } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{4} : 2x \leq \frac{1}{2} \leq f(2x) \leq \frac{1}{2} f(x) ;$$

.....

$$\text{به ازای } \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n+1}} : 2x \leq \frac{1}{2^n} \leq f(2x) \leq \frac{1}{2^n} f(x) ;$$

.....

و چون $f(0) = 0$ ، پس $f(2x) \leq 2x$ (به ازای همه مقادیر x).
 (b) پاسخ: درست نیست. مثال

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

این تابع با همه شرطهای مسأله سازگار است. ولی

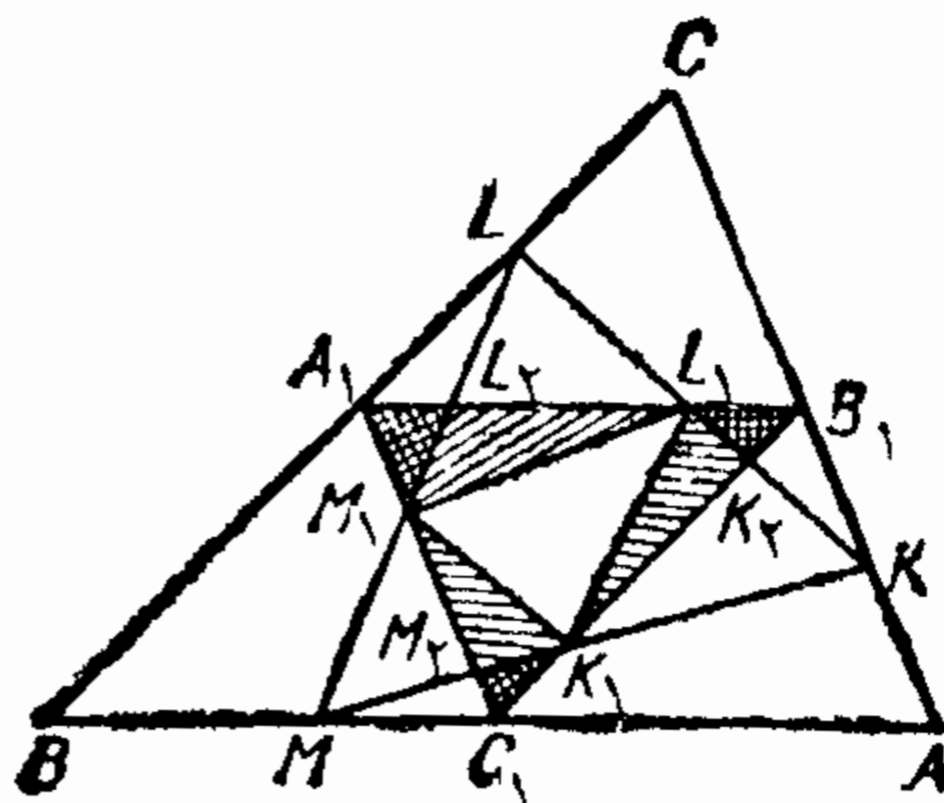
$$f(0.51) = 1 > 1/9 \times 0.51 = 0.056$$

۲۰۴. پاسخ: $\frac{1}{8}$.

با توجه به نام گذاریهای شکل ۸۳ داریم:

$$\frac{C_1 M_2}{M_2 M_1} \leq \frac{AK}{KC} \leq \frac{AB_1}{B_1 C} = 1$$

بنابراین $C_1 M_2 \leq M_2 M_1$ و در نتیجه $S_{C_1 M_2 K_1} \leq S_{M_2 M_1 K_1}$. بدیهین ترتیب



شکل ۸۳

ثبات می شود: $S_{AL_2M_1} \leq S_{L_2L_1M_1}$ و $S_{BK_2L_1} \leq S_{K_2K_1L_1}$.

S را مساحت بخش مشترك مثلث های KLM و $A_1B_1C_1$ می گیریم.

از مجموع نابرابری های حاصل، به دست می آید:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} - S &\leq S_{K_1M_2M_1} + S_{M_1L_2L_1} + S_{L_1K_2K_1} = \\ &= S - S_{K_1M_1L_1} \leq S \end{aligned}$$

از آن جا $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} \cdot 2S \geq S$ ، یعنی $S \geq \frac{1}{8}$. اگر نقطه M بر C_1 ، نقطه L

بر C و نقطه K بر A منطبق باشند، آن وقت $S = \frac{1}{8}$.

۲۰۵. اگر ضمن دوران به اندازه زاویه α ، دور نقطه O ، وتر Q_1Q_2

از دایره به مرکز O ، از وتر P_1P_2 به دست آید، آن وقت می توان نقطه

R ، محل برخورد خط های راست P_1P_2 و Q_1Q_2 را از نقطه M وسط وتر

P_1P_2 ، ضمن دوران به اندازه $\frac{\alpha}{2}$ دور نقطه O (در ضمن، نقطه M ، به نقطه

M' از پاره خط راست OR می رود) تجانس به مرکز O و ضریب

$$k = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = OR : OM = OR : OM'$$

به دست می آید. از این نکته ها، برای حل مساله استفاده می کنیم.

(a) مثلث $A_2B_2C_2$ با تبدیل هایی که شرح دادیم، از مثلث KLM

به دست می آید که از وصل وسط ضلع های مثلث ABC به دست آمده است.

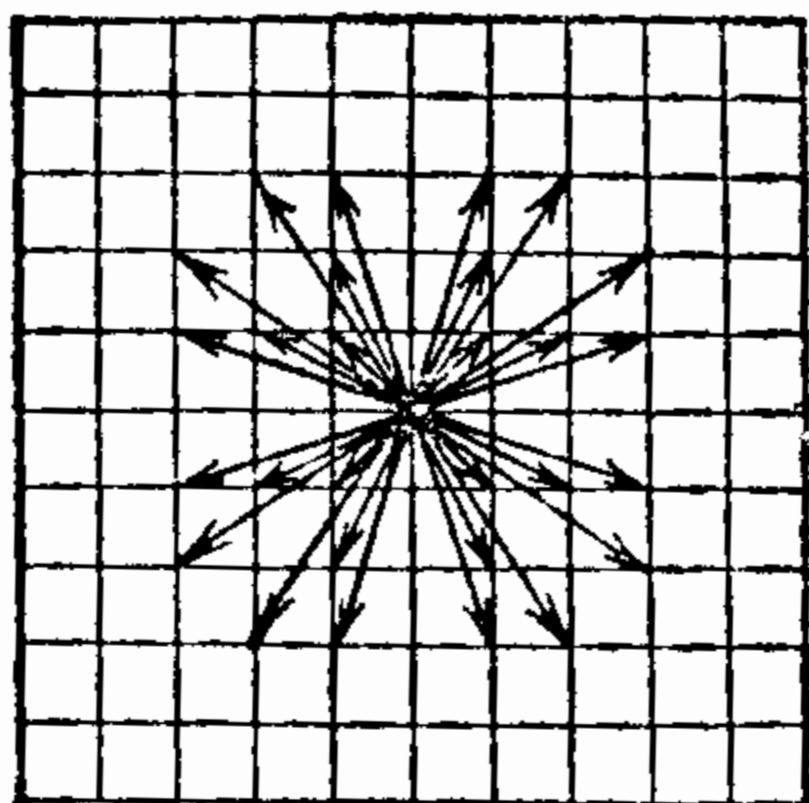
چون دو مثلث KLM و $A_2B_2C_2$ و هم چنین، دو مثلث ABC و KLM متشابه اند،

بنا بر این، مثلث های ABC و $A_2B_2C_2$ متشابه می شوند.

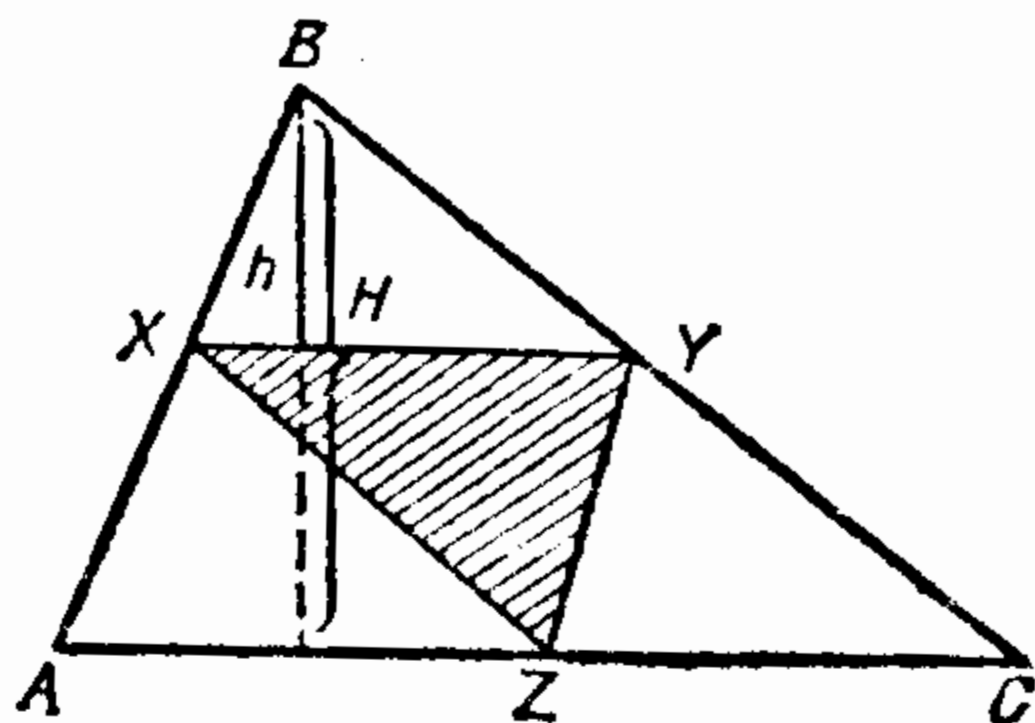
(b) چهار ضلعی مورد نظر مساله، با تبدیل تشابهی، از چهار ضلعی به دست

می آید که وسط ضلع های $ABCD$ را بهم وصل کرده است. ولی از وصل

وسط ضلع های هر چهار ضلعی، يك متوازی الاضلاع به دست می آید.



شکل ۸۵



شکل ۸۴

۲۰۶ پاسخ: $\frac{1}{4}$

قبل از همه یادآوری می‌کنیم که، بازی کن دوم، می‌تواند بدون توجه به بازی اولی، خود را به $S_{XYZ} \leq \frac{1}{4}$ برساند. برای این منظور، باید Y را طوری انتخاب کند که XY موازی با AC در آید (شکل ۸۴). در این صورت، برای هر نقطه Z واقع بر ضلع AC ، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \frac{XY}{AC} \cdot \frac{H-h}{H} = \frac{h(H-h)}{H^2} \leq \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر، اگر تراول، نقطه‌های X و Z را در وسط ضلع‌های AB و AC در نظر بگیرد، می‌تواند به $S_{XYZ} = \frac{1}{4}$ برسد (بدون ارتباط با بازی دومی).

✓ مسأله‌ی مشابهی که در آن، به جای مساحت‌ها، صحبت بر سر محیط‌ها باشد، مسأله‌ای دشوارتر است.

۲۰۷. پاسخ: $4 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{10} + 8\sqrt{13}$

محیط ۳۲ ضلعی $A_1 A_2 \dots A_{32}$ را به صورت مجموع ۳۲ بردار می‌گیریم:

$$\vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{A_{32} A_1} = \vec{0}$$

چون با هر ۳۲ بردار با جهت‌های مختلف و مجموع $\vec{0}$ ، می‌توان یک ۳۲ ضلعی محدب ساخت، مسأله به این جا منجر می‌شود که: ۳۲ بردار پیدا کنیم که با

شرط‌های زیر سازگار باشند:

(الف) ابتدا و انتهای هر بردار، در نقطه‌های گرهی کاغذ شطرنجی باشد:

(ب) هر دو بردار، دارای جهت‌های مختلف باشند:

(ج) مجموع همه بردارها، برابر ۵ باشد:

(د) با برقراری شرط‌های الف تا ج)، مجموع طول‌های همه بردارها،

حداقل ممکن باشد.

همه بردارها را با مبدا مشترك در نظر می‌گیریم. دستگاه ۳۲ بردار

شکل ۸۵، با همه شرط‌های الف تا د) سازگارند. در بین آنها، چهار بردار

به طول واحد (آنها را روی شکل ۸۵ نیاورده‌ایم). چهار بردار به طول

$\sqrt{2}$ و سه گروه هشت برداری، به ترتیب: به طول $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{10}$ و $\sqrt{13}$

وجود دارد.

▽ به همین ترتیب می‌توان ۱۱ گروه چهار برداری با جهت‌های مختلف

انتخاب کرد، به نحوی که ۴ ضلعی محدبی که با ضلع‌هایی به طول این

بردارها و با رأس‌هایی واقع در نقطه‌های گرهی صفحه شطرنجی ساخته

می‌شود، حداقل محیط را داشته باشد.

۲۰۸. پاسخ: (a) $k=21$ ؛ (b) $k=52$ (شکل ۸۶).

تعداد این گونه نقطه‌ها را، در حالت کلی، برای مربع $m \times m$ محاسبه

	*	*	*			
*	*					*
*		*			*	
*			*	*		
			*		*	*
		*		*		*
	*			*	*	

a

*						*	*	*			
				*	*	*					*
			*		*		*			*	
			*	*				*	*		
	*	*	*			*					
*		*		*			*				
*	*			*							*
*		*		*						*	
*			*		*				*		
			*					*		*	*
		*						*		*	*
	*						*			*	*

b

شکل ۸۶

x_i را تعداد نقطه‌های واقع در سطر با شماره i و $\sum_{i=1}^m x_i = k$ می‌گیریم.

اگر در یک سطر، دو نقطه را علامت بگذاریم، آن وقت در هیچ سطر دیگری نمی‌توان دو نقطه را در همین دو ستون علامت گذاری کرد. چون در سطر i ام به تعداد x_i نقطه علامت گذاشته شده است، از آن می‌توان به تعداد $\frac{1}{2}x_i(x_i - 1)$ زوج ساخت. و این همه این زوج‌ها باید مختلف باشند، بنابراین

تعداد آن‌ها نمی‌تواند از تعداد کل زوج‌های ممکن تجاوز کند، یعنی

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i(x_i - 1)}{2} \leq \frac{m(m-1)}{2}$$

از این جا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq m(m-1) + \sum_{i=1}^m x_i = m(m-1) + k$$

از آن جا که

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \geq \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2 = \frac{1}{m}k^2$$

به این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{1}{m}k^2 \leq m(m-1) + k$$

و از این نابرابری به دست می‌آید:

$$k \leq \frac{1}{2}(m + m\sqrt{4m-3}) \quad (*)$$

به ازای $m=7$ و $m=13$ ، به ترتیب به دست می‌آید: $k \leq 21$ و $k \leq 52$.

▽ دشوارتر از حل مسأله، پیدا کردن مثال‌هایی است که حداکثر

مقدار k را تحقق بخشد. راه ساختن آن‌ها را می‌آوریم. در مثال (a) به عنوان

«شماره» سطرها (و همچنین ستون‌ها) از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنیم، به‌جز سه‌تایی (۰ ۰ ۰). از این سه‌تایی‌ها، ۷ عدد وجود دارد:

$$(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 1)$$

خانه محل برخورد سطر (a_1, a_2, a_3) و ستون (x_1, x_2, x_3) را به شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ عددی زوج باشد.

در مثال (b)، به جای «شماره» سطرها و ستون‌ها، از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰، ۱ و -۱، به‌جز سه‌تایی (۰ ۰ ۰) استفاده می‌کنیم؛ در ضمن از بین دو «سه‌تایی» که یکی از آن‌ها از ضرب دیگری در -۱ پیدا می‌شود، تنها یکی را در نظر می‌گیریم. تعداد این سه‌تایی‌ها برابر است با ۱۳:

$$(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 1); (1, 0, 0); (0, 1, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (0, 0, 0); (-1, 1, 1); (-1, 1, 0); (-1, 0, 1); (-1, 0, 0); (1, -1, 0); (1, 0, -1); (1, -1, -1)$$

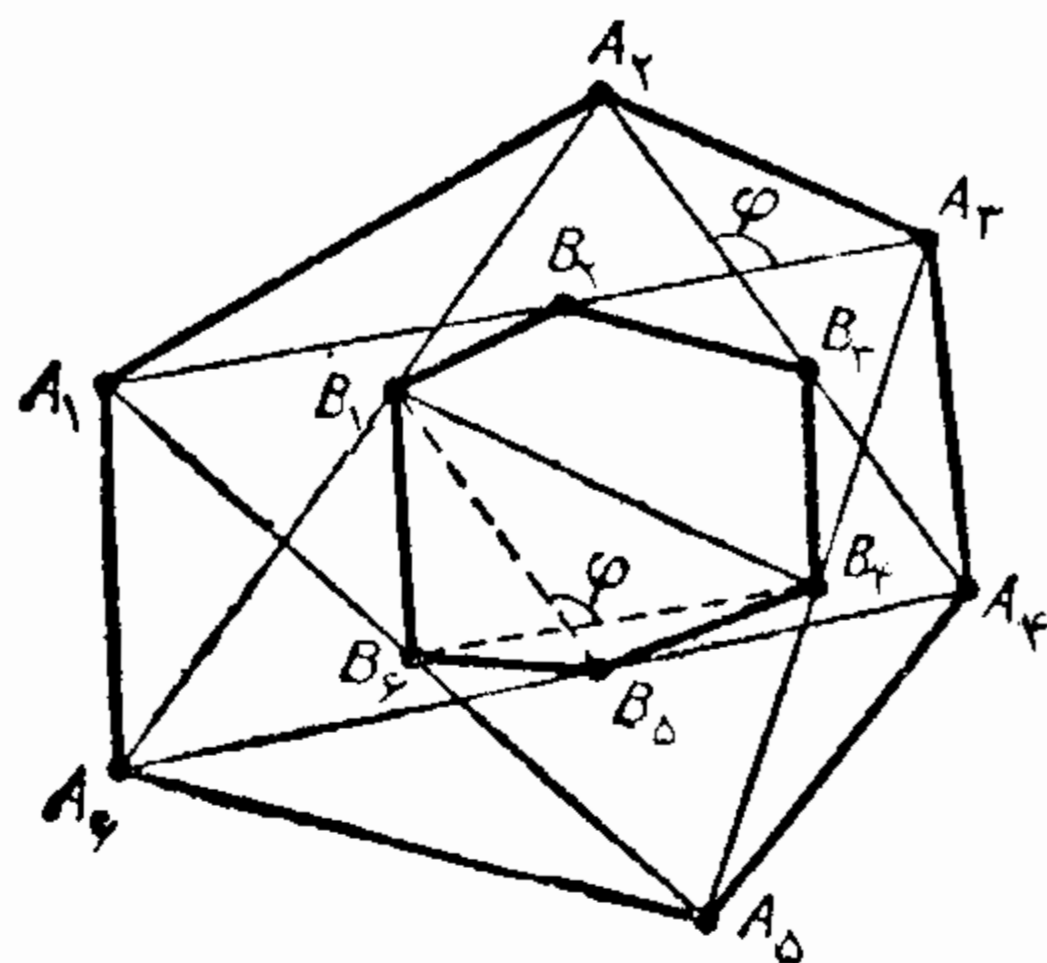
خانه محل برخورد سطر (a_1, a_2, a_3) و ستون (x_1, x_2, x_3) را به شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ بر ۳ بخش پذیر باشد.

و این، عبارت است از ساختمان صفحه‌های تصویری متناهی بر میدانی از $p=2$ و $p=3$ عضو: ستون‌ها متناظر با نقطه‌ها و سطرها متناظر با خط‌های راست صفحه تصویری هستند. ویژگی مورد نظر ما در جدول، منجر به این می‌شود که، از هر دو نقطه یک خط راست بگذرد و هر دو خط راستی در یک نقطه بهم برسند [خط راست (a_1, a_2, a_3) وقتی شامل نقطه (x_1, x_2, x_3) است که $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ نسبت به جدول p ، برابر با ۰ باشد]. می‌توان ثابت کرد: نابرابری (*) وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$m = p^2 + p + 1$$

که در آن، p عددی طبیعی است؛ در ضمن

$$k = (p+1)(p^2 + p + 1)$$



شکل ۸۷

پاسخ به این پرسش که: آیا برای این گونه m و k ، می توان جدول متناظر را پیدا کرد، بسیار دشوار است. این منجر به مسأله وجود صفحه های تصویری متناهی مرتبه p می شود که هنوز حل نشده است. در حالت هایی که p عددی اول یا توانی از یک عدد اول باشد، پاسخ به این پرسش مثبت است.

۲۰۹. مساحت چهارضلعی $B_1 B_4 B_5 B_6$ (شکل ۸۷) برابر است با

$\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ ، زیرا قطرهای چهارضلعی اول موازی

قطرهای چهارضلعی دوم و برابر نصف آنها هستند: $B_1 B_5$ موازی $A_2 A_4$ و برابر نصف آن، $B_4 B_6$ موازی $A_1 A_3$ و برابر نصف آن. در ضمن می دانیم، اگر طول قطرهای یک چهارضلعی محدب را d_1 و d_2 و زاویه بین دو قطر

را φ بنامیم، مساحت چهارضلعی با دستور $S = d_1 d_2 \sin \frac{\varphi}{2}$ بیان می شود.

به همین ترتیب، ثابت می شود که، مساحت چهارضلعی $B_1 B_2 B_3 B_4$ هم، برابر

$\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1 A_4 A_5 A_6$ است.

۲۱۰. به ازای $n=1$ ، چهار عدد ۱۱، ۲۱، ۱۲، ۲۲ با شرط های

مسأله سازگارند.

a' را به معنای عددی می گیریم که از a ، با تبدیل رقم ۱ به ۲ و ۲

به ۱ در آن، به دست آمده باشد؛ همچنین $a b$ را به این معنا می گیریم که

عدد b را کنار a نوشته ایم. فرض کنید، مجموعه A_n شامل 2^{n+1} عدد 2^n

رقمی باشد، به نحوی که هر دو تا از آن‌ها، دست کم در 2^{n-1} مرتبه خود، با هم فرق داشته باشند. مجموعه A_{n+1} را در نظر می‌گیریم که از عددهای aa و aa' تشکیل شده باشد ($a \in A_n$). همه این عددها 2^{n+1} رقمی‌اند و روی هم، 2^{n+2} عدد را معرفی می‌کنند. به جز این، هر دو عدد، دست کم در 2^n مرتبه خود، با هم تفاوت دارند. در واقع، عددهای aa' و aa ، هم‌چنین، عددهای aa و bb' ، به‌ازای هر a و b ، درست در 2^n مرتبه، با هم متفاوتند (در مرتبه‌هایی که در آن‌ها، a و b بر هم منطبق‌اند، a' و b' با هم فرق دارند و برعکس)؛ عددهای aa و bb ، بنا بر فرض استقرای، دست کم در 2^n مرتبه خود، با هم فرق دارند. حکم ثابت شد.

۲۱۱. همه چندضلعی‌ها را بر یک خط راست تصویر می‌کنیم. تصویر هر کدام از چندضلعی‌ها، به صورت یک پاره‌خط راست در می‌آید و، در ضمن، با توجه به شرط مساله، هر دو پاره‌خط، دارای نقطه‌ای مشترک‌اند. از این جا، می‌توان نتیجه گرفت که، همه این پاره‌خط‌های راست، نقطه مشترکی دارند (برای این که در این مورد قانع شوید، کافی است خط راست مفروض را همچون یک محور عددی در نظر بگیرید و کوچکترین عدد را، در بین عددهای نماینده انتهای راست این پاره‌خط‌ها انتخاب کنید). خط راستی که از نقطه مشترک این پاره‌خط‌های راست، عمود بر آن‌ها رسم شود، همه چندضلعی‌ها را قطع می‌کند. ۲۱۲. بدون این که به کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$a \geq b \geq c$$

در این صورت $c(a-c)(b-c) \geq 0$ و از آن جا

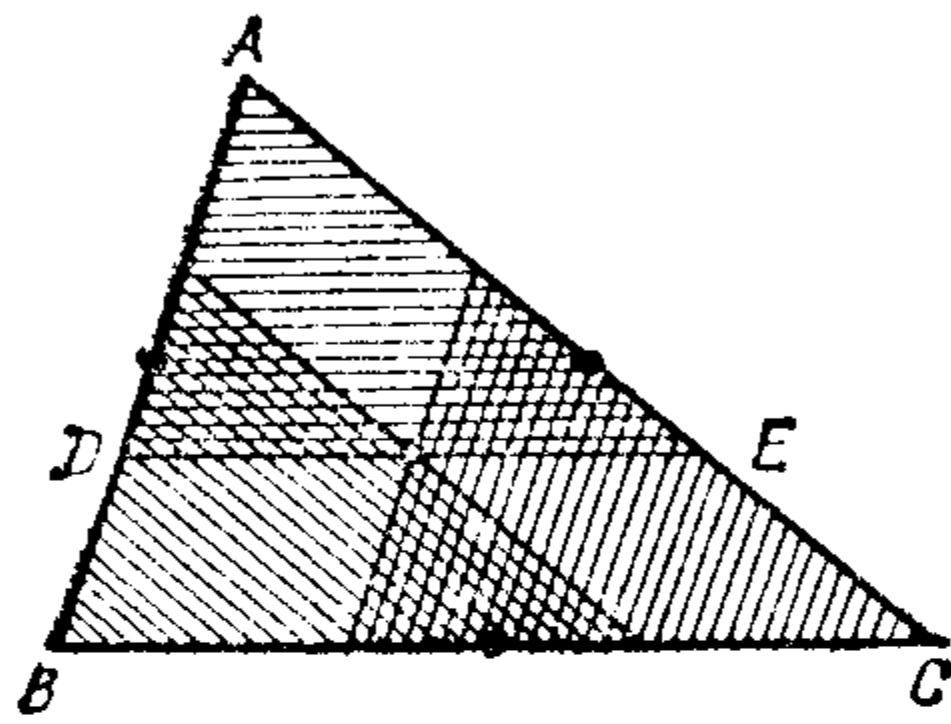
$$a^3 + abc \geq ac^2 + bc^2$$

و کافی است ثابت کنیم:

$$a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a+b) + a^2c + b^2c$$

ولی نابرابری اخیر را، می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$$



شکل ۸۸

▽ به سادگی دیده می شود، که نابرابری، تنها وقتی به برابری تبدیل می شود که داشته باشیم: $a = b = c$.

۲۱۳. اگر یکی از مگس ها در رأس A قرار گیرد، آن وقت مرکز ثقل مثلثی که از مگس ها تشکیل می شود، در مثلث ADE قرار دارد (شکل ۸۸) که در آن $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$. چون یکی از مگس ها، از همه رأس ها می گذرد، بنا بر این

مرکز ثقل «مثلث مگس ها» باید متعلق به سه مثلثی باشد که روی شکل ها شور زده ایم. تنها نقطه مشترک این سه مثلث، مرکز ثقل مثلث مفروض است.

۲۱۴. تعداد صفرها را p ، تعداد واحدها را q و تعداد دوها را r می گیریم. در هر گام، هر سه عدد p و q و r به اندازه یک واحد تغییر می کنند؛ آن ها که فردند زوج، و آن ها که زوج اند فرد می شوند. وقتی که تنها یک رقم روی تخته سیاه باقی می ماند، از عددهای p ، q و r ، یکی برابر ۱ و دوتای دیگر برابره می شود. بنا بر این، در ابتدا هم، زوج یا فرد بودن یکی از عددها با زوج یا فرد بودن دو عدد دیگر فرق داشته است؛ و همین عدد است که، سر آخر، روی تخته سیاه باقی می ماند.

۲۱۵. A_1, A_2, \dots, A_n را نقطه های برخورد خط های راست با کناره بالای نوار و آن ها را به ردیف (از چپ به راست) شماره گذاری می کنیم؛ همچنین B_1, B_2, \dots, B_n را نقطه های برخورد خط های راست با کناره پایین و باز هم از چپ به راست، فرض می کنیم. مسیرهایی را که از نقطه های B_1, B_2, \dots, B_n آغاز می شوند، با شماره های ۱، ۲، ...، n شماره گذاری می کنیم. با توجه به قانون ساختمان مسیر، این ویژگی ها به دست می آید.

۱°. از هر پاره خط راست، درست یک مسیر می گذرد؛

۲. مسیرهائی مجاور k ام و $(k+1)$ ام - در رأس‌هایی با هم تماس دارند؛ در ضمن، مسیر k ام همیشه در سمت چپ مسیر $(k+1)$ ام است (برای هر k از ۱ تا $n-1$). مسیرهائی غیر مجاور، دارای نقطهٔ مشترکی نیستند.

۳. مسیری که از B_k آغاز شده است، به A_k ختم می‌شود.

اکنون به اثبات بخش‌های مختلف مساله می‌پردازیم.

(a) همهٔ مسیرهائی را در نظر می‌گیریم که از شماره‌های فرد آغاز شده‌اند. بنا بر ویژگی ۲، این مسیره‌ها، نقطهٔ مشترکی ندارند و، تعداد آنها، از $\frac{n}{2}$ کمتر نیست.

(b) با دوروش، تعداد کل پاره‌خط‌های راست همهٔ مسیره‌ها را محاسبه می‌کنیم، هر یک از پاره‌خط‌های راست $B_i A_{n+1-i}$ ، یکی از خط‌های راست، به وسیلهٔ خط‌های راست دیگر، به n پاره‌خط تقسیم می‌شود. بنا بر این، تعداد کل این پاره‌خط‌ها برابر n^2 است. با توجه به ویژگی ۱، باید همین مجموع n^2 ، با جمع تعداد پاره‌خط‌های همهٔ n مسیر هم، به دست آید. بنا بر این، دست کم یکی از جمله‌های این جمع، از n کمتر نیست.

البته حکم (b) را از حکم (d) هم می‌توان نتیجه گرفت.

(c) تعداد پاره‌خط‌ها را در دو مسیر مرزی - مسیر اول و مسیر n ام - ارزیابی می‌کنیم.

این مسیره‌ها، مجموعه‌های مسطحی را، که در سمت چپ مسیر اول و در سمت راست مسیر n ام قرار دارند، محدود می‌کنند؛ مسیر اول در درون زاویهٔ $B_1 P A_1$ و مسیر n ام در درون زاویهٔ $B_n P A_n$ قرار دارند که، در آنها، P عبارت است از نقطهٔ برخورد خط‌های راست $B_n A_1$ و $B_1 A_n$. بقیهٔ خط‌های راست $B_2 A_{n-1}$ ، $B_3 A_{n-2}$ ، ...، $B_{n-1} A_2$ تنها می‌توانند با یکی از دو مسیر مرزی، پاره‌خط مشترکی داشته باشند (و در واقع، با آن مسیری که، نسبت به نقطهٔ P ، در طرف دیگر این خط راست باشد). به این ترتیب، در دو مسیر مرزی، بیش از $(n-2) + 2$ پاره‌خط وجود ندارد و، بنا بر این، در یکی از آنها، حداکثر $\frac{n}{2} + 1$ پاره‌خط خواهد بود.

(d) مسیر وسط، یعنی مسیر با شماره $m = \frac{1}{2}(n+1)$ (اگر n عددی

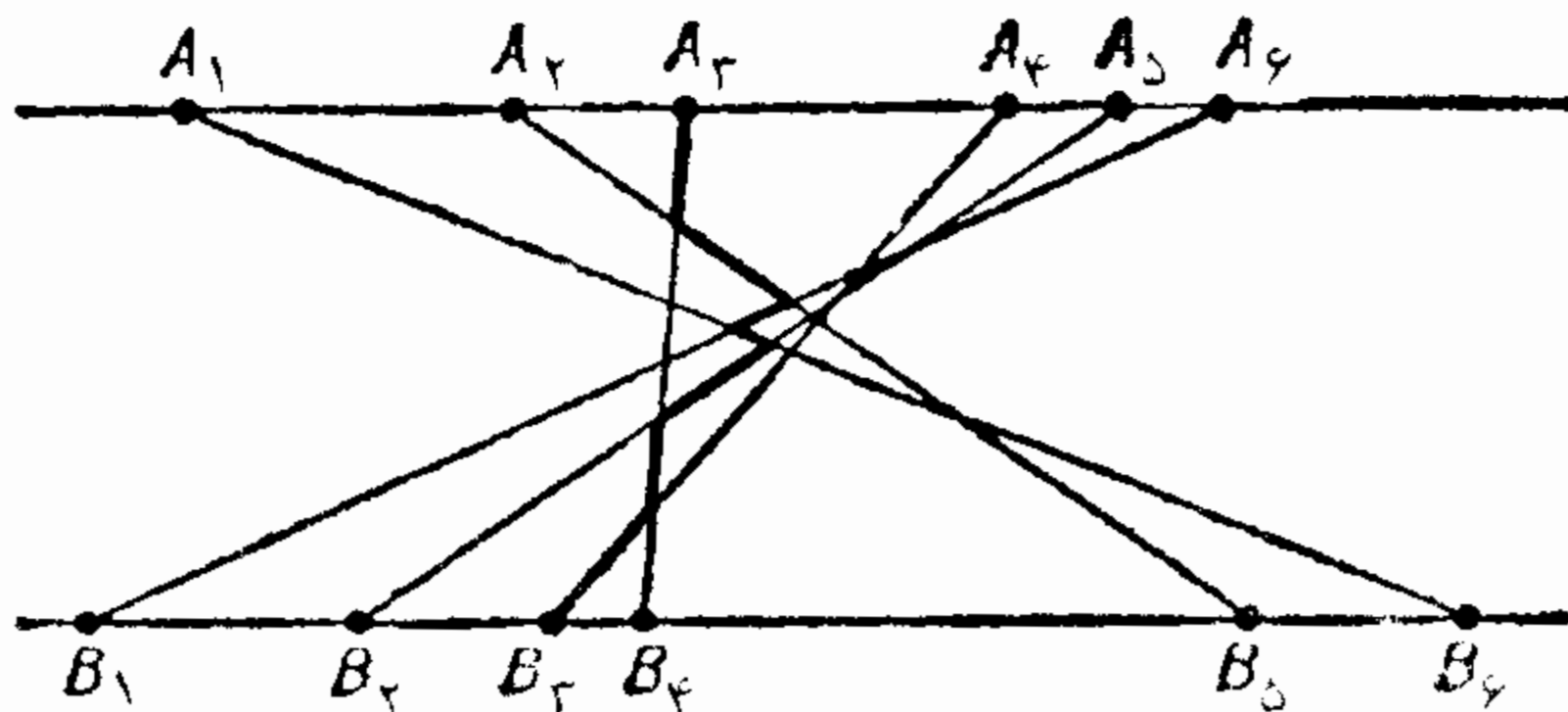
فرد باشد)، یا مسیر $m = \frac{n}{2}$ (اگر n عددی زوج باشد) را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، این مسیر، از همه خط‌های راست می‌گذرد (شکل ۸۹). در واقع، این مسیر، نوار را به دو بخش تقسیم می‌کند؛ هر یک از پاره‌های راست $B_1A_n, B_2A_{n-1}, \dots, B_nA_1$ از یک بخش آغاز و در بخش دیگر ختم می‌شوند (یکی از آن‌ها، ممکن است روی مرز دو بخش واقع باشد) و، بنا بر این، با مسیر وسط، دارای نقطه مشترک‌اند و، در نتیجه (بنا بر قانون ساختمان مسیر) با آن‌ها، در یک پاره‌خط مشترک است.

▽ در این مساله، جالب است که بتوانیم بهترین ارزیابی از پایین و از بالا را، برای تعداد پاره‌خط‌های طولانی‌ترین مسیر (طولانی، از نظر تعداد پاره‌خط‌ها) پیدا کنیم.

۲۱۶. پاسخ: وقتی k عددی زوج باشد می‌توان؛ و وقتی k عددی فرد باشد نمی‌توان.

وقتی k عددی زوج باشد، به سادگی می‌توان نمونه رنگ آمیزی را پیدا کرد: می‌توان مکعب را از بلوک‌های $1 \times 2 \times 2$ ، که یک در میان سیاه و سفیدند، آماده کرد.

اکنون فرض می‌کنیم توانسته باشیم مکعب مورد نظر را، در حالتی که k عددی فرد است، ساخته باشیم. مرکزهای مکعب‌های واحد سفید را، به وسیله پاره‌خط‌های راست، به هم وصل می‌کنیم. از هر مرکز، دو پاره‌خط خارج می‌شود. این دستگاہ پاره‌خط‌ها، یک یا چند خط شکسته بسته به وجود



شکل ۸۹

می آورند. توجه کنیم که، تعداد حلقه‌هایی از خط شکسته، که از پاره‌خط‌های
 با طول برابر تشکیل شده‌اند و سه جهت دو به دو عمود برهم دارند، عددی
 زوج است (حتی تعداد حلقه‌های هر یک از جهت‌ها هم، زوج است). به این
 ترتیب، تعداد مکعب‌های سفید، باید عددی زوج باشد. به همین ترتیب ثابت
 می‌شود که، تعداد مکعب‌های واحد سیاه هم، زوج است. تناقض.

۲۱۷. (a) n_0 را طوری در نظر می‌گیریم که 10^{n_0} از همه ضریب‌های
 چندجمله‌ای $P(x)$ بزرگتر باشد. اکنون روشن است که، به ازای هر $n \geq n_0$ ،
 عددهای a_{10^n} با a_1 برابر می‌شوند.

(b) نتیجه (a) را می‌توان درباره چندجمله‌ای $Q(x) = P(x+d)$ به
 کار برد که، در آن، d عدد طبیعی بزرگی است؛ در ضمن معلوم می‌شود که، وقتی
 $n_0 = n_0(d)$ به قدر کافی بزرگ باشد، برای هر $n \geq n_0$ ، مجموع رقم‌ها در
 همه عددهای $Q(10^n) = a_{10^n+d}$ با هم برابر می‌شوند. البته، باید این شرط
 را تحقیق کرد که، همه ضریب‌ها در $Q(x)$ ، هم علامت باشند.

اگر $d > 0$ را به اندازه کافی بزرگ بگیریم، ضریب‌های چندجمله‌ای

$$Q(x) = P(x+d)$$

همان علامت ضریب بزرگترین درجه چندجمله‌ای

$$P(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$$

را خواهند داشت. دو راه برای اثبات می‌آوریم.

۱°. برای چندجمله‌ای $Q(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} Q(x) &= p_0 (x+d)^n + p_1 (x+d)^{n-1} + \dots + p_n = \\ &= p_0 (x^n + C_n^1 x^{n-1} d + \dots + C_n^{n-1} x d^{n-1} + d^n) + \\ &+ p_1 (x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2} d + \dots + d^{n-1}) + \dots + p_n = \\ &= q_0 x^n + q_1(d) x^{n-1} + \dots + q_n(d) \end{aligned}$$

در این جا، $q_k(d)$ ($k = 0, 1, \dots, n$)، یک چندجمله‌ای نسبت به d
 است. در ضمن، $q_k(d)$ از درجه k است و جمله با درجه بزرگتر آن، به صورت

$p_0 C_n^k d^k$ در می آید (و q_0 ، به طور ساده برابر p_0 است). در این صورت، برای عددهای به اندازه کافی بزرگ $d > d_0$ ، هر يك از عددهای $q_k(d)$ دارای همان علامت عدد p_0 خواهند بود.

۲. اگر در چند جمله‌ای $P(x)$ ، چند ضریب اول p_0, p_1, \dots, p_{n-k} هم علامت باشند، آن وقت، ضمن گذار $P(x) \rightarrow P(x+d) = Q(x)$ ، به چند جمله‌ای جدیدی می‌رسیم که، در آن، ضریب‌های q_0, q_1, \dots, q_{n-k} با همان علامت باقی می‌مانند و ضریب بعدی

$$q_{n-k+1} = p_0 C_n^{n-k+1} d^{n-k+1} + p_1 C_n^{n-k} d^{n-k} + \dots + p_{n-k} d + p_{n-k+1}$$

وقتی d به اندازه کافی بزرگ باشد، به همان علامت در می‌آید. به این ترتیب، بعد از $n-1$ گذار، می‌توانیم از هر چند جمله‌ای $P(x)$ ، به چند جمله‌ای دیگری برسیم که، در آن، همه ضریب‌ها، دارای علامت p_0 باشند.

∇ در این جا، تنها از این حقیقت استفاده کردیم که، عدد C_n^k ، یعنی ضریب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ ، عددی مثبت است (ضمیمه ۱۶).

۲۱۸. حالت کلی را در نظر می‌گیریم، وقتی که n تیم در مسابقه شرکت کرده باشند.

(a) پاسخ: $k = n - 2$ ، با شرط $n \geq 3$ (در حالت خاص، به ازای $n = 20$ ، داریم: $k = 18$).

کل امتیازهایی که، ضمن مسابقه جهانی به دست می‌آید برابر $n(n-1)$ و برای مسابقه اروپایی برابر $k(k-1)$ است (برای برد ۲، برای تساوی ۱ و برای باخت ۰ امتیاز).

x را مقدار امتیازهای قهرمان اروپا در بازی‌های قهرمانی جهان، و y را مقدار امتیازهای او در بازی‌های با تیم‌های اروپایی فرض می‌کنیم: $y \geq x$. فرض کنید، هر يك از تیم‌های دیگر، در مسابقه قهرمانی جهان بیشتر از x امتیاز آورده باشند، یعنی دست کم $x+1$ امتیاز. در این صورت

$$x + (n-1)(x+1) \leq n(n-1) \Rightarrow x \leq n-2 + \frac{1}{n}$$

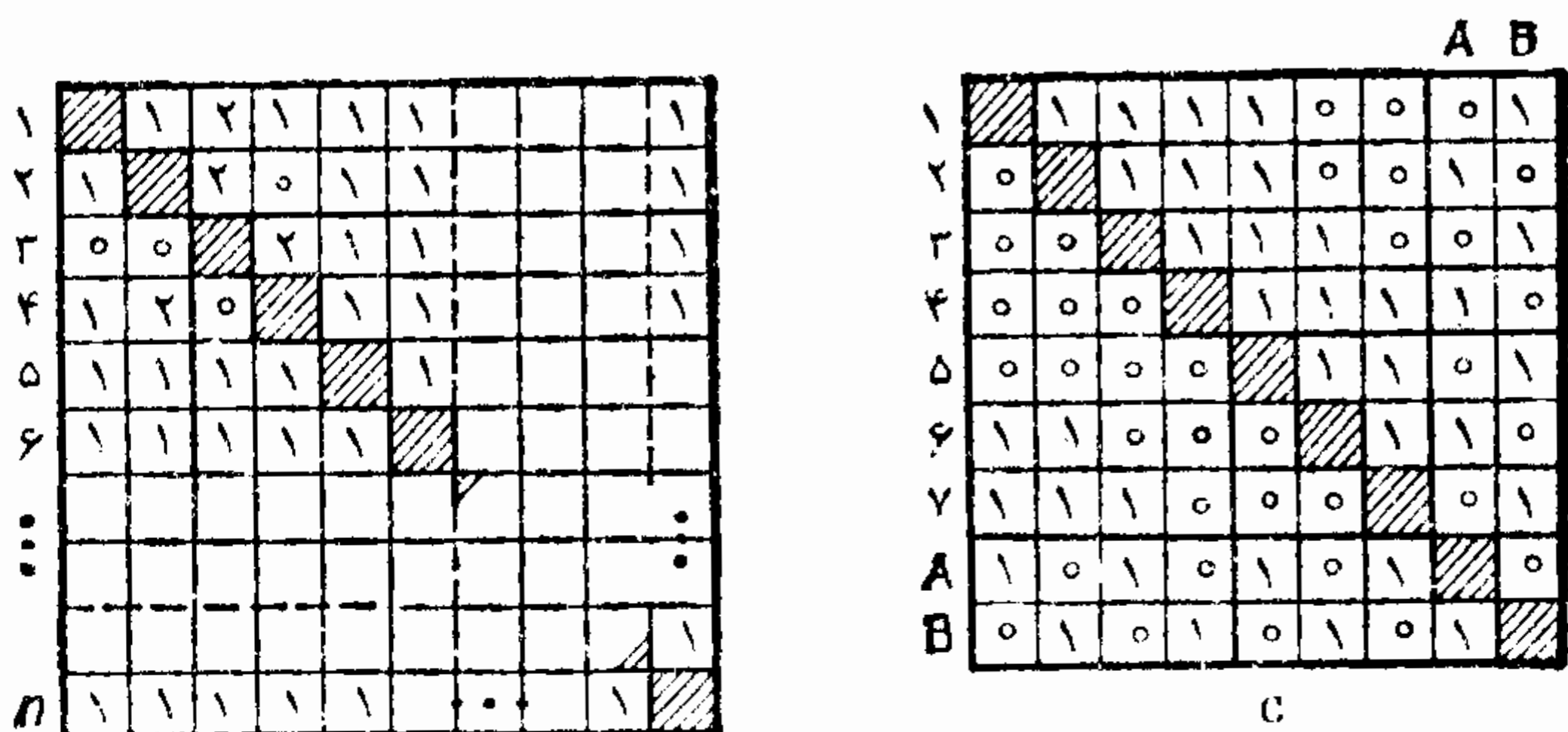
و چون x عددی درست است، بنابراین $x \leq n-2$.

هریک از بقیه تیم‌های اروپائی، بیش از $y-1$ امتیاز نیاورده‌اند (در

مسابقه قهرمانی اروپا) و بنابراین

$$y + (y-1)(k-1) \geq k(k-1) \Rightarrow y \geq k - \frac{1}{k}$$

و چون y عددی درست است، پس $y \geq k$. به این ترتیب



a

c

d

b

e

شکل ۹۰

(a) مسابقه قهرمانی هاکی: n تیم و $k = n-2$. تیم‌های ۲، ۳، ۴، ...، n ، اروپائی

و تیم ۳ قهرمان اروپا. (b) مسابقه قهرمانی والیبالی: $n=8$ ، $k=3$. تیم‌های ۶ و ۷ و ۸ و

اروپائی و تیم ۶، قهرمان اروپا. تیم‌های A و B اضافه شده است. (c) مسابقه قهرمانی

والیبالی: $n=7$ ، $k=3$. تیم‌های ۵ و ۶ و ۷ اروپائی و تیم ۵ قهرمان اروپاست. تیم‌های

A و B اضافه شده است. (d) مسابقه قهرمانی والیبالی: $n=6$ ، $k=2$. (e) مسابقه قهرمانی

والیبالی: $n=5$ ، $k=2$.

$$k \leq y \leq x \leq n-2 \Rightarrow k \leq n-2$$

در شکل ۹۰، a مثالی از یک جدول مسابقه داده شده است و نشان می‌دهد که قهرمان اروپا (تیم سوم) می‌تواند جای آخر را در مسابقه قهرمانی جهان آورده باشد.

(b) پاسخ: اگر $n \geq 8$ عددی زوج باشد، آن وقت $k = n-5$ (و در حالت خاص، برای $n=20$ ، $k=15$)؛ اگر $n \geq 7$ عددی فرد باشد، آن وقت $k = n-4$ ؛ و اگر $n=6$ یا $n=5$ ، آن وقت $k=2$.

در مسابقه قهرمانی والیبال، تیم برنده ۱ امتیاز و تیم بازنده ۰ امتیاز می‌گیرد، به نحوی که روی هم، $\frac{1}{2}n(n-1)$ امتیاز وجود دارد. حالتی را که n عددی زوج است، $n=2l$ ، به تفصیل بررسی می‌کنیم.

اگر مثل بالا استدلال کنیم (x و y را به همان معنای مسأله a) بگیریم، به دست می‌آید:

$$x + (2l-1)(x+1) \leq \frac{2l(2l-1)}{2} = l(2l-1) \quad (1)$$

$$y + (k-1)(y-1) \geq \frac{1}{2}k(k-1) \quad (2)$$

از (۱) نتیجه می‌شود: $x \leq l - \frac{3}{2} + \frac{1}{2l}$ ، یعنی $l-2 \leq l$. از نابرابری $l-2 \geq x \geq y$ و نابرابری (۲) به دست می‌آید:

$$k^2 + (5-2l)k - 2 \leq 0 \quad (3)$$

به ازای $l \geq 4$ ، بزرگترین عدد درست k که در نابرابری (۳) صدق می‌کند، برابر $2l-5$ است (به ازای $k=2l-5$ ، نابرابری (۳) برقرار است، ولی به ازای $k=2l-4$ ، مقدار سمت چپ نابرابری، مثبت می‌شود). اکنون ثابت می‌کنیم، برابری $k=2l-5=n-5$ ، به ازای $l \geq 4$ ممکن است. روی شکل ۹۰، b ، جدول مسابقه‌ها برای $n=8$ ، $k=3$ داده شده است (سه تیم آخر، اروپائی‌اند). این جدول را، مبنای استقرا می‌گیریم

ساختمان‌های بعدی را، به کمک استقرا و با اضافه کردن در هر گام، ۲ تیم اروپائی انجام می‌دهیم.

قبل از همه توجه کنیم که، به ازای $k = 2l - 5$ ، به طور مسلم $x = y = l - 2$ در واقع

$$y \geq \frac{(k-1)(k+2)}{2k} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \Rightarrow y \geq l - 2 - \frac{1}{2l-5}$$

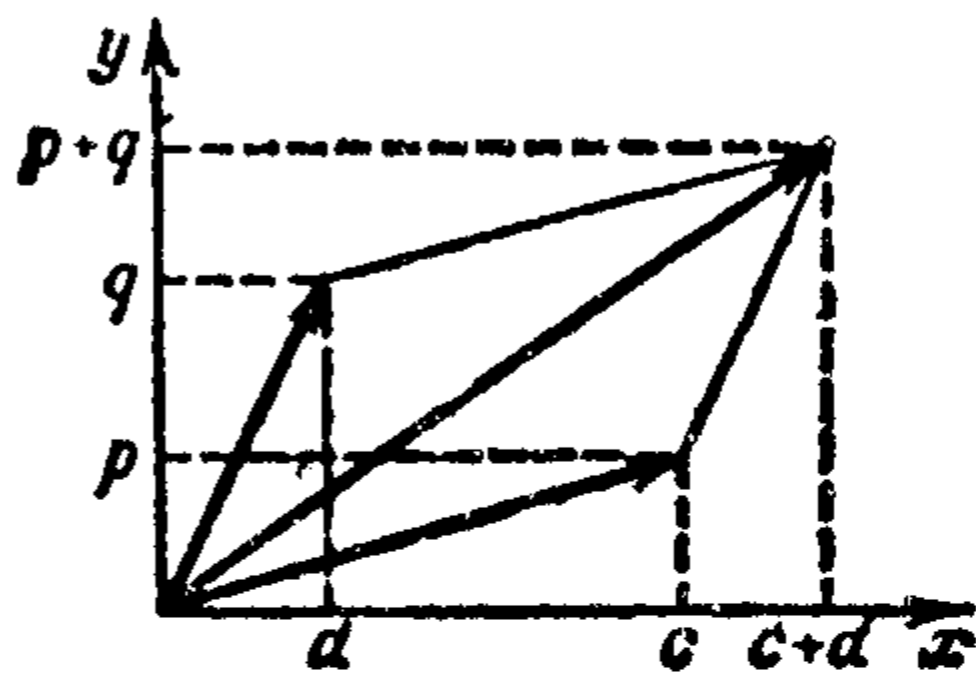
و چون y عددی درست است، بنابراین $x = y = l - 2$ و این، به معنای آن است که، قهرمان اروپا، به همه تیم‌های غیر اروپایی باخته است.

اکنون فرض می‌کنیم، جدول مسابقه قهرمانی با $k = n - 5 = 2l - 5$ تحقق پذیرفته باشد. دو تیم اروپائی A و B را با قانون زیر اضافه می‌کنیم: تیم A از همه تیم‌های قبلی ردیف فرد و از تیم B می‌برد و به بقیه می‌بازد؛ تیم B از تیم‌های سابق ردیف زوج می‌برد و به بقیه می‌بازد. هر یک از تیم‌های قبلی، در نتیجه آخر، به تعداد برابر امتیاز می‌آورند و، بنا بر این، در مقام آن‌ها تغییری پیش نمی‌آید.

اکنون، قهرمان اروپا $l - 1$ امتیاز، تیم A ، $l + 1$ امتیاز و تیم B ، l امتیاز آورده‌اند، به نحوی که قهرمان قبلی اروپا، باز هم در مقام آخر است. در ضمن، در بازی‌های اروپائی، تیم A به اندازه $l - 2$ امتیاز ($l - 3$ امتیاز در بازی با تیم‌های قبلی، و یک امتیاز در بازی با B) آورده؛ و تیم B هم در بازی با تیم‌های اروپایی، همان $l - 2$ امتیاز را آورده است، به نحوی که قهرمان اروپا تغییر نمی‌کند.

حالات‌های فرد بودن n ، $n = 2l - 1$ ، برای $l > 4$ و، همچنین، $n \leq 6$ را هم می‌توان، به طریق مشابهی مورد بررسی قرار داد (شکل‌های ۹۰، c، d و e).

۲۱۹. a) از بین چهار عددی که جدول 2×2 را تشکیل داده‌اند، دو عدد بزرگتر را در نظر می‌گیریم. اگر این دو عدد متعلق به یک ستون باشند، آن وقت، کوچکترین آن‌ها، عدد مطلوب است؛ و اگر این دو عدد متعلق به یک سطر باشند، آن وقت بزرگترین عدد از بین دو عدد دیگر، همان عدد مطلوب است (در ضمن، با نابرابری‌های غیر اکید سروکار داریم).



شکل ۹۱

حالتی باقی می ماند که: دو عدد انتخابی روی قطر باشند (واکیدا از دو تایی دیگر بزرگتر). ولی این حالت ممکن نیست. برای این که در این مورد

قانع شویم، کافی است توجه کنیم که، کسر $\frac{c+d}{p+q}$ همیشه بین دو کسر $\frac{c}{p}$ و

$\frac{d}{q}$ قرار دارد (به ازای $p > 0$ و $q > 0$ ؛ در شکل ۹۱، تعبیر هندسی این حقیقت

داده شده است). از این حقیقت، که مقدار

$$\frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2}{p_1 + q_1 + p_2 + q_2}$$

بین $\frac{a_1 + b_1}{p_1 + q_1}$ و $\frac{a_2 + b_2}{p_2 + q_2}$ و همچنین، بین $\frac{a_1 + b_2}{p_1 + q_2}$ و $\frac{a_2 + b_1}{p_2 + q_1}$ قرار

می گیرد، بنا بر این دو عدد بزرگتر و دو عدد کوچکتر، نمی توانند روی قطر باشند.

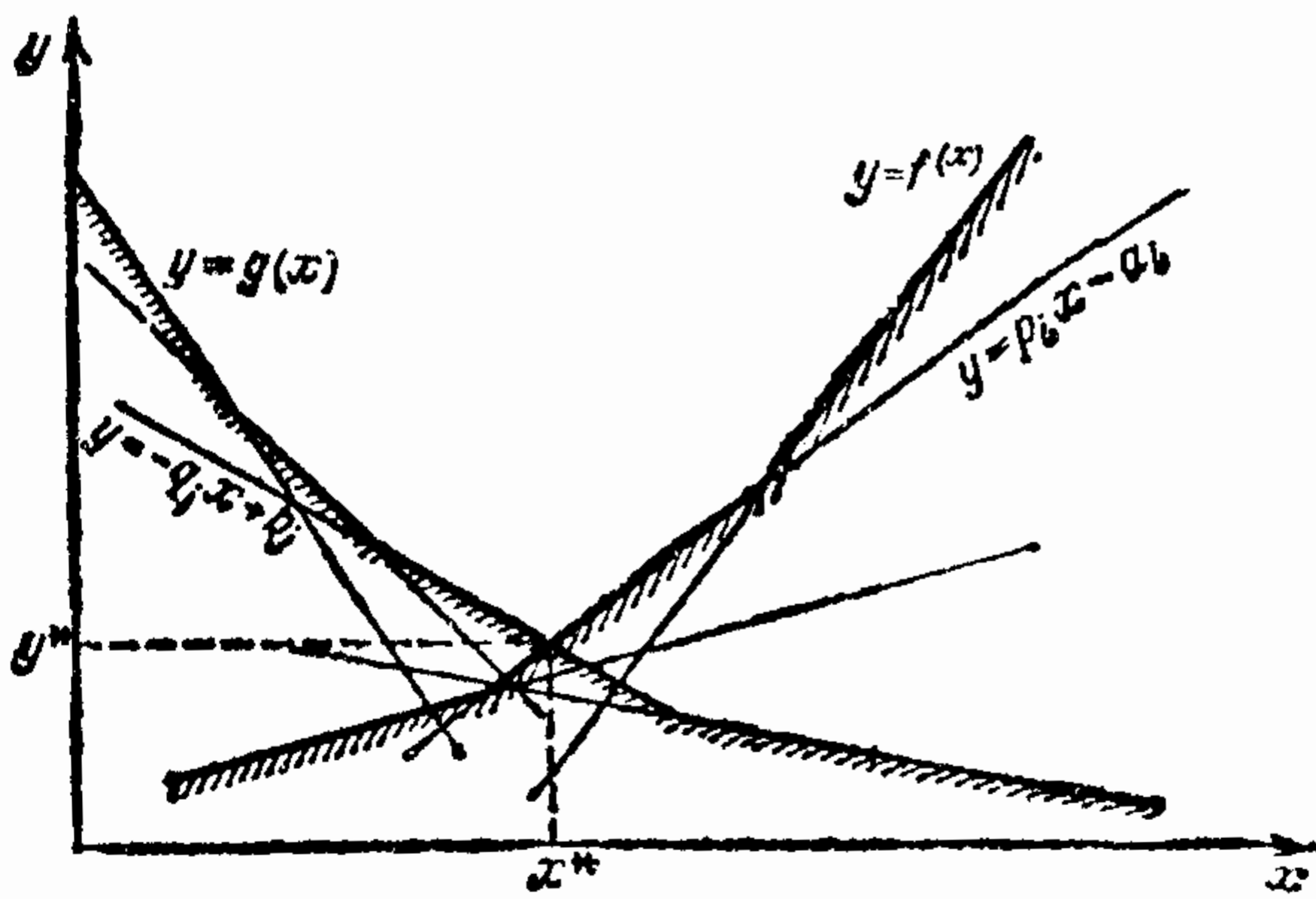
(b) دو راه حل، برای این مساله می آوریم که، یکی از آن ها، ربطی به (a) ندارد و، بنا بر این، می تواند راه حل تازه ای برای حالت خاص (a) باشد؛ ولی در راه حل دوم، از (a) به عنوان یک پیش قضیه استفاده شده است.

راه حل اول: باید عددی مثل $x^* = \frac{a_k + b_l}{p_k + q_l}$ را در جدول $m \times n$

طوری پیدا کنیم که شرط های

$$\frac{a_k + b_l}{p_k + q_l} \leq x^* \quad (\text{برای همه } k \text{ ها}) \quad \text{و} \quad \frac{a_i + b_l}{p_i + q_l} \geq x^* \quad (\text{برای همه } i \text{ ها})$$

برقرار باشند، شرط ها را، این طور می نویسیم:



شکل ۹۲

$$p_k x^* - a_k \geq -q_j x^* + b_j; \quad p_i x^* - a_i \leq -q_l x^* + b_l \quad (*)$$

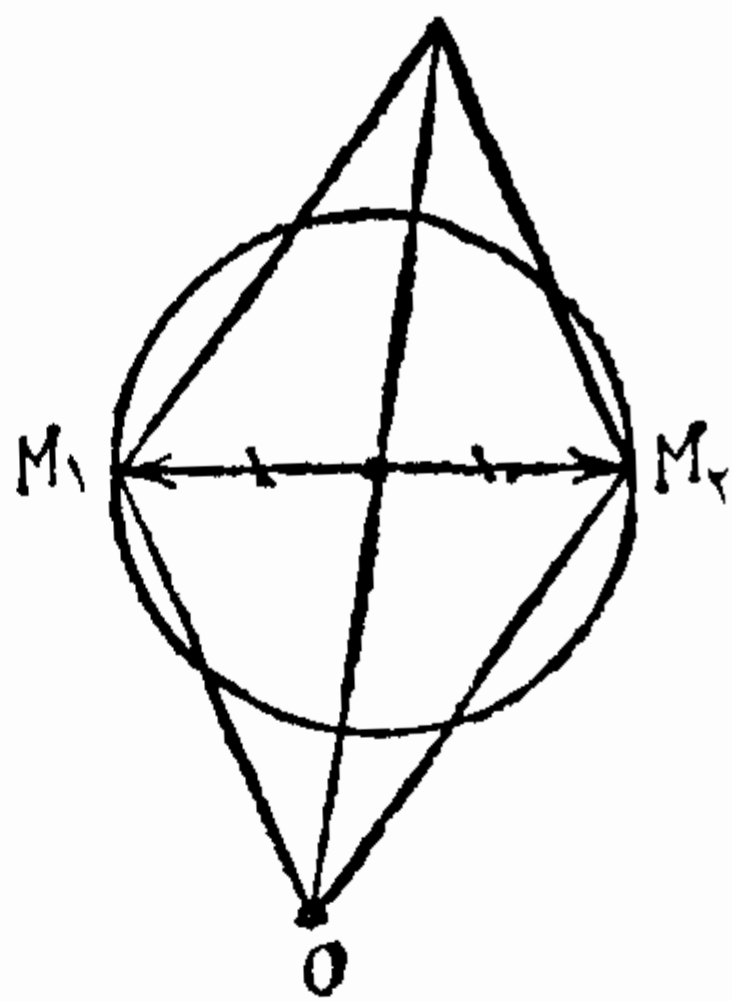
تابع‌های قطعه به قطعه خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} (p_i x - a_i); \quad g(x) = \max_{1 \leq j \leq n} (-q_j x + b_j)$$

نمودار هر یک از این دو تابع، از پاره خط‌های راست و دو نیم خط راست، تشکیل شده است. اولی صعودی یکنوا، و دومی نزولی است و، بنا بر این، معادله $f(x) = g(x)$ دارای جواب منحصر به فرد (x^*, y^*) است [نقطه (x^*, y^*) که، در آن، $y^* = f(x^*) = g(x^*)$ ، بلندترین نقطه برخورد خط‌های راست $y = p_i x - a_i$ با خط‌های راست $y = -q_j x + b_j$ است؛ شکل ۹۲]. در ضمن، k و l ، شماره تابع‌های خطی $y = p_k x - a_k$ و $y = -q_l x + b_l$ است که، از برخورد نمودارهای آنها، نقطه (x^*, y^*) به دست می‌آید، یعنی آن تابع‌هایی که، برای آنها داریم:

$$p_k x^* - a_k = \max_{1 \leq i \leq m} (p_i x^* - a_i) = y^* = -q_l x^* + b_l = \max_{1 \leq j \leq n} (-q_j x^* + b_j)$$

برای این مقادیرهای k ، l و x^* ، همه شرط‌های لازم (*) برقرارند. راه حل دوم، می‌گوییم، جدول دارای «زین» است، وقتی که عضوی در



شکل ۹۴

M_1	M_1	m_r
m_1	M_2
...	m_2	M_3
...
...	m_{r-1}	M_r
...

شکل ۹۳

۲۲۰. با توجه به يك حقيقت، اندیشه راه حل تلقين می شود: مجموع فاصله های تا انتهای عقربه ها بدطور متوسط (در طول زمان) بیشتر از مجموع فاصله های تا مرکزهای ساعت هاست. اثبات را می توان به این ترتیب انجام داد. مجموع s_1 و s_2 ، فاصله های از نقطه O ، مرکز میز، تا انتهای عقربه های دقیقه شمار را، در دو لحظه زمانی، واقع در ۳۰ دقیقه، در نظر می گیریم، مقدار $s_1 + s_2$ ، از $2s_0$ بیشتر است (s_0 ، مجموع فاصله های از O تا مرکز ساعت هاست)، زیرا در هر لحظه $OM_1 M_2$ ، مجموع طول های دو ضلع OM_1 و OM_2 از دو برابر میانه بین آنها بررگتر است (شکل ۹۴). بنابراین، دست کم یکی از عددهای s_1 یا s_2 از s_0 بیشتر است.

۲۲۱. حل مسأله a) ناشی از دو نکته زیر است:

۱) زیر هر عدد a در m امین سطر ($m \geq 2$) عددی به دست می آید که از a کمتر نیست؛

۲) هر يك از این عددها، از ۱۰۰۰ تجاوز نمی کند.

برای حل b) باید توجه کرد که اگر عدد a ، در m امین سطر $m \geq 2$ ، از عدد b واقع در زیر خود کمتر باشد، آن وقت $b \geq 2a$: گروهی از عددهای a (هر گروه زیر عددهای برابر قرار دارد)، به گروهی از عددهای b متصل می شود؛ از این جا، و با استقرا، کسه در این موقعیت $b \geq 2^{m-1}$ و لسی $1000 < 2^{m-1}$ تنها برای $m \leq 10$ برقرار است.

نمونه ای از دنباله عددها کسه، در آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نیستند، در زیر داده شده است:

$\underbrace{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 8, \dots, 8, \dots, 256, \dots, 256, 488, \dots, 488}_{8}$
 $\underbrace{\dots, 256, \dots, 256, 488, \dots, 488}_{256}$
 $\underbrace{\dots, 488, \dots, 488}_{488}$

که برای سطرهای بعد خواهیم داشت:

سطر ۲: $1, 1, 2, 2, 4, \dots, 4, 8, \dots, 8, \dots, 256, \dots, 256, 488, \dots, 488$

سطر ۳: $2, 2, 2, 2, 4, \dots, 4, 8, \dots, 8, \dots, 256, \dots, 256, 488, \dots, 488$

...

...

سطر ۱۰: $255, 256, \dots$

$\dots, 256, 488, \dots, 488$

سطر ۱۱: $512, 512, \dots$

$\dots, 512, 488, \dots, 488$

∇ به همین ترتیب، برای دنباله‌ای از n عدد $(2^{k-1} \leq n < 2^k)$ ، می‌توان ثابت کرد که $(k+2)$ امین سطر بر سطر $(k+1)$ ام منطبق است، ولی ممکن است سطر $(k+1)$ ام بر سطر k ام منطبق نباشد.

۲۲۲. مساله (a) حالت خاصی از (b) است و شبیه آن حل می‌شود. اندیشه

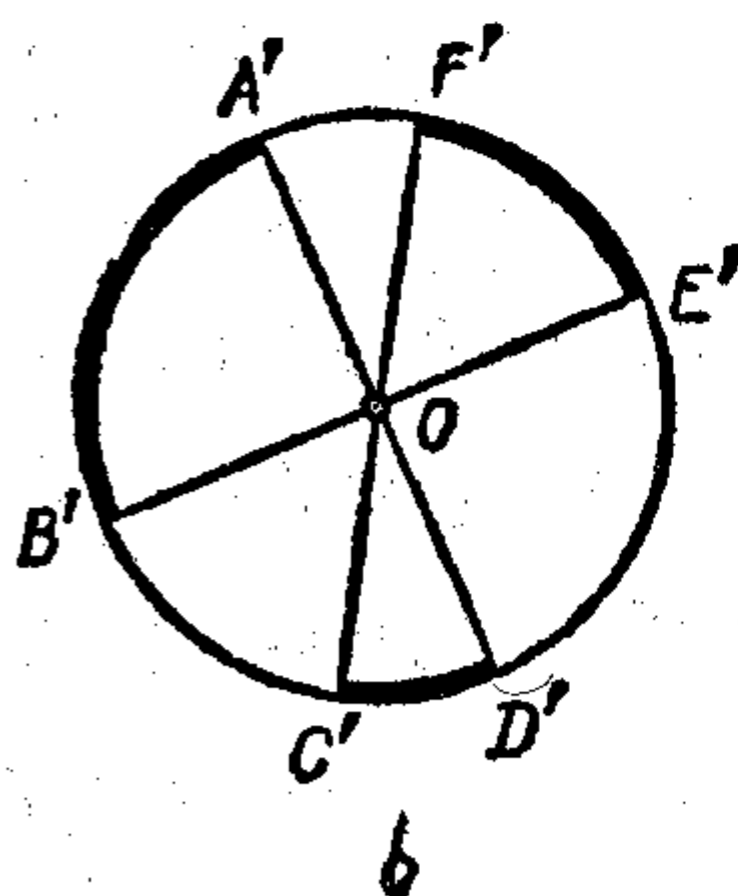
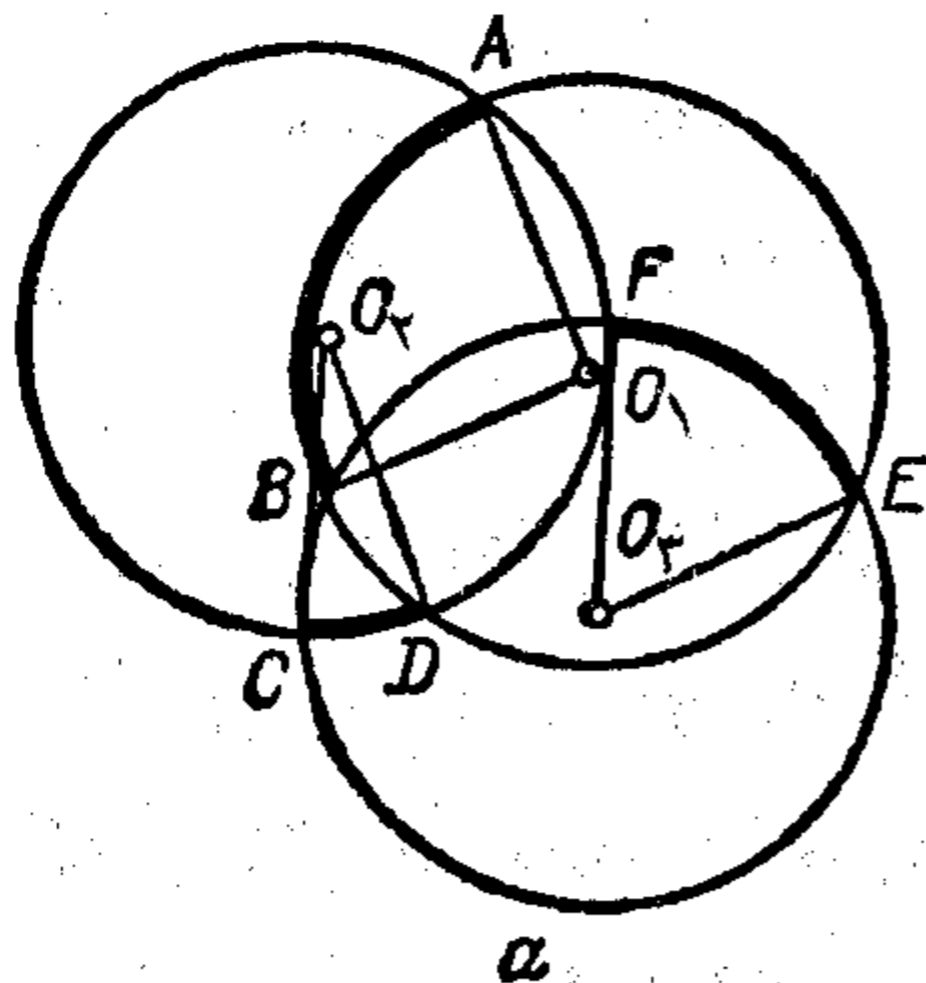
حل مساله (b) را می‌دهیم.

O_1, O_2, O_3 را مرکز دایره‌هایی می‌گیریم که، به ترتیب، شامل کمان-

های $\widehat{AB}, \widehat{CD}, \widehat{EF}$ هستند (شکل ۹۵، a). در این صورت داریم:

$$\vec{O_1 A} = -\vec{O_2 D}, \vec{O_1 B} = -\vec{O_3 E}, \vec{O_3 F} = -\vec{O_2 C}$$

(به عنوان ضلع‌های روبه‌روی لوزی‌ها). بنا بر این، اگر قطاع‌های $O_1 AB$



شکل ۹۵

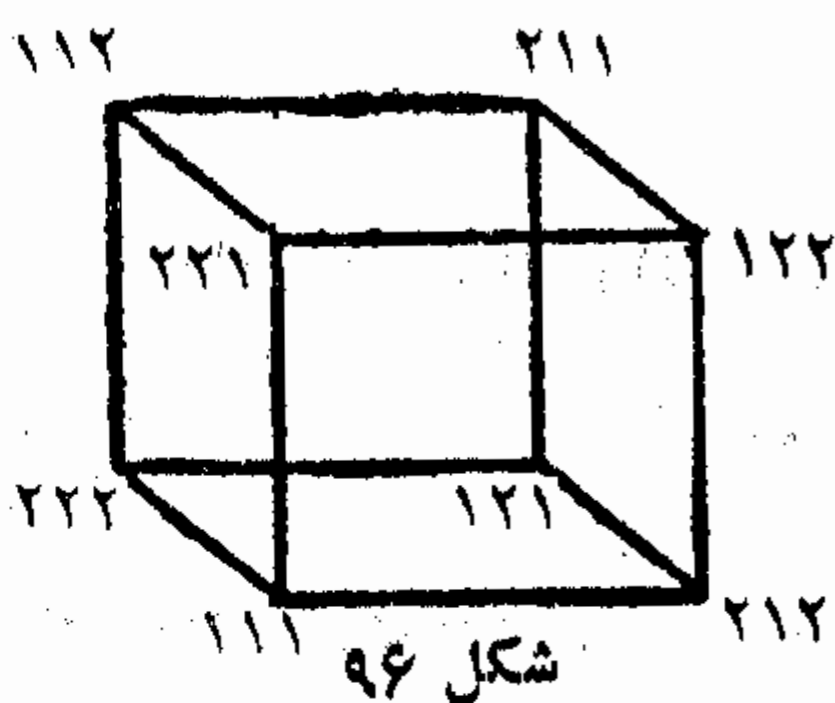
O_2CD و O_3EF را به مرکز مشترک O منتقل کنیم، سه قطاع به دست می آید که، همراه با قرینه‌های آنها نسبت به O ، دایره را به طور کامل پر می کنند (شکل ۹۵، b).

۲۲۳. اگر سه جمله اول دنباله را به ردیف نزولی در نظر بگیریم، آن وقت، برای همه جمله‌های دنباله، خواهیم داشت:

$$x_k \leq x_{k-2} - x_{k-1}$$

و دنباله به صورت نزولی در می آید:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{21}$$



اگر فرض کنیم $x_{21} \geq 1$ ، آن وقت از $x_{k-2} \geq x_k + x_{k-1}$ ، نتیجه می شود:

$$x_{20} \geq 1, x_{19} \geq 2, x_{18} \geq 3, x_{17} \geq 5, \dots$$

بنابراین، کافی است ۲۱ جمله متوالی دنباله فیبوناچی را بنویسیم:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, 6745, 10916$$

x_1 بزرگتر از ۱۰۰۰۰ می شود و، این تناقض، ثابت می کند که $x_{21} = 0$.
 ۲۲۴. پاسخ: می توان (مثال در شکل ۹۶ داده شده است). در واقع، می توان نگاشت مجموعه رأس‌های مکعب را بر خودش، طوری به دست آورد که، هر دو رأس مجاور (که به وسیله یالی بهم وصل می شوند)، به رأس‌هایی بروند که به وسیله یالی بهم وصل نشده‌اند.

۲۲۵. بنا به شرط مساله، مجموع بردارها برابر بردار ۰ است، بنابراین

$$b + c = -(a + d) \text{ و } b + d = -(a + c), \dots$$

به این ترتیب، سمت راست، وهم چنین سمت چپ نابرابری، نسبت به a, b, c, d ,

عبارتی متقارن است. در نتیجه، می‌توان سمت راست نابرابری را برابر نصف مجموع همهٔ مجموع‌های دو به‌دوی بردارهای مفروض دانست. با توجه به این نکته، می‌توان برای چهار بردار مفروض به مجموع $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ به نحوی نام گذاری کرد که خط شکسته شامل بردارهای

$$\vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{BC} = \mathbf{b}, \vec{CD} = \mathbf{c}, \vec{DA} = \mathbf{d}$$

خودش را قطع کند. برای این منظور، کافی است که، اگر بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ را با یک مبدأ O در نظر بگیریم، در یک نیم صفحه قرار گیرند و، در ضمن، \mathbf{a} و \mathbf{c} در یک طرف خط راستی باشند که از O موازی \mathbf{b} رسم شده است؛ در این صورت

$$|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| = BD + AC \leq |\mathbf{b}| + |\mathbf{d}|$$

تنها این می‌ماند که نابرابری زیر را به آن اضافه کنیم:

$$|\mathbf{b} + \mathbf{d}| = |\mathbf{a} + \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|$$

۲۲۶. پاسخ: ۱۹۷۶.

همه این نقطه‌های علامت گذاری شده، به جز نقطه O (مرکز ۱۹۷۶ ضلعی) روی محیط ۹۸۷ دایره به مرکز O ، و روی هر یک از ۱۹۷۶ نقطه، قرار دارد. هر دایره دیگر γ ، هر یک از این ۹۸۷ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ به جز این نقطه‌های برخورد، ممکن است نقطه O هم (که یکی از نقطه‌های علامت دار است) روی محیط دایره γ قرار گیرد. بنابراین، روی چنین دایره‌ای، بیش از $1 + 2 \times 987$ ، یعنی ۱۹۷۵ (از نقطه‌های مورد نظر ما) نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۲۲۷. فرض می‌کنیم، بخش باقی ماندهٔ صفحه، شامل k قطعه باشد. چهار رأس هر یک از این قطعه‌ها را (که رأس زاویه‌هایی برابر ۹۰ درجه یا ۲۷۰ درجه‌اند) علامت می‌گذاریم. هر یک از این $4k$ نقطه‌ای که علامت گذاشته‌ایم، رأس یکی از مستطیلی است که جدا کرده‌ایم و یا یکی از رئوس‌های مربع اصلی؛ در ضمن اگر یک نقطه دوبار علامت گذاری شده باشد، به معنای

آن است، که در این نقطه، دو مستطیل بدهم واصل شده‌اند. به این ترتیب:

$$4k \leq 4n + 4 \Rightarrow k \leq n + 1$$

۲۲۸. سه نقطه (x_0, y_0) ، (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) تنها وقتی روی یک

خط راست قرار دارند که داشته باشیم:

$$(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = 0 \quad (*)$$

اگر x_i و y_i ($i = 0, 1, 2$)، تابع‌هایی خطی از زمان t باشند، آن وقت $(*)$ ، به صورت معادله‌ای درجه دوم نسبت به t ، در می‌آید و نمی‌تواند بیش از دو ریشه داشته باشد.

۲۲۹. (a) می‌توان فرض کرد که، حشره، از خانه مرکزی، به سمت

راست و به اندازه $k \geq 2$ خانه جا به جا شود. در هر یک از ۴۹ خانه ردیف راست، تعداد خانه‌های افقی را می‌نویسیم که حشره می‌تواند از خانه متناظر به آن جا برود؛ جا به جایی به سمت راست را مثبت و جا به جایی به سمت چپ را منفی به حساب می‌آوریم. روشن است، برای حشره‌ای که در سمت راست‌ترین خانه قرار دارد، جا به جایی منفی است و، در ضمن، عددهایی که در دو خانه مجاور نوشته می‌شود، بیش از ۲ واحد باهم اختلاف ندارند. وقتی که دوردیف از خانه مرکزی به راست برویم، باید درجایی «از عبور کنیم»، بنابراین، یکی از عددهای نوشته شده، برابر است با ۱، ۰ یا ۱-، یعنی یکی از حشره‌ها باید حداکثر یک خانه جا به جا شود.

(b). پاسخ: حکم درست نیست. در شکل ۹۷، مثالی داده شده است

۱	•	•	•	۲	•	•	•	۳
•				•				•
•				•				•
•				•				•
۴	•	•	•	۵	•	•	•	۶
•				•				•
•				•				•
•				•				•
۷	•	•	•	۸	•	•	•	۹

۸	•	•	•	۵	•	•	•	۲
•				•				•
•				•				•
•				•				•
۷	•	•	•	۴	•	•	•	۱
•				•				•
•				•				•
•				•				•

شکل ۹۷

که، در آن، همه حشره‌ها، دور از خانه آغازین خود قرار دارند (در سمت چپ نشان داده شده است که چه شماره‌ای را به حشره نسبت داده‌ایم؛ و در سمت راست، شماره‌ای که مشخص می‌کند، حشره، از خانه مربوط به کجا می‌تواند پرواز کند).

(c) پاسخ: حکم درست است.

این حکم را، در حالت کلی، و برای مستطیل شامل $m \times n$ خانه ثابت می‌کنیم. برای مربع‌های 1×1 و 2×2 و مستطیل 1×2 ، درستی حکم روشن است (به‌طور کلی، برای مستطیل‌های $1 \times n$ و $2 \times n$ ، می‌توان حکم را به سادگی، و شبیه a) ثابت کرد). فرض می‌کنیم، بعدها، مستطیلی $m \times n$ ، از 2 بیشتر باشد: $2 < m \leq n$. ثابت می‌کنیم، از این مستطیل (با جدا کردن ردیف‌های کناری)، می‌توان مستطیل کوچکتر π را به دست آورد، که همه حشره‌های آن، دوباره در π فرود می‌آیند و، بنابراین، کافی است قانع شویم که، در π ، حشره مورد نظر که «تقریباً بی حرکت» است، وجود دارد.

بهتر است فاصله ρ ، بین دو خانه A و B را، با تعداد حرکت‌هایی نشان دهیم که، شاه شطرنج می‌تواند خود را از A به B برساند: مجموعه خانه‌های M (در صفحه شطرنجی) که از خانه مفروض C ، به فاصله‌ای حداکثر برابر r قرار داشته باشند (برای هر $1, 2, \dots$)، مربع $(2r+1) \times (2r+1)$ به مرکز خانه C را پرمی‌کنند. بنا بر شرط، حشره از خانه K به خانه $f(K)$ می‌رود، به نحوی که برای خانه‌های A و B به فاصله 1 ، داریم: $\rho(f(A), f(B)) \leq 1$. در این صورت، برای هر دو خانه A و B داریم:

$$\rho(f(A), f(B)) \leq \rho(A, B) \quad (*)$$

در مستطیلی $m \times n$ ($m \leq n$)، خانه‌هایی را «مرزی» می‌نامیم که، فاصله از آنها تا خانه‌هایی از مستطیل، برابر $n-1$ باشد. اگر $m < n$ ، این خانه‌ها، دو ردیف مرزی را (که متناظر با ضلع‌های کوچکتر مستطیل اند) پرمی‌کنند؛ و در مربع $n \times n$ ، این خانه‌ها، چهار ردیف مرزی (حاشیه) را پرمی‌کنند. توجه می‌کنیم که، فاصله ρ بین دو خانه از ردیف‌های مرزی متقابل، برابر $n-1$ و برای هر دو خانه دیگر، کمتر از $n-1$ است.

اگر در یکی از ردیف‌های کناری، حتی يك حشره نیفتد، آن وقت با کنار گذاشتن این ردیف، مستطیل لازم π را با اندازه‌های $m \times (n-1)$ به دست می‌آوریم که، در آن، حشره از هر خانه K به خانه $f(K)$ از π پرواز می‌کند.

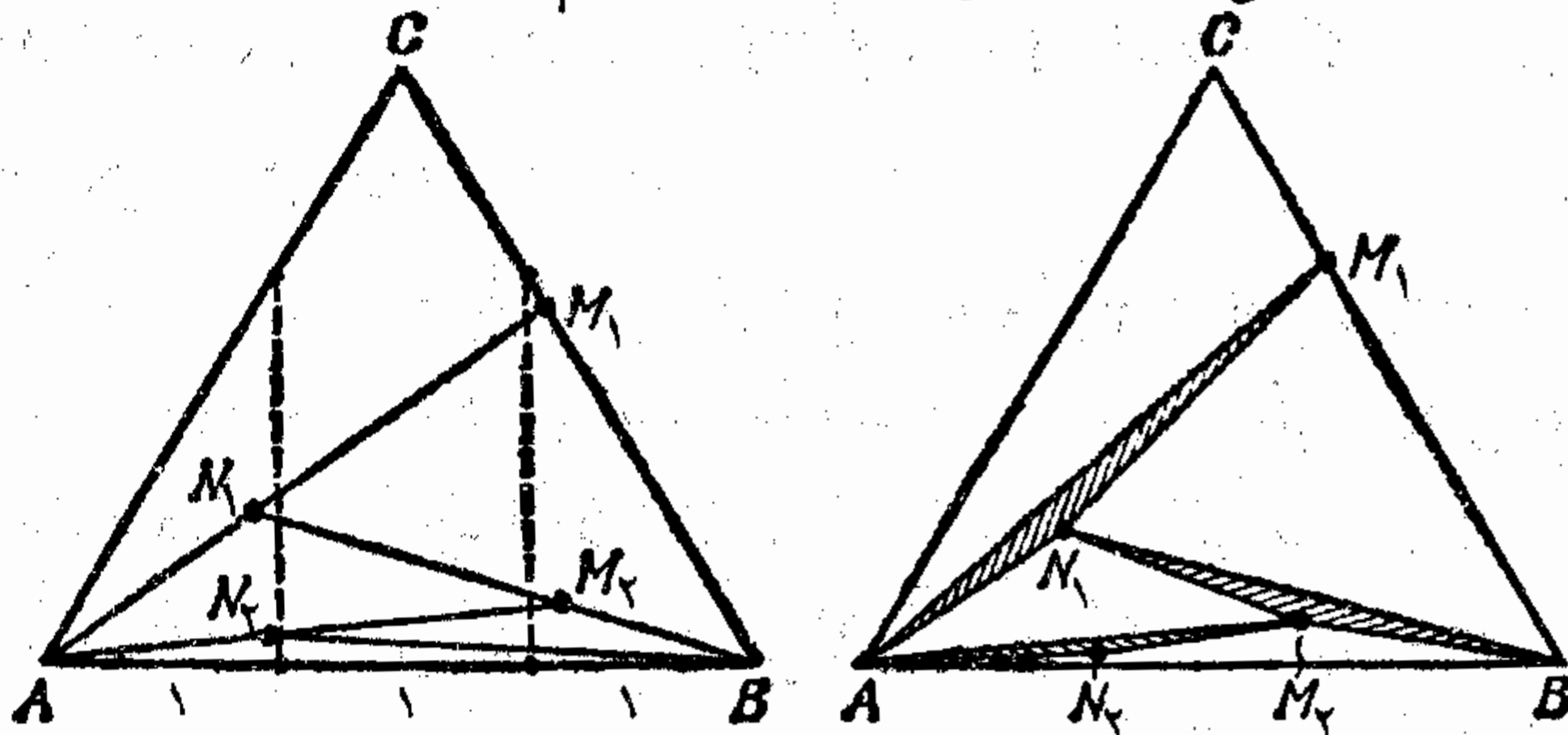
در حالت عکس، می‌توانیم به عنوان π ، مستطیلی را انتخاب کنیم که با حذف همه ردیف‌های مرزی از مستطیل مفروض، به دست آمده است. در واقع، می‌توان چند (دو، سه یا چهار) خانه K_i را طوری نشان گذاشت که، هر ردیف مرزی شامل یکی از خانه‌های $f(K_i)$ باشد. چون برای هر خانه M از π و هر خانه K_i داریم: $\rho(M, K_i) \leq n-2$ ، بنا بر این با توجه به (*): خواهیم داشت:

$$\rho(f(M), f(K_i)) \leq n-2$$

از این جا، و با توجه به ردیف‌های متقابل، نتیجه می‌شود که $f(M)$ در π قرار دارد.

اکنون دیگر، برای تکمیل اثبات، می‌توان به استقرا، نسبت به $m+n$ و یا نسبت به $n = \max(m, n)$ ، متوسل شد. از این گذشته، در ضمن ثابت می‌شود که همیشه، مربعی 2×2 وجود دارد که به خودش منجر می‌شود. ∇ این مساله، در واقع، بیان خاصی از قضیه معروف پراوود است که بنا بر آن: هر نگاشت پیوسته يك مجموعه محدب بر خودش، دارای يك نقطه بی‌حرکت است.

۲۳۰. در شکل ۹۸، مسیر ساختمان تقسیم، کسه با شرط‌های کلی‌تر



شکل ۹۸

(b، c، d) سازگار باشد و برای مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ داده شده است.

ضمن عبور از شکل سمت چپ به شکل سمت راست، هر يك از نقطه‌های $M_1, M_2, M_3, \dots, N_1, N_2, N_3, \dots$ به سادگی خود را پایین می‌کشد تا مثلث‌های تکمیلی نخیلی باریک $AM_k N_k$ ، $BN_k M_{k+1}$ را بسازند ($k = 1, 2, \dots$).

۲۳۱. مثال (a) به سادگی به دست می‌آید: کافی است «بلوک»

$$1, 2, 3, \dots, n$$

را n مرتبه پشت سر هم بنویسیم؛ n امین عدد هر تبدیل را می‌توان از n امین بلوک انتخاب کرد.

به عنوان مثالی برای (b)، می‌توان این دنباله را در نظر گرفت.

$$\underbrace{1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots, n, \dots, 1, 2, \dots, n, 1}_{n-1}$$

در واقع، اگر در تبدیل (k_1, k_2, \dots, k_n) دست کم دو عدد مجاور k_j و k_{j+1} به ترتیب صعودی باشند، آن وقت این دو عدد را می‌توان از يك بلوک $(1, 2, \dots, n)$ ، که در ردیف زام قرار دارد، انتخاب کرد؛ در ضمن، عدد ۱ آخر هم لازم نخواهد شد ولی اگر هیچ دو جمله متوالی به ترتیب صعودی نباشند، به ناچار به صورت

$$1, 2, \dots, n-2, n-1, n$$

است؛ در این صورت باید از بلوک زام $n-1$ را انتخاب کرد و عدد ۱ آخر دنباله هم به درد می‌خورد.

(c) برای هر عدد k (از ۱ تا n)، آن را که برای نخستین بار در «دنباله عام» با آن برخورد می‌کنیم، علامت می‌گذاریم. یکی از این عددهای علامت دار، در n امین جاسا از آغاز، و یا کمی دورتر قرار دارد. برای مشخص بودن وضع، این عدد را n می‌گیریم. قبل از آن، دست کم، $n-1$

عدد وجود دارد. بعد از آن، دنباله‌ای قرار دارد که باید، برای تبدیل‌های
 عددهای $(1 - n \dots 2, 1)$ «عام» باشد و، با روش استقرایی، فرض را بر
 این می‌گیریم که طول آن، از $\frac{1}{2}n(n-1)$ کمتر نباشد. به این ترتیب، برای
 به دست آوردن تبدیل‌های مختلف n عدد، طول دنباله‌ی عام از $n + \frac{1}{2}n(n-1)$ ،
 یعنی $\frac{1}{2}n(n+1)$ کمتر نیست.

(d) یادآوری می‌کنیم، اگر عدد n ، در دنباله‌ی عام مرتبه‌ی n [یعنی دنباله‌ی
 عامی که بتوان از آن، همه‌ی تبدیل‌های n عدد را به دست آورد]، تنها یکبار
 آمده باشد، آن وقت، چه قبل از آن و چه بعد از آن، باید دنباله‌ی عامی از
 مرتبه‌ی $(n-1)$ وجود داشته باشد. این نکته به ما امکان می‌دهد تا، نسبت به
 (c)، ارزیابی دقیق‌تری از تعداد جمله‌های دنباله‌ی عام داشته باشیم.

کوتاه‌ترین طول دنباله‌ی عام مرتبه‌ی n را با l_n نشان می‌دهیم. در این
 صورت $l_2 = 3$. ثابت می‌کنیم $l_3 = 7$ (نمونه‌های 1213121 یا 1231231)
 اگر عددی، و مثلاً 3 ، تنها یکبار در دنباله آمده باشد، آن وقت طول آن،
 از $7 \leq 2l_2 + 1$ کمتر نیست. در حالت دیگر، عددی را در نظر می‌گیریم
 که، برای نخستین بار، در جای سوم یا بعدتر، با آن رو به رو می‌شویم (فرض
 کنید، این عدد 3 باشد). به دنبال آن، یکبار دیگر با 3 برخورد می‌کنیم و،
 هم‌چنین، یک دنباله‌ی عام هم (به دنبال 3) وجود دارد، به نحوی که طول تمامی
 آن از

$$2 + 1 + 1 + l_2 = 4 + l_2 = 7$$

کمتر نیست. به همین ترتیب، می‌توان قانع شد که $l_4 = 12$. مثال

$$123412314231 \text{ یا } 412341243142$$

ارزیابی: اگر عددی تنها یکبار در دنباله آمده باشد، آن وقت،
 طول آن نمی‌تواند از $15 = 2l_3 + 1$ کمتر باشد؛ در حالت دیگر، از
 $12 = 3 + 1 + 1 + l_2$ کمتر نیست.

با همین استدلال می توان ثابت کرد:

$$I_n \geq \frac{1}{2} n(n+1) + n - 2$$

(e) می توان ثابت کرد که، دنبالهٔ عام مرتبهٔ n را می توان با طول

$n^2 - 2n + 2$ ، به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{n \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-1) \ n \ 1 \ 2 \ \dots \ (n-2) \ n \ (n-1) \ \dots}_{\dots \ 1 \ 2 \ n^3 \ \dots \ (n-1) \ 1 \ n^2} \quad (*)$$

که در آن، در هر يك از $(n-2)$ بلوك، عدد n ابتدا در آخر، سپس، قبل از $(n-1)$ ، بعد از آن قبل از $(n-2)$ ، ...، و سرانجام قبل از ۳ می آید؛ به جز این، عدد n در ابتدا و $1 \ n^2$ در انتها آمده است (به این ترتیب، مثال دیگری برای $n=4$ پیدا می شود). برای این منظور، کافی است قانع شویم که، از سمت چپ، از k امین باری که n در $(*)$ وارد شده است، می توان با حذف، هر دنباله ای از $(k-1)$ عدد مختلف را (بین ۱، ۲، ...، $n-1$) پیدا کرد؛ و همچنین از سمت راست، هر دنباله ای از $n-k$ عدد. واقع این است که هر دو بخش راست و چپ، بعد از حذف همهٔ n ها، به این صورت در می آیند:

$$\underbrace{1 \ 2 \ \dots \ m \ 1 \ 2 \ \dots \ m \ \dots \ 1 \ 2 \ \dots \ m \ 1 \ 2 \ \dots \ r}_{1 - m \text{ مرتبه}}$$

که در آن $r \leq m = n-1$ و این دنباله، دارای ویژگی زیر است [ویژگی «دنبالهٔ عام» (m, r)]: از این دنباله، می توان با حذف، هر دنباله ای را با r عدد مختلف (از بین ۱، ۲، ...، m) به دست آورد.

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. 239 \text{ می گیریم، به نحوی که } n = 2m \text{ یا } n = 2m + 1.$$

عددهای مفروض را، به صورت زیر شماره گذاری می کنیم: $x_0 = 1$ را

«مبدأ» عددها می‌گیریم، سپس، از x_0 در جهت حرکت عقربه‌های ساعت x_1, x_2, \dots, x_m و از x_0 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-m+1}$ (و x_{-m} اگر n عددی فرد باشد).

(a) اگر اختلاف هر دو عدد مجاور، بیش از ε نباشد، آن وقت

$$x_1 \geq 1 - \varepsilon \quad x_{-1} \geq 1 - \varepsilon$$

$$x_2 \geq 1 - 2\varepsilon, \quad x_{-2} \geq 1 - 2\varepsilon,$$

.....

$$x_{m-1} \geq 1 - (m-1)\varepsilon, \quad x_{-m+1} \geq 1 - (m-1)\varepsilon,$$

$$x_m \geq 1 - m\varepsilon, \quad (x_{-m} \geq 1 - m\varepsilon)$$

این نابرابری‌ها را با هم جمع می‌کنیم، همچنین برابری $x_0 = 1$ را هم در این جمع در نظر می‌گیریم، با توجه به این که، مجموع همه عددها برابر صفر است، به دست می‌آید:

$$0 \geq n - (1 + 2 + \dots + (m-1) + m + (m-1) + \dots$$

$$\dots + 2 + 1) \varepsilon = n - m^2 \varepsilon$$

$$\text{از آن جا } \varepsilon \geq \frac{n}{m^2} \geq \frac{4}{n} \text{ (زیرا } m^2 \leq \frac{n^2}{4} \text{).}$$

▽ این ارزیابی برای حالتی که n عددی زوج باشد، دقیق است. در

حالت $n = 2m + 1$ می‌توان آن را، با استفاده از x_{-m} ، دقیق‌تر کرد:

$$\varepsilon \geq \frac{n}{m^2 + m} = \frac{4n}{n^2 - 1}$$

(b) در این جا می‌توان از نتیجه‌گیری (a)، دوبار استفاده کرد. فرض

کنید، بزرگ‌ترین اختلاف عددهای مجاور، از لحاظ قدر مطلق، برابر ε باشد.

با توجه به $a: \varepsilon \geq \frac{4}{n}$. از طرف دیگر، تفاضل‌های «به‌معیار درآمده» عددهای

مجاور از گروه (x_1, x_2, \dots, x_n) ، یعنی عدد $y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}$ هم، به نوبه

خود با همه شرط‌های مسأله (a) سازگارند؛ بنا بر این، برای مقداری از k داریم:

$$\left| \frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2} - x_k \right| = \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right| =$$

$$= \left| y_{k+1} - y_k \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\lambda}{n^2}$$

(در این جا، گاهی لازم می‌شود، اندیس را، به اندازه n کم یا زیاد کنیم، زیرا عددها، روی محیط يك دایره‌اند.)

(c و d) نشان می‌دهیم که چگونه، برای هر n ، بهترین ارزیابی ممکن از بالا، برای مقدار δ به دست می‌آید، δ عبارت است از حداکثر ممکن برای قدرمطلق تفاضل بین يك عدد واقع بر محیط دایره و واسطه حسابی دو عدد مجاور آن، و سپس، انتخاب بهین را (با کمترین مقدار δ) می‌سازیم. در ضمن، انتخاب (x_k) را می‌توان مقارن به حساب آورد: $x_k = x_{-k}$ ، زیرا با تغییر x_k به $\frac{x_k + x_{-k}}{2}$ ، همه ویژگی‌هایی که در شرط مسأله آمده‌است و

هم ارزیابی

$$|x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}| \leq 2\delta$$

حفظ می‌شود. قبل از آن که خود عددهای x_k را ارزیابی کنیم، تفاضل‌های $x_k - x_{k-1}$ را، با آغاز از x_0 و سپس با آغاز از نقطه متقابل (وسط گروه)، ارزیابی می‌کنیم. چون $x_1 = x_{-1}$

$$x_0 - x_1 \leq \frac{1}{2} | -x_{-1} + 2x_0 - x_1 | \leq \delta;$$

$$x_1 - x_2 \leq (x_0 - x_1) + | -x_0 + 2x_1 - x_2 | \leq 3\delta;$$

$$x_2 - x_3 \leq (x_1 - x_2) + | -x_1 + 2x_2 - x_3 | \leq 5\delta;$$

$$x_{k-1} - x_k \leq (2k-1)\delta \quad (1)$$

وقتی $n = 2m$ زوج باشد، وقتی که تنها عدد x_m ، نسبت به x_0 ، متقابل است، به همان ترتیب، به دست می آید:

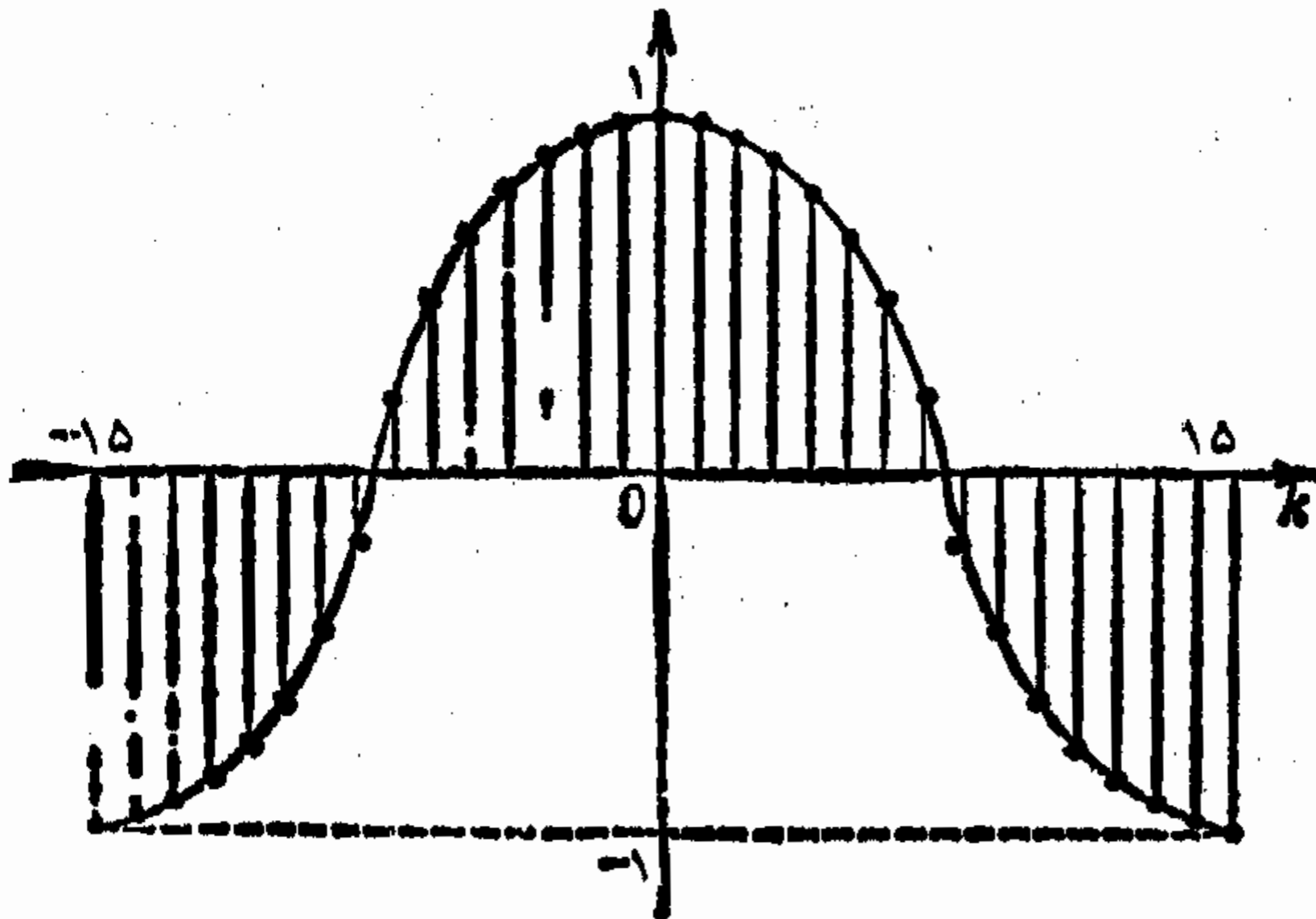
$$x_{m-1} - x_m \leq \delta; x_{m-2} - x_{m-1} \leq 3\delta; \dots;$$

$$x_{m-j} - x_{m-j+1} \leq (2j-1)\delta \quad (2)$$

وقتی $n = 2m + 1$ فرد باشد ($x_m = x_{-m}$ دو عدد مجاورند)، آن وقت

$$x_{m-1} - x_m \leq 2\delta; x_{m-2} - x_{m-1} \leq 4\delta; \dots;$$

$$x_{m-j} - x_{m-j+1} \leq 2j\delta \quad (2')$$



شکل ۹۹

یادآوری می کنیم، اگر k کمتر از $\frac{m}{2}$ باشد، بهترین ارزیابی برای

$x_{k-1} - x_k$ عبارت است از (۱)، برای k بیشتر از $\frac{m}{2}$ ، (۲) یا (۲)؛ برای

انتخاب بهینه از عددهای (x_k) ، باید نابرابری ها به برابری تبدیل شوند؛ درضمن، نمودار دنباله بهینه، روی قطعه ای از سهمی قرار دارد (شکل ۹۹).

برای این که این مطلب را ثابت کنیم، و ارزیابی دقیقی از δ برای هر n

بدهیم، باید به طور جداگانه، چهار حالتی را که متناظر باقی مانده‌های n در تقسیم بر ۴ هستند، در نظر بگیریم مثلاً فرض کنید $n = 4l + 2$ ، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$x_k = x_{-k} \geq 1 - s_k \delta$$

که در آن، s_k عبارت است از مجموع نخستین k عدد در سطر

$$1, 3, \dots, 2l-1, 2l+1, 2l-1, \dots, 3, 1$$

ارزیابی دقیق δ از این شرط به دست می‌آید که، مجموع همه x_k ها، برابر صفر باشد و انتخاب $x_k = x_{-k} = 1 - s_k \delta$ ، بهینه خواهد بود. در حالت خاص، برای $n = 30$ ($l = 7$)، به دست می‌آید:

$$0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{14}) + x_{15} \geq 30 - S\delta$$

که در آن $S = 2(s_1 + s_2 + \dots + s_{14}) + s_{15}$. این مجموع را، بهتر است این طور تبدیل کنیم. چون

$$s_{15} = 1 + 3 + 5 + \dots + 11 + 13 + 11 + \dots + 3 + 1 =$$

$$= 7^2 + 8^2 = 113 = s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \dots = s_7 + s_8$$

آن وقت $S = (2 \times 7 + 1)s_{15} = 15 \times 113$. به این ترتیب $\delta \geq \frac{2}{113}$

در ضمن، $\delta = \frac{2}{113}$ تنها برای انتخاب زیر به دست می‌آید (که روی شکل

نشان داده شده است):

$$x_k = x_{-k} = 1 - s_k \delta =$$

$$= \begin{cases} 1 - k^2 \delta & (\text{به ازای } 1, 3, \dots, 7) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - (113 - (15 - k)^2) \delta = -1 + (15 - k)^2 \delta & (k = 8, \dots, 15) \end{cases}$$

به همین ترتیب، می‌توان مرزهای دقیق δ را، برای هر n به دست آورد

و قانع شد که، برای همه مقادیر n ، نابرابری $\delta \geq \frac{16}{n^2}$ برقرار است

هرچه n بزرگتر باشد، این ارزیابی به مقدار دقیق آن نزدیکتر می شود.

▽ مسأله زیر، کاملاً شبیه مسأله اخیر است: مطلوب است حداکثر مقدار ممکن تفاضل، بین ماکزیمم و می نیمم تابع متناوب T ، به شرطی که مشتق آن، از لحاظ قدر مطلق، از واحد تجاوز نکند. این مسأله، حتی از حالت «ناپیوسته» آن، ساده تر است. در این جا هم، نمودار تابعی که دارای حداکثر «نوسان» باشد، از قطعه سهمی ها تشکیل شده است.

۲۳۳. ابتدا، به ذکر بعضی نکته ها می پردازیم که به هر مقدار عدد طبیعی n مربوط می شوند. روی هم، 2^n ترتیب از عددهای $1 +$ و $1 -$ در رأس های n ضلعی منتظم وجود دارد. دو تبدیل را وقتی هم ارز به حساب می آوریم که بتوان، با توجه به شرط مسأله، یعنی تغییر علامت ها در رأس های n ضلعی منتظم، از یکی به دیگری (و برعکس) رسید. هر دو عمل از این گونه، «قابل جا به جایی» اند: نتیجه کار، به ردیف این عمل ها بستگی ندارد؛ تکرار دوبار متوالی از یک عمل را می توان حذف کرد، زیرا با حالت نخست خود متحد می شود. در ضمن، می توان خود را تنها به عمل هایی محدود کرد که علامت ها را در رأس های p ضلعی های منتظم، که p یعنی تعداد رأس های آن ها عددی اول است، تغییر می دهند. (این p ضلعی ها را «مولد» می نامیم)؛ مجموعه رأس های n ضلعی منتظم را، برای هر n ، که بر p بخش پذیر باشد، می توان به تعداد $\frac{n}{p}$ از p ضلعی های مولد تقسیم کرد.

قبل از این که دورتر برویم، مسأله های مشخص را در نظر می گیریم.

(a) برای $n = 15$ ، روی هم هشت p ضلعی مولد وجود دارد: ۵ مثلث و ۳ پنج ضلعی. ترتیبی را که تنها شامل عددهای $1 +$ باشد، E می نامیم. هر ترتیب هم ارز E ، با توجه به یکی از زیر مجموعه های مجموعه شامل ۸ p ضلعی معین می شود؛ تعداد زیر مجموعه های مختلف (با به حساب آوردن مجموعه درستی) برابر است با 2^8 و این، از تعداد کل 2^{15} ترتیب، کمتر است. بنا بر این ترتیب هایی وجود دارد که هم ارز E نیستند.

(b) برای $n = 30$ ، تعداد کل p ضلعی های مولد، برابر است با

$$15 + 10 + 6 = 31$$

برای حل مساله، به نکته‌های دیگری نیاز داریم. می‌توان به تعداد کمتری از مولدها اکتفا کرد: مثلاً از هر دو مثلث (و پنج ضلعی) که نسبت به مرکز متقارن‌اند، می‌توان تنها یکی را در نظر گرفت، زیرا تغییر علامت‌ها در آن و، هم‌چنین، در سه (پنج) «دو ضلعی» شامل رأس‌های آن، با تغییر علامت در سه ضلعی (پنج ضلعی) متقارن آن، هم‌ارز است. از این‌جا، تعداد مولدها برابر $3 + 5 + 15$ ، یعنی 2^3 می‌شود و بنا بر این 2^{23} ترتیب هم‌ارز E به دست می‌آید که از 2^{30} کمتر است.

(c) سعی می‌کنیم، برای هر n ، تعداد $T(n)$ ، یعنی تعداد ترتیب‌های هم‌ارز E را پیدا کنیم. توجه کنیم، تعداد ترتیب‌های هم‌ارز با ترتیب دیگر A از $+$ و $-$ ، باز هم برابر $T(n)$ است؛ همه آن‌ها، از ضرب جمله به جمله علامت‌های ترتیب A ، در هر ترتیبی از گروه هم‌ارزهای E به دست می‌آیند. اگر تعداد «گروه‌های هم‌ارز» - حداکثر تعداد ترتیب‌های دو به دو ناهم‌ارز - را $K(n)$ بنامیم، داریم:

$$K(n) = \frac{2^n}{T(n)}$$

فرض کنید، n شامل s عامل اول باشد:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} \quad (*)$$

می‌گیریم $\frac{n}{q} = m$ و $p_1 p_2 \dots p_s = q$ ضلعی منتظم را به q ضلعی‌های منتظم،

به تعداد m ، تقسیم می‌کنیم. مساله محاسبه $T(n)$ ، به مساله ساده‌تر محاسبه

$$T(q) = T(p_1 p_2 \dots p_s)$$

منجر می‌شود. در واقع، هر يك از مولدهای p_i ضلعی، مشمول تنها یکی از q ضلعی‌ها می‌شود؛ به زبان دیگر، تغییر علامت‌ها در q ضلعی‌های مختلف، به هم بستگی ندارند، بنا بر این

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۶	۱۲	۳	۹
۱	۱۰	۱	۷	۱۳	۴
۲	۵	۱۱	۲	۸	۱۴

شکل ۱۰۰

هر عدد از ۰ تا ۱۴، نسبت به باقی مانده‌های خود در تقسیم بر ۵ و ۳، به صورت یک ارزشی معین می‌شود.

$$T(n) = (T(q))^m, K(n) = (K(q))^m$$

از حالت $s = 2$ آغاز می‌کنیم: فرض کنید $n = p_1 p_2$. راس‌های n ضلعی را، با عددهای ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ شماره گذاری می‌کنیم. این عددها را، در جدول $p_1 \times p_2$ طوری می‌نویسیم که، عددهای یک سطر، در تقسیم بر p_1 ، و عددهای یک ستون در تقسیم بر p_2 ، دارای یک باقی مانده باشند. این جدول را می‌توان تشکیل داد، زیرا دو باقی مانده (r_1, r_2) ، از تقسیم بر p_1 و p_2 ، به صورت یک ارزشی، شماره‌های از ۰ تا n را معین می‌کنند (شکل ۱۰۰). ترتیب عددهای $+1$ و -1 روی محیط دایره، متناظرند با ترتیب عددهای

$$\sigma(r_1, r_2) = +1 \text{ و } -1$$

در خانه‌های جدول (r_1, r_2) شماره سطر؛ r_2 ، شماره ستون): تغییر علامت‌ها در p_1 ضلعی‌ها و p_2 ضلعی‌ها، متناظر است با تغییر علامت‌های σ در سطرها و ستون‌ها. هر ترتیبی از این عمل‌ها را می‌توان به این جا منجر کرد که، در سطر اول و ستون اول، $+1$ باشد. این گونه ترتیب‌ها، دو به دو ناهم‌ارزند؛ در واقع، با تغییر علامت σ در سطرها و ستون‌ها، مقدار حاصل ضرب

$$\sigma(r_1, r_2) \sigma(0, r_2) \sigma(r_1, 0) \sigma(0, 0)$$

تغییر نمی‌کند (انتخاب این مقادیر، برای هر (r_1, r_2) ، $1 \leq r_1 \leq p_1 - 1$ ، $1 \leq r_2 \leq p_2 - 1$ ، گروه هم‌ارزها را معین می‌کند). بنا بر این

$$K(p_1 p_2) = 2^{(p_1-1)(p_2-1)}, T(p_1 p_2) = 2^{p_1+p_2-1}$$

در حالت خاص: $K(15) = 2^8$, $T(15) = 2^7$, $K(10) = 2^4$. برابری
 اخیر، امکان می‌دهد تا $K(200)$ را پیدا کنیم:

$$n = 200 = 2^3 \times 5^2, \quad q = 10, \quad m = 20,$$

$$K(200) = (K(10))^{20} = 2^4 \times 20 = 2^{80}$$

به همین ترتیب، می‌توان $K(n)$ را، برای هر حالتی از S ، پیدا کرد.
 فرض کنید $q = p_1 p_2 \dots p_s$ ؛ شماره k از 0 تا $q-1$ ، به صورت یک
 ارزشی به وسیله باقی مانده‌های r_1, r_2, \dots, r_s در تقسیم q بر p_1, p_2, \dots, p_s
 معین می‌شود (قضیه چینی درباره باقی مانده‌ها: ضمیمه ۲). با تبدیل‌های
 $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_s)$ - به تابع‌های در مجموعه انتخاب‌های r_i ، $0 \leq r_i \leq p_i - 1$ ،
 $(1 \leq i \leq s)$ ، که علامت‌های $+1$ و -1 را می‌پذیرند می‌توان به طور
 هم‌زمان، عمل‌های مربوط به تغییر علامت‌ها را در یک «ردیف»، که از p_i
 انتخاب تشکیل شده است و در آن‌ها، r_i مخصص r_i دلخواه (و از 0 تا
 $p_i - 1$ تغییر می‌کند) و بقیه $1 - r_i$ عدد ثابت است (برای هر $i = 1, 2, \dots, s$)،
 انجام داد. با این عمل‌ها، هر تبدیل به این‌جا منجر می‌شود که، اگر دست کم
 یکی از r_i صفر باشد $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_s) = +1$ ؛ در ضمن، این منجر شدن
 تبدیل‌ها، به هم بستگی ندارند (حاصل ضرب 2^s مقدار σ برای انتخاب‌ها،
 که از تبدیل بعضی مخصص‌ها به صفر به دست می‌آیند، تغییر نمی‌کند). پاسخ
 را، برای $q = p_1 p_2 \dots p_s$ و برای هر $n = qm$ به صورت (*) می‌نویسیم:

$$K(q) = 2^{(p_1-1)\dots(p_s-1)}; \quad K(n) = 2^{\varphi(n)}$$

که در آن $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$ و در حالت خاص

$$K(30) = 2^8; \quad T(30) = 2^{32}$$

▽ در این‌جا، به صورتی نامنتظر، تابع $\varphi(n)$ پدیدار شد که در نظریه
 عددها، معروف است: این، تابع اولر است و معرف تعداد عددهای طبیعی
 کوچکتر از n است که نسبت به n اول باشند.

۲۳۴. تنها نقطه‌های واقع بر نیم کره «شمالی» به قطب P را در نظر می‌گیریم (مقدارهای تابع f ، متناظر با دو انتهای يك قطر، با هم برابرند). قطب P را، بلندترین نقطه کره به حساب می‌آوریم. روشن است که $f(P) = 1$ و، برای هر نقطه دیگر M ، از کره، داریم: $0 \leq f(M) < 1$.
 (a) O را مرکز کره بگیرد. فاصله c_M از نقطه M تا صفحه استوا، برابر است با کسینوس زاویه MOP ، به نحوی که

$$f(M) = c_M = \cos \gamma \quad (\gamma = \widehat{MOP})$$

اگر c_1, c_2, c_3 ، کسینوس زاویه‌هایی باشند که سه شعاع دو به دو عمود برهم OM_1, OM_2, OM_3 با OP تشکیل می‌دهند، آن وقت $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ زیرا c_1, c_2, c_3 عبارتند از طول تصویر پاره خط راست واحد OP بر سه خط راست دو به دو عمود برهم (می‌توان مکعب مستطیل با یال‌های c_1, c_2, c_3 و قطر $OP = 1$ را ساخت).

حل مساله‌های (b) و (c) بر نتیجه‌ای که از شرط (*) به دست می‌آید، تکیه دارد: Γ_X را نیمه از دایره عظیمه (به جز استوا و نصف النهار) می‌گیریم که دو انتهای آن، روی استوا باشد و، برای آن، X را بلندترین نقطه فرض می‌کنیم. در این صورت، برای هر نقطه Y از کمان Γ_X (غیر از خود X) داریم $f(Y) < f(X)$ در واقع

$$f(Y) + f(Y') + f(Q) = f(X) + 0 + f(Q) = 1$$

که در آن، Y' نقطه‌ای از کمان Γ_X است که برای آن $\widehat{YOY'} = 90^\circ$ و Q انتهای شعاع عمود بر صفحه Γ_X است.

(b) از هر نقطه X کمان Γ_M می‌توان کمان Γ_X مربوط به آن را رسم و، سپس از آن‌ها، Γ_Y را طوری انتخاب کرد که شامل N باشد. در این صورت

$$f(M) > f(Y) > f(N)$$

(c) شبیه حالت قبل، برای هر دو نقطه M و N (که در آن، M بالای N است). می‌توان زنجیره

$$M = X_0, X_1, X_2, \dots, X_r = N$$

را طوری ساخت که X_j (برای $j = 1, 2, \dots, r$) روی $\Gamma_{X_{j-1}}$ باشد (اگر M و N ، عرض‌های نزدیک به هم داشته باشند، ولی طول جغرافیائی آنها، اختلاف زیادی داشته باشد، آن وقت، باید تعداد بیشتری از گام‌های r را برداشت).

(d) اگر برای دو نقطه M و N ، واقع بر یک مدار Π و به فاصله c_1 از صفحه استوا، داشته باشیم $f(M) - f(N) = \varepsilon > 0$ ، آن وقت برای هر دو نقطه M' و N' (که در آن، M' بلندتر از c_1 و N' کوتاه‌تر از c_1 است) خواهیم داشت:

$$f(M') - f(N') \geq f(M) - f(N) = \varepsilon$$

یعنی تابع f ، روی ارتفاع c_1 ، «جهشی» به اندازه ε دارد. از (*) نتیجه می‌شود که، در این صورت، برای هر دو نقطه $c_2 \geq c_3 > c_1$ ، با شرط $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ ، باید تابع f ، «جهشی» که کمتر از $\frac{\varepsilon}{4}$ نیست، یا در ارتفاع c_2 و یا در ارتفاع c_3 داشته باشد. اگر زوج‌های (c_2, c_3) از این گونه را، بیش از $\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor$ بگیریم، آن وقت با توجه به شرط $0 \leq f \leq 1$ ، به تناقض می‌رسیم.

(c) از آن چه گفتیم، معلوم می‌شود که تابع $f(M)$ برابر $g(c_M)$ است که، در آن، c_M فاصله نقطه M تا صفحه استوا، و $y = g(x)$ ، تابعی است صعودی یکنوا از بازه $0 \leq x \leq 1$ که با این شرط‌ها سازگار است: $g(0) = 0$ ، $g(1) = 1$ و به فرض $x_1 + x_2 + x_3 = 1$:

$$g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = 1$$

با توجه به شرط اخیر (به‌ازای $x_1 = 0$) نتیجه می‌شود:

$$g(x_3) = 1 - g(1 - x_3)$$

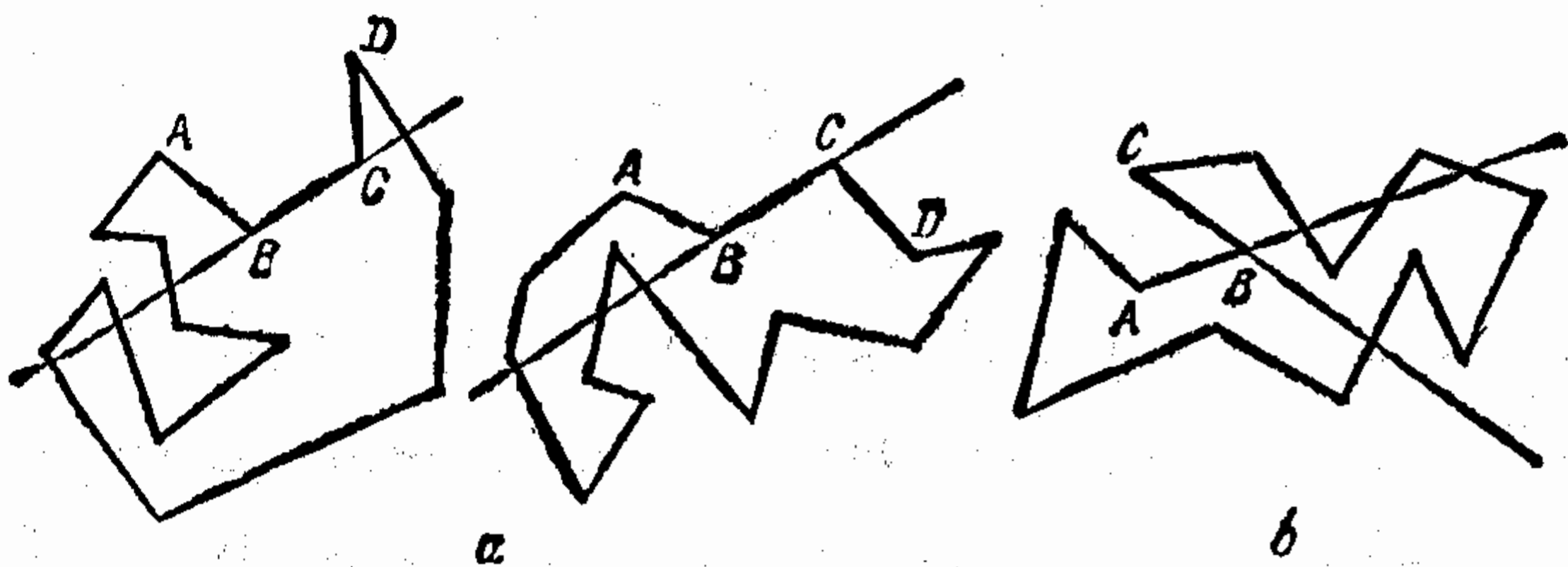
و بنابراین، برای هر x_2 و x_1 :

$$g(x_1) + g(x_2) = 1 - g(1 - x_1 - x_2) = g(x_1 + x_2)$$

ولی تنها تابعی که در این معادله تابعی صدق می کند و، در ضمن، با شرط $g(1) = 1$ سازگار است، تابع $g(x) = x$ است. این حکم، ابتدا برای x گویا (اول $x = \frac{1}{n}$ و سپس $x = \frac{k}{n}$) و بعد برای همه مقادیرهای x (و با توجه به یکنوا بودن تابع) ثابت می شود.

۲۳۵. خط راستی که با امتداد یک ضلع BC از خط شکسته به دست آمده است، بر حسب این که دو ضلع مجاور آن AB و CD در یک طرف مختلف خط راست BC واقع باشند، ضلع های دیگر خط شکسته را در تعدادی زوج یا تعدادی فرد قطع می کند (در حالت اخیر، ضلع BC را «زیگزاگ» می نامیم). در در واقع، زوج یا فرد بودن تعداد برخورد های خط شکسته با خط راست BC ، با این مطلب معلوم می شود که بدانیم، نقطه های A و D ، در یک طرف این خط راست قرار دارند یا در دو طرف آن (شکل ۱۰۱، a) ولی روی هر خط شکسته بسته، تعداد «زیگزاگ ها» زوج است؛ وقتی روی محیط این خط شکسته حرکت می کنیم، اگر توجه کنیم که در هر راس به کدام طرف می چرخیم - به راست یا به چپ - روشن می شود که تعداد چرخش های به راست برابر است با تعداد چرخش های به چپ، با توجه به این دو نکته، حکم مساله ثابت می شود.

اگر به نکته زیر توجه کنیم، می توان اثبات کوتاه تری به دست آورد: ضلع های زاویه ای که از امتداد هر دو ضلع مجاور AB و BC حاصل می شود، خط شکسته را به تعدادی زوج قطع می کند (شکل ۱۰۱، b).



شکل ۱۰۱

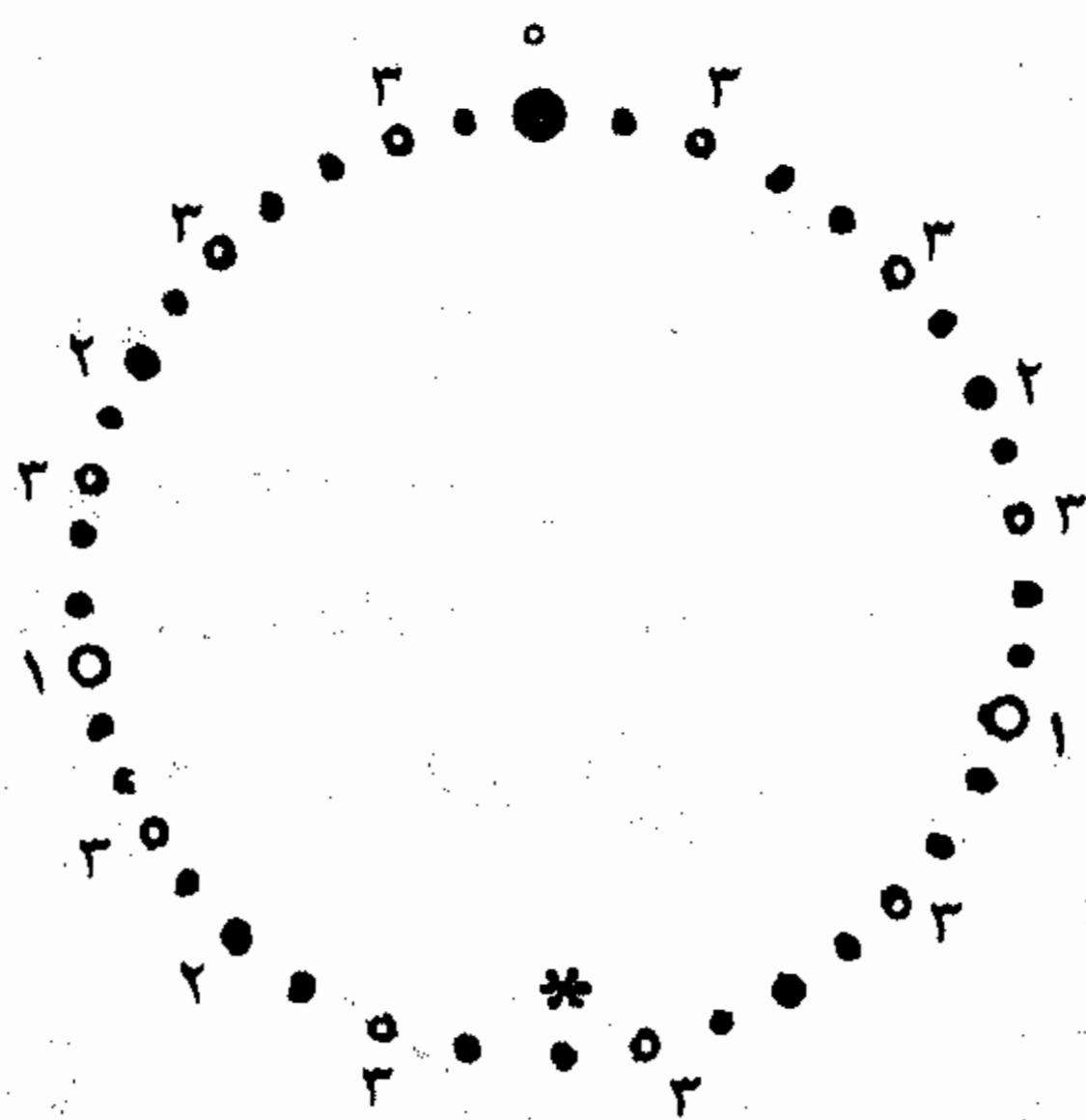
۲۳۶. فرض می‌کنیم در نقطه X ، عدد a_X را نوشته باشیم و، در ضمن، به تعداد $n_X > 1$ خط راست از آن بگذرد (این خط‌های راست، نقطه X را به نقطه‌های مفروض دیگر، وصل کرده‌اند). مجموع عددهای واقع بر هر يك از این خط‌های راست، طبق شرط، برابر صفر است. مجموع کل عددهای روی n_X خط راست (که در آن، عدد a_X ، n_X بار شرکت دارد) برابر است با

$$s + (n_X - 1)a_X = 0$$

که در آن، s عبارت است از مجموع همه عددهایی که روی نقطه‌های جداگانه نوشته شده است. فرض $s \neq 0$ به تناقضی آشکار می‌انجامد: برای هر نقطه X علامت عدد a_X با علامت مجموع s این عددها، مخالف است؛ بنابراین $s = 0$ و در نتیجه، برای هر X : $a_X = 0$.

۲۳۷. حکم (b) را، ضمن حل مسأله ۵۸، ثابت کردیم. اگر از دو لوزی از این گونه (با رأس‌های B و C) استفاده کنیم، نتیجه a هم به سادگی به دست می‌آید.

۲۳۸. پاسخ: بله ممکن است؛ (b) ۸ حرکت (هر نفر ۴ حرکت).



شکل ۱۰۲

در شکل ۱۰۲ مثالی از ۴۱ کارت نشان داده شده است؛ کنار هر کارت، عددی را نوشته‌ایم که نشان می‌دهد، بعد از چند حرکت از آخر، این کارت برداشته می‌شود. چنین ترتیبی را می‌توان، بدراحتی، و از آخر ساخت. به آخرین کارت سیاه باقی‌مانده با شماره ۵، دو کارت سفید با شماره ۱،

اضافه می‌کنیم؛ در کنار هر کدام از آنها، دو کارت سیاه با شماره ۲ (در این طرف و آن طرف) می‌گذاریم؛ کنار هر کدام از کارت‌های سیاه، دو کارت سفید شماره ۳ قرار می‌دهیم و غیره. روشن است که، با این روش، در هر گام، حداکثر تعداد ممکن کارت‌های متناظر با شماره گذاشته می‌شود. برای هر i ، ترتیبی با حداکثر تعداد ممکن $a_i = b_i + w_i$ از کارت‌ها به دست می‌آید (b_i کارت‌های سیاه و w_i کارت‌های سفید) که می‌توانند در i حرکت، به یک کارت سیاه تبدیل شوند ($w_0 = 0, b_0 = 1$). قانون نوشتن پشت سرهم (b_i, w_i) خیلی ساده است: ضمن عبور از i به $i+1$ ، عدد بزرگتر از بین دو عدد b_i و w_i تغییر نمی‌کند، به عدد کوچکتر، دو برابر عدد بزرگتر اضافه می‌شود:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_i	1	1	5	5	29	29	169	169	985
w_i	0	2	2	12	12	70	70	408	408
a_i	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

برای حل مسأله a کافی است یکی از ۴۱ نقطه شکل ۱۰۲ را، که شماره ۴ داشته باشد، حذف کرد؛ این حذف تأثیری در موقیت ما، بعد از نخستین حرکت ندارد، مثلاً، برای حفظ تقارن، می‌توان نقطه‌ای را که با علامت * مشخص کرده‌ایم، حذف کرد.

عبور از ۱۰۰۰۰ کارت به یک کارت را، نمی‌توان با کمتر از ۸ حرکت انجام داد، زیرا، همان‌طور که در جدول دیده می‌شود: $a_7 = 577 < 10000$. برای این که مثال مربوط به ۱۰۰۰۰ کارت را به دست آوریم، می‌توان ابتدا نمونه $a_8 = 1393$ را، که با حداکثر ۸ حرکت وجود دارد، در نظر گرفت و، سپس، ۳۹۳ کارت با شماره ۸ را از آن حذف کرد که بر موقیت ما، بعد از حرکت اول تأثیری ندارد. این عمل را می‌توان انجام داد، زیرا 408×2 ، یعنی ۸۱۶ کارت دارای شماره ۸ هستند که در بین ۵۷۷ کارت قرار دارند که شماره‌ای بیش از ۷ ندارند و، دست‌کم، $239 = 577 - 816$ زوج

کارت ردیف هم را تشکیل می دهند.

۲۳۹. از تعریف حد دنباله استفاده می کنیم (ضمیمه ۲۱). اگر برای

هر $n \geq N$ و عددی مثل k ، نابرابری های

$$\left| a_n - \frac{1}{\sqrt[k]{a_{n+1}}} \right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \frac{|a_N|}{\sqrt[k]{\varepsilon}} < \varepsilon$$

برقرار باشند، آن وقت، به ازای $m \geq N + k$ خواهیم داشت:

$$|a_m| < \frac{1}{\sqrt[k]{a_{m-1}}} + \varepsilon < \frac{1}{\sqrt[k]{a_{m-2}}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt[k]{\varepsilon}} + \varepsilon < \dots$$

$$\dots < \frac{1}{\sqrt[k]{a_N}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt[k]{\varepsilon^{m-N+1}}} + \dots + \frac{\varepsilon}{\sqrt[k]{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt[k]{\varepsilon}} + \varepsilon <$$

$$< \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} |a_N| + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

۲۴۰. تناظر متقابل و یک به یک f را، بین $n-1$ پاره خط راست

از مسیر اول و $n-1$ پاره خط راست از مسیر دوم به نحوی برقرار

می کنیم که مسافرت روی پاره خط راست اول به قیمتی تمام شود، که از مسافرت

روی پاره خط راست دوم بیشتر نباشد $t_i(A)$ را « m » i امین مسیری می گیریم

($i=1, 2$) که از شهر A آغاز شده است، یعنی مجموعه شهرهایی که، در

i امین مسیر، بعد از شهر A قرار دارند. شهر بلافاصله بعد از A را، در

مسیر اول A' و در مسیر دوم A'' می نامیم.

f را به این ترتیب معین می کنیم. اگر AA' ، پاره خط مسیر اول، چنان

باشد که $t_1(A)$ با $t_2(A)$ برخورد دارد (یعنی در شهری مشترک اند)، آن

وقت فرض می کنیم: $f(AA') = AA''$. در حالت عکس، فرض می کنیم

$f(AA') = BB'$ که، در آن، B عبارت است از آخرین شهر از $t_1(A)$ در

مسیر دوم. توجه کنیم که، در این حالت، $t_1(B)$ هم با $t_2(B)$ برخوردی

ندارد؛ در ضمن، A ، آخرین شهر از $t_2(B)$ در مسیر اول است (از این جا،

نتیجه می شود که، تناظر f ، یک به یک است و، در ضمن، معکوس آن، f^{-1}

هم، با همین قاعده تعریف می‌شود).

اگر $|a|$ را به معنای قیمت بلیت روی پاره خط راست a فرض کنیم،
حقیق می‌کنیم که $|f(a)| \geq |a|$. اگر C ، شهر برخورد $t_1(A)$ و $t_2(A)$
باشد، آن وقت $|AA''| \leq |AC| \leq |AA'|$ و در حالت دوم

$$|AA'| \leq |AB| = |BA| \leq |BB''|$$

(در هر دو حالت، نابرابرایها، نتیجه‌ای از نظام انجام مسافرت است: برای هر
 D از $t_1(A)$ داریم: $|DA| \geq |AA'|$ ؛ و برای هر E از $t_2(A)$ ، برعکس:
 $|EA| \leq |AA''|$.)

۲۴۱. دو دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر دو وجه مجاور یال AB
از چندوجهی، محیط باشند. این دو دایره، به صورتی یک ارزشی، کره σ را
مغین می‌کنند که این دو دایره روی آن قرار گرفته‌اند؛ از این گذشته، همه
رأس‌های این دو وجه مجاور هم، روی کره‌اند. اگر BC و BD ، دو یال دیگر
چندوجهی باشند که از B خارج شده‌اند، آن وقت دایره‌ای هم که از سه
نقطه B ، C و D می‌گذرد (دایره محیطی وجه شامل این سه رأس)، به کره
 σ تعلق دارد، به نحوی که همه رأس‌های دو وجه متصل به یال BC ، روی
همان σ واقع‌اند. اکنون به همان ترتیب، می‌توان وجه‌های متصل به یالی را
در نظر گرفت که از C خارج شده است و، با همین روش، خود را به هر
رأسی از چندوجهی رسانید - همه آن‌ها روی یک کره σ قرار دارند: برای
هر یک از این رأس‌ها، می‌توان زنجیره‌ای از یال‌ها ساخت که از یال AB
آغاز و به رأس مورد نظر ختم شده باشد.

۲۴۲. پاسخ: بله، دومی می‌تواند برنده شود.

برای اثبات، باید برنامه برد را توضیح دهیم. دومی می‌تواند در چهار
حرکت خود، طوری عمل کند که، برای حرکت پنجم اوایی، ضریب یکی
از توان‌های فرد x ، x^{2l+1} ، باقی مانده باشد. فرض کنید، قبل از حرکت
چهارم دومی، به چند جمله‌ای

$$P(x) + *x^m + l*x^{2l+1}$$

رسیده باشیم که، در آن: $P(x)$ چند جمله‌ای معلومی با ضرایب‌های عددی است. عددهای μ و $c > 0$ را طوری در نظر می‌گیریم که، به ازای هر مقدار λ ، برای چند جمله‌ای $F(x) = P(x) + \mu x^m + \lambda x^{2l+1}$ داشته باشیم:

$$cF(1) + F(-2) = 0$$

که در این صورت $F(x)$ ، دارای ریشه‌ای در بازه $[1, -2]$ خواهد داشت (ضمیمه ۵ را ببینید). برای این منظور کافی است فرض کنیم:

$$c = 2^{2l+1} + 1 \quad \text{و} \quad \mu = \frac{P(-2) - cP(1)}{c + (-2)^m}$$

(روشن است که، به جای ۱ و -۲، می‌توان دو عدد دیگر با علامت‌های مختلف را در نظر گرفت). اگر دومی، در حرکت چهارم خود، این مقدار μ را انتخاب کند، وجود ریشه را در معادله مفروض، تأمین خواهد کرد.

۲۴۳. پاسخ: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ و ۰ لیتر.

تحقیق درستی این جواب، دشوار نیست: اگر اولی شیر لیوان خود

را، بین ۶ لیوان دیگر به طور برابر تقسیم کند، به هر لیوان $\frac{1}{7}$ لیتر شیر می‌رسد و، در ضمن، لیوان اولی خالی می‌ماند، یعنی همان عددهای قبلی ظاهر می‌شوند، با این تفاوت که، جای لیوان‌ها، عوض شده است؛ هر لیوان قبلی، نصیب نفر سمت راستی شده است. تنها این می‌ماند که، ثابت کنیم، جواب دیگری وجود ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

x را بیشترین مقدار شیری می‌گیریم که، در تمامی مدت جا به جایی شیرها، به لیوان Γ ، قبل از آن که زمان تقسیم آن رسیده باشد، ریخته شده است. در این صورت، بعد از یک دور عمل شامل ۷ بار «جا به جایی» شیرها (این دور را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد، به نحوی که Γ را می‌توان

حلقه اول این دور دانست)، در لیوان Γ حداکثر $x = \frac{x}{6} \times 6$ لیتر شیر جمع

می شود؛ در ضمن، خود این مقدار وقتی به دست می آید که از هر يك از شش لیوان دیگر، درست $\frac{x}{6}$ لیتر شیر به لیوان Γ ریخته شده باشد. به این ترتیب، با توجه به شرط نتیجه می شود که، هر لیوان، همان مقدار x لیتر شیر را بخش می کند و، بعد از دریافت k سهم، در آن، $\frac{kx}{6}$ لیتر خواهد بود $(k = 1, 2, \dots, 6)$ ؛ مقدار x ، از این شرط به دست می آید که، مجموع کل شیرها، برابر ۳ لیتر است.

۲۴۴. a) پاسخ: يك عدد دورقمی ۴۹ و يك عدد چهار رقمی ۱۶۸۱ (41^2) ، عدد «خاص» است.

فرض می کنیم: $(10x + t)^2 = 100x^2 + 20xt + t^2$ که، در آن، باید عدد $20xt + t^2$ مجذور کامل عددی طبیعی کوچکتر از ۱۰، و t عدد درستی از ۱ تا ۹ باشد، در ضمن $x^2 > 10$. در این صورت $x \geq 4$ و $xt \leq 4$ که تنها برای $x = 4$ و $t = 1$ ممکن است.

b) پاسخ: بله وجود دارد، $506^2 = 256036$.

c) برای این که، عدد «خاص» لازم، به صورت

$$(10^5x + 1)^2 = 10^{10}x^2 + 2 \times 10^5x + 1$$

را به دست آوریم، کافی است عدد درست $2x$ را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$10^9 < x^2 < 10^{10} \text{ و } 2 \times 10^5x + 1 = y^2 < 10^{10}$$

می توان $x = 5 \times 10^4 - 1$ انتخاب کرد (عدد ۲۰ رقمی «خاص» مورد نظر چنین است:

$$(4999900001)^2 = 22999000019999800001$$

که از 49999^2 و 99999^2 تشکیل شده است).

d) برای هر k ، عدد «خاص» $4k$ رقمی تنها می تواند

$$(10^kx + t)^2 = 10^{2k}x^2 + 2 \times 10^kxt + t^2$$

به ازای $10^{2k} < x^2 \leq 10^{2k+1}$ باشد، از این جا

$$10^{2k} < 10^{2k+1} - 1 \text{ و } 3 \times 10^{2k} > x$$

که از آن جا به دست می آید $1 = t$. در ضمن، برابری

$$2 \times 10^k x + 1 = (2u + 1)^2$$

که با برابری $u(u+1) = 2^k - 1 \times 5^k x$ هم ارز است، تنها در سه حالت می تواند برقرار شود:

(۱) $u+1$ بر $5 \times 10^{k-1}$ بخش پذیر باشد؛

(۲) u بر $2^k - 1$ و $u+1$ بر 5^k بخش پذیر باشد؛

(۳) u بر 5^k و $u+1$ بر $2^k - 1$ بخش پذیر باشد.

هر حالت، بیش از یک جواب که با شرط $u < 5 \times 10^{k-1}$ ، هم ارز با شرط $10^k < 2u+1$ سازگار باشد، ندارد [در حالت های (۲) و (۳)، کافی است اختلاف دو جواب را در نظر بگیریم تا با این شرط تناقض پیدا کند]. بنابراین، بیش از ۳ عدد «خاص» وجود ندارد.

▽ با بحثی مفصل تر، می توان ثابت کرد که، از این گونه عدد، بیش از دو تا وجود ندارد.

(c) برای هر k ، دست کم یک عدد خاص $(4k+2)$ رقمی، یعنی $z^2 = v + w$ وجود دارد که، در آن، $v = 25 \times 10^{2k-1}$ و w عددی طبیعی بزرگتر از \sqrt{v} . فرض می کنیم $v = w^2 - y^2$ در ضمن

$$z^2 = 4v, w^2 + y^2 = 10^{2k+1} w^2 + y^2$$

از w^2 و z^2 «تشکیل» شده و عددی خاص است، به شرطی که داشته باشیم:

$$10^{2k} \leq w^2 < 10^{2k+1} \text{ و } 0 < y^2 < 10^{2k+1}$$

چون $\sqrt{v} < w - 1$ و $v - 1 \leq (w - 1)^2$ ، بنابراین

$$y < 2\sqrt{v}, y^2 < 4v = 10^{2k+1}$$

$$10^{2k} < 10^{2k+1} < 10^{2k+2} = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$$

∇ در حالت خاص می توان به کمک کامپیوتر، عدد زیر را به ازای

$k = 7$ به دست آورد:

$$z = 25 \times 10^{13} + 15811389^2 = 5000000022109321$$

که مجذور آن، عدد ۳۵ رقمی خاصی است

۲۴۵. عددهای مفروض را، به ردیف صعودی می نویسیم:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

ثابت می کنیم، هر مجموع S ، شامل چند تا از این جمله‌ها، در یکی

از فاصله‌های بین $\frac{1}{4} b_k$ و b_k قرار دارد که، در آن، $b_k = a_1 + \dots + a_k$

($k = 1, \dots, n$). کافی است ثابت کنیم که، هیچ کدام از مجموع‌های S ،

نمی تواند، به طور اکید، بین b_k و $\frac{1}{4} b_{k+1}$ واقع باشد. فرض می کنیم:

$$s > b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

در ضمن، فرض می کنیم، S شامل عضوی مثل $a_i \geq a_{k+1}$ باشد، بنابراین

$$s \geq a_{k+1}$$

با جمع کردن نابرابری‌ها، به دست می آید:

$$2s > a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} = b_{k+1} \Rightarrow s > b_{k+1}$$

۲۴۶. (a) ده رقم ۰، ۱، ...، ۹ را، به دو گروه و در هر گروه ۵ رقم،

تقسیم می کنیم (مثلاً از ۰ تا ۴ در یک گروه، و از ۵ تا ۹ در گروه دیگر).

کافی است از جعبه‌هایی استفاده کنیم که، در آن‌ها، هر دو رقم متعلق به یکی

از این دو گروه باشند، زیرا چنین دورقمی، در هر شماره سه رقمی وجود

دارد. (و به این ترتیب، جعبه‌هایی که دورقم آن‌ها، از دو گروه مختلف باشند،

خالی می ماند).

(b) به جز ۱۰ جعبه با شماره‌های ۰۰، ۱۱، ...، ۹۹ که حتماً باید

اشغال شوند، دست کم به ۳۰ جعبه دیگر نیاز داریم تا بلیت‌های با رقم متفاوت را در آن‌ها جادهیم: تعداد چنین بلیت‌هایی روی هم برابر $10 \times 9 \times 8 = 720$ است و در هر جعبه با شماره \overline{pq} ($p \neq q$)، بیش از $3 \times 8 = 24$ تا از این بلیت‌ها وارد نمی‌شود (\overline{zpq} ، \overline{pzq} و \overline{pqz} که در آن‌ها، z رقمی دلخواه، مخالف با p و q است).

(c) x را کمترین تعداد جعبه‌های اشغال شده‌ای می‌گیریم که، شماره‌های آن‌ها، با یک رقم آغاز شده باشند ($x \geq 1$)؛ چون همه رقم‌ها، حقوقی برابر دارند، می‌توان فرض کرد که، کمتر از همه، جعبه‌هایی باشند که با شماره 9 آغاز شده‌اند: 99 ، 98 ، \dots ، $9\overline{y}$ که در آن، $y = 10 - x$. در این صورت، هر بلیت با شماره $\overline{9pq}$ را، که در آن، $p < y$ و $q < y$ ، نمی‌توان در جعبه‌های $\overline{9p}$ و $\overline{9q}$ قرارداد، یعنی باید جعبه \overline{pq} را اشغال کنند. به این ترتیب، تعداد جعبه‌هایی که باید اشغال شوند، برابر است با دست کم همه $2x$ جعبه‌ای که هر دو رقم شماره آن‌ها از 0 تا $(y - 1)$ است و همچنین، دست کم x^2 جعبه‌ای که شماره‌های آن‌ها با یکی از رقم‌های y تا 9 آغاز می‌شوند (برای هر یک از این x رقم، دست کم x جعبه لازم است)؛ یعنی تعداد کل جعبه‌ها، نمی‌تواند از این مقدار کمتر باشد:

$$y^2 + x^2 = (10 - x)^2 + x^2 \geq 50$$

(d) و (e). برای عددهای طبیعی و مفروض k و s ($k < s$)، $F(k, s)$ را به معنای کوچکترین عدد از عددهای $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ می‌گیریم که، در آن، x_1, x_2, \dots, x_k عددهایی طبیعی به مجموع s هستند. مقدار $F(k, s)$ را می‌توان بر حسب k و s بیان کرد. حداقل مقدار مجموع مجذورها وقتی به دست می‌آید که عددهای x_i «تقریباً برابر» باشند: اگر $s = kq + r$ ، $0 \leq r < k$ ، آن وقت $(k - r)$ تا از آن‌ها برابر q ، و r تای بقیه، برابر $q + 1$ باشند، بد نحوی که

$$F(k, s) = (k - r)q^2 + r(q + 1)^2 = kq^2 + r(2q + 1)$$

بهبتر است، مسأله کلی تر را مورد بررسی قرار دهیم، وقتی که «بلیت‌ها» k رقمی و با رقم‌های از ۰ تا $s-1$ باشند (در مسأله ما: $s=10$). ثابت می‌کنیم، حداقل تعداد $M(k, s)$ جعبه‌ها با شماره‌های \overline{pq} ($0 \leq p, q < s$) که در آن، می‌توان بلیت‌های، با حذف $(k-2)$ رقم را جاداد، برابر است با $F(k-1, s)$.

در حالت خاص مسأله d :

$$M(4, 10) = F(3, 10) = 3^2 + 3^2 + 4^2 = 34$$

پاسخ مسأله e) را در این جدول داده‌ایم:

k	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$M(k, 10) = F(k-1, 10)$	۵۰	۳۴	۲۶	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰

نا برابری $M(k, s) \geq F(k-1, s)$ را می‌توان، با استدلالی شبیه مسأله c) و با استفاده از استقرا روی $k+s$ ، ثابت کرد:

$$M(k, s) \geq \min_{x=1, 2, \dots, s} (M(k-1, s-x) + x^2)$$

برای جا دادن بلیت‌ها، در $F(k-1, s) = x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2$ جعبه، کافی است شبیه مسأله a)، s رقم را به $k-1$ گروه $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ (رقم) تقسیم کرد و جعبه‌هایی را در نظر گرفت که، در آن‌ها، هر دو رقم از یکی از گروه‌ها انتخاب شده‌اند.

۲۴۷. همه گره‌ها را، به ردیف به شطرنجی، رنگ‌های سیاه و سفید در می‌آوریم. در مرز به جز رأس‌های مربع اصلی، 4×99 گره وجود دارد که، به طور برابر، بین گره‌های سیاه و سفید تقسیم شده‌اند. فرض کنید، همه آن‌ها، در انتهای خط‌های شکسته واقع باشند. در این صورت، تعداد خط‌های شکسته‌ای که دو انتهای سفید دارند با تعداد خط‌های شکسته‌ای که دو انتهای سیاه دارند، برابر است. بنابراین، تعداد کل گره‌های سفید و سیاه هم، که روی خط‌های شکسته و در درون صفحه شطرنجی قرار دارند، برابر می‌شوند. ولی در درون صفحه شطرنجی، روی هم 99^2 ، یعنی به تعدادی فرد

گروه وجود دارد که، دست کم، یکی از آنها، روی خط‌های شکسته واقع نیستند
 ۲۸۴. با توجه به شرط مساله، معلوم می‌شود که مقدار

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

از ۲ کمتر نیست (زیرا $n \leq s$ ، $m \leq s$ و $s < mn$). در حالتی که داشته باشیم: $m = n = 2$ ، $2 \leq s \leq 3$ ، حکم مساله به سادگی قابل تحقیق است. حکم را در حالت کلی، با استقرا روی $m + n = k$ ($k \geq 4$) ثابت می‌کنیم. $x_1 > y_1$ را، به ترتیب، بزرگترین عددها بین x_i و y_j می‌گیریم ($1 \leq i \leq n$ ، $1 \leq j \leq m$ ؛ حالت $x_1 = y_1$ روشن است). برای این که، فرض استقرا را، در مورد برابری

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \dots + x_n = y_2 + \dots + y_m$$

که شامل $k - 1 = m + n - 1$ عدد است، در دو طرف برابری به کار بریم (بعد از آن که، در صورت لزوم، y_1 را به سمت راست منتقل کنیم)، کافی است برقراری نابرابری

$$s' = y_2 + \dots + y_m < n(m - 1)$$

را مورد تحقیق قرار دهیم؛ چون $y_1 > \frac{s}{m}$ ، بنا بر این

$$s' < s - \frac{s}{m} = \frac{mn(m - 1)}{m} = n(m - 1)$$

۲۴۹. K_1 را بزرگترین مربع از مربع‌های مفروض، سپس K_2 را بزرگترین مربع از بین مربع‌هایی که مرکزشان در K_1 قرار ندارد، بعد K_3 را بزرگترین مربع از بین آن‌هایی که مرکزی در داخل مربع‌های K_1 و K_2 ندارند و غیره، فرض می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، نقطه C ، مرکز یک مربع، در بیش از چهار مربع، از مربع‌های K_1 ، K_2 ، ...، واقع باشد، در این صورت، مرکزهای دو تا از آنها (K_i و K_j) در یکی از چهار بخش صفحه که به وسیله محورها های تقارن

مربع به مرکز C به وجود آمده‌اند، قرار می‌گیرد. از بین K_1 و K_2 ، آن مربعی که مرکز آن، نسبت به این محورها، دورتر است (مثلاً نسبت به مجموع‌ها، یا نسبت به بزرگترین فاصله‌ها) شامل مرکز دیگری هم می‌شود. ولی این، با قانون انتخاب مربع‌ها، متناقض است.

۲۵۰. $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ را به ترتیب وزن وزنه‌ها می‌گیریم. a را در کفه چپ، بعد m_2 را در کفه راست، m_3 را در کفه چپ، m_4 را در کفه راست و غیره قرار می‌دهیم؛ همان دنبالهٔ مسورد نظر $LRLRLR \dots$ به دست می‌آید. و این، نتیجه‌ای است از حکم سادهٔ زیر:

پیش‌قضیه. اگر $m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < m_k$ ، آن وقت، از دو مجموع

$$m_1 + m_3 + m_5 + \dots \quad \text{و} \quad m_2 + m_4 + m_6 + \dots$$

(که شامل همهٔ n عدد مفروض باشند)؛ آن مجموعی بزرگتر است که، عدد بزرگتر m_k در آن باشد.

برای اثبات پیش‌قضیه، کافی است در حالت زوج بودن k ، نابرابری‌های

$$m_1 < m_2, m_3 < m_4, \dots, m_{k-1} < m_k$$

و در حالت فرد بودن k ، نابرابری‌های

$$m_1 > 0, m_3 > m_2, \dots, m_k > m_{k-1}$$

را با هم جمع کنیم.

همین پیش‌قضیه، ولی برای $m_1 < m_{1+1} < \dots < m_{k-1} < m_k$ که از $k-1+1$ عدد تشکیل شده است، برای حل مسألهٔ (b) استفاده خواهیم کرد.

(b) بهتر است ردیف وزنه‌ها را، که متناظر با واژهٔ مفروض با حرف‌های L و R است، «با آغاز از پایان» واژه شرح دهیم.

همهٔ وزنه‌های با شمارهٔ زوج را در یکی از کفه‌ها، و همهٔ شماره‌های فرد را در کفهٔ دیگری گذاریم، در ضمن، سنگین‌ترین وزنهٔ m_n را، در کفه‌ای قرار می‌دهیم که متناظر با آخرین حرف از واژهٔ مفروض باشد؛ سپس، با

عبور از هر حرف به حرف قبلی خود، اگر حرف عوض شده است (از L به R یا از R به L)، سنگین ترین وزنه را از بین وزنه‌های باقی مانده برمی‌داریم و اگر با تغییر حرف رو به رو نیستیم، سبک ترین آن‌ها را. در ضمن هر بار، ردیفی از وزنه‌ها (به ردیف شماره‌ها) باقی می‌ماند که، با عوض کردن جای خود، در این یا آن کفه قرار دارند؛ در مورد این ردیف، پیش قضیه را به کار می‌بریم.

۲۵۱. (a) پاسخ: چند جمله‌ای‌های $Q_1(x) = x$ و $Q_2(x) = P(x)$ با چند جمله‌ای $P(x) = x^2 - \alpha$ ، به ازای هر مقدار دلخواه α ، قابل جا به جایی اند؛ چند جمله‌ای Q از درجه سوم، که با $x^2 - \alpha$ قابل جا به جایی باشد، به ازای $\alpha = 0$ ($Q(x) = x^3$) و به ازای $\alpha = 2$ ($Q(x) = x^3 - 3x$) وجود دارد. اثبات این که چند جمله‌ای دیگری وجود ندارد، از راه مقایسه ضریب‌ها به دست می‌آید. مثلاً برای چند جمله‌ای درجه سوم، اتحاد

$$(x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + \beta_1 (x^2 - \alpha)^2 + \beta_2 (x^2 - \alpha) + \beta_3$$

وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\beta_1 = \beta_3 = 0$ (مقایسه ضریب‌های x^5 ، x^3 و x)، $2\beta_2 = -3\alpha$ (مقایسه ضریب‌های x^4)، $\beta_2^2 = 3\alpha^2 + \beta_2$ (مقایسه ضریب‌های x^2)، $\alpha = \alpha^3 + \beta_2 \alpha$ (مقایسه مقادیرهای ثابت). از آنجا یا $\alpha = 0$ و $\beta_2 = 0$ یا

$$\beta_2 = -\frac{3}{2}\alpha = 1 - \alpha^2 = \beta_2^2 - 3\alpha^2$$

و این سه معادله با دو مجهول، منجر به جواب $\alpha = 2$ ، $\beta_2 = -3$ می‌شوند. (b) به سادگی قابل تحقیق است که اگر چند جمله‌ای‌های قابل جا به جایی $P(x)$ و $Q(x)$ را، با هم، به این صورت تبدیل کنیم:

$P(x) \rightarrow P^*(x) = P(x - \gamma) + \gamma$ و $Q(x) \rightarrow Q^*(x) = Q(x - \gamma) + \gamma$ (γ ، عددی دلخواه است)، آن وقت چند جمله‌ای‌های $P^*(x)$ و $Q^*(x)$ هم،

نسبت به یکدیگر، قابل جا به جایی اند. هر چند جمله‌ای درجه دومی که ضریب بزرگترین درجه آن واحد باشد، می‌توان (با جدا کردن مربع کامل آن)، به صورت $P^*(x) = x^2 - \alpha$ تبدیل کرد. بنابراین، می‌توان از ابتدا فرض کرد $P(x) = x^2 - \alpha$ و شبیه a عمل کرد.

با توجه به اتحاد $(Q(x))^2 - \alpha = Q(x^2 - \alpha)$ ، که در آن

$$Q(x) = x^k + \beta_1 x^{k-1} + \beta_2 x^{k-2} + \dots + \beta_k$$

دستگاه معادله‌هایی برای $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ به دست می‌آید. قبل از همه خواهیم داشت: $\beta_1 = \beta_3 = \dots = 0$ و سپس، معادله‌های به صورت $\beta_2 = F_2, \beta_4 = F_4, \dots$ که در آن‌ها، تابع‌های F_i به α و به β_j بستگی دارند ($2 \leq j < i$)، به نحوی که ضریب‌های β_2, β_4, \dots به طور یک ارزشی پیدا می‌شوند (تنها

معادله، از بین k معادله‌ای که با برابر قرار دادن ضریب‌های $x^{2k-2}, x^{2k-4}, \dots, x^2$ و مقدار ثابت به دست می‌آیند، برای جست و جوی β_j کافی است؛ بقیه، شرط‌هایی اضافی هستند که ممکن است، برقرار نباشند).

(c) این چند جمله‌ای‌ها، عبارتند از $(P(P(x)))$ و $P(P(P(x)))$.

(d) به جای $P(Q)$ و $P(Q(R))$ از نمادهای $P \circ Q$ و $P \circ Q \circ R$ استفاده می‌کنیم. طبق شرط $Q \circ P = P \circ Q$ و $R \circ P = P \circ R$ ، از آنجا

$$(Q \circ R) \circ P = Q \circ R \circ P = Q \circ P \circ R = P \circ Q \circ R = P \circ (Q \circ R),$$

$$(R \circ Q) \circ P = R \circ Q \circ P = R \circ P \circ Q = P \circ R \circ Q = P \circ (R \circ Q)$$

می‌بینیم که، چند جمله‌ای‌های $Q \circ R$ و $R \circ Q$ ، هر دو با P قابل جا به جایی اند؛ و چون از یک درجه هستند (حاصل ضرب درجه‌های Q و R)، با توجه به (b)، بر هم منطبق‌اند.

(e) با روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، برای هر $k \geq 2$ ، چند جمله‌ای P_k از درجه k وجود دارد، به نحوی که

$$t^k + \frac{1}{t^k} = P_k\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2, \quad t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

به نحوی که $P_2(x) = x^2 - 2$ ، $P_3(x) = x^3 - 3x$ در ضمن

$$t^{mn} + \frac{1}{t^{mn}} = P_m\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) = P_n\left(t^m + \frac{1}{t^m}\right) =$$

$$= P_m\left(P_n\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = P_n\left(P_m\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = P_{mn}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

از این اتحادها، نتیجه می‌شود: $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = P_{mn}$.

▽ این چند جمله‌ای‌ها، با تغییر متغیرهای ساده‌ای، از چند جمله‌ای‌های

چبیشف، T_k ، که با اتحادهای زیر معین می‌شوند، به دست می‌آیند:

$$\cos k\varphi = T_k(\cos\varphi), \quad k = 2, 3, \dots, \quad P_k(x) = 2T_k\left(\frac{x}{2}\right)$$

۲۵۲. پاسخ: ۸۸.

با هر يك از عددهای ... ۳، ۲، ۱، k ، در دنباله (a_n) ، k بار

برخورد می‌کنیم، زیرا شرط $a_n = k$ هم‌ارز است با

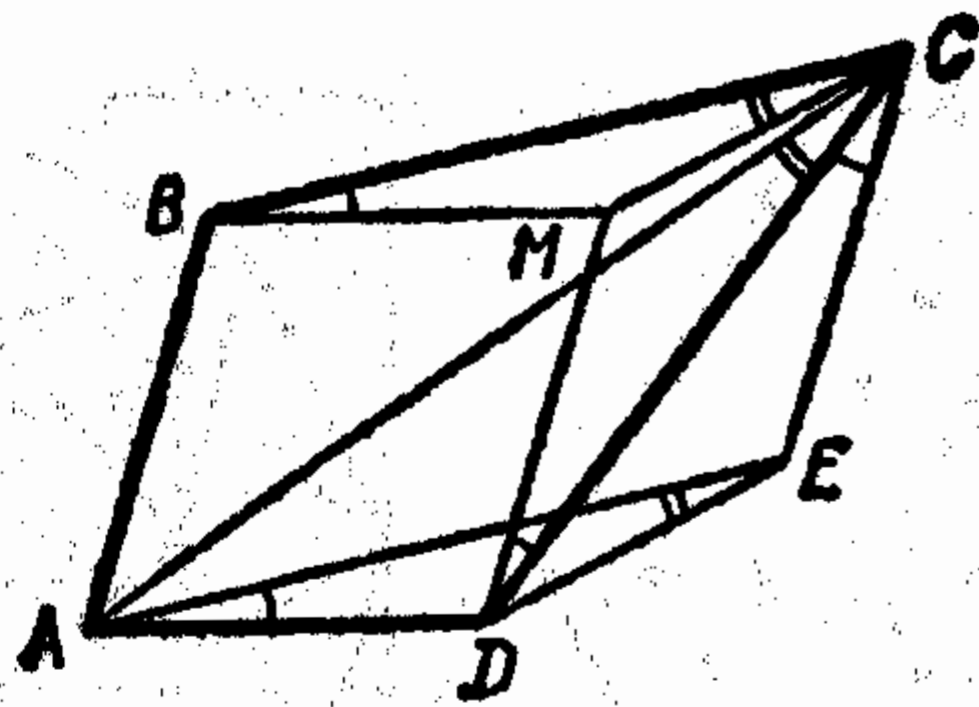
$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad k^2 - k < n \leq k^2 + k$$

بنابراین، در مجموع

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{a_{44 \times 43 + 1}} + \dots + \frac{1}{a_{44 \times 45}}\right)$$

مقدار هر يك از پرانتزها، برابر است با $2k \times \frac{1}{k} = 2$.



شکل ۱۰۳

۲۵۳. E را رأس مثلث ADE می‌گیریم که از انتقال مثلث BMC

به اندازه بردار \vec{BA} به دست آمده باشد (شکل ۱۰۳). در این صورت $MDEC$ متوازی‌الاضلاع است و زاویه‌های EAD ، CMB ، CDM و ECD برابر می‌شوند و نقطه‌های A ، C ، E و D روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند. بنابراین، زاویه‌های ACD ، AED و BCM هم برابر می‌شوند.

۲۵۴. اگر $1 - 1978^m = d$ بر $1 - 10000^m$ بخش پذیر باشد، آن-

وقت عدد

$$1978^m - 10000^m = 2^m(989^m - 5000^m)$$

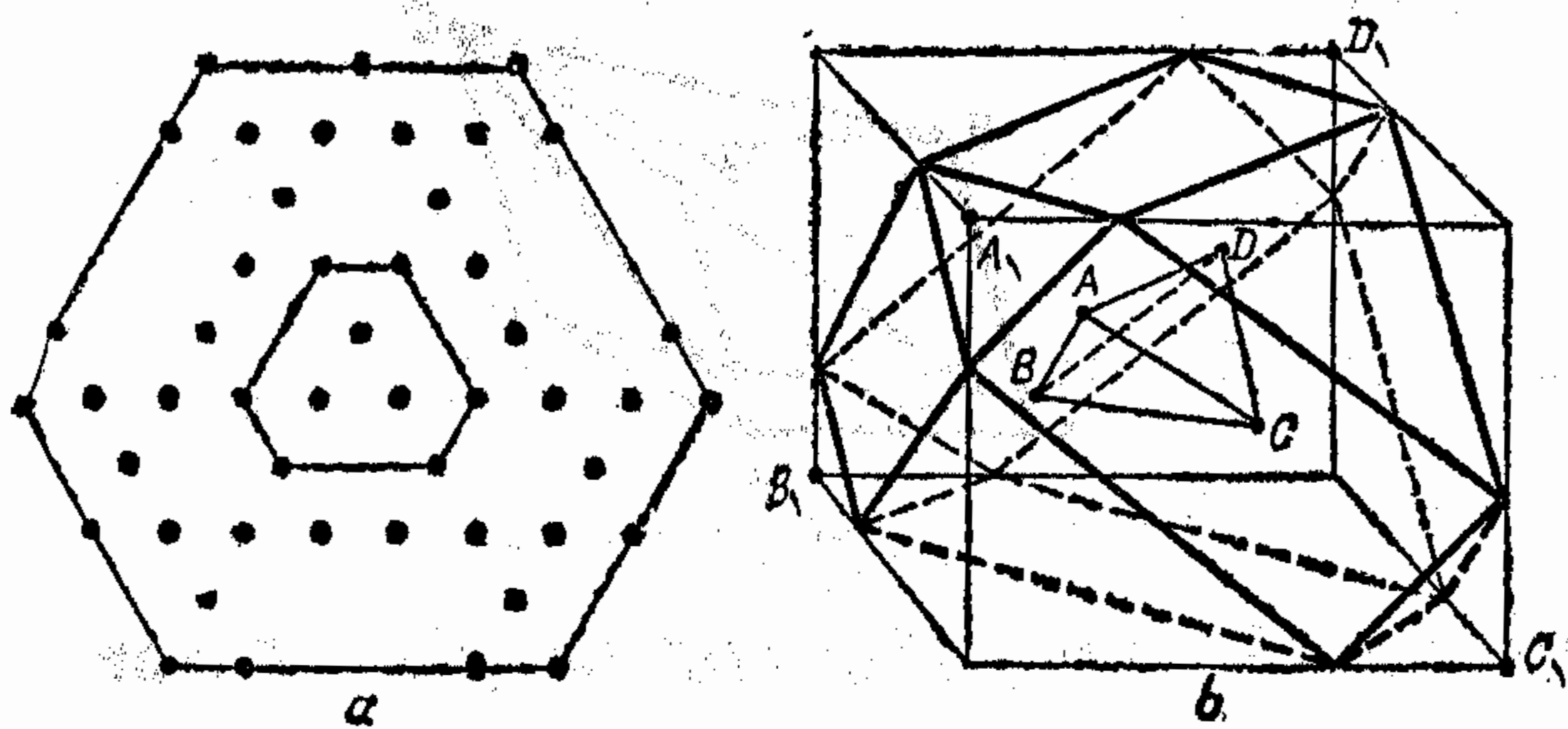
هم باید بر d بخش پذیر باشد. ولی این ممکن نیست، زیرا $989^m - 5000^m$ از d کوچکتر، و d عددی فرد است.

۲۵۵. پاسخ. $n = 7$.

مجموعه K_n ، از نقطه‌های واقع بر خط راست AB تشکیل شده است که از نقطه‌های A و B به فاصله‌هایی که با عددهای درست بیان می‌شوند، قرار دارند؛ در ضمن، دو نقطه انتهایی این مجموعه، از وسط پاره خط راست AB به فاصله $\frac{3^n}{2}$ قرار دارند ($n = 1, 2, \dots$). بنابراین، دو نقطه انتهایی

به فاصله $\frac{3^n - 1}{2}$ و $\frac{3^n + 1}{2}$ از A واقع‌اند. چون

$$\frac{3^6 + 1}{2} = 365 < 10000 \text{ و } \frac{3^7 + 1}{2} = 1094 > 10000$$



شکل ۱۰۴

بنا بر این، مجموعه مطلوب K_n است.
 (b) چند ضلعی‌هایی که پوش‌های محدب (ضمیمه ۱۷) مجموعه‌های K_1, K_2, \dots باشند، شش ضلعی‌ها هستند (شکل ۱۰۴، a). رأس‌های پوش محدب K_n ، به این ترتیب به دست می‌آید: باید هر دو رأس مثلث ABC را در نظر گرفت و، در مورد آن‌ها، n بار عمل «تقارن» را، شبیه مساله a، انجام داد. برای این که ثابت کنیم، همه نقطه‌های K_n در مرزهای پوش محدب H_n ، که از شش «نقطه مرزی» ساختمان به دست آمده است، قرار دارند، بهتر است H_n را به عنوان اشتراک سه نواری در نظر بگیریم که، مرزهای هر یک از آن‌ها را، دو ضلع رو به روی شش ضلعی H_n تشکیل می‌دهند ($n = 1, 2, \dots$). مثلث اولیه ABC را هم، می‌توان همچون اشتراک سه نوار در نظر گرفت: مرزهای یکی از این نوارها عبارتند از خط راست AB و خط راستی که از C موازی با آن رسم شده باشد؛ و به همین ترتیب، دو نوار دیگر. اگر قرینه‌های هر نوار را نسبت به نقطه‌های آن پیدا کنیم، نوار جدیدی به دست می‌آید که دارای همان محور تقارن است، ولی پهنای آن سه برابر شده است. با استفاده از این نکته، می‌توان ثابت کرد که K_n ($n = 1, 2, \dots$) به هر یک از سه نوار تعلق دارد، که در برخورد H_n را می‌دهند. مساحت H_n را می‌توان، به عنوان ترکیب مساحت مثلث‌های متجانس

با ABC ، محاسبه کرد. این مساحت، برابر است با $\frac{1}{2}(3^{2n} + 1)$.

(c) مجموعه K_1 ، به جز نقطه‌های K_0 ، شامل ۱۲ نقطه دیگر است که از قرینه هر يك از رأس‌های چهاروجهی $ABCD$ نسبت به رأس‌های دیگر، به دست می‌آیند. مکعب L_0 را طوری می‌سازیم که، نقطه‌های A و B و C و D ، رأس‌های غیر مجاور آن باشند، سپس، مکعب L_1 را از تجانس L_0 نسبت به مرکز آن و با ضریب ۳، با رأس‌های متناظر A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 می‌سازیم. ۱۲ نقطه K_1 ، هر کدام روی یکی از یال‌های مکعب L_1 قرار می‌گیرد و آن را (با به حساب آوردن از رأس‌های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1) به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. از هر رأس L_1 سه یال می‌گذرد و روی هر يك از این یال‌ها، يك نقطه مرزی K_1 وجود دارد؛ صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، با رأس متناظر L_1 ، يك چهاروجهی تشکیل می‌دهد. اگر این چهاروجهی‌ها را از L_1 جدا کنیم، چند وجهی M_1 باقی می‌ماند که پوش محدب K_1 است و ۱۴ وجه دارد: ۶ مستطیل $a \times 2a$ (طول یال چهاروجهی $ABCD$ است) و ۸ مثلث متساوی‌الاضلاع، ۴ تا به ضلع a و ۴ تا به ضلع $2a$ (شکل ۱۰۴، b). (d) حجم چندوجهی از این طریق به دست می‌آید که، حجم چهاروجهی‌های

جدا شده را $(4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 4 = 18)$ ، از حجم مکعب کم کنیم. حجم مکعب

برابر است با ۸۱ و، بنابراین، حجم چندوجهی مورد نظر برابر ۶۳ می‌شود.

(c) پوش محدب M_n از مجموعه K_n ، چندوجهی محدبی است که،

رأس‌های آن، در ۱۲ نقطه «مرزی» قرار دارند و، هر يك از این رأس‌ها،

از دو رأس چهاروجهی $ABCD$ به دست آمده است. هر رأس M_n روی

یکی از یال‌های مکعب L_n قرار دارد، که از تجانس L_0 نسبت به مرکز خود

و با ضریب 3^n به دست آمده و یال مکعب را به نسبت $\frac{3^n - 1}{3^n + 1}$ تقسیم می‌کند.

برای اثبات، بهتر است ۷ نوار را در نظر بگیریم که در برخورد با

هم، M_n را می‌سازند: هر يك از این نوارها، از راه 3^n برابر کردن نواری

به دست می‌آید که مرزهای آن، شامل هر چهار رأس چهاروجهی $ABCD$

است. حجم M_n برابر است با

$$\frac{1}{2}(5 \times 3^{2n} - 3^{n+1})$$

۲۵۶. a) فرض کنید $m \geq 2n$. ثابت می‌کنیم، در موقعیت (m, n) ، اولی می‌تواند طوری حرکت کند که، موقعیت حاصل، دومی را دچار شکست کند. اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب شکست دومی شود، آن وقت، حرکت مورد نظر چنین است.

$$(m, n) \rightarrow (m-n, m)$$

ولی اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب برد دومی شود، به معنای آن است که، برای $(m-n, n)$ حرکتی وجود دارد که به باخت طرف مقابل می‌انجامد. چون $m-n \geq n$ ، این حرکت باید به صورت

$$(m-n, n) \rightarrow (m-kn, n)$$

باشد (k ، عددی طبیعی است). ولی در این صورت، اولی می‌تواند حرکت نخستین خود را، بدین صورت انجام دهد:

$$(m, n) \rightarrow (m-kn, n)$$

تا برد او تأمین شود.

راه حل این مسأله، از این جهت جالب است که توانستیم برد اول را در موقعیت (m, n) ، برای $m \geq 2n$ ، ثابت کنیم، بدون این که برنامه حرکت‌های او را، مشخص کرده باشیم.

$$(b) \text{ پاسخ: } \alpha \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

هر موقعیت (m, n) را ($m \geq n$)، در تناظر با نقطه $x = \frac{m}{n} \geq 1$ ، از

محور عددی، قرار می‌دهیم. بعد از هر حرکت، به اندازه عدد درست k ، به سمت چپ جابجا می‌شود؛ اگر این نقطه در بازه $0 < x < 1$ قرار گیرد،

در جهت عکس تغییر جا می‌دهد: $x \rightarrow \frac{1}{x}$ ؛ وقتی در نقطه 0 قرار گیرد، طرف

دیگر باخته است. بازه $[\frac{1}{\beta}, \beta]$ بد طول واحد را روی محور در نظر می‌گیریم؛

از $\beta - \frac{1}{\beta} = 1$ به دست می آید: $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. نقطه $x = \frac{m}{n}$ که در

این بازه واقع باشد، متناظر با موقعیت باخت و سمت راست آن متناظر با برد است؛ در واقع، از این نقطه، با حرکت نسوبتی، می توان در این بازه فرار گرفت؛ اگر $1 < x < \beta$ ، آن وقت حرکت نسوبتی، از بازه بیرون می رود؛ اگر $x = 1$ ، آن وقت به باخت منجر می شود. چون حداکثر تعداد چوب-کبریت ها، کاهش می یابد، بعد از چند حرکت، بازی به پایان می رسد.

۲۵۷. شرط مساله، با دنباله $\{n\sqrt{2}\}$ سازگار است که، در آن،

$$\{x\} = x - [x]$$

عبارت است از بخش کسری عدد x ($n = 1, 2, \dots$). در واقع، اگر p و q دو عدد طبیعی باشند و $p < (4 - \sqrt{2})q$ ، آن وقت

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q(q\sqrt{2} + p)} > \frac{1}{4q^2}$$

بنابراین، برای $1 \leq k < m$ داریم:

$$|\{m\sqrt{2}\} - \{k\sqrt{2}\}| = |(m-k)\sqrt{2} - l| > \frac{1}{4(m-k)}$$

که در آن

$$l = [m\sqrt{2}] - [k\sqrt{2}] < m\sqrt{2} - k\sqrt{2} + 1 \leq (m-k)(\sqrt{2} + 1) < (4 - \sqrt{2})(m-k)$$

∇ در این جا، از این حقیقت استفاده کردیم که، عدد گنگ $\sqrt{2}$ به کسرهای با مخارج های نه چندان بزرگ، بد نزدیک می شود.

۲۵۸. چون $f(1) = f(0) = 1$ ، بنابراین جمله آزاد $P_n(0)$ در

چند جمله ای

$$P_n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_n$$

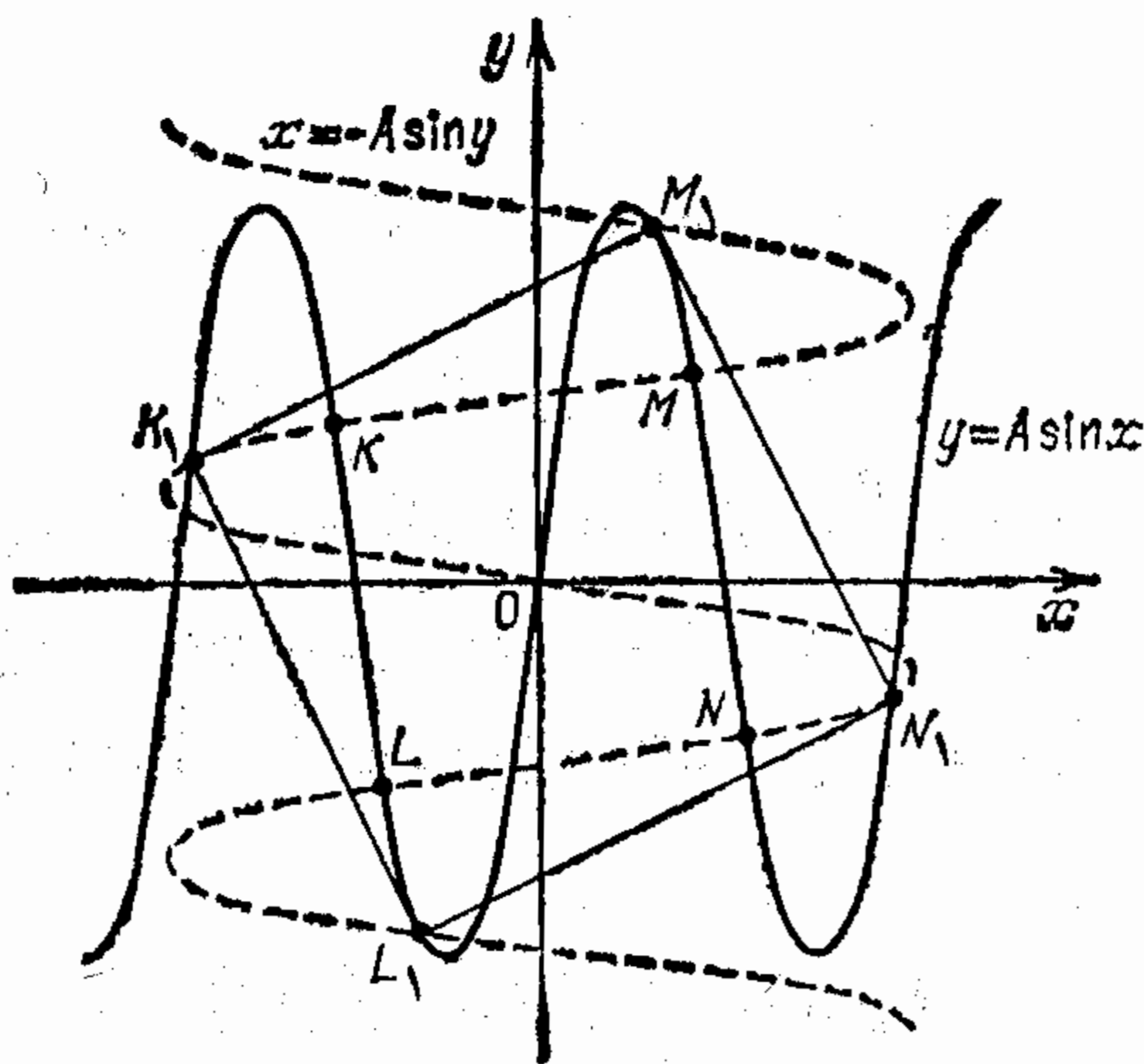
برابر واحد است. در نتیجه، به ازای هر مقدار m ، باقی مانده تقسیم $P_n(m)$ بر m برابر است با واحد.

اگر در این جا، m را به $m' = P_k(m)$ تبدیل کنیم، معلوم می شود که $P_{n+k}(m)$ و $m' = P_k(m)$ نسبت به هم اول اند.

▽ از این حقیقت که، دنباله $(P_n(2))$ وجود دارد، به نحوی که همه جمله های آن، نسبت به هم اول اند، بلافاصله، نامتناهی بودن مجموعه عددهای اول نتیجه می شود.

۲۵۹. M را، نقطه دلخواهی از برخورد نمودار $y = A \sin x$ ، با مبدل آن $x = -A \sin y$ ، ضمن دوران به اندازه 90° درجه دور مبداء مختصات، می گیریم (شکل ۱۰۵). در این صورت، نقطه M و مبدل های آن K و L و N ، در دوران به اندازه 90° ، 180° و 270° درجه دور O ، به نمودار $y = A \sin x$ تعلق دارند، به نحوی که، مربع $MKLN$ در نمودار مفروض، محاط است. اگر A به اندازه کافی بزرگ باشد، نقطه M ، برخورد نمودارها را، می توان به بیش از 1978 طریق به دست آورد که، در ضمن، به فاصله های مختلف از نقطه O واقع باشند؛ مثلاً به ازای

$$A > 1978 \times 2\pi$$



شکل ۱۰۵

می توان یکی از نقطه های برخورد k امین موج مسیر اصلی و k امین موج مسیر دوران یافته را انتخاب کرد (موج را از O در نظر می گیریم). در این جا، از این قضیه استفاده می شود که، هر تابع پیوسته ای که تغییر علامت بدهد، دارای ریشه است (ضمیمه ۵): از آن، به سادگی، این حقیقت ملموس نتیجه می شود که، در بخش های مورد نظر، نمودارها متقاطع اند.

(a. ۲۶۰) پاسخ: می توان.

ابتدا کارت $(۱, ۸)$ را پیدا می کنیم:

$$(۵, ۱۹) \rightarrow (۶, ۲۰) \rightarrow (۳, ۱۰) \rightarrow \dots \rightarrow (۱۰, ۱۷) \rightarrow (۳, ۱۷) \rightarrow$$

$$\rightarrow (۴, ۱۸) \rightarrow (۲, ۹) \rightarrow \dots \rightarrow (۹, ۱۶) \rightarrow (۲, ۱۶) \rightarrow (۱, ۸)$$

که از آن، به سادگی، کارت های $(۱, ۱۵)$ ، $(۱, ۲۲)$ ، \dots ، $(۱, ۱+۷k)$ (برای هر مقدر طبیعی k) به دست می آید.

(b) پاسخ: نمی توان.

با هر چند عمل، همیشه تفاوت دو عدد روی کارت، بر ۷ بخش پذیر است.

(c) پاسخ: d را بزرگترین مقسوم علیه فرد تفاضل $b - a$ می گیریم؛

در این صورت، از کارت (a, b) ، تنها وقتی می توان به کارت $(۱, n)$ رسید که داشته باشیم:

$$n = 1 + dk \quad (k, \text{ عددی طبیعی است})$$

لازم بودن این شرط، روشن است (شبهه مسأله (a) ثابت می شود). برای اثبات

کافی بودن شرط، کافی است ثابت کنیم، از کارت (a, b) می توان به کارت

$(۱, ۱+dk)$ رسید. اگر دو عدد a و b ، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند،

ردیف عمل ها چنین است:

$$(a, b) \rightarrow \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ یا } \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

یعنی به زوجی می رسیم که تفاضل آن، نصف تفاضل a و b است؛ این عمل

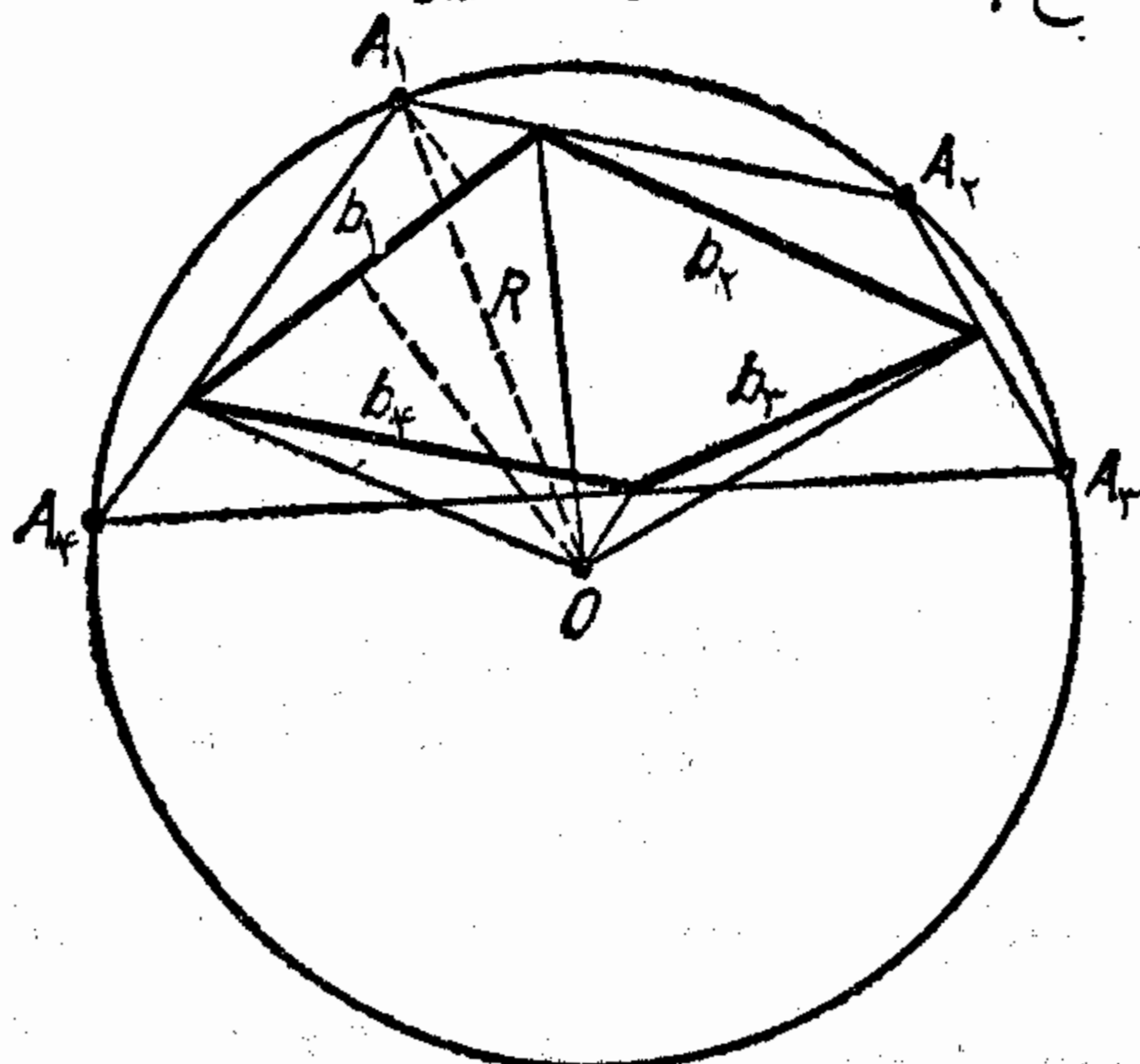
را ادامه می دهیم تا به زوج $(a, a+d)$ برسیم و، سپس، این عمل ها را

$$(a, a+d) \rightarrow (a+d, a+2d) \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+d\right) \\ \rightarrow (a, a+2d) \rightarrow \begin{cases} \text{یا} \left(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}+d\right) \end{cases} \end{cases}$$

که زوجی با همان فواصل، ولی به وسیله عددهایی کوچکتر، می‌دهد (اگر $a > 1$). با ادامه این روش، شبیه مسأله (n) ، سرانجام، به زوج $(1, 1+d)$ می‌رسیم.

۲۶۱. A_i را رأس n ضلعی محاطی $(i = 1, 2, \dots, n)$ ، b_i را پایه خط راستی که دو نقطه علامت گذاری شده را، در روی دوضلعی که از A_i خارج شده‌اند، به هم وصل می‌کند و O را مرکز دایره می‌گیریم (شکل ۱۰۶)؛ همچنین، s_i و s'_i را مساحت‌های مثلث‌های با قاعده b_i و رأس‌های A_i و O فرض می‌کنیم، در ضمن، اگر A_i و O در یک طرف خط راستی باشند که از b_i می‌گذرد، علامت s'_i را منفی در نظر می‌گیریم. در این صورت $s_i + s'_i \leq \frac{b_i R}{2}$

برای هر i ، و مجموع $s'_1 + s'_2 + \dots + s'_n$ ، برابر است با مساحت چند ضلعی با رأس‌های در نقطه‌های علامت گذاری شده (علامت $+$ یا $-$ عددهای s'_i ، نشان می‌دهد که ضلع b_i ، از درون یا از بیرون، از نقطه O دیده می‌شود).



شکل ۱۰۶

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n + s'_1 + s'_2 + \dots + s'_n \leq \\ \leq \frac{1}{2} R(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

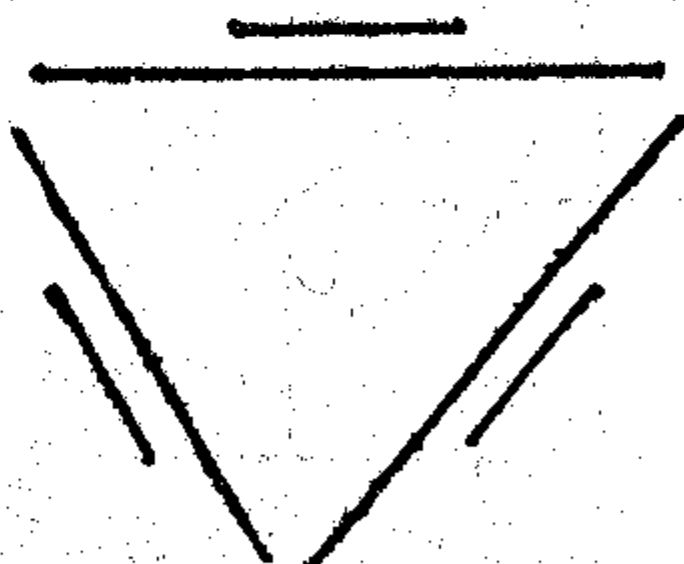
۲۶۲. a) اگر زوج باشد، همه صفحه شرط نجی را می توان به مستطیل های 1×2 («دومینو») تقسیم کرد. کسی که بازی را آغاز می کند، همیشه امکان حرکت دارد (و بنا بر این می برد)، به شرطی که از برنامه زیر پیروی کند: اگر مهره در یکی از خانه های دومینو (مستطیل 1×2) باشد، آن را به همان خانه دومینو می برد («دومینو را «می پوشاند»).

اگر فرد باشد، آن وقت می توان همه صفحه شرط نجی را، به جز خانه گوشه اول، به دومینو تقسیم کرد. اکنون، اگر دومی از همان برنامه پیروی کند، برنده می شود.

b) پاسخ: همیشه آغاز کننده بازی برنده می شود. در حالت زوج-بودن، برنامه بازی شبیه مساله a) است. وقتی که فرد باشد، همه خانه ها را، به جز خانه گوشه ای، به مستطیل های 1×2 تقسیم می کنیم. اگر صفحه را به ردیف صفحه شرط نج رنگ آمیزی کنیم، به سادگی قانع می شویم که، بازی کن دوم نمی تواند به این خانه گوشه ای برود و، بنا بر این، اولی برنده می شود (به شرطی که از همان برنامه «پوشاندن» دومینو پیروی کند).

۲۶۳. پاسخ: نه همیشه.

روی شکل ۱۵۷، نمونه ای از ۶ پاره خط راست داده شده است (۳ پاره خط کوتاه و سه پاره خط بلند) که نمی توان آن ها را به صورت خط شکسته ای (ولو غیر بسته) در آورد که خودش را قطع نکند. در واقع، یکی



شکل ۱۵۷

از پاره‌خط‌های راست، پاره‌خط مرزی در خط شکسته نیست، ولی دو انتهای آن را، تنها می‌توان به دو انتهای پاره‌خط راست بلند نزدیک به آن وصل کرد. ۲۶۴. راه حل اول. با استفاده از نابرابری $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ برای

هر عدد دلخواه $c > 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
 P &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \\
 &= \left(\frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \dots + \frac{x_n}{c} \right) \left(\frac{c}{x_1} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{c}{x_n} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

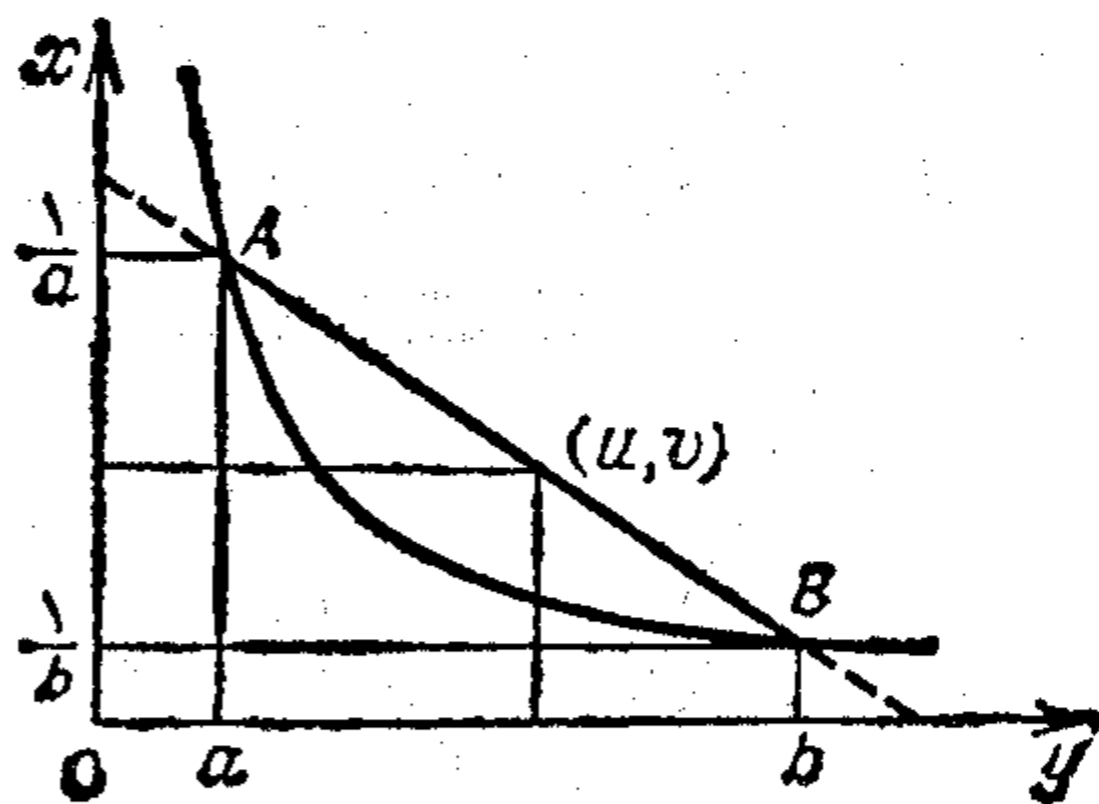
یادآوری می‌کنیم، تابع $f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{c}$ در بازه $[a, b]$ وقتی به حداکثر خود

می‌رسد که، t برابر این یا آن انتهای بازه باشد. c را طوری انتخاب می‌کنیم که این دو مقدار با هم برابر باشند: $f(a) = f(b)$. برای این منظور باید فرض کرد: $c = \sqrt{ab}$. در این صورت، برای $a \leq t \leq b$ خواهیم داشت:

$$f(t) \leq \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$P \leq \frac{1}{4} n^2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = n^2 \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

راه حل دوم. روی کمان هذلولوی $y = \frac{1}{x}$ در بازه $a \leq x \leq b$ ، در نقطه‌های



شکل ۱۰۸

به طول‌های x_1, x_2, \dots, x_n وزنه‌هایی با وزن‌های برابر قرار می‌دهیم. مرکز جرم این وزنه‌ها، نقطه‌ای است، به ترتیب، با طول و عرض p و q :

$$p = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad q = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$$

این مرکز جرم، در مرزهای قطعه‌ای قرار دارد که به وسیله کمان هذلولی و پاره‌خط راستی که دو انتهای آن را به هم وصل می‌کند، محدود شده است. روشن است، برای این که مقدار pq به حداکثر مقدار خود برسد، باید نقطه (p, q) را، در این قطعه روی پاره‌خط راست مرز بالایی قطعه، جست‌وجو کرد (شکل ۱۰۸). برای نقطه‌های (p, q) از خط راستی که شامل این پاره‌خط راست است، می‌توان q را به عنوان یک تابع خطی نسبت به p نوشت؛ در این صورت، pq سه جمله‌ای درجه دوم از p خواهد بود (که به ازای $p = 0$ ، به سمت صفر میل می‌کند). برای این که این سه جمله‌ای را به صورت صریح خود ننویسیم - اگر چه، کار دشواری نیست - یادآوری می‌کنیم که،

به ازای $p = a$ و $p = b$ ، مقدارهای برابر $1 = b \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{a}$ را قبول

می‌کند. بنابراین، به حداکثر مقدار خود، در وسط این دو نقطه می‌رسد که

برابر است با $\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. از این جا، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.

▽ با توجه به راه حل دوم، می‌توان این نتیجه جنبی را به دست آورد: دو پاره‌خط راستی که، بین نقطه‌های برخورد هر خط راست دلخواه با هذلولی

$y = \frac{1}{x}$ و محورهای مختصات (که در ضمن مجانب‌های منفی هستند) قرار

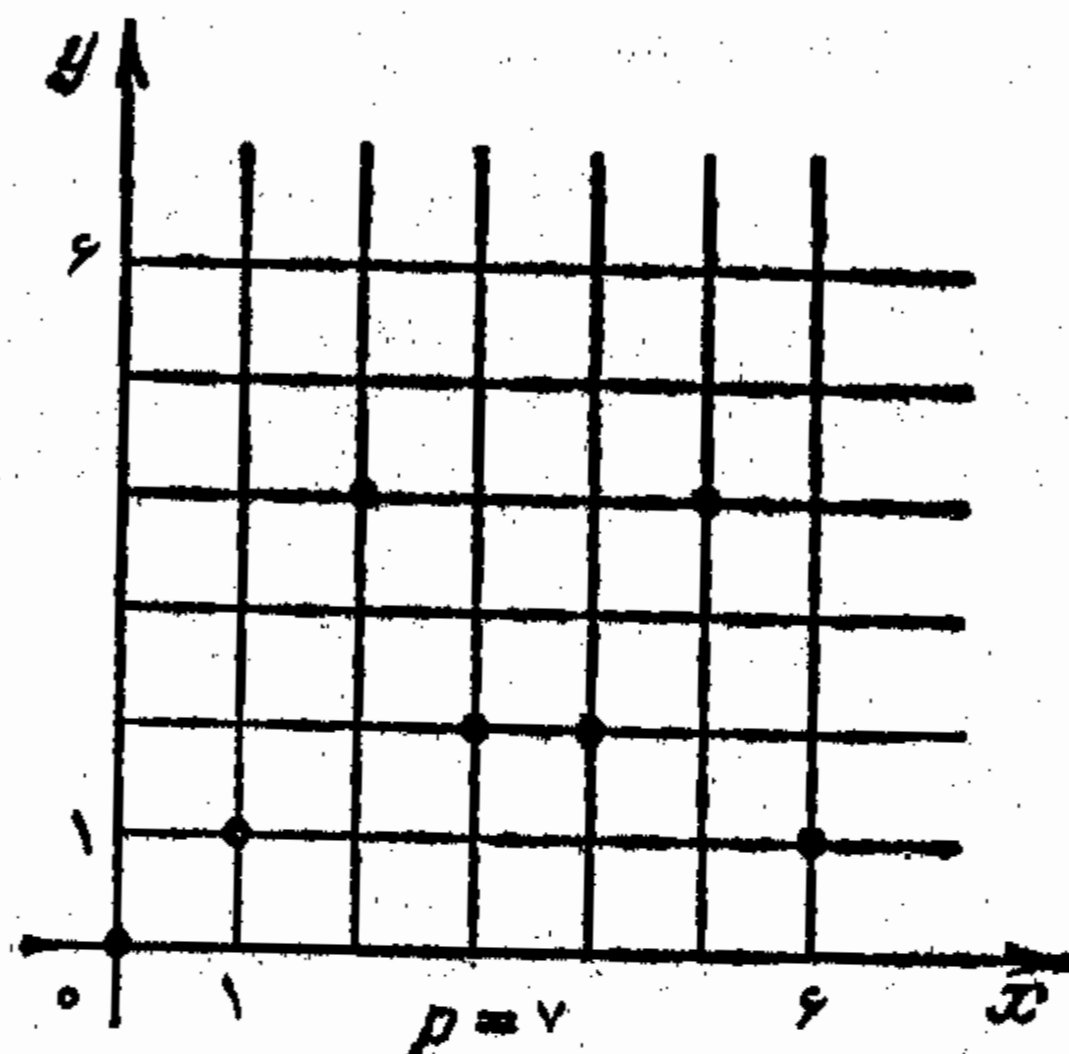
دارند، با هم برابرند (این دو پاره‌خط راست، روی شکل، با خط چین نشان داده شده‌اند).

اگر به مسأله اصلی برگردیم، باید یادآوری کنیم که، وقتی n زوج باشد، نابرابری، تخمین دقیق سمت چپ را به دست می‌دهد؛ ولی وقتی n فرد باشد، می‌توان تا حدی آن را دقیق‌تر کرد. (این مسأله، به ازای $n = 5$ ، همین چندی پیش، در یکی از المپیادهای داخلی آمریکا - سال ۱۹۷۷ - داده

شده است: مسأله ۱۴۶ از کتاب «مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف»، ترجمه فارسی، انتشارات فردوس، صفحه ۳۶ را ببینید.)
 ۲۶۵. به عنوان مجموعه مطلوب می‌توان مجموعه‌ای را در نظر گرفت که از نقطه‌های

$$A_k = (k, r(k)), k = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

تشکیل شده باشد؛ منظور از $r(k)$ باقی‌مانده تقسیم k^2 بر p است. برای $p=7$ ، این مجموعه روی شکل ۱۰۹ داده شده است.



شکل ۱۰۹

اگر سه نقطه A_l, A_m, A_n بر یک خط راست باشند ($l < m < n < p$)، باید داشته باشیم:

$$\frac{r(m) - r(l)}{m - l} = \frac{r(n) - r(m)}{n - m}$$

یعنی، برای عددهای درستی مثل a و b ، این برابری برقرار باشد:

$$(n - m)(m^2 - l^2 + ap) = (m - l)(n^2 - m^2 + bp)$$

اگر جمله‌هایی را که شامل p نیستند به سمت چپ ببریم، می‌بینیم که

$$(n - m)(m - l)(n - l)$$

بر p بخش پذیر است. ولی از آن جا که p ، عددی اول است، این امر ممکن نیست.

اگر هم، چهار نقطه A_l, A_k, A_m, A_n رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع

باشند، $\vec{A}_k \vec{A}_l = \vec{A}_n \vec{A}_m$ ، آن وقت، باید داشته باشیم:

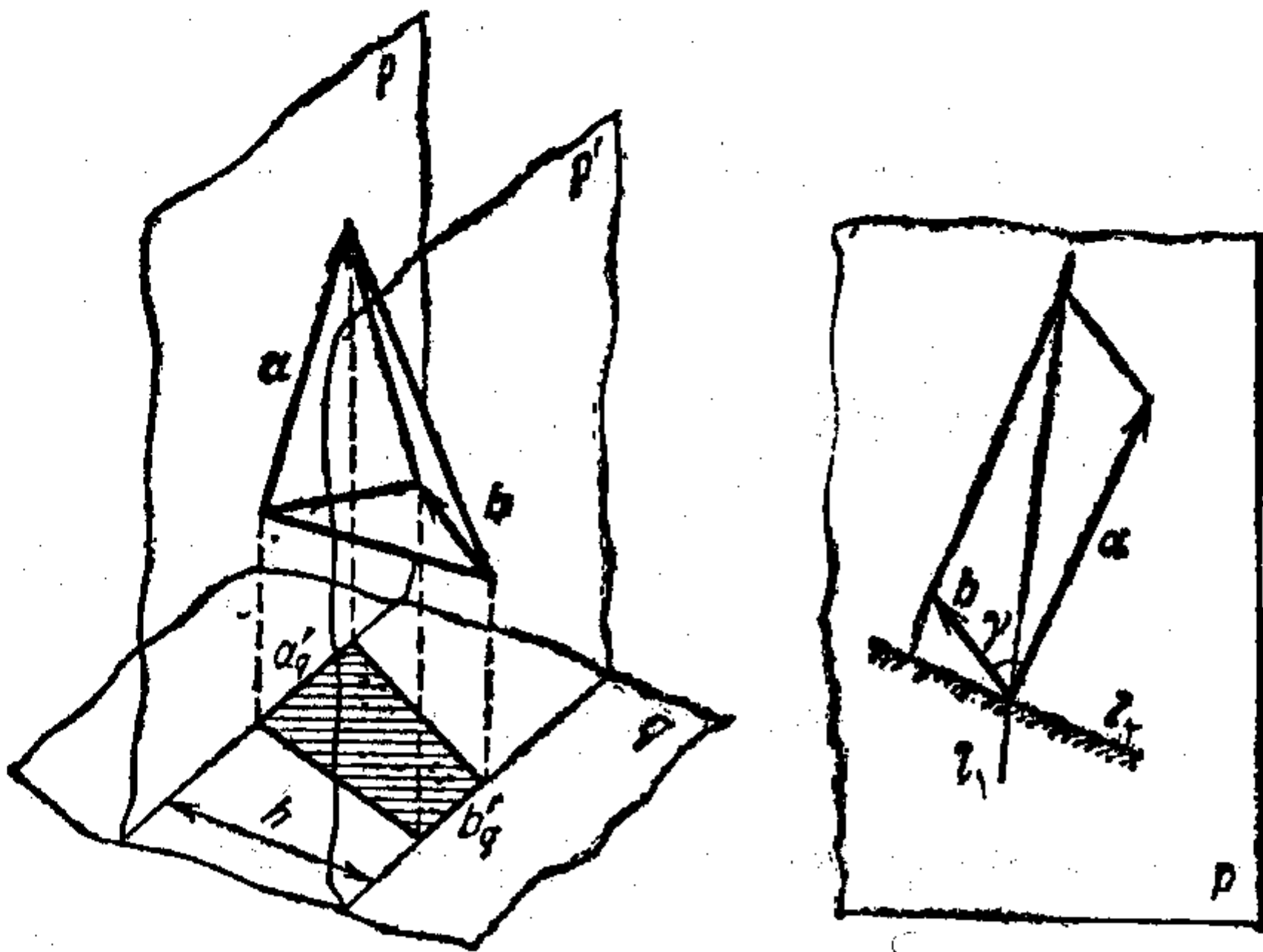
$$l - k = m - n \text{ و } r(l) - r(k) = r(m) - r(n)$$

یعنی عدد $(l^2 - k^2) - (m^2 - n^2)$ بر p بخش پذیر است. در این صورت عدد

$$l + k - (m + n) = 2l - 2m$$

و همچنین، چون $p > 3$ ، عدد $l - m$ هم باید بر p بخش پذیر باشد، که ممکن نیست.
 ۲۶۶. از دو یال متقابل a و b در چهاروجهی، صفحه‌های موازی p و p' را رسم می‌کنیم. فاصله بین این دو صفحه را، h می‌گیریم. تصویرهای چهاروجهی را، بر صفحه‌های q ، که بر صفحه p عمودند، در نظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، صفحه‌هایی را پیدا می‌کنیم که، برای آن‌ها، نسبت مساحت تصویرها، کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد. تصویر چهاروجهی بر صفحه q ، دوزنقه‌ای است با قاعده‌های $a'q$ و $b'q$ (تصویرهای a و b بر q) و ارتفاع h (در حالت خاصی که تصویرهای یکی از دو یال a یا b ، به صورت یک نقطه در آید، به جای دوزنقه، با یک مثلث سروکار خواهیم داشت)؛ مساحت این تصویر برابر است با

$$\frac{1}{2} h(a'q + b'q)$$



شکل ۱۱۵

برای این که ببینیم، این مقدار با شیب یال‌های a و b نسبت به صفحه q ، چه رابطه‌ای دارد، بردارهای a و b را (که معرف یال‌های چهاروجهی اند) در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱۰). روشن است که می‌توان فرض کرد: $a \geq b$ ؛ در ضمن، زاویه γ بین بردارهای a و b ، از 90° درجه تجاوز نمی‌کند. این بردارها را از یک نقطه O در نظر می‌گیریم، در این صورت به‌جای طول تصویرهای یال‌های چهاروجهی بر صفحه q ، می‌توانیم در باره طول تصویرهای بردارهای a و b بر خط راست صحبت کنیم (خط راستی که بر صفحه موازی p و p' قرار دارد). مجموع تصویرها، بر خط راست l_1 موازی بردار $a+b$ برابر است با $|a+b|$ ، و بر خط راست l_2 عمود بر a برابر $b \sin \gamma$ ، و نسبت این دو مقدار، از $\sqrt{2}$ تجاوز نمی‌کند:

$$|a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2 \geq 2b^2 \geq 2b^2 \sin^2 \gamma$$

▽ یادآوری کنیم که، برای چهاروجهی منتظم، ارزیابی $\sqrt{2}$ ، بهترین ارزیابی است: مساحت هر تصویری از این چهاروجهی، بین $\frac{a^2}{2}$ و $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$ قرار دارد (a ، طول یال چهاروجهی منتظم است).
۲۶۷. فرض می‌کنیم:

$$f(x) = (x-a_1)^2 + \dots + (x-a_n)^2$$

در این سه جمله‌ای درجه دوم، مقدار مجذور کامل را جدا می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x) = n(x-b_n)^2 + f(b_n) \quad (*)$$

برای تحقیق درستی این برابری، باید توجه داشت که

$$nb_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

به‌ازای $n=1$ ، درستی نابرابری مطلوب، روشن است ($C=D$). برای این که، این نابرابری‌ها را با استقرای ریاضی ثابت کنیم، کافی است، نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

$$0 \leq f(b_{n+1}) - f(b_n) \leq (a_{n+1} - b_{n+1})^2$$

زیرا، اگر به a_1, a_2, \dots, a_n ، عدد a_{n+1} را اضافه کنیم، مقدار C بدان اندازه $(a_{n+1} - b_{n+1})^2$ و مقدار D بدان اندازه

$$(a_{n+1} - b_{n+1})^2 + f(b_{n+1}) - f(b_n)$$

ترقی می کنند. نابرابری سمت چپ، از برابری (*) و به ازای $x = b_{n+1}$ ، بلافاصله نتیجه می شود؛ نابرابری سمت راست هم، نتیجه ای است از برابری های

$$(n+1)b_{n+1} = nb_n + a_{n+1}, \quad n(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - b_{n+1},$$

$$f(b_{n+1}) - f(b_n) = n(b_{n+1} - b_n)^2 = \frac{1}{n}(a_{n+1} - b_{n+1})^2$$

∇ اتحاد (*)، که مجموع مجذورهای فاصله های از n نقطه را، بر حسب مجذور فاصله تا «نقطه مرکزی» آنها (یا «مقدار متوسط» آنها) می دهد، در نظریه احتمال، آمار و در هندسه (مسطحه یا فضایی) کاربردهای زیادی دارد.

۲۶۸. همراه با عدد $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ، «مزدوج های» آن را که

در علامت رادیکال ها با آن فرق دارند، در نظر می گیریم:

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

اگر $\lambda_1^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$ ، آن وقت به سادگی می توان تحقیق کرد که، برای $n = 1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$\lambda_2^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_3^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_4^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$$

اگر این چهار برابری را با هم جمع و، سپس، مجموع را بر $4\lambda_1^n$ تقسیم

کنیم و به سمت حد برویم، به دست می آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{\lambda_1^n} = \frac{1}{4}$$

زیرا، برای $۲, ۳, ۴ =$ زداریم: $|\lambda_1| < \lambda_1$ و بنا بر این: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_1|^n}{\lambda_1^n} = 0$ حد.

اگر برابری اول را با یکی از سه برابری دیگر جمع و، سپس، دو برابری دیگر را از آن کم کنیم، به دست می آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n \sqrt{2}}{\lambda_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n \sqrt{3}}{\lambda_1^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n \sqrt{6}}{\lambda_1^n} = \frac{-1}{4}$$

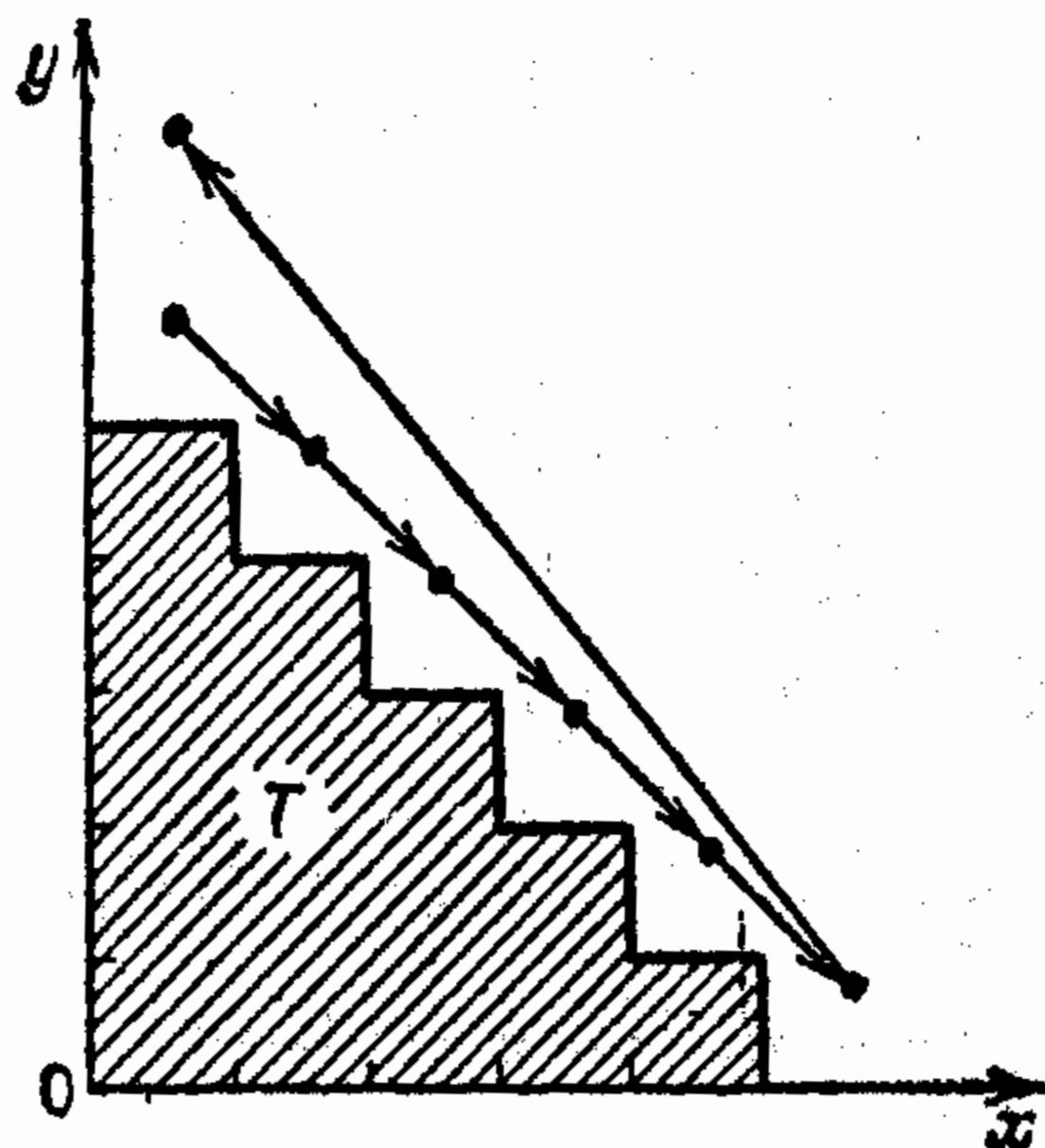
(به این ترتیب، در مجموع $q_n + r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6}$ وقتی n خیلی بزرگ باشد، همه جمله‌ها، به تقریب، با هم برابر می‌شوند)، از این جا به دست می آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

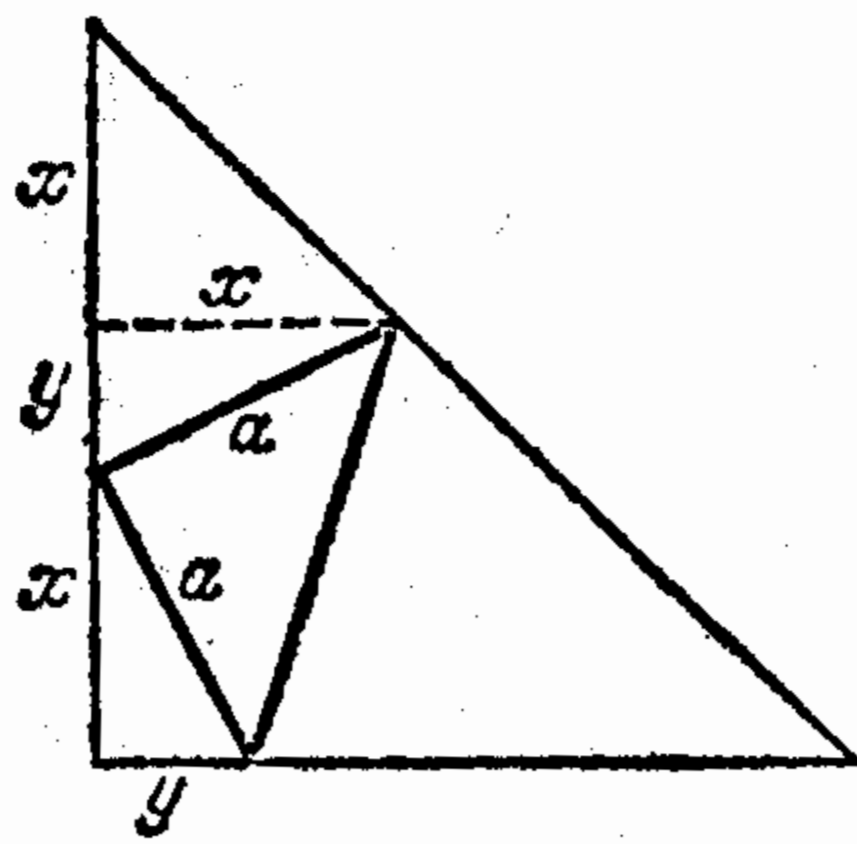
∇ یادآوری می‌کنیم، اگر عبارت $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ را در نظر می‌گیریم، به شرطی که a, b, c, d ، عددهایی طبیعی باشند، باز هم به همان جواب‌ها می‌رسیدیم.

۲۶۹. پاسخ: $\frac{1}{5}$.

باید دو حالت را در نظر گرفت: رأس زاویه قائمه مثلث کوچکتر، یا



شکل ۱۱۲



شکل ۱۱۱

روی وتر مثلث بزرگتر قرار دارد و یا روی يك ضلع مجاور به زاویه قائمه آن. در حالت اول، نسبت ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه دو مثلث از $\frac{1}{2}$ و،

بنا بر این، نسبت مساحت‌های آنها از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست. در حالت دوم، مثلث

کوچکتر را ثابت می‌گیریم و از این نکته استفاده می‌کنیم که، رأس‌های مثلث بزرگتر، روی کمائی از دایره حرکت می‌کنند. در این صورت، جواب مساله، با روش خالص هندسی به دست می‌آید.

مساله راه حل دیگری هم دارد: تصویر ضلع مجاور به زاویه قائمه مثلث کوچکتر را روی ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه مثلث بزرگتر، برابر x و y می‌گیریم (شکل ۱۱۱). در این صورت $x^2 + y^2 = a^2$ و ضلع مجاور به زاویه قائمه مثلث بزرگتر، برابر می‌شود با

$$2x + y \leq a\sqrt{5}$$

۲۷۵. پاسخ: مجموعه نقطه‌هایی که کانگورو نمی‌تواند «به سمت بی‌نهایت» بجهد، مساحتی برابر ۱۵ دارد؛ این، شکل پله مانند T است که در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است.

از هر نقطه بیرون T می‌توان، با گام‌های $(1, -1)$ به حوزه $x \geq 5$ رسید و، سپس، گام‌های

$$(-5, 7) + 5(1, -1) = (0, 2)$$

را برداشت.

▽ اگر در این مساله، تعداد روش‌های مجاز جهیدن کانگورو را ۳ یا بیشتر بگیریم، شکل‌های جالب‌تری به دست می‌آید.

۲۷۱. ابتدا عضوهای مجلس را، به صورتی دلخواه، به دو گروه تقسیم می‌کنیم. اگر در یکی از گروه‌ها، عضو A ، دست کم دو دشمن داشته باشد، آن وقت این عضو A ، در گروه دیگر بیش از يك دشمن نخواهد داشت. A را به گروه دیگر می‌فرستیم؛ به این ترتیب، مجموع S ، زوج دشمن‌ها در

هر دو گروه، کاهش می یابد. چون S ، عددی درست و غیرمنفی است، این کاهش زوج دشمن ها را، می توان با تعداد محدودی عمل (شبه آن چه برای A انجام دادیم) از بین برد که، در نتیجه، تقسیم مورد نظر به دست می آید. 272 . به سادگی می توان همه کسرهای گویای با مخرج های $2, 4, 8, 16, \dots$ را به دست آورد.

برای این که، از زوج $(1, 0)$ ، به کسر $\frac{1}{n}$ برسیم، کافی است n کسر مختلف از این گونه، با مجموعی برابر واحد را انتخاب و، سپس، واسطه حسابی آنها را محاسبه کنیم، مثلاً برای $n=5$

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^4}}{5}$$

(چنین انتخابی را، برای هر n ، می توان داشت)

اکنون یادآوری می کنیم که، اگر بتوانیم با برنامه ای، از دو عدد $(1, 0)$ عدد i را به دست آوریم، با همان برنامه می توانیم از دو عدد $(1, 0)$ ، عدد $1-i$ را به دست آوریم، همچنین از دو عدد $(0, 1)$ با همان برنامه، می-

توان $(1, 1)$ را پیدا کرد. بنابراین، اگر کسر $\frac{1}{n}$ و همه کسرهای $\frac{k}{n-1}$

$(k=1, 2, \dots, n-1)$ را به دست آورده باشیم، آن وقت می توانیم

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \text{ و همه } \frac{k}{n} = \frac{n-1}{n} \times \frac{k}{n-1} \text{ را به دست آوریم.}$$

273 . بازه هایی از رشته عددهای $\frac{x_m}{m}$ را در نظر می گیریم، به نحوی که

$$k^2 \leq m \leq (k+1)^2 - 1, (k=1, 2, 3, \dots)$$

k امین بازه، از $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ عدد تشکیل شده است: عددهای

$$\frac{x_{k^2}}{k^2} \text{ یا } \frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}$$

اگر هر عدد $\frac{x_m}{m}$ در k امین بازه را با جمله اول این بازه، که بزرگترین

آن‌ها و برابر $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ است، عوض کنیم، متوجه می‌شویم که مجموع عددهای

این بازه، بیشتر از

$$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2} \leq \frac{3kx_{k^2}}{k^2} = \frac{3x_{k^2}}{k}$$

نیست. اکنون، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3 \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{q^2}}{q} \right)$$

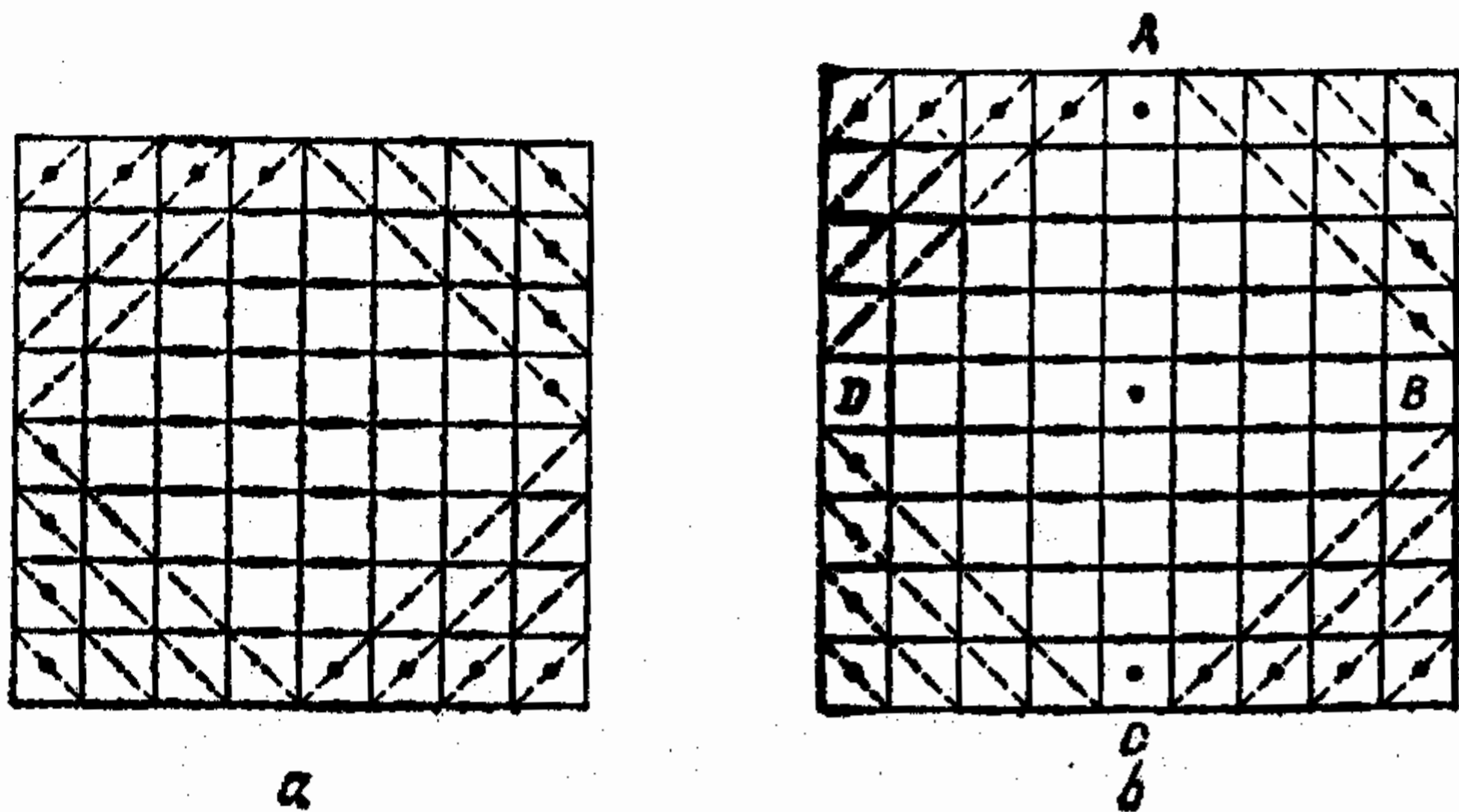
که در آن، q کوچکترین عددی است که برای آن داشته باشیم: $q^2 > n$.

۲۷۴. نقطه O را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و هر بردار \vec{AB} را به

صورت $\vec{OB} - \vec{OA}$ می‌نویسیم. در مجموع بردارها، هر بردار \vec{OM} (M)، یکی از نقطه‌های مفروض، به همان تعداد که با علامت «مثبت» آمده باشد، با علامت «منفی» هم وجود دارد، به نحوی که مجموع آن‌ها، برابر می‌شود.

۲۷۵. پاسخ: a برای $n=8$ ، 16 مهره؛ b وقتی n زوج باشد

$2n$ مهره وقتی n فرد باشد $2n+1$ مهره.



شکل ۱۱۳

وضع استقرار این تعداد مهره، در شکل ۱۱۳، a و b دیده می شود. اثبات این که با تعداد کمتری مهره، ممکن نیست، در حالت زوج بودن n ساده است: روی هر خط راست موازی با یک قطر، یک مهره و روی خود قطرها دو مهره (در گوشه ها)، باید قرار داد.

اثبات دیگر: باید روی هر خط راستی که در شکل ها به صورت «خط-چین» آمده اند، یک مهره قرار گیرد. این استدلال، به خصوص برای حالتی که n عددی فرد است، به درد می خورد (شکل ۱۱۳، b): به جز $2n-2$ خط راست «خط چین» (که روی هر کدام، یک مهره قرار دارد)، باید شش خط راست دیگر را هم، که مرکز خانه های A, B, C, D را به هم وصل می کنند در نظر گرفت؛ برای آنها، دست کم ۳ مهره دیگر هم لازم است.

$$۲۷۶. پاسخ: \quad x = \frac{a + b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad y = \frac{b + a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}$$

اگر معادله های مفروض را یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم و سپس، نتیجه ها را در هم ضرب کنیم، به دست می آید:

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

که اگر آن را در معادله های دستگاه اصلی قرار دهیم، به دستگاهی از معادله های خطی می رسیم و جواب به سادگی به دست می آید. اگر در جواب، a را به x و b را به y تبدیل کنیم، به همان کسرهای مربوط به دستگاه اصلی می رسیم؛ و این به ما امکان می دهد که به دنبال تحقیق درستی جواب نرویم: از دستوره های جواب، می توان دستوره های مشابهی با تبدیل x به a و y به b - به دست آورد.

▽ اگر معادله های دستگاه را به این صورت در نظر بگیریم:

$$\frac{x - yf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = a, \quad \frac{y - xf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = b$$

که در آن، f ، تابعی دلخواه است که قدر مطلق آن از واحد تجاوز نمی کند،

وات هیچ چیز تغییر نمی کند. اهمیت این مساله در آن است که «تبدیل

نقش»

$$(x, y) \rightarrow (x', y'), \quad x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = \frac{y - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

ای نقش اساسی در نظریه نسبیت انیشتین است؛ این تبدیل $x^2 - y^2$ را

$$x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2$$

۲۷۷. اگر مربع های مفروض را طوری کوچک کنیم که، ضلع هر کدام

آن ها، برابر کوچکترین عدد نزدیک به خود، به صورت $\frac{1}{p}$ باشد

۲۷۸. آن وقت این مربع ها را می توان، بدون این که روی هم قرار

گیرند، جاداد (شکل ۱۱۴). چون مساحت هر مربع جدید، بیشتر از $\frac{1}{4}$ مساحت

مربع اصلی است، بنابراین مجموع مساحت های آن ها از واحد بیشتر می شود،

به نحوی که تمامی مربع واحد را می پوشانند.

$$278. \quad s = x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ می گیریم.}$$

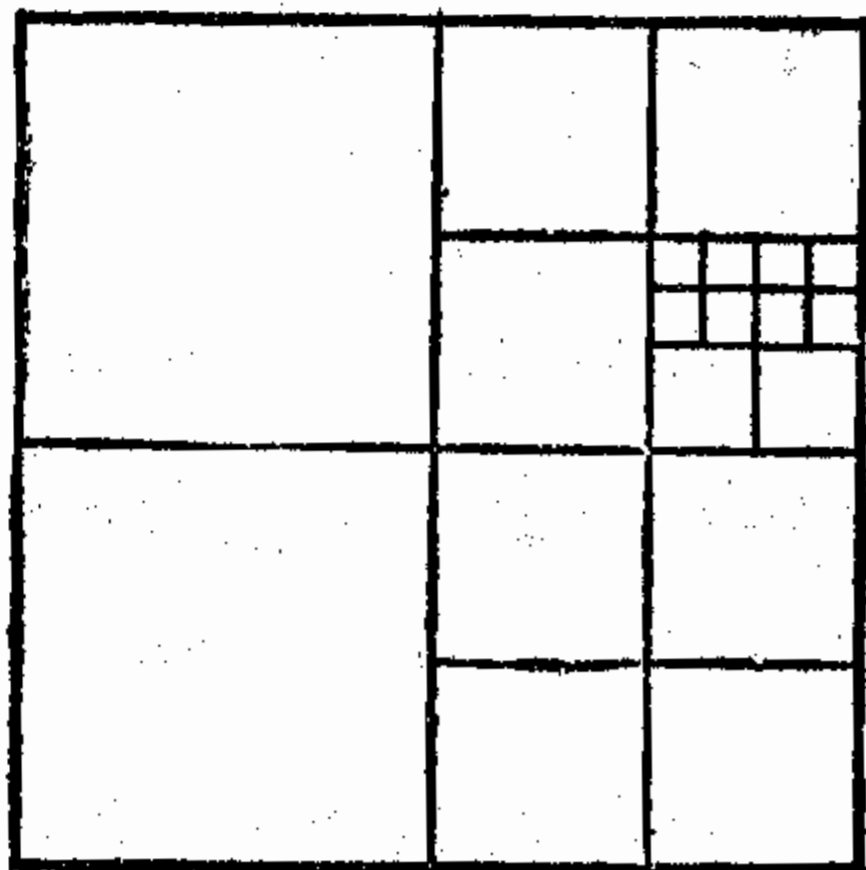
چون، برای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم: $x_i \geq x_i^2$ ، بنا بر این، نابرابری

مطلوب، نتیجه ای از نابرابری $s \geq (s+1)^2$ است که، به روشنی، با

نابرابری $(s-1)^2 \geq 0$ هم ارز است.

۲۷۹. چون p و q نسبت به هم اول اند، بنا بر این هر کدام از آن ها،

نسبت به $n = p+q$ اول می شود. بنا بر این، همه عددهای



شکل ۱۱۴

$$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{n} \quad (i=1, 2, \dots, p-1; j=1, 2, \dots, q-1)$$

با هم فرق دارند. توجه کنیم که همیشه، $\frac{i+j}{p+q}$ بین $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$ واقع است؛ به

این ترتیب روشن است که، همه کسرها $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$ ، در بازه‌های مختلف

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad k=1, 2, \dots, n-2$$

قرار دارند.

۲۸۰. e_i را بردار واحدی می‌گیریم که در جهت خط راست l_i باشد.

فرض می‌کنیم $e_i e_{i+1} = c_i$ ($i=1, 2, \dots, 1978$)، $e_{1979} e_1 = c_{1979}$ (c_i عبارت است از کسینوس زاویه بین e_i و بردار بعد از آن e_{i+1}). اگر

$\vec{OA}_i = a_i e_i$ بگیریم شرط عمود بودن خط‌های راست $A_{i-1} A_{i+1}$ و l_i هم‌ارز است با

$$(a_{i-1} e_{i-1} - a_{i+1} e_{i+1}) e_i = 0, \quad a_{i-1} c_{i-1} = a_{i+1} c_i \quad (*)$$

a_1 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم؛ سپس $a_3, a_5, \dots, a_{1979}, a_2, a_4, \dots, a_{1978}$ را طوری در نظر می‌گیریم که هر 1979 شرط $(*)$ برقرار باشند، به جز احتمالاً یکی: $a_{1978} c_{1978} = a_1 c_{1979}$. ولی اگر همه 1978 برابری زیر را در هم ضرب کنیم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{a_5}{a_3} = \frac{c_3}{c_4}, \dots, \frac{a_{1979}}{a_{1977}} = \frac{c_{1977}}{c_{1978}}$$

$$\frac{a_2}{a_{1979}} = \frac{c_{1979}}{c_1}, \frac{a_4}{a_2} = \frac{c_2}{c_3}, \dots, \frac{a_{1978}}{a_{1976}} = \frac{c_{1976}}{c_{1977}}$$

بعد از ساده کردن، 1979 امین برابری هم پیدا می‌شود.
۲۸۱. مقداری را که در صورت مساله داده شده است:

$$p_k = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_{n-k} a_n$$

به سادگی می‌توان محاسبه کرد: دنباله

$$A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

از عددهای ۰ و ۱ را می‌نویسیم و، سپس، در سطر بعدی (زیر سطر اول)، همان دنباله را طوری می‌نویسیم که a_1 زیر a_{k+1} ، a_2 زیر a_{k+2} و غیره قرار گیرد (در سطر دوم، به اندازه k ردیف، به سمت راست رفته‌ایم)؛ در ضمن $p_k = p_k(A_n)$ برابر است با تعداد ردیف‌هایی که، در آن‌ها، در هر دو سطر، عدد ۱ قرار دارد.

دنباله A_n به طول n ، وقتی با شرط مساله سازگار است که، همه $p_k(A_n)$ ‌ها، به ازای $0 \leq k \leq n-1$ ، فرد باشند.

ساختمان بعدی امکان می‌دهد تا به کمک دو دنباله A_m و A_n از این گونه، $A_l = A_n \cup A_m$ را به طول

$$l = (2m-1)n - (m-1) = 2mn - m - n + 1$$

بسازیم. و بلوک $0 \dots 0$ از A_m $2m-1$ رقم، هر ۱ را به A_n ، و در بلوک

شامل $2m-1$ صفر، هر ۰ را به A_n تغییر می‌دهیم و $m-1$ صفر آخر را حذف می‌کنیم. ضمن محاسبه p_k برای A_l با روش فوق، به ازای هر جلو-رفتن k ، هر بلوک A_m در سطر بالا، تنها یک بلوک A_m در سطر پایین گذاشته می‌شود؛ اگر

$$k = (2m-1)q + r \quad \text{یا} \quad k = (2m-1)q - r$$

که در آن $0 \leq r \leq m-1$ و $0 \leq q \leq n-1$ ، آن وقت

$$p_k(A_l) = p_q(A_n) \cdot p_r(A_m)$$

زیرا درست $p_q(A_n)$ زوج از بلوک‌های A_m وجود دارد و، در ضمن، به اندازه r ردیف، جلو کشیده شده‌اند؛ از این جا روشن می‌شود که دنباله $A_l = A_n \cup A_m$ ، همراه با A_n و A_m ، با شرط مساله سازگار است.

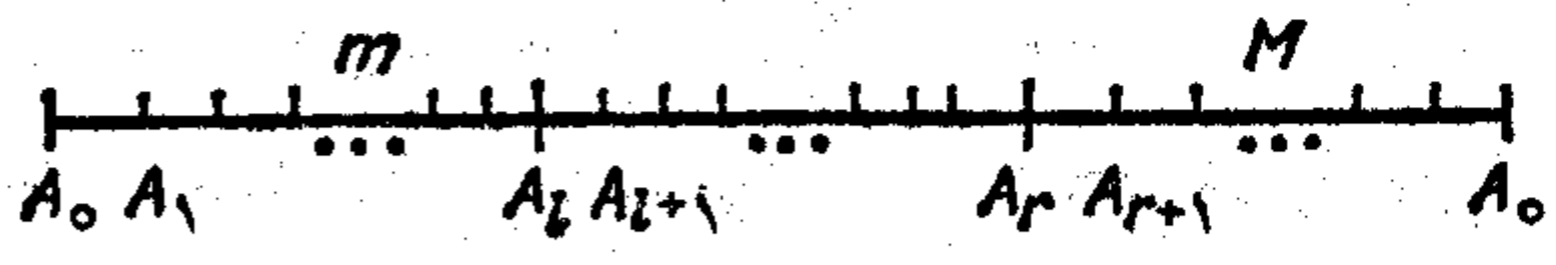
این ساختمان به ما امکان می‌دهد که از 1101 ، پاسخ $A_4 = A_4 \cup A_4$ ، $A_{25} = A_4 \cup A_4$ را، برای مساله a پیدا کنیم:

$$A_{25} = \underbrace{11010000}_{\text{---}} \underbrace{11010000}_{\text{---}} \underbrace{00000000}_{\text{---}} \underbrace{1101}_{\text{---}}$$

سپس، $A_{25} \cup A_{25}$ دارای $1201 = 1 + 50 + 2 \times 25^2$ یعنی بیش از ۱۰۰۰۰ رقم است که در مسأله (b) خواسته شده است.

۲۸۲. فرض می‌کنیم، قطرهای چهارضلعی $ABCD$ ، که در نقطه O به هم رسیده‌اند، برهم عمود نباشند و، مثلاً، AOB زاویدای حاده باشد. نقطه‌های A' و B' ، قرینه نقطه‌های A و B نسبت به O را پیدا می‌کنیم. شعاع‌های دایره‌های محاط در مثلث‌های $A'OB$ و $B'OC$ ، از شعاع دایره محاط در مثلث AOB کوچکترند (مساحت همه این مثلث‌ها، یکی است، ولی محیط مثلث AOB کمتر است)؛ بنابراین، مماس‌هایی که از نقطه‌های A و B بر دایره‌های به شعاع r ، محاط در زاویه‌های BOC و AOD رسم شوند، نیم‌خط‌های راست OA' و OB' را در نقطه‌ها C و D قطع می‌کنند که، به ترتیب، دورتر از نقطه‌های A' و B' نسبت به O قرار دارند، به نحوی که پاره‌خط CD راست نمی‌تواند بر دایره به شعاع r ، محاط در مثلث $OA'B'$ مماس شود. به این ترتیب، خط‌های راست AC و BD برهم عمودند و، با توجه به برابری شعاع‌های دایره‌های محاطی، این قطرها، محورهای تقارن چهارضلعی $ABCD$ را تشکیل می‌دهند و این، به معنای آن است که چهارضلعی $ABCD$ یک لوزی است.

۲۸۳. (a) همه ترتیب‌های ممکن T ، از زوج نقطه‌های قرمز (A_1, A_r) را، که پاره‌خط راست $A_0 A_n$ را به سه بخش $A_0 A_1$ ، $A_1 A_r$ و $A_r A_n$ تقسیم کرده‌اند، در نظر می‌گیریم؛ بزرگترین طول این بخش‌ها را M و کوچکترین آن‌ها را m می‌نامیم. از بین همه ترتیب‌های T ، آن‌هایی را جدا می‌کنیم که، در آن‌ها، مقدار M حداقل باشد و، سپس، از بین ترتیب‌های اخیر، آن‌ها را (یا یکی از آن‌هایی را) در نظر می‌گیریم که، برای آن، مقدار m



شکل ۱۱۵

حداکثر باشد. ثابت می‌کنیم که، برای این موقعیت $T = (A_l, A_r)$ ، شرط مساله، $M - m \leq 1$ ، برقرار است.

فرض کنید، برای این موقعیت، داشته باشیم: $M - m > 1$. اگر بخش‌های M و m در ردیف هم باشند، با جابه‌جا کردن مرز قرمز بین آن‌ها روی یکی از پاره‌های راست، به ترتیب T' می‌رسیم که، در آن، کوچکترین بخش از m بزرگتر و بزرگترین بخش، کوچکتر از M است که، در واقع، نوع انتخاب T را نقض می‌کند. اگر $m = A_0 A_1$ و $M = A_r A_n$ ، آن وقت، یا در ترتیب (A_{l+1}, A_r) ، کوچکترین بخش از m بزرگتر است و یا $M - 1 < m \leq A_{l+1} A_r$ ، که در این صورت، در ترتیب (A_{l+1}, A_{r+1}) ، بزرگترین بخش از M کوچکتر است؛ و در هر حال، نوع انتخاب $T = (A_l, A_r)$ نقض می‌شود (شکل ۱۱۵).

(b) ترتیبی را در نظر می‌گیریم که، در آن، بزرگترین طول از k بخش $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ برابر M و طول کوچکترین بخش برابر $M - 1 < m$ باشد. فرض کنید $\Delta_i = m$ در سمت چپ $\Delta_j = M$ واقع باشد. انتهای راست بخش Δ_i را، روی یک یا چند پاره‌خط راست، طوری جابه‌جا می‌کنیم که، این بخش، کمتر از $M - 1$ (و البته، بزرگتر از M) نباشد. اکنون اگر $M - 1 < \Delta_{i+1}$ ، همان عمل را درباره آن انجام می‌دهیم، سپس به Δ_{i+2} می‌پردازیم و غیره، تا جایی که یا طول همه بخش‌های $\Delta_i, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_{r-1}$ بزرگتر یا برابر $M - 1$ نشوند و یا این که موفق شویم $\Delta_r = M$ را، دست کم روی یک پاره‌خط، کاهش دهیم. سپس (اگر باز هم در ترتیب حاصل $M - m > 1$)، دوباره همین روند را ادامه می‌دهیم (هر چند بار که لازم باشد)، در ضمن، هیچ ترتیبی تکرار نمی‌شود، زیرا ترتیب جدیدی که به دست می‌آید، همیشه «بتر است»، به این مفهوم که، در آن، یا طول بخش بزرگتر M ، کوچکتر است و یا M تغییر نمی‌کند، ولی تعداد بخش‌های برابر M کمتر می‌شود و یا این تعداد هم فرقی نمی‌کند ولی در آن صورت m بزرگتر می‌شود و یا تعداد m ‌های برابر کاهش می‌یابد. چون تعداد ترتیب‌ها محدود است، بعد از چند روند، به ترتیبی می‌رسیم

که دیگر «کم کردن» ممکن نیست، یعنی $M - m \leq 1$.

۲۸۴. پاسخ: بله، بخش پذیر است.

عدد مفروض به روشنی بر ۲۰ بخش پذیر است. بخش پذیری آن بر

۹۹ از این جا نتیجه می شود که $1 + 99 = 100$. در ضمن

$$19 + 20 + \dots + 80 = 99 \times 31$$

۲۸۵. اگر S_1 و S_2 را، به ترتیب، مجموع مساحت های بخش های

چپ در ردیف های زوج و فرد و، به همین ترتیب، S_3 و S_4 را مجموع مساحت بخش های سمت راست بگیریم، داریم:

$$S_2 + S_4 = S_3 + S_1 = S_3 + S_4 = S_1 + S_2$$

۲۸۶. کافی است ثابت کنیم، در هر موقعیتی می توان صندوقی را که

وزنی بیشتر از $5/5$ تن ندارد، بارگیری کرد.

۲۸۷. $S_{ABCD} = 2S_{AMPC}$. $AM = x$ فرض کنید، در این صورت

$$S_{AMCD} < 2S_{AMP} \leq x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}$$

۲۸۸. پاسخ: نه، جواب ندارد.

از $z^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$ و اول بودن عدد z نتیجه می شود که

یا $z^2 - x = 1$ و $z^2 + x = z^3$ ، یا $z^2 - x = y$ و $z^2 + x = y^2$. این

دستگاه ها، در مجموعه عددهای اول، جواب ندارند.

۲۸۹. پاسخ: مرکز دایره مفروض را O ، شعاع آن را R می گیریم و

فرض می کنیم: $OE = a$. اگر $a \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$ ، آن وقت وتر BD باید بر دایره به

مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sqrt{2}}$ مماس باشد. اگر $a < \frac{R}{\sqrt{2}}$ ، وتر مجهول BD بر قطر

AC عمود است.

کافی است توجه کنیم $S_{ABCD} = \frac{2R}{a} S_{BOD}$ و $S_{BOD} = \frac{1}{2} R^2 \sin \varphi$ ، که

در آن، φ را مقدار زاویه BOD گرفته‌ایم و، سپس، حدکثر مقدار $\sin \varphi$ را در رابطه با موقعیت نقطه E پیدا کنیم.

۲۹۰. A, B, C را، سه نقطه متوالی در ساحل دریاچه می‌گیریم. از شرط مساله معلوم می‌شود که، تنها وقتی A و B به هم مربوط اند که B و C به هم مربوط نباشند. بنابراین، همه نقطه‌ها، به زوج نقطه‌های مجاوری تقسیم می‌شوند که با کشتی به هم مربوط اند. در ضمن، هر دو تا از این زوج نقطه‌ها هم با یکدیگر ارتباط دارند، یعنی یکی از نقطه‌های زوج اول، با یکی از نقطه‌های زوج دوم مربوط است.

۲۹۱. وقتی عدد $N = \overline{abcdef}$ بر ۳۷ بخش پذیر باشد، عددهای

$$\overline{abc+def}, \overline{bcafde}, \overline{cabdef}$$

هم بر ۳۷ بخش پذیرند.

۲۹۲. پاسخ: $(k\pi, l\pi, m\pi)$ ، $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

دو معادله اول را با هم جمع و، سپس، معادله سوم را از مجموع حاصل کم کنید، به معادله زیر می‌رسید:

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+z}{2} \cdot \cos \frac{y+z}{2} = 0$$

۲۹۳. اگر $\mathbf{s} \neq 0$ ، (\mathbf{s}) مجموع همه بردارهای دستگاه، آن وقت برای هر $\mathbf{a} \neq 0$ از این دستگاه، به دست می‌آید: $\mathbf{s} = k\mathbf{a}$ ، که در آن، k يك عدد است.

۲۹۴. (a) پاسخ: $1980 = S(1962) + 1962$.

(b) $S(n) + n$ را S_n می‌نامیم، در این صورت اگر عدد n به q ختم شده باشد، آن وقت $S_{n+1} < S_n$ ؛ و اگر به q ختم نشده باشد، آن وقت $S_{n+1} = S_n + 2$ ، برای هر عدد طبیعی $m > 2$ ، بزرگترین عدد ممکن N را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $S_N < m$. در این صورت $S_{N+1} \geq m$ ؛ در ضمن، رقم آخر N برابر q نیست و، بنابراین، یا

$$S_{N+1} = m \text{ و یا } S_{N+1} = m + 1.$$

۲۹۵. پاسخ: ۳۳.

هر مستطیل 1×3 ، درست شامل یک خانه قرمز است.

۲۹۶. (a) مثلاً، اگر در روز اول، برای سه دوست A ، B و C ، به

خاطر واکسن زدن مصونیت داشته باشد، B بیمار و C سالم باشد، اپیدمی به پایان نمی‌رسد.

(b) اگر اپیدمی تمام نشود، آن وقت می‌توان A را پیدا کرد که، قبل

از دیگران، دوبار بیمار شده باشد، ولی در این صورت، برای بار دوم باید بیماری مثلاً از B به او سرایت کرده باشد که، خودش قبل از A ، دوبار بیماری را گرفته باشد.

۲۹۷. پاسخ: ممکن نیست.

دنباله n_p ، با آغاز از شماره‌های مثل p ، ثابت می‌ماند، یعنی

$$n_p = n_{p+1} = n_{p+2} = \dots$$

۲۹۸. پاسخ: $\widehat{DEC} = 90^\circ$ ، $\widehat{EDC} = 60^\circ$ و $\widehat{DCE} = 30^\circ$.

اگر دوران دو نقطه D ، به اندازه 60° درجه و در جهت مناسب و،

سپس، تجانس به مرکز D و ضریب $\frac{1}{4}$ را در نظر بگیریم، نقطه P به نقطه

H وسط پاره خط راست MP ، نقطه B به نقطه K وسط پاره خط راست BP

و خط راست BP به خط راست KH (که AP را در E قطع می‌کند)

منجر می‌شود.

۲۹۹. عددهای α و β ، ریشه‌های سه جمله‌ای زیر هستند:

$$f(t) = (t - \alpha)(t - \beta) = t^2 - \frac{1}{6}pt + \frac{1}{6}s$$

در ضمن $x < \frac{\alpha + \beta}{2} < z$ ، $f(x) > 0$ و $f(z) > 0$.

۳۰۰. پاسخ: $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

فرض کنید: $k_1 = 1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n = 100$ ، عددهای مفروض باشند. چون $2k_i \geq k_{i+1}$ ؛ بنابراین $k_i \leq 2^{i-1}$ (برای هر i). به خصوص $2^{n-1} \geq 100$ ، از آنجا $n \geq 8$. با فرض $n=8$ ، نتیجه می‌شود: $k_7 = 50$ ؛ ولی $2k_5 = 25$. تناقض.

۳۰۱. هر یک از n^2 زوج عدد طبیعی (x, y) با شرط $1 \leq x \leq n$ و $1 \leq y \leq n$ ، جوابی از معادله $[x^{\frac{3}{2}}] + [y^{\frac{3}{2}}] = c$ ($1 \leq c \leq 2 \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor$) می‌باشد. اگر به ازای هر c ، تعداد جواب‌ها از M بیشتر نباشد، آن وقت

$$2 \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor \cdot M \geq n^2 \quad \text{یا} \quad M \geq \frac{1}{2} \sqrt{n}$$

۳۰۲. $AE \parallel BC$ و $BE \parallel CA$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های A, B, C, E و D روی سطح کره‌ای به قطر AB و به مرکز O قرار دارند؛ CE هم قطر این کره است، $\widehat{CDE} = 90^\circ$ و $\cos \widehat{DCE} = \frac{|CN|}{|AB|}$ کافی است ثابت کنیم؛

$$\sin \widehat{DBE} > \sin \widehat{DCE}$$

(از قضیه سینوس‌ها، در مثلث‌های DCE و DBE استفاده کنید.)

۳۰۳. (a) برای $k > m$ ، همه عددهای x_k در m رقم بعد از ممیز خود، یکسان هستند.

(b) پاسخ: می‌توان در کسر متناوب $0/(10)$ در قطعه با شماره‌های $10^n < k < 10^n + 5$ ، گروه رقم‌های 1010 را به 1100 تبدیل می‌کنیم.
 (c) پاسخ: $x_1 x_2 \dots x_k \dots$ در آن، $x_k = 1$ برای وقتی که داشته باشیم: $10^n < k \leq 10^n + 5$ و بقیه x_k ها برابر صفر.

۳۰۴. پاسخ: $(\sqrt{2} - 1) \cdot 32$.

باید از این نکته استفاده کرد که، اگر یکی از صفحه‌های شطرنج را به اندازه 90° درجه دوران دهیم، خانه‌های سیاه یک صفحه بر خانه‌های سفید صفحه دیگر منطبق می‌شود و برعکس؛ و اگر هر دو صفحه را بچرخانیم،

$$X - A_1 - A_2 - \dots - A_{10} - \dots - A_k - Y$$

اگر $k \leq 19$ ، آن وقت خبر تازه‌ای که به اطلاع A_{10} رسیده است، بعد از ۱۰ روز به گوش همه ساکنان محله خواهد رسید. اگر $k \geq 20$ ، همه ساکنان X ، A_1 ، \dots ، A_{10} و همه آن‌هایی را که به این‌ها، به جز از طریق A_{11} ، مربوط اند (تعداد آن‌ها از ۱۱ کمتر نیست)، جدا می‌کنیم. گروه باقی‌مانده ساکنان، باز هم با شرط مساله سازگار است. روندی را که شرح دادیم، ۸۹ بار تکرار می‌کنیم (در هر گام، با جدا کردن A_{10} مربوط)؛ یا در مرحله‌ای، همه اهالی دهکده به پایان می‌رسند و یا تعدادی که از $21 = 11 \times 19 - 1000$ بیشتر نیست، باقی می‌ماند، که در باره آن‌ها، دوباره مثل بالا، عمل می‌کنیم. اگر هم، در دهکده، زنجیره بسته‌ای وجود داشته باشد، آن وقت می‌توان آن‌ها را، با حفظ شرط مساله، جدا کرد.

۳۱۱. داریم:

$$f(n\pi) = (-1)^n a + (-1)^n b, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - b, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} + b$$

$$\text{بنا بر این } |a+b| \leq 1, \quad |a-2b| \leq 2.$$

۳۱۲. L' و N' را وسط ضلع‌های AD و BC بگیرید. یا متوازی‌الاضلاع $KL'MN'$ بر $KLMN$ منطبق است و یا منطبق نیست؛ در حالت اخیر، چهارضلعی $ABCD$ دوزنقه است ($BC \parallel AD$).

۳۱۳. پاسخ: برای $n \in \mathbf{N}$ داریم $x_n = 1$ و برای $n \in \mathbf{Z}$ $x_n = n$.

۳۱۴. سطری از جدول $m \times n$ را سفید می‌نامیم، وقتی که تعداد خانه‌های سفید آن بیشتر باشد، و در حالت عکس، آن را سیاه می‌نامیم. p و q را، به ترتیب، تعداد خانه‌های سفید و سیاه و r و s را، به ترتیب، تعداد ستون‌های سفید و سیاه می‌گیریم ($p+q=m$ و $r+s=n$). می‌توان فرض کرد $p \leq q$. فرض کنید در هر ردیف (سطر و ستون)، کمتر از یک چهارم خانه‌ها، از رنگ «دیگر» باشند در این صورت، $ps+qr$ ، از کل تعداد خانه‌های به رنگ «دیگر» در همه سطرها و ستون‌ها، بیشتر نیست، یعنی از

کمتر است؛ بنا بر این $r \leq s$ و تعداد کل خانه‌های سفید $\frac{mn}{4} + \frac{mn}{4} = \frac{mn}{2}$

کمتر است از

$$pr + \frac{qn}{4} + \frac{sm}{4} = \frac{mn}{2} + pr - \frac{np}{4} - \frac{mr}{4} = \frac{mn}{2} -$$

$$-\frac{p}{4} \left(\frac{n}{2} - r \right) - \frac{r}{4} \left(\frac{m}{2} - p \right) \leq \frac{mn}{2}$$

۳۱۵. با توجه به شرط مساله داریم:

$$\vec{AE} = \vec{MB} = \vec{XK} = \vec{PC} = \vec{HA} = \vec{BT}$$

۳۱۶. پاسخ: $x=6$ ، $y=5$.

$x = d + y$ می‌گیریم ($d \geq 1$)، در این صورت به دست می‌آید:

$$(3d-1)y^2 + (3d^2-d)y + d^3 = 61 \Rightarrow d \leq 3$$

۳۱۷. برای هر تیم، ۹ تیم پیدا می‌شود که این تیم با آنها بازی

نکرده است و، بین این تیم‌های نه‌گانه، دو گروه نه‌تیمی وجود دارد که با هم روبه‌رو نشده‌اند.

۳۱۸. A_2 ، B_2 و C_2 را، نقطه‌هایی از ضلع‌های BC ، CA و AB

به نحوی انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AC_2 : C_2B = BA_1 : A_1C = CB_2 : B_2A = 3$$

محیط شش ضلعی $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ برابر با $\frac{3}{4}P$ و بزرگتر از محیط مثلث

$A_1B_1C_1$ است. سپس باید نابرابری مثلث را برای مثلث‌های $A_2C_1B_1$ ، $A_1B_1C_2$ و $C_1B_2A_1$ نوشت.

۳۱۹. باید از این نابرابری‌ها استفاده کرد:

$$x > y > 0 \text{ و } 0 < x^3 - y^3 < x^3 + y^3$$

۳۲۰. دو انتهای خط شکسته‌ای را که رسم شده است، A و B می‌گیریم. خط شکسته را روی خط راست AB تصویر می‌کنیم. خطای نسبی هر يك از ضلع‌های خط شکسته، برابر است با p ، بنابراین مجموع خطاهای مطلق همه ضلع‌ها، از $4p$ تجاوز نمی‌کند؛ به این ترتیب $d \leq 4p$.
 ۳۲۱. (a) نمی‌توان (مجموع عددهای همه رأس‌ها، همیشه عددی فرد است).
 (b) می‌توان.
 (c) نمی‌توان.

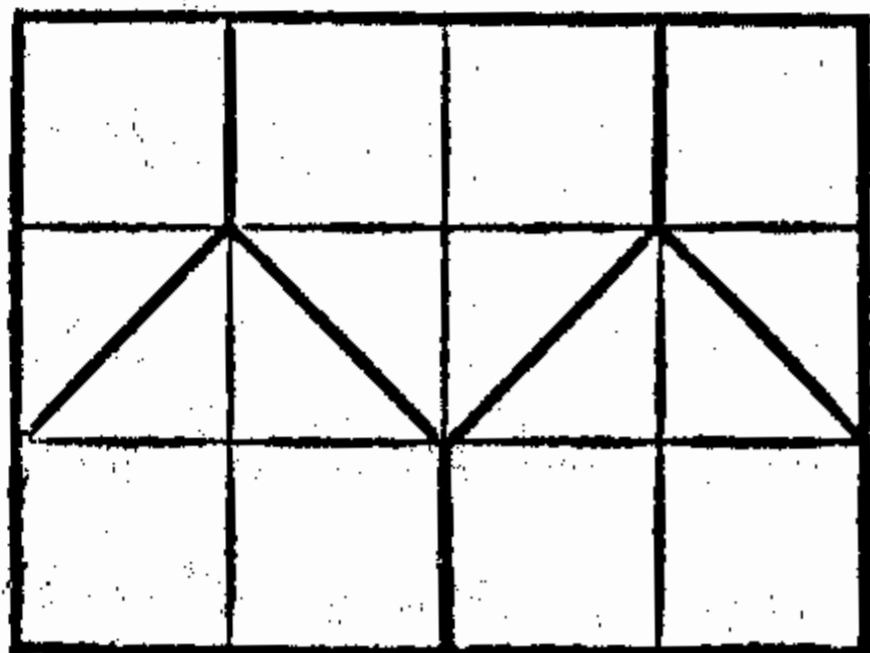
برای اثبات در حالت‌های (b) و (c)، بهتر است دو چهاروجهی را در نظر بگیریم که رأس‌های آن‌ها در رأس‌های مکعب واقع باشند، در ضمن، هیچ دو رأسی از هر چهاروجهی، متعلق به يك یال مکعب نباشد. در این صورت، در هر گام، به مجموع عددهای رأس‌های هر چهاروجهی، يك واحد اضافه می‌شود.

۳۲۲. پاسخ: مثلاً $n = 9440$.

فرض کنید $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times k$. عدد k را طوری پیدا می‌کنیم که $m-1$ بر 11 و $m+1$ بر 13 بخش پذیر باشد. در این صورت، $n = m-10$ با شرط مساله سازگار است (ضمیمه ۲).

۳۲۳. پاسخ: در آخرین ستون، کارت‌ها، به ترتیب غیر نزولی عددهای خود قرار گرفته‌اند.

۳۲۴. از شش نقطه مفروض، به هر صورتی که باشند، دست کم دو تا، در یکی از شکل‌هایی قرار دارند که روی شکل ۱۱۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱۶

۳۲۵. a) پاسخ: ۳ و به ازای $x = y = 1$.

از نابرابری مربوط به واسطه حسابی نتیجه می شود:

$$1 + x^2 y^4 + x^4 y^2 \geq 3x^2 y^2$$

b) فرض کنید: $P(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y) + \dots + g_n(x, y)$

که در آن، $g_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)، یک چند جمله ای است. چون

$$P(x, 0) = P(0, y) = 4$$

چند جمله ای های $g_i(x, y)$ نمی توانند شامل یک جمله ای های به صورت ax^k و by^l باشند. بنا بر این، ضریب $x^2 y^2$ باید مثبت باشد.

۳۲۶. پاسخ: تنها نقطه O ، مرکز مثلث ABC .

۳۲۷. پاسخ: r_1, r_2 .

۳۲۸. پاسخ: سه عدد. با استقرای ریاضی ثابت می شود که، برای

$$n \geq 4, \text{ داریم: } a_{n-1} < b_n < a_n$$

۳۲۹. a) از بین همه عددهای به صورت $2^k_1 + 2^k_2 + \dots + 2^k_n$ ، که

بر $2^m - 1$ بخش پذیرند، عددهای با کمترین مقدار برای n را انتخاب

می کنیم و، سپس، از بین عددهای حاصل، عددی را در نظر می گیریم که،

در آن، مقدار $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ کمترین باشد. همه عددها در گروه

(k_1, \dots, k_n) مختلف اند. اگر $n < m$ ، آن وقت

$$k_i \leq m - 1 \text{ و } 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n} < 2^m - 1$$

که یک تناقض است.

b) پاسخ: وجود ندارد.

$$M = \underbrace{11\dots1}_m \text{ که بر } P = a_1 \times 10^r + \dots + a_r \text{ را کوچکترین عددی می گیریم که بر } M \text{ بخش پذیر است}$$

بخش پذیر و مجموع رقم های آن از m کمتر باشد. در این صورت $r \geq m$

و، در نتیجه، عدد $P_1 = P - (10^r - 10^{r-m})$ هم بر M بخش پذیر می شود

که، مجموع رقم های آن، از مجموع رقم های عدد P تجاوز نمی کند.

۳۳۰. بین هشت عدد، سه عدد وجود دارد که از $\frac{1}{6}$ تجاوز نمی کنند؟

در ضمن، دو تا از آنها، در دو انتهای قطریکی از وجهها قرار دارند. بازی کن اول، باید همین وجه را، در بازی اول خود، انتخاب کند.

۳۳۱. پاسخ: شنبه.

۳۳۲. پاسخ: $MA:MB = k^2$. نقطه O را مرکز متوازی الاضلاع

بگیرید. دو مثلث MOB و AOM متشابه اند.

۳۳۳. فرض می کنیم، حکم درست نباشد. انتهای کمانها را با سیاه

رنگ می کنیم. تمامی محیط دایره را، به کمانهای به طول واحد تقسیم و

نقطه‌های تقسیم را با قرمز رنگ می کنیم. کمانی مثل AC به طول ۲ را در

نظر می گیریم که دو انتهای آن سیاه و B' وسط آن قرمز باشد. نقطه B ،

انتهای دیگری که از B' می گذرد، سیاه است. فرض کنید، روی کمان AB

به طول $1 - 3k$ ، n_1 کمان به طول ۱، n_2 کمان به طول ۲ و n_3 کمان به

طول ۳ وجود داشته باشد. روی کمان BC ، n_1 کمان به طول ۳ وجود

خواهد داشت (انتهای دیگر قطرهایی که از انتهای کمانهای به طول

واحد می گذرند، قرمزند). بنابراین $n_3 = k - n_1$ که با برابری

$$3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3 \text{ متناقض است.}$$

۳۳۴. AM ، BM ، CM و DM را پاره‌خطهای راستی به طول واحد

می گیریم؛ این پاره‌خطهای راست، روی نیم‌خطهای راستی قرار دارند که

نقطه M را به رأس‌های چهاروجهی وصل می کنند. خط راست DM ، مثلث

ABC را در نقطه‌ای مثل P قطع می کند. اگر کسینوس زاویه‌های AMD ،

BMD و CMD بزرگتر از $\frac{1}{3}$ باشند، آن وقت این زاویه‌ها، از

$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ کوچکترند و زاویه‌های AMB ، BMP و CMP از

$\pi - \varphi$ بزرگتر. می توان فرض کرد $\widehat{APB} \geq 120^\circ$. در این صورت، اگر

قضیه کسینوسها را برای مثلث‌های AMB و APB بنویسیم، به دست می-

$$\text{آید: } \cos \widehat{AMB} < -\frac{1}{3}$$

۳۳۵. پاسخ: $b < a < c$.

۳۳۶. O را نقطه‌ای می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_{2n+1}} = \vec{0}$$

k را طوری انتخاب می‌کنیم که $2^k - 1$ بر $2n + 1$ بخش پذیر باشد. در این صورت، خط شکسته M_k ، نسبت به نقطه O و با ضریب برابر 2^{-k} ، با خط شکسته M متجانس است.

۳۳۷. پاسخ: ۱۰۰.

باید عدد a ، بزرگترین عدد در ۹۹ عدد نخستین، و عدد b ، کوچکترین عدد از بین ۱۸۸۲ عدد آخر را در نظر گرفت و قانع شد که $a < 100 < b$.

۳۳۸. طول کل تصویر جزیره‌ها بر ساحل از ۲ متر کمتر است. بنا بر این،

از این کناره تا نزدیک‌ترین مسیر بین جزیره‌ها، کمتر از ۲ متر است.

۳۳۹. این عمل‌ها را پشت سر هم انجام می‌دهیم: (۱) دو خط راست

موازی رسم می‌کنیم، به نحوی که هر کدام از آنها، سهمی را در دو نقطه قطع کند؛ (۲) وسط دو پاره خط راست حاصل را، با یک خط راست، به

هم وصل می‌کنیم؛ (۳) عمودی بر این خط راست رسم می‌کنیم تا سهمی را

در دو نقطه A و B قطع کند؛ (۴) عمود منصف پاره خط راست AB ، همان

محور Ox است. محور Oy در نقطه برخورد آن با سهمی

است. واحد طول برابر است با طول نقطه برخورد سهمی با خط راست $x = y$.

۳۴۰. M_k و m_k را، کوچکترین و بزرگترین عدد، در بین عددهای

ستون k ام می‌گیریم. در این صورت، در ستون با هر $m_k \leq x \leq M_k$

برخورد می‌کنیم. بنا بر این، یا x وجود دارد که برای آن، به‌ازای همه k ها

(از ۱ تا n) داشته باشیم: $m_k \leq x \leq M_k$ ؛ و یا برای بعضی از مقادیرهای

k و p : $M_k \geq m_k > M_p \geq m_p$ ، ولی در این صورت در هر سطر، به‌هر

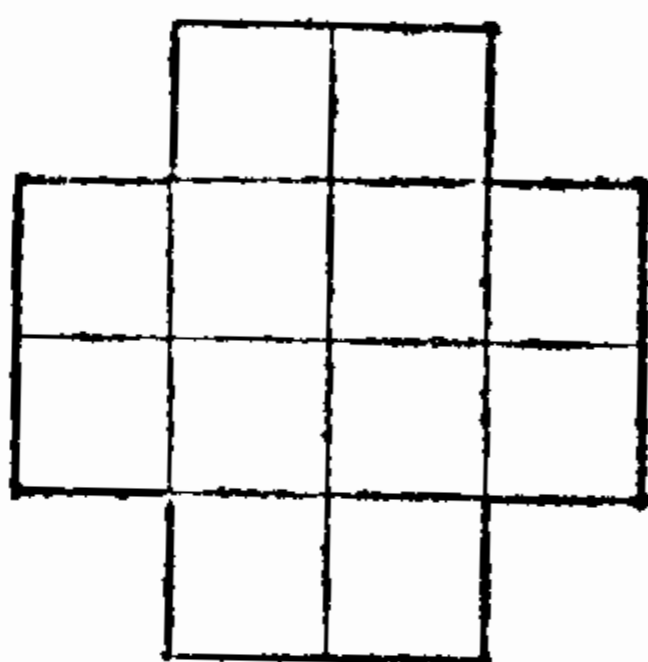
عدد y برمی خوریم که برای آن $M_p \leq y \leq m_p$.

$$\frac{\sqrt[12]{x}}{.2} + 2 \sqrt[4]{x} \geq 2 \times 2 \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x}}{2} \geq 2 \times 2 \sqrt[6]{x} \quad .341$$

.342. پاسخ: 43 عدد 2، 3، ...، 44.

اگر کمتر از 43 عدد حذف کنیم، دست کم سه عدد k ، $189 - k$ و $k(189 - k)$ ، $(2 \leq k \leq 43)$ ، در بین عددهای حذف نشده باقی می ماند.

.343. از بین عددهای واقع در خانه های شکلی که در 117 نشان داده ایم، کوچکترین عدد، با شرط مساله سازگار است.



شکل 117

.344. می توان فرض کرد: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$. مجموعه M_{ik} را در نظر بگیرید ($i, k = 0, 1$; $i \neq k$) که از همه عددهای a_i با شرط $l \equiv i \pmod{3}$ و همچنین عددهای مثبت a_m با شرط $m \equiv k \pmod{3}$ تشکیل شده باشد. یکی از مجموعه های M_{ik} ، مجموعه مناسب است.

.345. ستونی را که شامل خانه علامت دار نیست، با ستون کناری سمت راست جابه جا می کنیم؛ سپس، آخرین سطر جدولی را که به دست می آید، با یکی از سطرهايي که دارای نقطه علامت دار است، عوض می کنیم. مساله منجر به جدول $(n-1) \times (n-1)$ می شود.

.346. a_0, a_1, \dots, a_n را همان عددهای $0, 1, 2, \dots, n$ فرض کنید، به نحوی که داشته باشیم:

$$|a| \leq |a - a_0| \leq |a - a_1| \leq \dots \leq |a - a_n|$$

برای هر $1 \leq k \leq n$ همیشه داریم: $|a - a_k| \geq \frac{k}{2}$ ، که از ضرب، آنها در

۳۸ به دست می آید:

$$|a| \cdot |a-1| \dots |a-n| = \\ = |a-a_0| \cdot |a-a_1| \dots |a-a_n| \geq \langle a \rangle \frac{n!}{2^n}$$

۳۴۷. a نه، وجود ندارد. سمت چپ برای، به ازای $x=1$ ،

$y=2$ ، $z=1$ برابر صفر می شود.

(b) بله وجود دارد. فرض کنید:

$$u = x - y + 1, v = y - z - 1, w = z - x + 1$$

در برابری $(u+v+w)^3 = 1$ ، بعد از باز کردن پرانتز و گروه بندی، به

$$دست می آید: $u^3 P + v^3 Q + w^3 R = 1$.$$

۳۴۸. فرض کنید، وجه KLM از چهاروجهی $KLMN$ ، دارای

حداکثر محیط باشد. A_1, B_1, C_1, D_1 را تصویر نقطه های A, B, C, D

بر صفحه KLM و Γ را خط شکسته ای می گیریم که تصویر چهاروجهی

$KLMN$ روی این صفحه را محدود کرده باشد. در ضمن P_{RSTQ} را به معنای

مجموع طول های شش پاره خط راستی فرض می کنیم که نقطه های S, R ،

Q و T را دو به دو به هم وصل کرده اند. در این صورت

$$۱) P_{KLMN} \leq ۲ P_{KLM}; ۲) P_{KLM} \leq P_{\Gamma};$$

$$۳) P_{\Gamma} \leq \frac{۲}{۳} P_{A_1 B_1 C_1 D_1}; ۴) P_{A_1 B_1 C_1 D_1} \leq P_{ABCD}$$

۳۴۹. (b) هیچ دو خط شکسته ای نباید دارای پاره خط راست مشترکی

باشند. بنابراین، ۱۲ گره شبکه که، به جز رأس های مربع، در مرزهای آن

قرار دارند در دو انتهای خط های شکسته باشند، ولی ۵ خط شکسته، تنها

دارای ۱۵ انتها هستند.

۳۵۰. (a) نه؛ (b) بله.

در این جا، بهتر است استدلال را «از آخر» آغاز کنیم: سه عدد

(۱۷، ۱۹۶۷، ۱۹۸۳)

را تنها می‌توان از سه عدد (۵، ۳، ۳)، و سه عدد (۵، ۳، ۳) را تنها می‌توان از سه عدد (۳، ۳، ۳) به دست آورد و نه از (۲، ۲، ۲).

۳۵۱. O را نقطه‌ای از درون مثلث XYZ می‌گیریم. از O به نقطه‌های

O_1 و O_2 و O_3 (مرکزهای سه دایره) و نقطه‌های X و Y و Z وصل می‌کنیم. یکی از شش زاویه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید (همهٔ این زاویه‌ها، حاده‌اند)، از ۶۰ درجه کوچکتر نیست (مثلاً، زاویهٔ O_1OX). در این صورت

$$O_1O < \frac{OX}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} OX$$

۳۵۲. فرض کنید:

$$n^2 < a < b < c < d < (n+1)^2, ad = bc$$

در این صورت $(a+d)^2 - (d-a)^2 < (b+c)^2$ و $a+d > b+c$ از آنجا

$$(d-a)^2 > (a+d+b+c)(a+d-b-c) > 4n^2$$

ولی $d-a < 2n$ ؛ تناقض.

۳۵۳. پاسخ: (۰، ۰)، $(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ ، $(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید $f(x) = f(y)$ که در آن، تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ ، تابعی صعودی است ($f'(x) > 0$).

۳۵۴. اگر $k \geq \underbrace{a44\dots 45}_{n-2}$ ، $a \geq 1$ ، رقم اول عدد است، آن وقت

$$k_1 = (a+1) \times 10^{n-1} \text{ و } \frac{k_1}{k} \leq \frac{(a+1) \times 10^{n-1}}{\underbrace{a44\dots 45}_{n-2}} < \frac{a+1}{a+\frac{4}{9}} \leq \frac{18}{13}$$

و اگر $k \leq \underbrace{a44\dots 4}_{n-1}$ ، آن وقت $k_1 = a \times 10^{n-1}$ و $\frac{k_1}{k} \leq 1$

۳۵۵. به ترتیب داریم:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2} (S_{DEF} + S_{AEF}) < \frac{1}{2} (S_{BEF} + S_{ADF}) = \\ = \frac{1}{2} S_{ABFE} = \frac{1}{2} (S_{ABF} + S_{AFE}) \leq \frac{1}{2} (S_{ABF} + S_{ABE}) = S_{BDF} + S_{IDE}$$

۳۵۶. پاسخ: (a) نه؛ (b) نه.

(a) آخرین رقم عدد α_{2k+1} برابر است با k امین رقم بعد از ممیز در بسط دهدهی عدد $\sqrt{10}$.

(b) اگر β_n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\gamma_n = 0$ و در حالت فرد بودن β_n ، فرض می‌کنیم $\gamma_n = 1$. چون γ_{2n+1} بر n امین رقم بعد از ممیز در بسط عدد $\sqrt{2}$ در مبنای عددنویسی ۲ می‌باشد، بنا بر این γ_{2n+1} متناوب نیست. ۳۵۷. از شرط نتیجه می‌شود:

$$\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta (\sin \alpha - \sin \beta)$$

اگر $\sin \alpha > \cos \beta$ و $\cos \alpha > \sin \beta$ ، آن وقت $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta < 1$. نابرابری‌های

$$\sin \alpha < \cos \beta \text{ و } \cos \alpha < \sin \beta \text{ هم ممکن نیست. بنا بر این}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta \text{ و } \cos \alpha = \sin \beta$$

۳۵۸. α و β را دو صفحهٔ مفروض، و l را فصل مشترک آن‌ها بگیرد.

کافی است صفحهٔ α را دور خط راست l دوران دهیم تا بر صفحهٔ β منطبق شود (نقطه‌های A_1, B_1, C_1, D_1 ، همراه با صفحهٔ α دوران می‌کنند).

۳۵۹. پاسخ: ۵ معادله.

اگر $f_n(x) = x^2 + p_n x + q_n = 0$ ، آخرین معادله نباشد، آن وقت،

با شرط $n \geq 3$ و $p_n q_n > 0$ داریم:

$$p_n^2 > 4q_n, q_n > p_n, p_n q_n > -(p_n + q_n)$$

اگر معادلهٔ $f_5(x) = 0$ ، آخرین معادله نباشد، آن وقت یا $p_4 < 0 < q_4$ و یا $0 < p_4 < q_4$ ، در ضمن $p_3 < 0 < q_3$. هر دو حالت غیرممکن است.

مثال برای $n = 5$:

$$f_5(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 4, \quad f_4(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - 2,$$

$$f_3(x) = x^2 + \frac{11}{2}x + 7, \quad f_2(x) = x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{77}{2},$$

$$f_1(x) = x^2 - 26x - \frac{1925}{4}$$

۳۶۰. اگر a^n بر b^n بخش پذیر باشد، آن وقت a بر b بخش پذیر است.

۳۶۱. پاسخ: نه. روی هم ۱۲۸ واژه هفت حرفی می توان به کمک

دو حرف ساخت. از آن ها، به تعداد

$$3 \times 8 + 10 \times 4 + 30 \times 2 = 124$$

واژه «ممکن نیست».

۳۶۲. پاسخ: a می توان؛ b می توان.

a دو صفحه شطرنجی نامتناهی در نظر می گیریم. روی قطرهایی که

۴ خانه با هم فاصله دارند: در صفحه شطرنجی اول عددهای ۱ و در بقیه خانه ها،

صفر قرار می دهیم؛ و در صفحه شطرنجی دوم، عددهای ۱ را روی قطرهایی

قرار می دهیم که ۶ خانه از هم فاصله دارند و، سپس، عددهای واقع در خانه های

متناظر را با هم جمع می کنیم.

b روی همان قطرها، یک در میان، عددهای ۰ و ۱ را قرار می دهیم

و عددهای خانه های متناظر را از هم کم می کنیم.

$$۳۶۳. پاسخ: $1 + \sqrt{5}$.$$

۳۶۴. اگر a تعداد کل زوج ها، و m تعداد زوج هایی که از پسرها

تشکیل شده اند باشد، آن وقت $2a = 8m$.

$$۳۶۵. پاسخ: $3 + 2\sqrt{2}$.$$

اگر مساحت مستطیل ها را، در جهت حرکت عقربه های ساعت

S_1, S_2, S_3 و S_4 بگیریم، آن وقت:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq 3 + 2\sqrt{2} \text{ ولی } S_1 S_3 = S_2 S_4 \geq 2$$

۳۶۶. e_1, e_2, e_3 را بردارهای واحد در جهت بردارهای \vec{OA}, \vec{OB} ,

\vec{OC} و $\widehat{BOC} = \alpha, \widehat{COA} = \beta, \widehat{AOB} = \gamma$ فرض می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم:

$$e_1 \sin \alpha + e_2 \sin \beta + e_3 \sin \gamma = 0$$

برای این منظور، باید مثلث PQR را که ضلع‌هایی موازی با OB, OA و OC

دارد، در نظر گرفت و از برابری $\vec{PQ} + \vec{PR} + \vec{QP} = 0$ استفاده کرد.

۳۶۷. استقرا نسبت به m : برای $m=1$ حکم درست است. فرض

می‌کنیم، حکم برای $m=k-1$ ($k \geq 2$) درست باشد. مجموعه دلخواه A

را در نظر می‌گیریم که شامل $2k+1$ عدد باشد و قدر مطلق هر عدد از $2k-1$

بزرگتر نباشد. اگر در بین آن‌ها، $2k-1$ عدد وجود داشته باشد که از

لحاظ قدر مطلق از $2k-3$ تجاوز نکنند، آن وقت همه چیز روشن است.

در حالت عکس، می‌توان، فرض کرد که، مجموعه A ، یا شامل عددهای

$2k-1, 2k-2$ و $2k+1-2k$ است و یا شامل $2k-1, 2k-2$ و

$2k+2-2k$. در حالت اول، باید زوج‌های $(1, 2k-2), (2, 2k-3), \dots,$

$\dots, (k-1, k)$ و $(0, -2k+1), (1, -2k+2), \dots,$

$(-k+1, -k)$ را در نظر گرفت، دست کم یکی از زوج‌ها شامل عضوهای

مجموعه A است. در حالت دوم، به همین ترتیب، باید زوج‌های $(1, 2k-3),$

$\dots, (k-2, k)$ و $(0, -2k+1), (-1, -2k), \dots, (-k+1, -k)$

را در نظر گرفت.

۳۶۸. پاسخ: علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که مثلث‌های

ABC و DEF متساوی‌الاضلاع و، در ضمن، ضلع‌های متناظر آن‌ها، برهم

عمود باشند. از نابرابری

$$d_0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \min(d_1, d_2, d_3)$$

نتیجه می‌شود که همه زاویه‌های مثلث ABC ، باید از 60 درجه کمتر باشند که ممکن نیست.

۳۶۹. اگر پاره خط‌های راست و غیر متقاطع Δ_1 و Δ_2 را، با طول‌های α و β روی خط راستی داده باشند، آن وقت، مجموعه طول‌های پاره خط‌های راستی که دو انتهای آنها متعلق به Δ_1 و Δ_2 باشند، پاره خط راستی به طول $\alpha + \beta$ را پرمی‌کنند. بنا براین، اگر $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ طول‌های پاره خط‌های مفروض باشند، آن وقت

$$\delta_1 + (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 + \delta_3) + \dots + (\delta_1 + \delta_k) + \dots$$

$$\dots + (\delta_{k-1} + \delta_k) + \delta_k = k(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k) \geq 1$$

۳۷۰. روشن است که $v_1 = 10$ و $v_n \leq v_{n+1}$ اگر برای مقداری

از n ، داشته باشیم: $v_n = v_{n+1}$ ، آن وقت، کسر متناوب است. اگر $v_{n+1} > v_n$ (به ازای همه مقدارهای n)، آن وقت

$$v_n \geq v_{n-1} + 1 \geq v_{n-2} + 2 \geq \dots \geq v_1 + n - 1 =$$

$$= n + 9 > n + 8$$

۳۷۱. (a) اگر n بر 4 بخش پذیر نباشد، به معنای آن است که بین

عامل‌ها، تنها یک عدد زوج وجود دارد که، در نتیجه، مجموع آنها برابر صفر نمی‌شود.

(b) پاسخ: $n = 4k$ می‌گیریم. وقتی k عددی زوج باشد:

$$n = 2 \times (-2k) \times 1^{2k-2} \times (-1)^k$$

و اگر k عددی فرد باشد:

$$n = (-2)(-2k) \times 1^{2k} \times (-1)^{k-2}$$

$$.372 \quad a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{و} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

۳۷۳. بردار \vec{AB} از بردار \vec{AC} با دوران 60° درجه به دست می آید؛

$$\vec{AB} = -A_1 B_1 + A_2 B_2, \quad \vec{AC} = -A_1 C_1 + A_2 C_2$$

۳۷۴. پاسخ: وقتی که m و n ، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

وقتی m و n عددهایی فرد باشند، باید نوار $1 \times n$ را ساخت و، به کمک m نوار از این گونه، مستطیل $m \times n$ را به دست آورد. وقتی m و n عددهایی زوج باشند، ابتدا مستطیل های $(m-1) \times (n-1)$ ، $1 \times (n-1)$ ، $1 \times (m-1)$ و 1×1 را می سازیم.

در حالتی که m و n ، یکی زوج و دیگری فرد باشد، اگر فرض را بر این بگیریم که می توان مستطیلی با شرط مساله ساخت، آن وقت به این نتیجه می رسیم که تعداد کل تخته های مربعی، عددی فرد است.

$$x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha \leq \max(x, y) < x + y. \quad 375$$

۳۷۶. پاسخ: درست نیست. کافی است دومی، سه یال دو بدو متنافر

را به رنگ سبز در آورد و، این عمل، همیشه برای او ممکن است.

۳۷۷. a_1, a_2, \dots, a_n را عددهای مفروض بگیرید و فرض کنید:

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}$$

(a) داریم:

$$S_n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right) \geq 2n$$

(b) نابرابری $S_n \leq 3n$ با استقرای ریاضی ثابت می شود. برای این

منظور، ابتدا باید حالت $n=3$ را بررسی کرد و، در ضمن، توجه داشت که

بزرگترین عدد از بین عددهای a_1, a_2, \dots, a_n برابر است با مجموع دو

عدد مجاور خود.

۳۷۸. $A_1 A_2, B_1 B_2$ و $C_1 C_2$ ، نیمسازهای زاویه های مثلث $A_1 B_1 C_1$

هستند.

۳۷۹. پاسخ: $m = n = 0$.

اگر برابری $(3 + 5\sqrt{2})^n = (5 + 3\sqrt{2})^m$ برقرار باشد، آن وقت باید
برابری $(3 - 5\sqrt{2})^n = (5 - 3\sqrt{2})^m$ هم درست باشد. ولی این، ممکن
نیست، زیرا

$$0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1 \text{ و } 5\sqrt{2} - 3 > 1$$

۳۸۰. عددهای سطر اول را

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1} < \dots < a_n$$

و عددهای سطر دوم را

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \dots, a_{k_n}$$

فرض می‌کنیم. بنا بر این، عددهای سطر سوم، چنین اند:

$$a_1 + a_{k_1}, a_2 + a_{k_2}, \dots, a_m + a_{k_m}, \dots, a_n + a_{k_n}$$

$a_1 \neq a_{k_1}$ می‌گیریم. در این صورت، بد ازای مقداری از $m \geq 2$ داریم:

$a_1 = a_{k_m}$. بنا بر شرط مساله،

$$a_1 + a_{k_1} < a_m + a_{k_m}, a_2 + a_{k_2} < a_m + a_{k_2}, \dots$$

$$a_{m-1} + a_{k_{m-1}} < a_m + a_{k_m}$$

از آن جا به دست می‌آید:

$$a_{k_1} < a_m, a_{k_2} < a_m, \dots, a_{k_{m-1}} < a_m$$

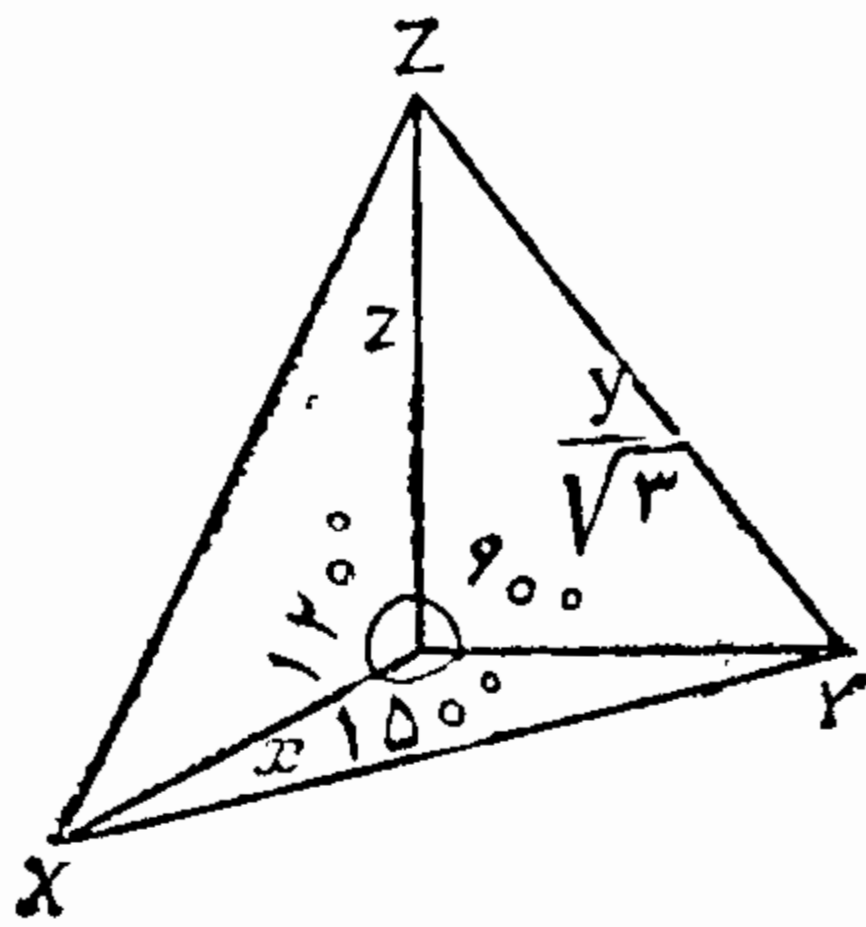
به جز این $a_1 < a_m$ و $a_{k_1} < a_m$. به m عدد مختلف کوچکتر از a_m می‌رسیم.

تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۸۱. در این جا بهتر است از يك پیش‌قضیه استفاده کنیم: اگر وتر

AB از دایره‌ای ثابت باشد، ولی دو انتهای وتر A_1B_1 روی این دایره
ببگذرد، آن وقت، مکان هندسی نقطه برخورد خط‌های راست AA_1 و BB_1 ،
دایره‌ای است که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

۳۸۲. پاسخ: $24/\sqrt{3}$.



شکل ۱۱۸

D را بر حسب مساحت مثلث XYZ بنویسید (شکل ۱۱۸).

۳۸۳. پاسخ: بله درست است.

در واقع، از آنجا که داریم: $f(-1) = 11$ و $g(-1) = -9$ ، بنابراین در لحظه‌ای، یکی از ریشه‌های سه جمله‌ای حاصل، برابر -1 بوده است.

۳۸۴. پاسخ: $\pi r^2 + 2pr - \frac{pr^2}{2R}$

۳۸۵. k را وزن سنگین‌ترین وزنه، و m را تعداد وزنه‌های به وزن

۱ بگیریید. در این صورت $m \geq k$. در هر لحظه، وزن وزنه‌های دو کفه، بیش از k با هم اختلاف ندارند. بنابراین، بعد از آن که همه وزنه‌های با وزن بیشتر از واحد را در ترازو گذاشتیم می‌توان کفه‌ها را با اضافه کردن وزنه با وزن واحد به حالت تعادل در آورد.

۳۸۶. در هر عدد اول مطلق، تنها رقم‌های ۱، ۳، ۷ و ۹ می‌توانند

شرکت کنند. برای هر عدد M ، یکی از عددهای

$$M + 1379, M + 3179, M + 9137, M + 7913,$$

$$M + 1397, M + 3197, M + 7139$$

بر ۷ بخش پذیر است. تناقض.

۳۸۷. پاسخ: $x = 9$ و $y = 0$ یا $x = 4$ و $y = 2$.

۳۸۸. اگر نقطه M در درون یا روی محیط مثلث $(M \neq P)PQR$

باشد، آن وقت $MQ + MR < PQ + PR$. نابرابری مورد نظر را کافی

است برای حالت $AB = CD$ ثابت کنیم.

۳۸۹. پاسخ: $x_n \rightarrow 0$ حد.

(به ازای $n \geq 1$ داریم: $|x_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^n$)

۳۹۰. جدول شطرنجی 1985×1986 را در نظر بگیرید که جدول 1983×1984 را دربر گرفته و با آن دارای یک مرکز باشد. خانه‌های سیاه مجاور خانه‌های سفیدی که در آن‌ها، عدد ۱ واقع باشد، روی مسیر بسته حرکت فیل شطرنج قرار دارند که، روی صفحه بزرگ از قطر بیش از یک بار نمی‌گذرد و مسیر حرکت خود را تنها روی مرز این صفحه بزرگ عوض می‌کند. روی صفحه شطرنجی 1984×1985 ، چنین مسیری وجود ندارد.

۳۹۱. بعد از ۴ گام، همه عددهای جدول، برابر واحد می‌شود.

۳۹۲. پاسخ: $\ln 1/01 > \frac{2}{201}$.

تابع $y = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ برای $x > 0$ ، صعودی است.

۳۹۳. پاسخ: $r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}$

۳۹۴. چنین مقطعی یا متوازی‌الاضلاع است و یا یک شش ضلعی که نسبت به مرکز متقارن است و محیط آن از $4a$ کمتر نیست (با بررسی گسترده مکعب، می‌توانید به این مطلب قانع شوید).

۳۹۵. A_1, B_1, C_1 را وسط ضلع‌ها و O را مرکز دایره محیطی مثلث ABC فرض کنید. پاره خط‌های OA_1, OB_1, OC_1 ، شش-ضلعی را به متوازی‌الاضلاع‌هایی تقسیم می‌کنند. بنابراین، مساحت شش-ضلعی، دو برابر مساحت مثلث $A_1 B_1 C_1$ است.

۳۹۶. پاسخ: وجود دارد.

اثبات، با روش استقرا. n را عددی k رقمی می‌گیریم که شامل m رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر باشد و، در ضمن، داشته باشیم $S(n^2) = m^2$. در این صورت، برای عدد $n_1 = 10^{k+1}n + 1$ که، در آن، k تعداد رقم‌های عدد n است، خواهیم داشت

$$S(n_1) = m + 1, \quad S(n_1^2) = (m + 1)^2$$

(در مسأله ما، داشتیم $m = 1000$).

۳۹۷. پاسخ: ۱۶.

همه مهره‌های دام را باید در صفحه شطرنجی 6×6 ، که مرکزی منطبق بر مرکز صفحه 8×8 دارد، قرارداد.

۳۹۸. پاسخ: n رنگ.

A ، B و C را سه رأس متوالی می‌گیریم. هر دو پاره خط از n پاره خط راست BA ، BC ، AC و $(n-3)$ قطری که از B گذشته‌اند، دارای نقطه مشترک‌اند. سپس، باید همه ضلع‌ها و قطرهای را که با ضلع

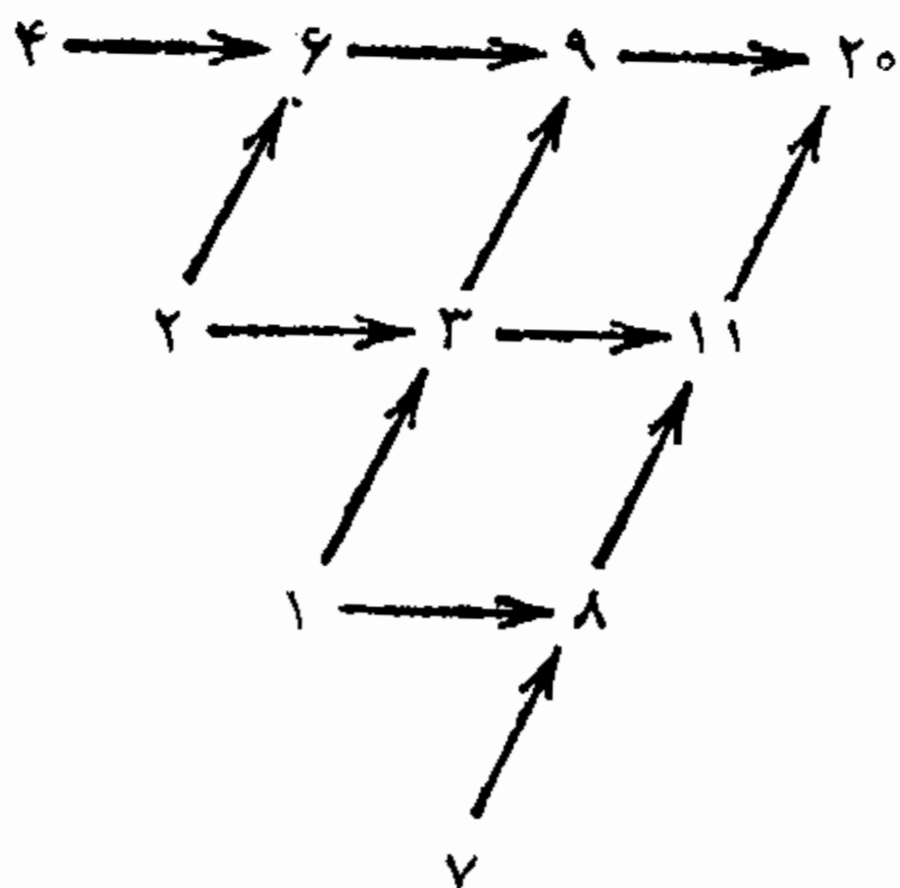
AB ، زاویه‌ای برابر $\frac{k \cdot 180^\circ}{n}$ می‌سازند ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)، به یک

رنگ درآورد.

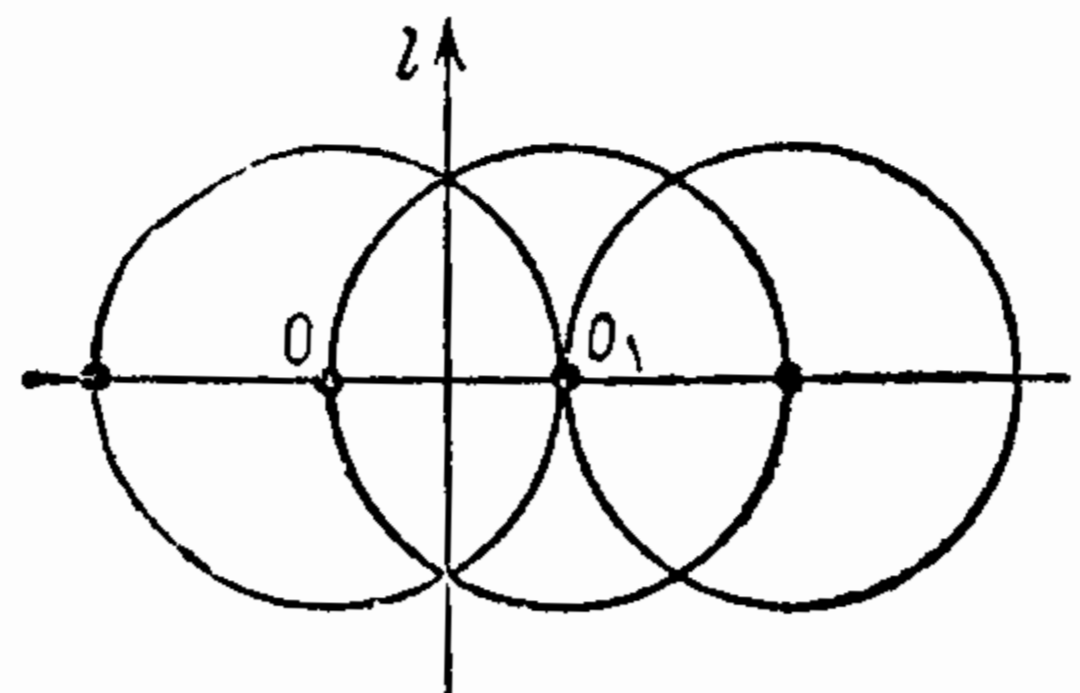
۳۹۹. $S_1(O) = O_1$ فرض می‌کنیم. به کمک تقارن S_1 و دوران به

مرکز O ، می‌توان نقطه O را به هر نقطه از محیط دایره ω به مرکز O_1 و شعاع $r = OO_1$ منتقل کرد. دایره ω را می‌توان به هر یک از دایره‌هایی که

در شکل ۱۱۹ نشان داده شده است، منجر کرد. به کمک دوران دور نقطه O ، زنجیره دایره‌ها، از تمامی صفحه عبور می‌کند.



شکل ۱۲۰



شکل ۱۱۹

۴۰۰. پاسخ: در دو نقطه.

اگر سه نقطه سازگار با شرط مساله وجود داشته باشد، آن وقت دو

تا از آنها، در يك طرف نقطه $x = -\frac{b}{2a}$ واقع می شوند. این باقی می ماند

که قدر مطلق تفاضل $y(x_1) - y(x_2)$ را ارزیابی کنیم.

۴۰۱. پاسخ: $d = 20$ (شکل ۱۲۰).

اگر $d < 20$ ، آن وقت

$$20 > d = 2(l+h) + a + l + h + k > 2(l+h) + 10$$

از آن جا $4 \leq l+h$ ، در ضمن، می توان فرض کرد $l < h$. از آن جا،

یا $l=1, h=2$ و یا $l=1, h=3$. و هر دو حالت، منجر به تناقض می شوند.

۴۰۲. $S_k = \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}}$ بگیریید. وقتی k به اندازه کافی

بزرگ باشد ($m < k$)، این نابرابری ها برقرارند:

$$S_k < k - \frac{1}{2} \quad ; \quad S_k - S_m < k - m - \frac{1}{2}$$

۴۰۳. پاسخ: $x = m\pi$ و $y = n\pi$ ($m, n \in \mathbf{Z}$).

از شرط، نتیجه می شود: $|\sin x| + |\sin y| \leq |\sin x| \cdot |\sin y|$.

۴۰۴. O و X را دو نقطه از صفحه و $\vec{x} = \vec{OX}$ فرض کنید. بنا بر

شرط داریم:

$$\mathbf{e} + \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} + \mathbf{b}_1 = 2\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} + \mathbf{c}_1 = 2\mathbf{d},$$

$$\mathbf{d} + \mathbf{d}_1 = 2\mathbf{e}$$

با حل این دستگاه، بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ و \mathbf{e} به دست می آیند.

۴۰۵. اگر $T = 2' \cdot q$ (عددی فرد) دوره تناوب این دنباله باشد،

آن وقت، به ازای $q = 4m + 3$ و $k \geq p + 2$ داریم:

$$1 = a_{4k} = a_{4k+1} = 0$$

که يك تناقض است. و همچنین، به ازای $q = 4m + 1$:

$$1 = a_{4k} = a_{4k+3} = 0$$

که باز هم، يك تناقض است.

۴۰۶. اگر همه این خط‌های راست موازی باشند، درستی حکم روشن است. m_2, m_3, \dots, m_k را، به ترتیب تعداد حوزه‌های رنگ‌خورده‌ای می‌گیریم که دارای ۲، ۳، ...، k ضلع‌اند. در این صورت $m_2 \leq n$. به جز این، هر خط راست، به وسیله بقیه خط‌های راست، به بیش از n بخش تقسیم نمی‌شود، به نحوی که، تعداد کل بخش‌های خط‌های راست، از n^2 تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$$2m_2 + 3m_3 + \dots \leq n^2$$

و سرانجام

$$m_2 + m_3 + \dots + m_k + \dots \leq \frac{m_2}{2} + \frac{2m_2 + \dots + km_k}{3} \leq \frac{n(n+1)}{3}$$

۴۰۷. A و B را، رنگ‌های کف و سرپوش قوطی می‌گیریم. دو وجه روبه‌روی مکعب را با دو رنگ دیگر C و D رنگ می‌کنیم. مکعب را طوری در قوطی قرار می‌دهیم که، وجه به رنگ D ، مجاور کف قوطی، و وجه به رنگ E از مکعب، مجاور وجه به رنگ F از قوطی باشد.

۴۰۸. مثلث‌های A_1MN ، A_2A_3N و NA_3O ، متساوی‌الساقین‌اند.

۴۰۹. اگر چهار عدد (a_n, b_n, c_n, d_n) ، از چهار عدد مفروض و بعد

از n گام به دست آمده باشند ($n \geq 1$)، آن وقت باید داشته باشیم:

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 0$$

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2)$$

۴۱۰. هر جمله $|a_k - b_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$)، برابر است با تفاضل

دو عدد که یکی از n بزرگتر است و دیگری از n تجاوز نمی کند. بنابراین

$$|a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n| = (n+1) + (n+2) + \dots \\ \dots + 2n - (1 + 2 + \dots + n) = n^2$$

۴۱۱. تعداد مکعب های رنگ خورده، یکی از پنج عدد زیر است :

۶۰، ۷۲، ۸۴، ۹۰، ۱۲۰.

مکعب مستطیل را $m \times n \times k$ فرض کنید ($k \leq n \leq m$). تعداد

وجه های رنگ نشده، برابر است با $(m-1)(n-1)(k-1)$. بنا بر شرط

$$mnk = 2(m-1)(n-1)(k-1)$$

از این جا نتیجه می شود: $2 < k < 5$ برای این باقی می ماند که معادله را

برای $k=3$ و $k=4$ ، در مجموعه عددهای درست مثبت حل کنیم.

۴۱۲. اگر P را وسط وتر مشترک دو دایره بگیریم، نقطه K ، قرینه

نقطه C نسبت به P ، روی محیط دایره ای قرار دارد که از رأس A می گذرد

و $AKMD$ یک متوازی الاضلاع است، به نحوی که مثلث های AKM و

AMD برابرند.

۴۱۳. فرض کنید، عددهای a و b ($a < b$) در دو گره مجاور A و B

از شبکه واقع باشند. وقتی که از A به سمت B حرکت می کنیم، پیکان

کوچکی به طرف چپ AB قرار می دهیم (شکل ۱۲۱).

اگر عددهای واقع در رأس های مثلث، در جهت حرکت عقربه های

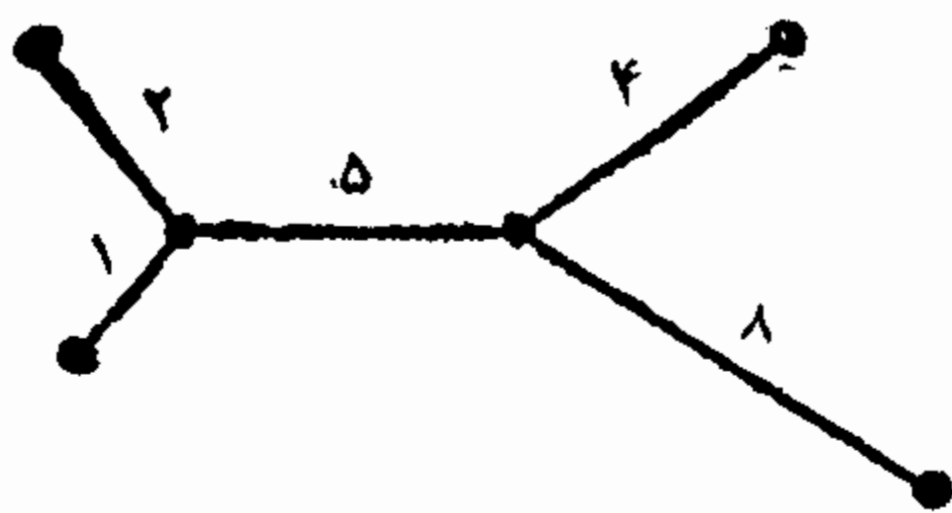
ساعت، به ترتیب صعودی باشند، آن وقت در داخل مثلث ۲ پیکان ظاهر

می شود؛ و اگر این عددها، در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت، به

ترتیب صعودی باشند، در داخل مثلث، یک پیکان وجود خواهد داشت. n را

تعداد مثلث های نوع اول می گیریم. تعداد کل پیکان ها، در داخل شش ضلعی،

برابر است با



شکل ۱۲۲



شکل ۱۲۱

$$N = 2n + 24 - n = n + 24$$

کافی است توجه کنیم که $N \geq 31$ (۳۰ پیکان از پاره‌خط‌های راست درونی و، دست کم یکی، از مرزها).

۴۱۴. پاسخ: ۳.

داریم: $\frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{x+1} - 1$. بنابراین، برای

$x = 1$ ، کسر مفروض، برابر $\sqrt{x+1} - 1$ می‌شود.

$$۴۱۵. \text{ پاسخ: } \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

۴۱۶. مستطیلی با شرط مساله سازگار است که، برای ضلع‌های آن

x و y ($x < y$) داشته باشیم:

$$xy > m \text{ و } x(y-1) < m$$

این دستگاه، برای $m > 12$ جواب دارد:

$$\text{به ازای } m = k^2 : x = k - 1 \text{ و } y = k + 2 ;$$

$$\text{به ازای } k^2 < m < k(k+1) : x = k \text{ و } y = k + 1 ;$$

$$\text{به ازای } m = k(k+1) : x = k - 1 \text{ و } y = k + 3 ;$$

$$\text{به ازای } k(k+1) < m < (k+1)^2 : x = y = k + 1 .$$

$$۴۱۷. \text{ پاسخ: } \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

دایره‌های مفروض، روی دو کره هم‌مرکز قرار دارند: کره محیط بر-

مکعب و کره محاط در آن. حداقل فاصله مورد نظر، برابر است با تفاضل شعاع‌های این دو کره.

۰۴۱۸. اگر x_1 و x_2 را ریشه‌های معادله بگیریم، داریم:

$$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

۰۴۱۹. اگر مربع سبز را در طول یکی از ضلع‌های آن، انتقال موازی

بدهیم، مجموع ضلع‌های سبز هشت ضلعی تغییر نمی‌کند، و وقتی که مرکز مربع‌های سبز قرمز، بر هم منطبق باشند، مجموع ضلع‌های سبز برابر مجموع ضلع‌های قرمز است.

۰۴۲۰. پاسخ: وقتی BM ارتفاع مثلث باشد.

۰۴۲۱. پاسخ: a می‌توان (شکل ۱۲۲) b نمی‌توان.

اگر چنین شبکه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت، یکی از عددهای n یا

$n - 2$ مجذور کامل است.

شهری مثل A را انتخاب می‌کنیم و آن را «خوب» می‌نامیم. به

شهری «خوب» گفته می‌شود که طول مسیر A و B زوج باشد و، در حالتی

که طول این مسیر عددی فرد باشد، به آن «بد» می‌گویند. تعداد شهرهای

«خوب» را x و تعداد شهرهای «بد» را y می‌گیریم $(x + y = n)$. تمامی

شبکه، دارای y زوج شهر است که، در آن‌ها، یک شهر «خوب» و دیگری

«بد» است. توجه کنید: در بین عددهای $1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ ، عدد فرد

وجود دارد. اگر n عددی فرد باشد، آن وقت

$$n = n^2 - 4xy = (x - y)^2$$

و اگر n عددی زوج باشد، آن وقت

$$n = (x - y)^2 + 2$$

۰۴۲۲. برابری $AC \cdot BD = BD^2 \sqrt{2}$ ممکن نیست (AC, BD)

و BD^2 ، عددهای درستی هستند.

۴۲۳. فرض کنید: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$ که در آنها، $a_1 \geq 3$

عددی فرد و بقیه a_i ها ($i = 2, \dots, n-1$) زوج باشند. فرض کنید:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 2k + 1 \text{ و } a_n = k$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (k+1)^2$$

به همین ترتیب، عددهای $b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1}$ را در نظر می‌گیریم که،

در آنها، $b_1 > 2a_n$ عددی فرد و بقیه عددهای b_2, \dots, b_{m-1} زوج باشند و،

در ضمن $b_{i+1} > b_i a_n$ و $b_m = S$ که در آن،

$$2S + 1 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{m-1}^2$$

جدول مورد نظر، از این راه به دست می‌آید که در خانه محل برخورد

زامین سطر و زامین ستون، عدد a_i^2 را قرار دهیم.

۴۲۴. O_1 و O_2 را مرکزهای دو دایره مفروض بگیرید و O_3

را طوری انتخاب کنید که چهارضلعی $AO_1O_2O_3$ متوازی‌الاضلاع باشد.

نقطه O_3 مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

(b) پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از محیط دایره به مرکز O_2

(از دایره دوم) و با شعاعی برابر با شعاع دایره اول، به جز دو نقطه P^* و O^*

که با انتقالی که O_1 را به O_2 می‌رساند، از دو نقطه P و Q به دست

آمده‌اند.

۴۲۵. گره‌های شبکه را با عددهای ۰ و ۱ و ۲ طوری شماره گذاری

می‌کنیم که: الف) در رأس‌های هر مثلث کوچک، هر سه عدد باشند؛ ب) در

رأس‌های شش ضلعی عددهای ۰ و ۱ قرار گرفته

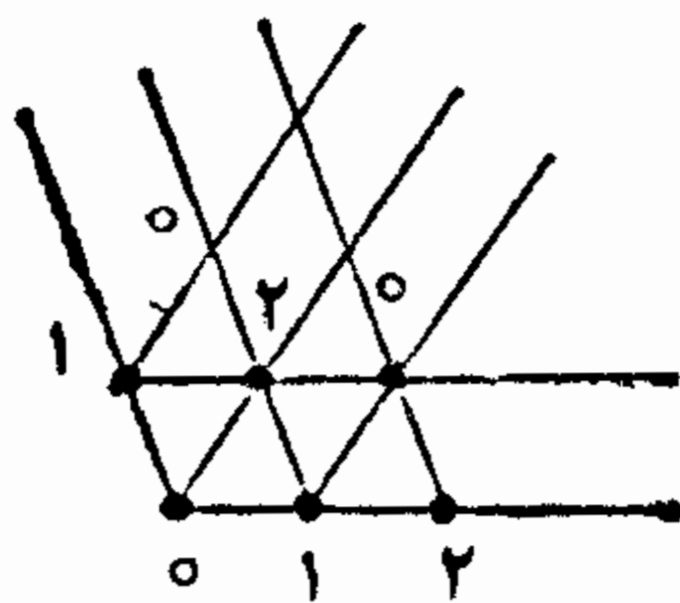
باشند (شکل ۱۲۳). مجموع همه عددهای واقع

در گره‌های شبکه، در تقسیم به ۳، به باقی مانده ۲

می‌رسد. P ، Q و R را رأس‌های هر مثلث متساوی-

الاضلاعی می‌گیریم که در هر گره‌های شبکه واقع

باشند. اگر در رأس‌های P و Q عددهای مساوی



شکل ۱۲۳

با هم وجود داشته باشد، آن وقت، همین عدد، در رأس R هم خواهد بود. اگر در رأس های P و Q ، دو عدد مختلف واقع باشند، آن وقت، عدد سوم، در رأس R قرار می گیرد. در هر حالت، مجموع عددهای رأس های P ، Q و R بر ۳ بخش پذیر است. بنابراین در هر حال، مجموع عددهایی که رنگ نخورده اند، در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۲ می رسد.

۴۲۶. پاسخ: ۱ و ۹.

اگر عدد $n = m^2$ دارای $m > 1$ مقسوم علیه باشد، آن وقت m عددی فرد است ($m = 2k + 1$)، و n درست k مقسوم علیه کوچکتر از m دارد و، بنابراین، بر $2k - 1$ بخش پذیر است.

۴۲۷. می توان فرض کرد: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. نابرابری مطلوب، نتیجه ای از ارزیابی های زیر است:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{a_1};$$

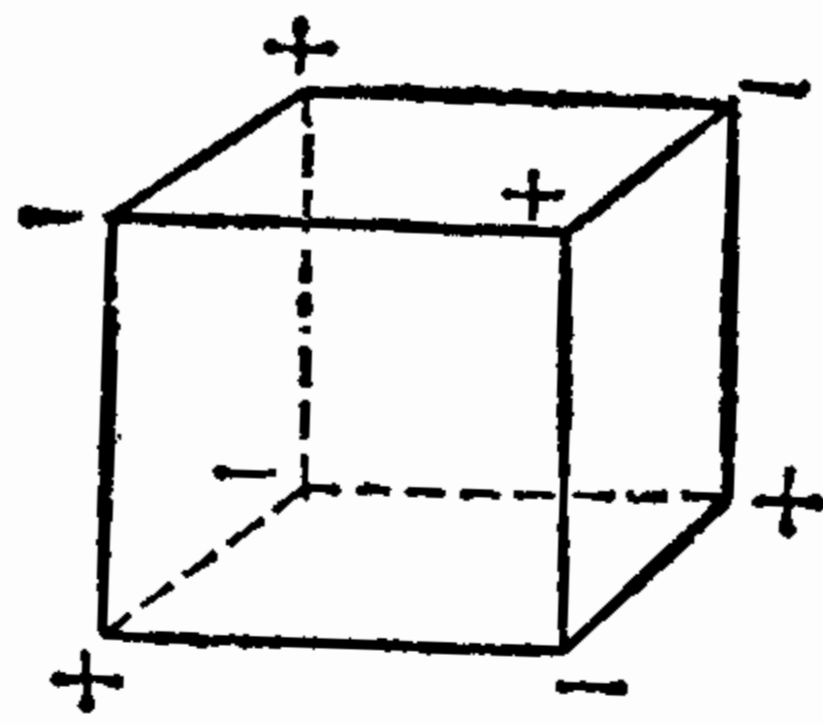
$$\frac{2k - 1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1}} \leq \frac{2k - 1}{a_k + \dots + a_{2k-1}} \leq$$

$$\leq \frac{2k - 1}{k \cdot a_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}} \quad \left(2 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \right);$$

$$\frac{2k}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}} \leq \frac{2k}{a_{k+1} + \dots + a_{2k}} \leq \frac{2}{a_k}$$

۴۲۸. پاسخ: AB ، AC ، نیمساز زاویه BAC ، مماس بر دایره محیطی مثلث ABC در نقطه A ، مماس بر دایره محیطی مثلث AB_1C در نقطه A (B_1 ، قرینه B نسبت به A است).

۴۲۹. موقعیت مورد نظر را می توان به این ترتیب به دست آورد که، ابتدا، تنها عددهای صفر را قرار دهیم و، سپس، دو عمل زیر را مرتباً تکرار کنیم: الف) جای دو قشر از مکعب های واحد را، که با وجهی از مکعب موازی اند، عوض کنیم؛ ب) عددی را به عددهای واقع در اس های مکعب اصلی اضافه کنیم و جلو آنها، علامت «+» را قرار دهیم و، همراه با آن،



شکل ۱۲۴

علامت عدد را، از عددهای راس‌ها کم کنیم و با علامت «-» قرار دهیم (شکل ۱۲۴).

۴۳۰. پاسخ: $x=3, y=2, z=1, n \geq 2, x=6$

$x=8, y=8, z=4, n \geq 2, x=8, y=3, z=7, n=2$

۴۳۱. O و O' را دو نقطه مفروض می‌گیریم و، برای مشخص بودن

وضع، فرض می‌کنیم، نقطه O' ، در درون یا روی ضلع‌های مثلث OA_1A_2 واقع باشد. در این صورت داریم:

$$O'A_1 + O'A_2 < OA_1 + OA_2 \text{ و } O'A_i - OA_i \leq 1$$

$$(i = 3, 4, \dots, 12)$$

۴۳۲. پاسخ: بله، می‌توان.

باید در یکی از لیوان‌ها ۲۰۰ گرم و در هر یک از لیوان‌های دیگر

۱۰۰ گرم شیر ریخت.

۴۳۳. پاسخ: a ؛ b $\frac{5000}{4999}$

(a) در تقارن نسبت به مرکز مستطیل، رنگ‌ها جای خود را عوض

می‌کنند.

(b) باید تصویرهای پاره‌خط‌های راست سفید و سیاه را، روی یکی از

ضلع‌های مستطیل، مورد بررسی قرارداد.

۴۳۴. (a) O را مرکز دایره محیطی چندضلعی می‌گیریم. در این صورت

$$\vec{MA}_i = \vec{MO} + \vec{OA}_i$$

و کافی است، در مجموع، علامت «+» را جلو جمله‌های با شماره زوج، و علامت «-» را جلو بقیه جمله‌ها قرار داد.

(b) فرض کنید، در مجموع مورد نظر مسا، $\vec{MA}_{i_1}, \vec{MA}_{i_2}, \dots$ ،

\vec{MA}_{i_k} با علامت «+» و $\vec{MA}_{j_1}, \vec{MA}_{j_2}, \dots, \vec{MA}_{j_{n-k}}$ با علامت «-» آمده باشند. اگر مجموع برابر ۰ باشد، آن وقت

$$\vec{MO} = \frac{1}{n-2k} \left(\vec{OA}_{i_1} + \vec{OA}_{i_2} + \dots + \vec{OA}_{i_k} - \vec{OA}_{j_1} - \dots - \vec{OA}_{j_{n-k}} \right)$$

و با این شرط، M به صورت یک ارزشی به دست می‌آید.

۴۳۵. پاسخ: (a) ۱ به ازای $n=3$ ؛ $1 - (n-1)^2$ به ازای $n \geq 4$ ؛

(b) $n-2$ ؛

۴۳۶. کافی است درستی این نابرابری را، برای هر مقدار x ثابت

کنیم:

$$|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > \frac{8}{5}$$

۴۳۷. بین عددهای از ۱ تا ۱۹۸۶، درست دو عدد بر 3^6 بخش پذیرند:

$$729 = 3^6 \quad \text{و} \quad 1458 = 2 \times 3^6$$

اگر مجموع همه کسرها، به جز $\frac{1}{729 \times 1458}$ را به یک مخارج

تبدیل کنیم، به کسری به صورت $\frac{a}{3^{11} \times b}$ می‌رسیم که، در آن b بر ۳ بخش-

پذیر نیست.

۴۳۸. هر مماسی مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده φ و مساحت

$$1 - \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi + 1} \leq (\sqrt{2} - 1)^2$$

را قطع می کند. مساحت S ، بخش مشترک مربع و مثلث، در این نابرابری صدق می کند:

$$S \geq 4 - 3(\sqrt{2} - 1)^2 > 3/4$$

۴۳۹. پاسخ: $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

هر مقدار $m = 0, 1, 2, \dots$ را متناظر با $P_m(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + 2b_i)x^i$

قرار می دهیم که، در آن، a_i و b_i ، به ترتیب، عبارتند از رقم های عدد های $n - 2m$ و m در عدد نویسی به مبنا ۲. در این صورت، هر چند جمله ای $P_m(x)$ «مجاز» است و، برعکس، هر چند جمله ای «مجاز»، منطبق بر یکی از $P_m(x)$ هاست.

۴۴۰. A_1, B_1, X_1, Y_1 را، به ترتیب نقطه های تماس کره با وجه های ABX و YAB ، XYA ، BXY مثلث های XA_1B و XY_1B ، همچنین مثلث های AY_1X و AB_1X و غیره، با هم برابرند. با استفاده از این برابری ها، می توان ثابت کرد که، مجموع زاویه های چهار ضلعی فضایی $AXBY$ برابر است با

$$\widehat{AY_1B} + \widehat{AX_1B} = 2\widehat{AX_1B}$$

و نتیجه گرفت که $\widehat{AY_1B} + \widehat{AX_1B}$ ، به X و Y بستگی ندارد.

۴۴۱. داریم:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_{10} + y_{10} = 9,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = y_1 + y_2 + \dots + y_{10}$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_{10}^2 &= \\ = 9(x_1 + x_2 + \dots + x_{10} - y_1 - y_2 - \dots - y_{10}) &= 0 \end{aligned}$$

۴۴۲. پاسخ: ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲.

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ را وزن وزنه‌ها بگیرد. روشن است که
 $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ و $x_3 = 4$. اگر برای هر $k \leq m$ داشته باشیم
 $x_k = 2^{k-1}$ ، آن وقت، $x_{m+1} = 2^m$ ، زیرا بیشترین وزنی را که می‌توان با
 وزنه‌های $1, 2, \dots, 2^{m-1}$ وزن کرد، برابر است با $2^m - 1$.

۴۴۳. نقطه برخورد $A_1 A_2$ و $A_3 A_4$ را B بگیرد. مثلث $B A_3 A_1$
 متساوی‌الساقین است و دو مثلث $A_2 B A_3$ و $A_1 B A_4$ متشابه‌اند.

۴۴۴. پاسخ: (a) ۱۲ شلیک؛ (b) ۲۵ شلیک.

(a) در مربع 7×7 می‌توان ۱۲ مستطیل 1×4 را جا داد، بدون
 این که روی هم قرار گیرند؛ (b) باید به هر مستطیل 3×4 ، ۵ شلیک کرد.
 ۴۴۵. داریم:

$$2(1^{1987} + 2^{1987} + \dots + n^{1987}) = 2 + (n^{1987} + 2^{1987}) + \\ + \dots + (2^{1987} + n^{1987}) = 2 + (n+2)M$$

۴۴۶. پاسخ: (a) شکل ۱۱. باید در هر جدول 2×2 ، دست کم دو
 خانه را پوشاند.

(b) حکم برای مربع 7×7 درست است. اگر حکم برای مربع
 $(6n+1)(6n+1)$ درست باشد، آن وقت، در یکی از گوشه‌های مربع
 $(6n+7)(6n+7)$ ، مربع $(6n+1)(6n+1)$ را قرار می‌دهیم و
 یک خانه آن را جدا می‌کنیم؛ سپس، بخش باقی‌مانده را به مستطیل‌های
 2×3 تقسیم می‌کنیم.

۴۴۷. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ را نقطه‌های برخورد امتداد
 ضلع‌ها، با خط‌های راست موازی با آن‌ها فرض می‌کنیم. نقطه‌های B_1 و B_2
 روی محیط دایره‌ای واقع‌اند که بر دوزنقه متساوی‌الساقین $A_1 A_2 C_1 C_2$
 محیط است.

۴۴۸. اگر حکم مساله درست نباشد، هر خط راستی که شامل ضلعی
 از یک خط شکسته است، ضلع‌های خط شکسته دیگر را، در نقطه‌های داخلی
 آن قطع می‌کند و تعداد چنین نقطه‌هایی، عددی زوج است.

۴۴۹. پاسخ: ۱۲۱، ۲۴۱، ۳۶۱، ۴۸۱، ۶۰۱.

شرط مساله ، برای هر گروهی از n عدد $a_i = i \cdot n! + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) برقرار است. مجموع هر k عدد از این گروه، بر k بخش پذیر است.

۴۵۰. F را نقطه برخورد قطرهای BD و CE بگیرید. نقطه‌های A, E, D, F, A روی محیط یک دایره اند. نقطه‌های A, B, C, F هم روی محیط یک دایره قرار دارند.

۴۵۱. پاسخ: $(k \in \mathbf{Z}) \alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

اگر α با شرط مساله سازگار باشد، آنوقت $\cos \alpha \leq -\frac{1}{4}$ (در غیر این صورت $\cos^2 \alpha > 0$). بد همین ترتیب، برای هر عدد طبیعی n ، باید داشته باشیم: $\cos 2^n \alpha \leq -\frac{1}{4}$. از آنجا $\frac{3}{4} \geq \left| \cos 2^n \alpha - \frac{1}{4} \right|$ ولی در این صورت

$$\begin{aligned} \left| \cos 2^n \alpha + \frac{1}{4} \right| &= 2 \left| \cos 2^{n-1} \alpha - \frac{1}{4} \right| \cdot \left| \cos 2^{n-1} \alpha + \frac{1}{4} \right| \geq \\ &\geq \frac{3}{4} \left| \cos 2^{n-1} \alpha + \frac{1}{4} \right| \end{aligned}$$

و به این ترتیب، به ازای هر مقدار n :

$$\begin{aligned} \left| \cos \alpha + \frac{1}{4} \right| &\leq \frac{2}{3} \left| \cos 2 \alpha + \frac{1}{4} \right| \leq \dots \\ \dots &\leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \left| \cos 2^n \alpha + \frac{1}{4} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

که از آنجا نتیجه می‌شود: $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

۴۵۲. داریم:

$$\begin{aligned} k^3 &= (a+A)(b+B)(c+C) = \\ &= abc + ABC + k(aB + bC + cA) \end{aligned}$$

۴۵۳. خانه گوشه بالا و سمت چپ جدول را جدا می‌کنیم. سپس، این حوزه‌ها را در نظر می‌گیریم: مربع گوشه‌ای 3×3 بدون این خانه، مربع 5×5 بدون مربع 3×3 ، مربع 7×7 بدون مربع 5×5 و غیره. مجموع عددها، در هر یک از این حوزه‌ها، از ۲ بیشتر نیست.

۴۵۴. فرض کنید، نیمساز زاویه ABC و خط راست l - قرنیۀ نیمساز نسبت به مرکز دایره - خط راست PM را، به ترتیب، در نقطه‌های L و N قطع کنند. در این صورت

$$NP = KL = LM, \quad PM = LN$$

۴۵۵. پاسخ (a و b): آغاز کننده بازی، برنده می‌شود. (a) مثلاً، اولی، در حرکت اول خود، عدد ۶ را می‌نویسد. نفر دوم، تنها می‌تواند یکی از شش عدد زیر را بنویسد، که مسا آن‌ها را به صورت زوج عددها نوشته‌ایم:

$$(4, 5), (7, 8), (9, 10)$$

اولی باید در پاسخ هر حرکت دومی، عدد دیگر همان زوج را بنویسد. (b) بازی تازه‌ای در نظر می‌گیریم: قانون همان است، ولی واحد در بین عددها وجود ندارد. اگر در این بازی تازه، طرحی برای برد اولی وجود دارد، از همان طرح استفاده می‌کند؛ ولی اگر در بازی جدید می‌توان طرحی برای برد دومی ریخت، آن وقت، اولی در حرکت اول خود، عدد ۱ را می‌نویسد و، سپس، از همان طرح دومی استفاده می‌کند.

۴۵۶. پاسخ: بعد از ۷ روز.

k را تعداد روزها برای حالتی می‌گیریم که تعداد نگهبان‌ها ۹ نفر باشند و l را تعداد روزها، برای حالتی که تعداد نگهبان‌ها ۱۰ نفر باشند؛ در ضمن، هر کدام از آن‌ها m بار نگهبانی داده‌اند. به این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$9k + 10l = 33m$$

به ازای $m = 1$ جوابی به دست نمی‌آید و به ازای $m = 2$ داریم:

$$k = 4 \quad \text{و} \quad l = 3$$

۴۵۷. اگر تعداد نقطه‌های علامت‌دار محدود باشد، آن وقت اگر از گره بالا و سمت راست، همه بردارها را قرار دهیم، معلوم می‌شود که بردارهای (x, y) با شرط $y > 0$ و $x > 0$ و $y = 0$ ، بیشتر از بقیه بردارها هستند. ولی اگر همه بردارها را از گره پایین و سمت چپ در نظر بگیریم، تعداد آنها، کمتر از تعداد بقیه درمی‌آید.

۴۵۸. زاس‌های $A_{p-1}, A_p, A_1, A_2, A_3, A_4$ و از p ضلعی مفروض را در نظر می‌گیریم. قطرهای $A_1 A_3, A_2 A_4, A_3 A_5, A_4 A_6, \dots, A_{p-1} A_1$ را رسم می‌کنیم. B_1 و B_2 را نقطه برخورد قطر $A_2 A_4$ با قطرهای $A_1 A_3$ و همچنین B_3 و B_4 را نقطه برخورد $A_3 A_5$ با همان قطرها فرض می‌کنیم. (اگر $p = 5$ ، آن وقت $B_4 = A_4$).

از برابری مساحت‌ها، نتیجه می‌شود: $A_1 B_2 = B_2 B_3$ و $B_1 B_2 = B_2 A_2$. بنابراین $A_1 A_4 \parallel A_2 A_{p-1}$. تناقض.

۴۵۹. $T_p(n)$ را مجموعه همه عددهایی از T_p که کوچکتر از (2^n) باشند، و $N_p(n)$ را تعداد عددهای آن می‌گیریم، هر عدد از $T_p(n)$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\beta_0 + \beta_1(2^1)! + \beta_2(2^2)! + \dots + \beta_{n-1}(2^{n-1})!$$

از $A_p(n)$ را بزرگترین عدد از ضریب‌های $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ بین همه عددهای $T_p(n)$ فرض می‌کنیم. برای هر k ($k = 0, 1, \dots, n-1$)، ضریب $(2^k)!$ بیش از $A_p(n)$ مقدار مختلف قبول نمی‌کند. بنابراین

$$N_p(n) \leq (A_p(n))^n$$

دیگر کافی است، پیش‌قضیه‌های زیر را ثابت کنیم:

$$A_{p+1}(n) \leq A_p(n) \cdot N_p(n) \leq (A_p(n))^{n+1} \quad (1)$$

$$A_{1987}(n) \leq 2^{(n+1)1987} \quad (2)$$

$$2^{(n+1)1987} < (2^n)! \quad (3) \quad (\text{به ازای مقداری از } n)$$

$$(4) \quad (2^n)! > 2^{2^n} \quad (\text{به ازای } n \geq 2)$$

$$(5) \quad 2^n > (n+1)^{1987} \quad (\text{به ازای مقداری از } n).$$

۴۶۰. اگر $f(0) = a$ ، آن وقت $f(-a) = 0$ و $f(0) = -a$ به نحوی که $f(0) = 0$. برابری $f(x_0) = x_0$ ، برای $x_0 \neq 0$ ممکن نیست.
(b) پاسخ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ -\frac{x}{2} & (4^k \leq |x| < 2 \times 4^k) \\ 2x & (2 \times 4^{k-1} \leq |x| < 4^k) \end{cases}$$

۴۶۱. A را راس چند وجهی و AA_1, AA_2, \dots, AA_n را یال‌های خارج شده از راس A می‌گیریم. یال AA_1 را آبی و بقیه یال‌ها را قرمز می‌کنیم. سپس، همه ضلع‌های خط شکسته $A_1A_2 \dots A_n$ را به رنگ آبی درمی‌آوریم و یال A_1A_2 را به رنگ قرمز. پشت سرهم، وجه‌هایی را که به بخش‌های رنگ خورده چندوجهی متصل‌اند، اضافه می‌کنیم. اگر دو یال از وجه دارای رنگ باشند، یال سوم را به رنگ دلخواه درمی‌آوریم؛ ولی اگر تنها یک یال آن رنگ داشته باشد، آن وقت دو یال دیگر را با رنگ‌های مختلف رنگ می‌کنیم.

۴۶۲. دازیم :

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n - 1 = \frac{a_3}{(2n)^3} + \frac{a_5}{(2n)^5} + \dots$$

که در آن a_3, a_5, \dots ، عددهایی مثبت‌اند.

ضمیمه

۱. روش استقرای ریاضی

روش استقرای ریاضی، که برای اثبات درستی يك گزاره به ازای هر عدد طبیعی n به کار می رود، بر نظام زیر استوار است: اگر گزاره‌ای برای $n = 1$ درست باشد و، در ضمن، از درستی آن برای $n = k$ ، بتوان درستی گزاره را برای $n = k + 1$ نتیجه گرفت، آن وقت، این گزاره، برای هر مقدار طبیعی n درست است. (اصل استقرای ریاضی). گاهی درستی گزاره n به کمک درستی گزاره یا گزاره‌هایی کوچکتر از n ثابت می شود؛ در این حالت، اصل استقرای ریاضی به این صورت است: اگر گزاره‌ای برای $n = 1$ و (به ازای $n > 1$) برای هر $k < n$ درست باشد، آن وقت برای $k = n$ هم درست است. گاهی بهتر است استقرای را، نه از $n = 1$ ، بلکه از $n = 0$ یا از عددی مثل $n = n_0$ آغاز کنیم. نظام استقرای ریاضی، بر این اصل موضوع تکیه دارد: در هر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی، کوچکترین عضو وجود دارد (مسأله ۱۱ را ببینید).

گاهی روش استقرای ریاضی، به صورتی «نیمه پنهانی» در استدلال وجود دارد. مثلاً اثبات اتحاد

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

منجر به این می شود که ابتدا آن را برای $n = 1$ مورد تحقیق قرار دهیم و،

سپس، «گام استقرائی» را به این ترتیب برداریم. اگر داشته باشیم:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

آن وقت

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

در واقع، همین استدلال را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد (n گام نخستین استقرار را با هم برداریم):

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) =$$

$$= 1 + (4 - 1) + (9 - 4) + \dots + [(n + 1)^2 - n^2] = (n + 1)^2$$

مساله‌های ۵، ۱۵، ۲۶، ۳۶، ۴۹، ۵۲، ۷۲، ۷۶، ۷۷، ۹۰، ۹۷، ۱۰۰،

۱۰۲، ۱۱۰، ۱۱۳، ۱۲۰، ۱۳۷، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۴،

۱۷۶، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۹۳، ۲۰۳، ۲۱۰، ۲۱۸، ۲۲۳،

۲۲۹، ۲۳۱، ۲۴۰، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۶۰، ۲۶۷، ۳۵۴، ۳۶۷،

۳۹۶، ۴۴۶ (b)

همچنین مساله‌های ۱۵۵، ۲۰۰، ۲۷۷ که اندیشه‌های خاصی در حل

آنها به کار رفته است.

۲. عددهای درست. بخش پذیری

در بسیاری از مساله‌های مربوط به عددهای درست، از مفهومی و

قضیه‌های بخش پذیری استفاده می‌شود. هر عدد درست a را می‌توان، ضمن

تقسیم بر عدد طبیعی m ، به صورت $a = mq + r$ نوشت که، در آن، q و r

عددهایی درست اند و $0 \leq r < m$.

بین هر m عدد درست متوالی، درست یک عدد پیدا می‌شود که بر

m بخش پذیر است. اگر دو عدد a و b ، در تقسیم بر عدد m ، به یک باقی مانده

برسند، می‌گویند a با b ، نسبت به مدول m ، هم‌نهشت است و به این صورت

نشان می‌دهند:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

اگر a و b عددهایی طبیعی و $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$)، آن وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد b و r یکی است؛ اگر این بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک را d بنامیم، می‌توان آن را با چند بار استفاده از گزاره بالا، و به عنوان آخرین باقی‌مانده غیر صفر، در زنجیره تقسیم‌های زیر به دست آورد:

$$a = bq + r, \quad b = r_1q_1 + r_1, \quad r = r_1q_2 + r_2, \quad r_1 = r_2q_3 + r_3, \dots$$

$$\dots, \quad r_{n-1} = r_nq_{n+1} + d, \quad r_n = dq_{n+2}$$

(روش تقسیم‌های متوالی: الگوریتم اقلیدس)؛ از این جا نتیجه می‌شود: عددهای درست x و y وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم: $d = ax + by$. در حالت خاصی که a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی، مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از واحد نداشته باشند)، آن وقت می‌توان عددهای درست x و y را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$ax + by = 1$$

(مسألة ۶۸ را ببینید).

هر عدد طبیعی را، تنها به یک طریق می‌توان به صورت ضرب عامل‌های اول نوشت (قضیه اصلی حساب). تعداد عددهای اول بی‌نهایت است. اثبات این گزاره، به وسیله اقلیدس، بر این اساس است که: اگر به حاصل ضرب چند عدد اول، یک واحد اضافه کنیم، عددی به دست می‌آید که مقسوم‌علیهی غیر از همه این عددهای اول دارد.

اگر عددهای b_1, b_2, \dots, b_n دو به دو نسبت به هم اول باشند، آن وقت، برای هر باقی‌مانده r_1, r_2, \dots, r_n ($0 \leq r_i < b_i$) می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که ضمن تقسیم بر b_i به باقی‌مانده r_i برسد، یعنی

$$a \equiv r_i \pmod{b_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(قضیه چینی درباره باقی‌مانده‌ها).

مسأله‌های ۳، ۹، ۱۶، ۳۰، ۳۶، ۴۲، ۴۶، ۴۸، ۵۱، ۵۹، ۶۸، ۷۴،

۸۵، ۸۸، ۸۹، ۹۳، ۱۰۲، ۱۰۷، ۱۲۲، ۱۳۷، ۱۴۱، ۱۶۲

۱۹۰، ۲۳۳، ۲۵۴، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۸۸، ۳۰۶، ۳۱۶، ۳۲۲،
 ۳۵۲، ۳۶۰، ۳۷۱، ۳۸۶، ۴۱۱، ۴۱۶، ۴۲۶، ۴۳۶، ۴۴۵،
 ۴۴۹، ۴۵۶.

۳. رقم‌ها و دستگاه‌های عددشماري

در مسأله‌هایی که صحبت بر سر رقم‌ها در عددنویسی به مبنای ۱۰ باشد:

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(A)، عددی طبیعی است؛ گاهی آن را به صورت $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ نشان می‌دهند، از موضوع‌های گوناگونی استفاده می‌شود: بخش‌پذیری عدد‌های درست، تبدیل‌های جبری، ارزیابی و تخمین رقم یا عدد. به خصوص، معیار بخش‌پذیری بر ۳ و بر ۹، کاربرد زیادی دارد: عدد $A = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ و عددی که از مجموع رقم‌های آن به دست می‌آید، در تقسیم بر ۹ (یا بر ۳)، بديك باقی مانده می‌رسند. روشن است که تفاضل

$$\begin{aligned} A - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) &= \\ &= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) \end{aligned}$$

بر ۹ بخش‌پذیر است.

گاهی مفید است، عدد A را، در دستگاه عددنویسی به مبنای q ، بنویسیم:

$$A = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$$

که در آن a_i ها، $0 \leq a_i < q$ ($i = 1, 2, \dots, n$)، «رقم‌ها» در این دستگاه عددنویسی‌اند.

مسأله‌های ۳، ۲۱، ۴۳، ۵۴، ۸۵، ۸۸، ۹۳، ۱۲۲، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۲،
 ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۸، ۱۷۵، ۱۹۷، ۲۰۱، ۲۴۴، ۲۹۱، ۲۹۴،
 ۲۹۷، ۳۲۹، ۳۵۴، ۳۹۶، ۴۳۰، ۴۳۹.

۴. عدد‌های گویا و عدد‌های گنگ

عدد گویای a را می‌توان به صورت $a = \frac{m}{n}$ نشان داد که، در آن

همچنین، هر عدد گویا را می توان، در دستگاه عددنویسی $m \in \mathbf{Z}$ و $n \in \mathbf{N}$ ؛ به مبنای ۱۰ (یا هر دستگاه عددنویسی دیگر)، به صورت کسر دهدهی متناوبی نوشت. کسر دهدهی معرف عدد گنگ، متناوب نیست.

همراه با عدد گنگ $a + b\sqrt{d}$ (a و b ، عددهای گویا و d عددی درست است که مجذور يك عدد طبیعی نیست)، اغلب بهتر است «مزدوج» آن، عدد $a - b\sqrt{d}$ را هم در نظر بگیریم؛ مجموع و حاصل ضرب دو عدد گنگ مزدوج، منجر به عددهایی گویا می شود، به نحوی که $a \pm b\sqrt{d}$ ، ریشه های معادله ای درجه دوم با ضریب های درست درمی آیند.

مسئله های ۹۴، ۱۱۴، ۲۵۷، ۲۶۸، ۳۰۳، ۳۵۶، ۳۷۰، ۳۷۹، ۴۲۲.

۵. سه جمله ای درجه دوم. تابع های پیوسته،

نمودارها و ریشه های معادله ها

در بسیاری از مسأله هایی که منجر به استفاده از تابع درجه دوم

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

می شوند، بهتر است نمودار آن را در نظر بگیریم. اگر این نمودار، محور Ox را در دو نقطه x_1 و x_2 (ریشه های سه جمله ای) قطع کند، آن وقت مقدار های تابع $y = f(x)$ ، در بین ریشه ها، علامتی مخالف علامت a و در بیرون بازه $[a, b]$ همان علامت a را دارند. در ضمن، راس سهمی $y = f(x)$ (که طول آن، برابر نصف مجموع ریشه ها است)، متناظر با نقطه اکسترمم تابع $y = f(x)$ است: می نیمم اگر $a > 0$ و ماکزیمم اگر $a < 0$.

در يك رشته از مسأله ها، می توان از این حقیقت استفاده کرد؛ اگر تابع $y = f(x)$ ، که در بازه $[a, b]$ پیوسته است، در دو انتهای این بازه، برابر با مقدارهایی با علامت های مختلف باشد، آن وقت، بین دو نقطه a و b دست کم یکی از ریشه های معادله $f(x) = 0$ قرار دارد.

مسئله های ۳۲، ۱۱۹، ۱۴۹، ۱۵۷، ۱۷۸، ۱۸۰، ۲۰۶، ۲۲۸، ۲۴۲،

۲۵۹، ۲۶۴، ۲۶۹، ۲۷۸، ۲۹۹، ۳۰۸، ۳۳۹، ۳۵۹، ۳۸۳،

۴۰۰، ۴۰۸.

۶. جبر چند جمله‌ای‌ها

اگر a ریشه چند جمله‌ای $P(x)$ باشد، آن وقت $P(x)$ بر دو جمله‌ای $x - a$ بخش پذیر است و می‌توان آن را به صورت $P(x) = (x - a)Q(x)$ نوشت که، در آن، $Q(x)$ یک چند جمله‌ای است با درجه‌ای یک واحد کمتر از درجه $P(x)$ (در ضمن، اگر $P(x)$ ضریب‌های درستی داشته باشد، ضریب‌های $Q(x)$ هم، عددهایی درست‌اند). چند جمله‌ای درجه n ، بیش از n ریشه ندارد (حتی با در نظر گرفتن ریشه‌های تکراری). از این جامی‌توان نتیجه گرفت که: اگر دو چند جمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ ، که درجه آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، در n نقطه، مقادیرهای برابر را قبول کنند، آن وقت ضریب‌های متناظر توان‌های برابر در دو چند جمله‌ای، با هم برابرند. اغلب، از اتحاد‌های مربوط به تجزیه دو جمله‌ای‌های شامل دو متغیر، استفاده می‌شود:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1});$$

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} =$$

$$= (x + y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + x^{2m-2}y^2 - \dots - xy^{2m-1} + y^{2m})$$

و همچنین، از دستور بسط دو جمله‌ای :

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^{n-1} xy^{n-1} + y^n$$

که در آن، ضریب‌های بسط، از این دستور به دست می‌آیند :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

مساله‌های ۱۶، ۲۴، ۳۸، ۵۱، ۱۲۵، ۱۴۲، ۱۶۲، ۲۱۷، ۲۴۲،

۲۵۱، ۲۵۸، ۳۲۵، ۳۴۷، ۴۳۹.

۷. اتحاد‌ها، معادله‌ها و دستگاه‌های معادله‌ها

برای حل و بررسی معادله‌ها، در کنار روش‌های رسمی و دبیرستانی، گاهی می‌توان از مفهوم یکنوایی استفاده کرد: اگر تابع $y = f(t)$ ، اکیداً

صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آن وقت معادله‌های $f(g_1) = f(g_2)$ و $g_1 = g_2$ هم‌ارزند. برای حل دستگاه‌های معادله‌ها، گاهی مفید است از تعبیر هندسی، مفهوم تقارن در عبارات‌های جبری و غیره استفاده کنیم.

یک رشته از مساله‌ها، به رابطه خطی بین چند متغیر مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۳۸، ۶۳، ۹۸، ۱۴۶، ۱۸۹، ۱۹۴، ۲۴۳، ۲۷۶، ۲۹۲، ۳۵۳، ۳۵۷، ۳۶۴، ۳۸۲، ۴۱۴، ۴۶۰.

۸. نابرابری‌ها

در بین نابرابری‌هایی که، در مساله‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرند، این‌ها را می‌توان آورد:

$$(۱) \quad |x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(۲) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (\text{برای هر } a \geq 0 \text{ و } b \geq 0)$$

(۳) اگر a_1, a_2, \dots, a_n ، عددهایی غیر منفی باشند:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(نابرابری کوشی، برای واسطه‌های هندسی و عددی)؛

$$(۴) \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \frac{1}{n} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

برای هر a_1, a_2, \dots, a_n .

(۵) برای هر دو عدد مثبت a و b ، کسر $\frac{c+d}{a+b}$ ، بین کسرهای $\frac{c}{a}$

و $\frac{d}{b}$ قرار دارد (مساله ۲۱۹ را ببینید).

(۶) $\sin x < x$ برای هر $x > 0$.

مساله‌های ۱۹، ۵۶، ۹۵، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۸، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۳۰،

۱۳۴، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۸۷، ۲۰۳، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۳۲، ۲۶۴.

۲۶۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۹۹، ۳۰۸، ۳۱۱، ۳۱۹، ۳۲۵، ۳۳۵،
 ۳۴۱، ۳۴۶، ۳۵۴، ۳۵۷، ۳۶۵، ۳۷۲، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۹۲،
 ۴۰۳، ۴۲۷، ۴۳۶، ۴۵۲، ۴۶۲.

۹. اصل دیریکله

اگر در k لانه، بیش از nk خرگوش باشند، آن وقت، دست کم در يك لانه، بیش از n خرگوش وجود دارد. این اصل در مساله‌های مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد که، در آنها، باید «وجود» عضو یا عددی را ثابت کرد.

چند گزاره شبیه «اصل دیریکله» را، که به همان اندازه روشن‌اند و در مساله‌های هندسی و جبری کاربرد دارند، می‌آوریم. اگر مجموع مساحت‌های چند شکل کمتر از S باشد، با آنها نمی‌توان سطحی به مساحت S را پوشاند. اگر روی پاره‌خط راستی به طول واحد، چند پاره‌خط راست با مجموع طول‌های L قرار دهیم، آن وقت نقطه‌ای پیدا می‌شود که با بیش از $[L]$ عدد از این پاره‌خط‌ها پوشیده نشده است. اگر واسطه حسابی چند عدد، از a بزرگتر باشد، آن وقت، دست کم یکی از این عددها، از a بزرگتر است.

مساله‌های ۳، ۴، ۱۲، ۳۷، ۶۷، ۷۲، ۷۸، ۸۷، ۹۱، ۱۱۰، ۱۶۶،
 ۲۲۰، ۳۴۲، ۳۶۷، ۴۴۴، ۴۴۶.

۱۰. آرایش‌ها

روش اصلی در حل مساله‌های مربوط به تعداد ترکیب‌های مختلف عضوهای يك مجموعه محدود، عبارت است از برقراری تناظر بین مجموعه‌هایی که با شرط‌های مختلف داده شده‌اند.

مثلاً، مجموعه همه گروه‌های مرتب شامل n واحد و صفر را (از این گروه‌ها به تعداد 2^n وجود دارد) می‌توان در تناظر با مجموعه همه زیرمجموعه‌های يك مجموعه n عضوی قرارداد. مجموعه این گروه‌ها، وقتی که شامل k واحد باشد، متناظر است با مجموعه همه زیرمجموعه‌های k عضوی از يك مجموعه n عضوی. تعداد همه این گروه‌ها، برابر است با

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

که به ازای $k=2$ ، برابر با تعداد زوج عضوهای نامرتب از مجموعه مفروض

$$C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

تعداد تبدیلهای (مرتب) در یک مجموعه n عضوی، برابر است با

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

مساله‌های ۵۲، ۶۱، ۷۶، ۱۱۷، ۱۳۶، ۲۱۰، ۲۳۱، ۲۴۶، ۳۰۱،

۳۶۱، ۴۳۹، ۴۴۲.

۱۱. گراف‌ها. نگاشتها

اگر عضوهای یک مجموعه را به کمک نقطه‌ها مشخص کنیم و برخی از زوج نقطه‌ها را به وسیله پاره‌خط‌هایی بهم وصل کنیم، تصویری برای یک شاخه از ریاضیات، که گراف نامیده می‌شود، به دست می‌آید: نقطه‌ها (یعنی عضوهای مجموعه) را راس‌ها و پاره‌خط‌های راست (یا کمان‌ها) رایال‌های گراف گویند. گرافی که از هر راس آن بتوان به هر مسیر دیگری، شامل یال‌ها، وارد شد، گراف مرتبط نامیده می‌شود. هر مسیر بسته در طول یال‌های گراف را، یک دور می‌نامند. در گراف مرتب‌تبی که بدون دور باشد (که در این حالت، آن را دخت می‌گویند)، تعداد راس‌ها، یکی بیشتر از تعداد یال‌هاست (مساله ۸ را ببینید). اگر همه دورهای گراف، طولی زوج داشته باشند (یعنی از تعداد زوجی یال عبور کنند)، آن وقت راس‌های آن را می‌توان طوری به دورنگ درآورد که راس‌های هم‌رنگ به وسیله یک یال به هم مربوط نباشند؛ چنین گرافی را، دوبخشی گویند.

وقتی که یال‌های گراف، دارای جهت باشند، با گراف توجیه شده یا گراف جهت‌دار سروکار داریم. هر نگاشت f از مجموعه متناهی A بر خودش، یک گراف توجیه شده می‌دهد که از هر راس $a \in A$ آن، پیکانی به سمت راس $f(a)$ وجود دارد (در ضمن، ممکن است گره‌هایی هم وجود داشته باشد: پیکان‌هایی که از a به a می‌روند؛ این‌ها، نقطه‌های بی‌حرکت نگاشت

f هستند). اگر f در تناظر يك به يك باشد، آن وقت گراف به دورها (و گره‌ها) تجزیه می‌شود.

یکی از نمونه‌های يك گراف پیچیده، طرح شبکه تلفنی است (مسألة ۱۵۸ را ببینید).

گراف‌هایی هم مورد بررسی قرار می‌گیرند که یال‌ها یا راس‌های آن‌ها را رنگ کرده‌اند و یا با عددهایی مشخص شده‌اند.

مسئله‌های ۸، ۷۲، ۷۹، ۱۱۱، ۱۲۳، ۱۲۶، ۱۶۳، ۱۷۶، ۱۸۳، ۱۹۶، ۲۴۰، ۲۷۱، ۲۹۰، ۲۹۶، ۳۱۰، ۳۱۷، ۴۲۱، ۴۶۱.

۱۲. رنگ آمیزی. مسئله‌های مربوط به شبکه‌ها

در مسئله‌های مربوط به گراف‌ها، اغلب تصور زوج یا فرد بودن، اهمیت دارد. مثلاً تعداد راس‌هایی که تعداد فردی یال به آن‌ها متصل می‌شود، عددی زوج است (مسألة ۱ را هم ببینید). تصور مشابهی، برای مسئله‌های دیگر لازم است، مثلاً برای حل این مسئله معمول: آیا می‌توان صفحه شطرنجی 8×8 را، که دو خانه متقابل دو گوشه آن حذف شده است، با مستطیل‌های 1×2 پوشاند؟ برای حل این مسئله، کافی است توجه کنیم که، هر مستطیل 1×2 ، دو خانه با رنگ‌های مختلف را می‌پوشاند؛ در حالی که دو خانه روبه‌رو در دو گوشه صفحه شطرنجی از يك رنگ‌اند. گاهی، برای حل مسئله، لازم می‌شود از تعداد رنگ‌های بیشتری استفاده کنیم:

مسئله‌های ۱، ۱۷، ۳۳، ۴۹، ۶۱، ۷۲، ۸۵، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۸۴، ۲۳۵، ۲۴۷، ۲۶۲، ۳۳۳، ۳۶۴، ۳۷۴، ۴۱۳.

به جز استفاده از زوج یا فرد بودن و رنگ کردن، در مسئله‌های مربوط به صفحه‌های شطرنجی و دیگر شبکه‌های مسطحه و فضایی، اغلب از تصورات هندسی و روش مختصاتی هم می‌توان استفاده کرد. صفحه شطرنجی را می‌توان همچون يك صفحه عددی در نظر گرفت که، در آن، گره‌های شبکه، دارای مختصات درست‌اند و یا مربعی شامل p^2 گره را مورد توجه قرار داد که، مختصات آن‌ها، در تقسیم بر p ، به باقی‌مانده‌های (x و y) می‌رسند.

مساله‌های ۹۱، ۹۶، ۱۱۱، ۱۸۱، ۱۹۹، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۲۹، ۲۶۵،
 ۲۷۵، ۲۹۵، ۳۰۴، ۳۱۴، ۳۴۹، ۳۶۲، ۳۹۷، ۴۱۶، ۴۲۵،
 ۴۳۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۷.

۱۳. عمل‌ها و تغییر ناپذیرها

در مساله‌هایی که باید روشن کنیم: آیا می‌توان به کمک عمل‌های مفروضی، از يك موقعیت به موقعیت دیگری رسید، اغلب بهتر است «تغییر-ناپذیرها» را پیدا کرد، یعنی عنصرهایی را که ضمن این عمل‌ها، تغییر نمی‌کنند. در ضمن، اگر تعداد «تغییر ناپذیرها» در دو مجموعه برابر نباشند، به معنای آن است که تبدیل یکی به دیگری ممکن نیست. در مساله‌های مربوط به عددهای درست یا دیگر «چیزهای» ناپیوسته، اغلب می‌توان باقی‌مانده تقسیم بر ۲ را، به عنوان «تغییر ناپذیر» در نظر گرفت (و یا باقی‌مانده تقسیم بر يك عدد طبیعی دیگر).

اگر همه عمل‌های انجام شده معکوس پذیر باشند، آن وقت می‌توان همه مجموعه عضوهایی را، که عمل‌ها را در مورد آنها انجام داده‌ایم، به صورت دودسته هم‌ارز در نظر گرفت (دو عضو را هم‌ارز گوئیم، وقتی که بتوان یکی از آنها را، ضمن انجام عمل‌ها، از دیگری به دست آورد).

مساله‌های ۱۰۵، ۱۵۴، ۲۱۴، ۲۳۳، ۲۶۰، ۲۷۶، ۳۲۱، ۴۲۵.

در مساله‌هایی که باید تعداد عمل‌ها را تخمین زد و یا ثابت کرد که، این عمل‌ها را، نمی‌توان به صورت نامتناهی ادامه داد، اغلب بهتر است درباره‌ی تابعی بیندیشیم که، به ازای هر عمل، صعودی (یا نزولی) می‌شود.

مساله‌های ۵، ۷، ۲۱، ۴۴، ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱، ۲۸۳، ۴۰۹.

۱۴. ترتیب رقم‌ها و عددهای درست،

تبدیل‌های آنها. مسابقه‌ها.

برای حل مساله‌های مربوط به دنباله‌های متناهی از عددهای درست، حرف‌ها یا مهره‌ها، که آنها را روی محیط دایره یا در يك جدول قرار داده‌ایم، می‌توان از شیوه‌های مختلف مربوط به بخش‌پذیری، آنالیز ترکیبی، ارزیابی یا نابرابری‌ها، و استقرای ریاضی استفاده کرد.

مسئله‌های ۴، ۳۷، ۳۹، ۸۷، ۱۱۷، ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۸۱، ۲۰۰،
۲۲۱، ۲۲۴، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۸، ۲۷۵، ۲۸۱، ۳۰۰، ۳۰۷،
۳۲۱، ۳۲۳، ۳۳۷، ۳۴۰، ۳۴۵، ۳۵۰، ۳۸۵، ۳۹۰، ۳۹۱،
۴۰۹، ۴۱۳، ۴۳۲، ۴۳۵، ۴۴۲، ۴۵۶.

دربارهٔ مسابقه‌ها، میزان امتیازها و مقام شرکت کنندگان :

مسئله‌های ۲۸، ۱۰۸، ۱۲۶، ۱۷۹، ۲۱۸، ۳۱۷، ۴۴۱.

۱۵. هندسهٔ مسطحه

تقریباً در هر المپیاد با مسئله‌های هندسهٔ مسطحه مواجه می‌شویم.

الف) دربارهٔ چندضلعی‌های منتظم:

مسئله‌های ۲۰، ۹۹، ۱۰۳، ۱۲۷، ۲۲۶، ۳۹۸، ۴۰۸، ۴۳۴، ۴۴۳.

ب) دربارهٔ مفهوم «مکان هندسی» :

مسئله‌های ۶، ۱۲، ۱۴، ۱۸، ۲۰، ۳۱، ۴۰، ۶۰، ۶۹، ۷۸، ۸۲،

۱۵۷، ۲۰۲، ۲۰۷، ۲۱۳، ۲۷۰، ۴۲۴.

ج) تبدیل‌های هندسی (دوران، انتقال موازی، تشابه و ترکیب‌های

آنها) :

مسئله‌های ۶، ۲۲، ۴۵، ۴۷، ۷۳، ۱۰۱، ۱۱۲، ۱۴۰، ۱۴۷، ۱۶۵،

۱۸۲، ۱۹۸، ۲۰۵، ۲۲۲، ۲۵۳، ۲۵۹، ۲۹۸، ۳۰۹، ۳۱۵،

۳۷۳، ۳۹۹، ۴۱۴، ۴۶۰.

د) مسئله‌هایی که در آن، صحبت بر سر مساحت شکل است (و یا از

مساحت، به عنوان یک ابزار کمکی استفاده می‌شود):

مسئله‌های ۱۲، ۱۳، ۲۳، ۲۹، ۵۳، ۵۵، ۷۸، ۱۰۶، ۱۴۷، ۱۵۲،

۱۸۶، ۲۰۴، ۲۶۱، ۲۵۵، ۲۸۵، ۳۱۲، ۳۲۷، ۳۶۳، ۳۶۶،

۳۸۴، ۳۹۵، ۴۱۵، ۴۲۸، ۴۵۸.

۱۶. هندسهٔ فضایی

در حل مسئله‌ها، اغلب پیدا کردن تصویر شکل بر صفحه (یا خطرناک است)

مفید است. از قضیه‌ای هم که در کتاب‌های درسی وجود ندارد، یاد

می‌کنیم: در هر کنج سه وجهی، هر زاویهٔ مسطحه از مجموع دو زاویهٔ دیگر

کوچکتر است.

مساله‌های ۵۳، ۷۰، ۸۰، ۸۲، ۱۰۴، ۱۲۱، ۱۵۰، ۱۸۸، ۲۳۴، ۲۴۱،
۲۵۵، ۲۶۶، ۲۹۹، ۳۲۶، ۳۴۸، ۳۵۸، ۳۹۴، ۴۱۷، ۴۶۱.

۱۷. هندسه ترکیبی

منظور ما، ارزیابی‌های مختلف نسبت به جا به جایی‌ها، پوشش‌ها و ترکیب‌های مختلف شکل‌هاست. در این جا، از کلی‌ترین ویژگی‌های مربوط به استقرار شکل در صفحه (یا در فضا) استفاده می‌شود.

از بین این ویژگی‌ها، قضیه ژردان را می‌آوریم: هر خط شکسته بسته‌ای که با خودش متقاطع نباشد، صفحه را به دو بخش درونی و بیرونی تقسیم می‌کند؛ در ضمن، هر مسیری که از نقطه‌ای درونی به نقطه‌ای بیرونی برود، این خط شکسته را قطع می‌کند و دو نقطه هر حوزه را می‌توان با مسیری بهم وصل کرد که خط شکسته را قطع نکند.

تعریف مجموعه محدب را به یاد می‌آوریم: به مجموعه‌ای محدب گویند که، علاوه بر نقطه‌ها، شامل همه پاره‌خط‌های راستی باشد که این نقطه‌ها را دو به دو بهم وصل می‌کنند. بد کوچکترین مجموعه محدبی که شامل یک شکل باشد، پوش محدب آن شکل گویند؛ پوش محدب یک مجموعه متناهی، عبارت است از یک چندضلعی (و در فضا، یک چندوجهی) که راس‌های آن، در برخی نقطه‌های مفروض باشند.

همراه با شکل مفروض، خوب است همسایگی r آن را هم در نظر بگیریم: مجموعه‌ای از نقطه‌ها که کمترین فاصله از آن‌ها تا نقطه‌های شکل کمتر از r باشد؛ دو شکل (و در حالت خاص، نقطه‌ها) تنها وقتی به فاصله‌ای که از $2r$ کمتر نیست قرار دارند که، همسایگی‌های r آن‌ها، متقاطع نباشند (مساله‌های ۱۲، ۸۱).

مساله‌های ۲۷، ۴۹، ۵۳، ۶۴، ۸۶، ۱۴۷، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۶۴،
۱۸۸، ۲۰۲، ۲۱۱، ۲۱۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۵، ۲۳۰،
۲۳۷، ۲۴۹، ۲۵۵، ۲۷۷، ۳۱۴، ۳۲۴، ۳۳۸، ۳۵۱، ۴۰۶،
۴۴۸، ۴۶۱.

۱۸. نابرابری‌های هندسی، ارزیابی‌ها، اکستره‌م‌ها

از بین قضیه‌های زیادی که برای اثبات این نابرابری‌های هندسی به کار می‌روند، چند قضیه را که کاربرد گسترده‌تری دارند، می‌آوریم: در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است (نابرابری مثلثی). يك زاویه مثلث، کوچکتر، برابر و یا بزرگتر از ۹۰ درجه است، وقتی که، مجذور ضلع روبه‌رو به آن، کوچکتر، برابر یا بزرگتر از مجموع مجذورهای دو ضلع مجاور به آن باشد. طول تصویر يك پاره‌خط راست بر صفحه یا خط راست، از طول خود پاره‌خط راست، بزرگتر نیست. مساحت تصویر يك چندضلعی بر صفحه، از مساحت خود چندضلعی بیشتر نیست.

مسئله‌های ۲۳، ۲۹، ۳۲، ۴۱، ۶۲، ۷۰، ۷۳، ۷۸، ۸۲، ۸۴، ۸۶،
 ۱۰۴، ۱۱۵، ۱۲۱، ۱۲۴، ۱۲۷، ۱۳۱، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۴۰،
 ۱۶۷، ۱۸۵، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۱۳،
 ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۲، ۲۹۰، ۲۹۷، ۲۹۹،
 ۳۰۲، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۳۴، ۳۴۸، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۶۸، ۳۸۸،
 ۳۹۴، ۴۳۱، ۴۳۸.

۱۹. بردارها

به جز عمل‌های عادی روی بردارها (جمع، تفریق و ضرب در يك عدد)، گاهی مفید است از ضرب عددی (اسکالر) بردارها هم استفاده کنیم:

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha, \alpha = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$$

برای n نقطه A_1, A_2, \dots, A_n از صفحه (یا فضا)، نقطه منحصربه‌فرد O وجود دارد (مرکز ثقل)، به نحوی که

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \mathbf{0}$$

مسئله‌های ۶، ۱۳، ۱۴۳، ۱۹۳، ۲۰۷، ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۳۴، ۲۷۰، ۲۷۴،
 ۲۸۰، ۲۹۳، ۳۱۵، ۳۳۶، ۳۶۶، ۳۷۳، ۴۰۴، ۴۳۴، ۴۵۷.

۲۰. ارزیابی وجست وجوی حداقل و حداکثر

در مساله‌های مربوط به عددها و جدول‌ها

بسیاری از مساله‌های المپیادها، به مقایسه مقدار عددها از يك گروه محدود، نقطه‌های واقع بر خط راست، ارزیابی مجموع‌ها، تقاضاها و دیگر تابع‌های مربوط به گروه عددها و یا جدول‌ها، مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۵۶، ۷۷، ۱۲۷، ۲۳۲، ۲۵۲، ۲۸۳، ۳۴۴، ۳۵۴، ۳۶۹، ۳۷۷، ۴۵۳.

گاهی در چنین مساله‌هایی مفید است.

الف) کوچکترین یا بزرگترین عدد گروه را در نظر بگیریم:

مساله‌های ۲۶، ۴۴، ۷۲، ۱۰۹، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۵۶، ۱۶۰، ۱۶۳، ۲۰۲، ۲۱۹، ۲۴۳، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۸۳، ۳۳۷، ۳۴۳، ۳۸۰، ۴۰۱، ۴۰۹.

ب) عددهای گروه را بر حسب مقدار آن‌ها مرتب کنیم:

مساله‌های ۳۴، ۶۵، ۷۵، ۱۵۳، ۲۴۵، ۲۵۰، ۳۴۶، ۴۱۰.

۲۱. دنباله‌ها

دنباله x_n را متناوب گویند، وقتی که $x_{n+1} = x_n$ ، $n \in \mathbf{N}$ (عدد طبیعی n ، دوره تناوب دنباله است). در بسیاری از مساله‌ها، با دنباله‌های برگشتی روبرو می‌شویم؛ دنباله x_n وقتی برگشتی است که، برای آن، داشته باشیم؛ $x_{n+1} = f(x_n)$ ، در آن، f يك تابع است؛ گاهی هم جمله‌های دنباله (از جمله $(k+1)$) به کمک k جمله قبل از آن معین می‌شود. به عنوان نمونه، می‌توان از دنباله فیبوناچی نام برد.

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ...

که در آن، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبل از آن. در ارزیابی دنباله‌ها، اغلب روش استقرای ریاضی به کار می‌آید.

مساله‌های ۱۱، ۱۵، ۲۵، ۳۶، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۳، ۲۲۳، ۲۵۱، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۶۷، ۲۷۳، ۳۰۳، ۳۱۳، ۳۲۸، ۳۵۶، ۴۰۲، ۴۰۵، ۴۵۹.

عدد a را حد دنباله x_n گویند، وقتی که برای هر $\epsilon > 0$ ، بتوان N

را طوری پیدا کرد که، برای هر $n > N$ ، نابرابری $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد.

مسئله‌های ۲۳۹، ۲۶۸، ۳۰۰، ۳۸۹، ۴۵۱.

۲۲. بازی‌ها، تعقیب، برنامه‌ریزی

در حل مسئله‌هایی که، در آن‌ها، صحبت بر سر رسیدن به هدفی، با انجام حرکات‌های متوالی است (به‌خصوص، در مورد‌هایی که باید روشن کرد، چه کسی امکان برد بازی را دارد، باید برنامه و قانونی برای حرکات‌ها تنظیم کرد که، با اجرای آن، رسیدن به هدف تضمین شود؛ در این گونه مسئله‌ها، در ضمن، باید ثابت کرد که، هر حرکت دلخواهی که رقیب داشته باشد، موفقیت طرف مورد نظر ما، حتمی است.

مسئله‌های ۱۰، ۵۷، ۶۰، ۷۱، ۸۳، ۹۱، ۱۱۰، ۱۱۶، ۱۲۵، ۱۶۸،
۱۷۴، ۱۹۹، ۲۰۶، ۲۴۲، ۲۵۰، ۲۵۶، ۲۶۲، ۲۸۳، ۳۳۰،
۳۷۶، ۴۵۵.

۲۳. مثال‌ها و ساختمان‌های جالب

در بسیاری از مسئله‌ها، دشوارترین بخش حل، نه اثبات، بلکه ساختن نمونه‌ای غیر عادی است، که با شرط مسئله سازگار باشد و یا آن را نقض کند.

مسئله‌های ۱۲۳، ۱۵۶، ۲۰۲، ۲۰۸، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۴۴، ۲۵۷، ۲۶۳،
۳۰۰، ۳۷۱، ۳۹۸، ۴۰۱، ۴۱۶، ۴۲۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۶،
۴۶۰.

مسئله‌هایی هم که، در آن‌ها، پیدا کردن و بررسی مثال، با گام‌های زیادی به دست می‌آید، به همین مبحث مربوط اند (و اغلب، استفاده از روش استقرای ریاضی به کار می‌آید).

مسئله‌های ۶۴، ۱۴۴، ۱۵۸، ۱۸۳، ۲۰۰، ۲۱۰، ۲۳۸، ۲۷۲، ۲۸۱،
۴۰۵.

مساله‌هایی برای تمرین

در این جا نزدیک به صد مساله، برای تمرین آورده‌ایم. این مساله‌ها را، در اساس به‌ردیف بحثهای ضمیمه تنظیم کرده‌ایم. بعضی از این مساله‌ها، از بین مساله‌هایی انتخاب شده‌اند که برای المپیادها پیشنهاد شده بود. برخی دیگر از المپیادهای شهرها و یا جمهوری‌ها برداشته شده‌اند. مساله‌هایی هم از المپیادهای بلغارستان و لهستان در این جا آورده‌ایم.

۱. درستی این برابری را، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)!$$

۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، داریم:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

۳. این نابرابری را، برای $n > 1$ ثابت کنید:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

۴. (a) n خط راست روی یک صفحه‌اند، به نحوی که هیچ دو تایی

با هم موازی نیستند و هیچ سه تایی از یک نقطه نمی‌گذرند. این n خط راست صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

(b) ثابت کنید که، n صفحه در حالت کلی (وقتی که هیچ سه صفحه‌ای

موازی با یک خط راست نباشند و هیچ چهار صفحه‌ای از یک نقطه نگذرند)،

فضا را به $1 + \frac{1}{6}(n^2 + 5n)$ بخش تقسیم می کنند.

۵. (a) صفحه، به وسیله چند دایره، به بخش هایی تقسیم شده است. ثابت کنید، هر بخش را می توان با یکی از دورنگ موجود، طوری رنگ کرد که، هر دو بخشی که با یک کمان از هم جدا شده اند، رنگ های مختلفی داشته باشند.

(b) چند «سه شاخه» روی صفحه ای قرار دارند (منظور از «سه شاخه»، شکلی است شامل سه نیم خط راست با راس مشترک). ثابت کنید، بخش هایی را که به وسیله این «سه شاخه ها» روی صفحه پدید می آیند، می توان با سه رنگ طوری رنگ کرد که، هر دو بخشی که در یک پاره خط راست یا یک نیم خط راست مشترک اند، رنگ های مختلفی داشته باشند.

۶. در جدولی که ۳ سطر و n ستون دارد، مهره هایی از سه رنگ را به ترتیب دلخواه قرار داده ایم: n مهره سفید، n مهره قرمز و n مهره آبی. ثابت کنید می توان مهره ها را در سطرها طوری قرارداد که، در هر ستون، از هر سه رنگ داشته باشیم.

۷. روی محیط دایره ای، n نقطه - سیاه و قرمز - قراردادیم. ثابت کنید، حداکثر می توان $2 - \frac{3n}{2}$ وتر طوری در دایره رسم کرد که دو انتهای هر یک از آنها دو نقطه مفروض با رنگ های مختلف باشند و، در ضمن، هیچ دو وتری در درون دایره با هم برخورد نکنند.

۸. ثابت کنید، هر عدد درست غیر منفی را، تنها به یک طریق می توان به صورت $x + \frac{1}{4}(y^2 + y)$ نوشت که، در آن، x و y عددهای درست و غیر منفی و $x \leq y$ است.

۹. ثابت کنید، اگر $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ عددی درست باشد، آن وقت عدد

$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ به ازای هر عدد طبیعی n عددی درست است.

۱۰. n نفر در مسابقه تنیس شرکت کرده اند. هر دو نفر یک بار با هم

رو به رومی شوند. ثابت کنید، مسابقه می تواند طوری به پایان برسد که نفر k ام از نفر $(k+1)$ ام $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ برده باشد.

۱۱. در شهری N نفر زندگی می کنند که، هر دو نفر آنها، یا با هم دوست اند و یا دشمن یکدیگرند. در هر روز ممکن است، حداکثر برای یک نفر، «زندگی تازه ای» آغاز شود: با همه دوستان خود دعوا کند و با همه دشمنان خود دوست شود. می دانیم، هر سه نفر از مردم این شهر، می توانند دوست شوند، ثابت کنید، همه مردم این شهر، می توانند با هم دوست شوند.

۱۲. (a) بزرگترین توان عدد ۳ را طوری پیدا کنید که، عدد $2^{3^n} + 1$ بر آن بخش پذیر باشد.

(b) ثابت کنید، عددی که در دستگاه دهدهی با 3^n رقم برابر واحد نوشته شده است، بر 3^n بخش پذیر و بر 3^{n+1} بخش ناپذیر است.

۱۳. ثابت کنید، به کمک n وزنه با وزن های ۱، ۳، ۹، ...، 3^{n-1} گرم،

می توان هر جسم به وزن $(3^n - 1) \frac{1}{4}$ گرمی را با ترازو وزن کرد (M ، عددی درست است؛ از وزنه ها در هر دو کفه ترازو می توان استفاده کرد).

۱۴. پاره خط راستی به طول 3^k را به سه بخش برابر تقسیم کرده ایم. بخش های اول و سوم را در نظر می گیریم و، هر کدام از آنها را، دوباره به سه بخش تقسیم می کنیم؛ باز هم بخش های اول و سوم را در هر کدام از آنها در نظر می گیریم و، هر کدام را، به سه بخش تقسیم می کنیم و غیره، تا آنجا که پاره خط هایی به طول واحد به دست آید. نقطه های تقسیم را در روی پاره خط های راستی که مورد تقسیم قرار گرفته اند، نشان می گذاریم. ثابت کنید، برای هر d ، که از 3^n کوچکتر باشد، می توان دو نقطه نشان دار پیدا کرد که فاصله بین آنها، برابر d باشد.

۱۵. (a) درستی این برابری را ثابت کنید:

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\dots(1+2^{2^n})=2^{2^{n+1}}-1$$

(b) ثابت کنید، هر دو عدد، از دنباله $1, 2^2, \dots, 17, 5, 3$ ، نسبت به هم اول اند.

۱۶. ۱۵ عدد اول، يك تصاعد حسابی ساخته اند. ثابت کنید، قدر نسبت تصاعد از ۳۰۰۰۰ بزرگتر است.

۱۷. عدد طبیعی x را پشت سر هم بر عددهای از ۲ تا $x-1$ تقسیم کرده ایم و باقی مانده های حاصل از تقسیم ها را نوشته ایم. x را طوری پیدا کنید که، مجموع همه این باقی مانده ها، برابر x شود.

۱۸. ثابت کنید، حاصل ضرب رقم های هر عدد بزرگتر از ۱۰۰، از

$$\frac{27}{37}$$

این عدد تجاوز نمی کند.

۱۹. ۹۹ رقم ۹ را به ردیف نوشته ایم. ثابت کنید، می توان درست ۱۰۰ رقم درست راست این عدد نوشت، به نحوی که عدد ۱۹۹ رقمی حاصل، مجذور کامل يك عدد درست باشد.

۲۰. ثابت کنید، عددهای گنگ α و β وجود دارند، به نحوی که α^β عددی گویا باشد.

۲۱. α و β عددهایی گنگ اند و می دانیم $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. ثابت کنید،

در بین عددهای $[n\alpha]$ و $[m\beta]$ (که در آن ها، n و m ، همه عددهای درست هستند)، به هر عدد درست، درست یکبار برخورد می کنیم.

۲۲. ثابت کنید، n رقم اول بعد از ممیز، در بسط دهدهی عدد

$$(\sqrt{26} + 5)^n$$

یا همه برابر صفرند و یا همه برابر ۹.

۲۳. (a) ثابت کنید، اگر $\sin \varphi$ و $\cos \varphi$ عددهایی گویا باشند، آن وقت

$\sin n\varphi$ و $\cos n\varphi$ هم، برای هر عدد طبیعی n ، گویا هستند.

(b) ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی N ، می توان N نقطه را بر صفحه

طوری پیدا کرد که، هیچ سه نقطه ای روی يك خط راست نباشد، در ضمن، فاصله بین هر دو تا از آن ها، برابر با عددی درست باشد.

۲۴. a و b را طوری پیدا کنید که هر يك از سه جمله ای های

$$x^2 - ax + b \quad \text{و} \quad x^2 - bx + a$$

دارای ریشه‌های مختلف مثبت باشند.

۲۵. ثابت کنید، اگر عدد سه رقمی \overline{abc} اول باشد، عدد $b^2 - 4ac$ نمی‌تواند مجذور کامل یک عدد درست باشد.

۲۶. ثابت کنید، اگر $a^2 + pa + q = 0$ و $b^2 - pb - q = 0$ ، آن وقت معادله $x^2 + 2px + q = 0$ ، دارای ریشه‌ای بین a و b است ($q \neq 0$).

۲۷. ثابت کنید، برای هر دو عدد p و q ، مجموع طول‌های پاره‌خط‌هایی از محور Ox ، که روی آن‌ها نابرابری $|x^2 + 2px + 2q| \leq 2$ برقرار است، از ۴ تجاوز نمی‌کند.

۲۸. همهٔ عددهای درست n را پیدا کنید که، به ازای هر یک از آن‌ها: $(a) \quad n^2 + 1$ بر $n + 5$ ؛ $(b) \quad n^5 + 3$ بر $n^2 + 1$ بخش پذیر باشد.

۲۹. همهٔ چندجمله‌ای‌های $F(x)$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، به ازای هر x و y داشته باشیم:

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + 3xy(x+y)$$

۳۰. همهٔ شرکت کنندگان در دو راه‌پیمایی با هم جمع شدند (بعضی‌ها در هر دو راه‌پیمایی شرکت داشتند و برخی دیگر، تنها در یک راه‌پیمایی). در راه‌پیمایی اول، ۶۰٪ افراد مرد بودند و در راه‌پیمایی دوم ۷۵٪. ثابت کنید، در اجتماع آن‌ها، تعداد مردها، کمتر از تعداد زن‌ها نیست.

۳۱. کدام یک بزرگتر است: $\sqrt{10001} + \sqrt{999}$ یا $2\sqrt{10000}$ ؟

۳۲. ثابت کنید، برای هر n ، داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2$$

۳۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

۳۴. $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$ کوچکترین m و بزرگترین M عدد، از بین عددهای x_1, x_2, \dots, x_k است. ثابت کنید.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq -kmM$$

۳۵. مجموع عددهای غیرمنفی a و b و c برابر واحد است. ثابت

کنید:

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}$$

۳۶. روی محیط دایره‌ای n عدد قرار داده‌ایم که، مجموع آنها، عددی مثبت است. ثابت کنید، می‌توان از بین آنها عددی را انتخاب کرد که مثبت باشد و، درضمن، از مجموع آن با عدد بعدی، با دو عدد بعدی،...، با $n-2$ عدد بعدی، عددهایی مثبت به دست آید (حرکت روی محیط دایره را، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگیرد).

۳۷. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n ، می‌توان عددی به صورت

$$111 \dots 100 \dots 0$$

پیدا کرد که بر n بخش پذیر باشد. (عددها در مبنای دهدهی نوشته شده‌اند.)

۳۸. در گروهی ۳۰ نفر وجود دارند. به هر فرد، درست k نفر از

این گروه، علاقه‌مند است. کمترین مقدار k را پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان حکم کرد که: حتماً دو نفر پیدا می‌شوند که به یکدیگر علاقه‌مندند.

۳۹. عدد α مفروض است. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی N ،

می‌توان عدد درست n را طوری پیدا کرد که $0 \leq n \leq N$ و، در ضمن،

اختلاف $n\alpha$ با عدد درست، کمتر از $\frac{1}{N}$ باشد.

۴۰. روی زمین ۵ میلیارد انسان زندگی می‌کنند که کمتر از ۱٪ آنها،

بیش از ۱۰۰ سال دارند. ثابت کنید، می‌توان ۱۰۰ نفر را پیدا کرد که با هم و در جریان یک ثانیه به دنیا آمده‌اند.

۴۱. ۳۰ سکه ۱، ۲، ۳ و ۵ کوپکی داریم. ثابت کنید از آنها

می‌توان چند سکه به مجموع ۳۰ کوپک انتخاب کرد.

۴۲. روی يك نوار بلند کاغذی دنباله‌ای از ۳۶۰ رقم به صورت

۱۲۳ ۱۲۳ ۱۲۳ ... ۱۲۳ ۱۲۳

نوشته‌ایم. این نوار را جدا کثیر به چند بخش می‌توان تقسیم کرد؛ به نحوی که، همهٔ عددهای بخش‌های مختلف نوار، باهم فرق داشته باشند؟

۴۳. (a) ثابت کنید، از بین n عدد طبیعی کوچکتر از $1 - 2n$ ، می‌توان

دو عدد پیدا کرد، به نحوی که یکی بردیگری بخش‌پذیر باشد.

(b) ثابت کنید، از بین n عدد طبیعی مختلف کوچکتر از $2 - 2n$ ،

می‌توان سه عدد طوری انتخاب کرد که یکی از آنها، برابر با مجموع دو عدد دیگر باشد.

۴۴. جدا کثیر چند نقطه می‌توان روی پاره‌خط راست به طول واحد

قرار داد تا روی هر پاره‌خط راست به طول l ، واقع بر پاره‌خط اصلی، بیش از $1 + 100l^2$ نقطه وجود نداشته باشد؟

۴۵. (a) در دایره‌ای به قطر ۱، چند وتر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید،

اگر هر قطر در بیش از k نقطه و ترها را قطع نکند، آن وقت مجموع طول‌های همهٔ وترها، از $3/15k$ کمتر است.

(b) در مکعبی با یال به طول a خط شکستهای وجود دارد، که هر صفحهٔ

موازی با یکی از وجدها را، در بیش از k نقطه قطع نمی‌کند. ثابت کنید، طول خط شکسته، از $3ka$ تجاوز نمی‌کند.

۴۶. در سطحی يك کیلومتر در يك کیلومتر، بیش‌ای از درختان کاج

وجود دارد که از ۴۵۰۰ درخت تشکیل شده و قطر هر درخت ۵۰ سانتی‌متر است. ثابت کنید، روی این سطح مربعی، می‌توان ۵۰ قطعهٔ مستطیلی ۱۰ متر در ۲۰ متر طوری جدا کرد که، در آنها، حتی يك درخت هم نروئیده باشد.

۴۷. ۱۰۰ نقطهٔ A_1, A_2, \dots, A_{100} را روی محیط دایره‌ای علامت

گذاشته‌ایم. کدام يك از چهار ضلعی‌های محدب بزرگترند: آن‌هایی که یکی از رئوس‌هایشان A_1 است، یا بقیه؟ چقدر؟

۴۸. از بین عددهای شش‌رقمی، کدام بزرگترند: آن‌هایی که قابل

بیان به صورت حاصل ضرب دو عدد سه‌رقمی هستند یا بقیه؟

۴۹. a) آیا می‌توان همه عددهای ده‌رقمی را که با رقم‌های ۱ و ۲ نوشته شده‌اند، طوری به دو گروه تقسیم کرد که، مجموع هر دو عدد از یک گروه، دست کم دو رقم برابر ۳ داشته باشد؟

b) ثابت کنید، بین عددهای n رقمی که تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ هستند، نمی‌توان بیش از $\frac{2^n}{2n+1}$ عدد طوری انتخاب کرد که، هر دو تا از آنها، دست کم در رقم‌های سه‌مرتبه خود باهم فرق داشته باشند.

۵۰. به چند طریق می‌توان دایره‌ای که به p قطاع تقسیم شده است (p ، عددی است اول) به وسیله n رنگ مختلف، رنگ کرد؟ (هر قطاع فقط یک رنگ دارد؛ اجباری نیست از همه رنگ‌ها استفاده شود؛ اگر ضمن دوران دایره، دو روش رنگ آمیزی، برهم منطبق شوند، آنها را یکی به حساب می‌آوریم.)

b) ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n و هر عدد اول p ، عدد $n^p - n$ بر عدد p بخش پذیر است (قضیه کوچک فرما).

۵۱. در یک فستیوال، ۶ موسیقی‌دان شرکت دارند. در هر کنسرت، بخشی از موسیقی‌دان‌ها شرکت می‌کنند و، بقیه، در سالن به آنها گوش می‌دهند. حداقل چند کنسرت باید داده شود تا هر یک از ۶ موسیقی‌دان، به اجرای هر یک از دیگران، از طریق سالن، گوش کرده باشند؟

۵۲. در شهر X ، هر خانواده در آپارتمان جداگانه‌ای زندگی می‌کند. تصمیم گرفته می‌شود، هر دو خانواده، آپارتمان‌های خود را باهم عوض کنند (دو خانواده‌ای که در یک روز آپارتمان‌های خود را با هم عوض کرده‌اند، هیچ کدام در تعویض آپارتمان با یک خانواده دیگر، در آن روز شرکت نمی‌کنند). ثابت کنید، هر گونه تعویض آپارتمان‌ها را، که مورد نظر ما باشد، می‌توان در شهر X ، در دوروز انجام داد.

۵۳. ثابت کنید، از قطعه مفتول به طول ۱۲۰ سانتی‌متر، نمی‌توان قالب مکعبی را با یال ۱۰ سانتی‌متر، بدون پاره کردن مفتول، درست کرد.

۵۴. ۳۰ اردک ماهی را در بر که‌ای رها کرده‌ایم که، به تدریج یکدیگر را می‌خورند. اردک ماهی را وقتی سیر به حساب می‌آوریم که سه اردک ماهی

(سیر یا گرسنه) را خورده باشد. حداکثر چند اردک ماهی می تواند سیر بشود؟
 ۵۵. چگونه می توان ۵۰ شهر را با حداقل تعداد خط های هوایی به هم مربوط کرد تا این که بتوانیم از هر شهر به هر شهر دیگر پرواز کنیم، بدون این که بیش از حداکثر دو هواپیما، عوض کنیم؟

۵۶. هر یک از ۸ تیم فوتبال، یک بار با بقیه تیم ها بازی می کند. در ضمن، در این بازی ها، «مساوی» نداریم. ثابت کنید، می توان چهار تیم A ، B ، C ، D را طوری پیدا کرد که A از B و C و D ، B از C و D ، C از D برده باشند.

۵۷. روی ۲۰ کارت، رقم های ۰، ۱، ...، ۹ را نوشته ایم (هر رقم را روی دو کارت). ثابت کنید، این کارت ها را نمی توان طوری در ردیف هم جا داد که، بین دو کارت با رقم « k » درست k رقم دیگر قرار داشته باشد (برای هر $k = 0, 1, \dots, 9$).

۵۸. عددی $(2m+1)$ رقمی نوشته ایم. ثابت کنید، می توان یک رقم آن را طوری حذف کرد که در عدد $2m$ رقمی حاصل، تعداد رقم های 7 در مرتبه های زوج، برابر با تعداد رقم های 7 در مرتبه های فرد باشد.

۵۹. آیا می توان ۱۰۰ عدد فرد a_1, a_2, \dots, a_{100} را طوری پیدا کرد که، برای آنها، داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{100}} = 1$$

۶۰. ثابت کنید، یک صفحه شطرنجی 50×50 را نمی توان به شکل هایی شامل چهارخانه و به صورت T برید.

۶۱. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} & [\sqrt[n]{n}] + [\sqrt[n-1]{n}] + \dots + [\sqrt[n-2]{n}] = \\ & = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n] \end{aligned}$$

۶۲. اگر دو نقطه روی یک صفحه داده شده باشد، می توان نقطه سوم را از طریق پیدا کردن قرینه یکی از این نقطه ها نسبت به دیگری به دست آورد.

سه راس مربعی داده شده است، آیا از این طریق می توان راس چهارم این مربع را پیدا کرد؟

۶۳. قرینه یکی از راس های مثلث را نسبت به راس دیگر آن پیدا کرده ایم. آیا با تکرار عمل هایی از این گونه، می توان به سدراس يك مثلث قائم الزاویه یا متساوی الاضلاع رسید؟

۶۴. ثابت کنید، مساحت يك چندضلعی محدب که راس های آن در گره های يك صفحه شطرنجی باشد، برابر است با $1 + \frac{r}{2} + i$ که، در آن، i تعداد گره های واقع در درون این چندضلعی و r تعداد گره های واقع بر ضلع ها و راس های چندضلعی است؛ طول ضلع هر خانه از صفحه شطرنجی را واحد به حساب می آوریم (قضیه پیک).

۶۵. تعداد زیادی مثلث های متساوی الاضلاع برابر داریم که، در راس های هر کدام از آنها، عددهای ۱، ۲، و ۳ را (به ترتیب دلخواهی) گذاشته ایم. مثلث ها را در يك ستون روی هم قرار می دهیم و مجموع عددهای هر راس را می نویسیم، آیا ممکن است در هر راس a عدد ۲۵؛ b عدد ۶۰ به دست آید.

۶۶. يك چندضلعی غیر محدب مفروض است. با آن، این عمل را انجام می دهیم: دو راس غیر مجاور A و B از آن را انتخاب می کنیم، به نحوی که تمامی چندضلعی در يك طرف خط راست AB واقع باشد و قرینه بخشی از محیط چندضلعی را، که بین دو نقطه A و B قرار دارد، نسبت به وسط پاره خط راست AB پیدا می کنیم. اگر باز هم به يك چندضلعی غیر محدب برسیم، عمل را تکرار می کنیم. ثابت کنید، بعد از چند عمل، چندضلعی مفروض، به يك چندضلعی محدب تبدیل می شود.

۶۷. در راس های: a (۷ ضلعی منتظم؛ b) ۸ ضلعی منتظم؛ c) n ضلعی منتظم ($n \geq 9$)، کارت هایی با رنگ های سیاه یا سفید قرار داده ایم. آیا این درست است که، همیشه می توان سه کارت هم رنگ پیدا کرد، به نحوی که راس های يك مثلث متساوی الساقین را تشکیل دهند؟

۶۸. آیا می توان یال های يك مکعب را، با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۲

طوری شماره گذاری کرد که، مجموع عددهای هر سه یالی که از يك راس می گذرد، با مجموع عددهای هر سه یال دیگری از این گونه، برابر باشد؟ آیا می توان یال های مکعب را با عددهای $۱, \dots, ۵, \dots, ۱۰, \dots, ۲, \dots, ۶$ طوری شماره گذاری کرد تا همان شرط برقرار باشد؟

۶۹. سه دایره برابر، از يك نقطه می گذرند. ثابت کنید، سه نقطه دیگر برخورد این دایره ها، روی دایره ای با همان شعاع قرار دارند.

۷۰. روی دو خط راستی که در نقطه P بهم رسیده اند، دو متحرک به طور یکنواخت و با سرعت های برابر حرکت می کنند؛ متحرک ها را ، نقطه های M و N می نامیم. آن ها، در يك لحظه، از نقطه P عبور نکرده اند. ثابت کنید، دایره محیطی مثلث MNP ، همیشه از نقطه ثابت دیگری (به جز P) می گذرد.

۷۱. نقطه های A, B, C, D روی محیط دایره ای چنان قرار دارند که مماس های مرسوم از A و C بر دایره، روی خط راست BD بهم می رسند. ثابت کنید، مماس های مرسوم از B و D بر دایره هم، روی خط راست AC یکدیگر را قطع می کنند.

۷۲. روی ضلع های AB و BC از مثلث ABC ، مربع های $ABDK$ و $CBEL$ را، در بیرون مثلث ساخته ایم. ثابت کنید، امتداد ارتفاع BH از مثلث ABC ، بر میانه مثلث DBE منطبق می شود.

۷۳. ثابت کنید، در درون مثلثی که، زاویه هایی کمتر از ۱۲۰ درجه دارد، تنها يك نقطه T پیدا می شود که، از آن جا، هر سه ضلع مثلث به زاویه ۱۲۰ درجه دیده می شوند و، در ضمن، مجموع فاصله های نقطه T از سه راس مثلث، از مجموع فاصله های هر نقطه دیگری از صفحه تا سه راس، کوچکتر است.

۷۴. a, b, c, d را طول ضلع های متوالی يك چهار ضلعی می گیریم. ثابت کنید، مساحت چهار ضلعی از: $(a; \frac{1}{4}(ab+cd))$ و $(b; \frac{1}{4}(ac+bd))$ تجاوز نمی کند.

۷۵. روی هر ضلع متوازی الاضلاع، نقطه ای انتخاب کرده ایم. ثابت

کنید، اگر مساحت چهارضلعی با راس‌های در این نقطه‌ها، برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن وقت، دست کم یکی از قطرهای چهارضلعی، با یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع، موازی است.

۷۶. نقطه K روی قاعده ذوزنقه $ABCD$ داده شده است. نقطه M را روی قاعده دیگر CD در کجا انتخاب کنیم تا مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث‌های AMB و CKD به دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

۷۷. آیا γ نقطه را می‌توان روی صفحه طوری قرار داد، به نحوی که بین هر سه تا از آن‌ها، دو نقطه به فاصله واحد وجود داشته باشد؟

۷۸. تصویر یک شکل مسطحه، بر هر خط راستی که در صفحه شکل واقع باشد، از واحد تجاوز نمی‌کند. آیا درست است که، این شکل را، می‌توان در دایره‌ای به قطر a ؛ b جا داد؟

۷۹. متوازی‌السطوحی در فضا جا به جا می‌شود. ثابت کنید، «سایه» آن (یعنی تصویر قائم آن بر صفحه افقی)، در موقعیتی دارای حداکثر مساحت است که، سه راس دلخواه از متوازی‌السطوح، روی یک صفحه افقی واقع باشند.

۸۰. نقطه‌ای در روی سطح زمین در عرض جغرافیایی φ قرار دارد $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$. چه رابطه‌ای بین زمان T کوتاه‌ترین روز این نقطه و φ وجود دارد؟ زمین را می‌توان کره‌ای به حساب آورد که، محور دوران آن، با صفحه حرکت زمین به دور خورشید، زاویه معلومی برابر α می‌سازد.

۸۱. ۳۰۰ نفر، یک مستطیل 30×10 تشکیل داده‌اند (۳۰ نفر در هر ردیف و ۱۰ نفر در هر ستون). از هر ردیف بلندترین را انتخاب می‌کنیم؛ معلوم شد در بین ۱۰ نفری که انتخاب کرده‌ایم، پتروف از همه کوتاه‌تر است. بعد، از هر ستون، کوتاه‌ترین را انتخاب می‌کنیم؛ در بین این ۳۰ نفر، ایوانف از همه بلندتر از آب درآمد. کدام بلندترند: پتروف یا ایوانف؟

۸۲. عددهای $1, 2, \dots, 81$ را در جدول 9×9 طوری قرار داده‌ایم

که، در هر سطر، عددها به ردیف صعودی اند. چه مجموع حداکثر و چه مجموع حداقل را می توان در ستون پنجم به دست آورد؟

۸۳. عددهای درست غیر منفی را در جدول $n \times n$ قرار داده ایم. می دانیم، اگر در خانه محل برخورد یک سطر و یک ستون عدد صفر قرار گرفته باشد، آن وقت مجموع $2n - 1$ عدد واقع در این سطر و این ستون، از n کمتر نیست. ثابت کنید، مجموع همه n^2 عدد، از $\frac{1}{2}n^2$ کمتر نیست.

۸۴. این دستگاه معادله ها را حل کنید:

$$x_1 + \sqrt{x_2} = 1, \quad x_2 + \sqrt{x_3} = 1, \quad \dots,$$

$$x_8 + \sqrt{x_9} = 1, \quad x_9 + \sqrt{x_1} = 1$$

۸۵. دو نفر باهم بازی می کنند. جلو آنها، دو کوبه چوب کبریت وجود دارد. یکی از آنها، یکی از کوبه های چوب کبریت را کنار می گذارد و کوبه باقی مانده را به دو بخش تقسیم می کند. بعد دومی، یکی از کوبه ها را کنار می زند و کوبه دیگر را به دو بخش تقسیم می کند و غیره. کسی می بازد که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد، یعنی در هر بخش، تنها یک چوب کبریت وجود داشته باشد. اگر در ابتدا، در یکی از کوبه ها ۱۶ چوب کبریت و در دیگری ۸۸ چوب کبریت باشد و بازی را آگاهانه انجام دهند، کدام یک برنده می شود: آن که بازی را آغاز می کند یا رقیب او؟

۸۶. چند کوبه سنگ ریزه داریم. دو نفر باهم بازی می کنند. هر بازی کن، در نوبت خود، هر کوبه ای را که بیش از یک سنگ ریزه دارد، به دو کوبه کوچکتر تقسیم می کند. بازی تا آنجا ادامه پیدا می کند که، همه کوبه ها، تنها از یک سنگ ریزه تشکیل شده باشند. کسی بازی را می برد که آخرین حرکت را انجام داده باشد. کسی که بازی را آغاز می کند، چگونه باید بازی کند، به شرطی که، در ابتدا، در هر کوبه از ۸۰ تا ۱۲۰ سنگ ریزه وجود داشته باشد؟

۸۷. بین n سکه، که در ظاهر خود هیچ فرقی باهم ندارند، احتمالاً یک یا دو سکه تقلبی وجود دارد که وزن آنها با دیگران یکی نیست (ولی

ممکن است حتی یک سکه تقلبی هم وجود نداشته باشد؛ و اگر دو سکه تقلبی در بین آنها باشد، این دو سکه دارای یک وزن هستند). می خواهیم با سه بار استفاده از ترازو (بدون استفاده از وزنه) روشن کنیم: آیا سکه های تقلبی در بین n سکه وجود دارد یا نه، و در صورت وجود، سکه تقلبی سنگین تر است یا سکه واقعی؟ چگونه می توان این عمل را انجام داد، اگر $n = 8$ ؛
 (b) برابر هر عدد درست بزرگتر از 8 باشد؟

۸۸. N دوست در یک زمان، از N خبر تازه اطلاع پیدا کردند؛ در ضمن هر نفر درست از یک خبر تازه آگاه شد. آنها با تلفن، خبرها را با هم مبادله کردند. هر تلفن یک ساعت طول کشید و، ضمن آن، هر خبر تازه ای ردوبدل شد. چند ساعت طول می کشد تا همه از همه خبرها آگاه شوند؟
 جواب را در حالت های (a) $N = 64$ ؛ (b) $N = 55$ ؛ (c) $N = 100$ پیدا کنید.

مسئله‌های المپیاد دهم شهرها، دور بهاری

(مارس سال ۱۹۸۸)

مسئله‌های ۱ تا ۷ برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۷ و ۸ و مسئله‌های ۸ تا ۱۲، برای کلاس‌های ۹ و ۱۰.

۱. a, b, c ، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، به شرط $a + b = c$ ، عدد $a^4 + b^4 + c^4$ برابر است با دو برابر مجذور یک عدد درست.
۲. مثلث ABC مفروض است. قرینه‌های خط راست AB و BC نسبت به AC ، یکدیگر را در نقطه K قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرد.
۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$

۴. وزنه‌هایی با وزن‌های ۱، ۲، ۴، ... در اختیار داریم (وزن هر وزنه، توانی از ۲ است)، در ضمن در بین آنها، ممکن است وزنه‌های برابر هم وجود داشته باشد. در دو کفه ترازو، وزنه‌هایی را قرار داده‌ایم، به نحوی

که ترازو در تعادل بایستد. می‌دانیم در کفه سمت چپ، همه وزنه‌ها با هم فرق دارند. ثابت کنید، تعداد وزنه‌های کفه سمت راست، از تعداد وزنه‌های کفه سمت چپ کمتر نیست.

۵. آیا می‌توان صفحه را با دایره‌ها طوری پوشاند که، از هر نقطه،

درست ۱۹۸۸ دایره بگذرد؟

۶. واژه‌های شامل دو حرف A و B را، پشت سر هم، در نظر

می‌گیریم: واژه اول « A »، واژه دوم « B » و واژه k ام را به این ترتیب

به دست می‌آوریم که $(k-1)$ امین واژه را در سمت راست واژه $(k-2)$ ام

بنویسیم، چند واژه اول این دنباله، چنین می‌شود:

« $ABBAB$ »، « BAB »، « AB »، « B »، « A »

آیا ممکن است، در این دنباله، با واژه‌های «متناوب» برخورد کنیم، یعنی

واژه‌ای به صورت $PP...P$ که، در آن، P واژه‌ای باشد که، دست کم، دو بار

تکرار شده باشد؟

۷. زاویه قائمه را به بی‌نهایت خانه مربعی تقسیم کرده‌ایم. ردیف

خانه‌هایی را در نظر می‌گیریم که با یکی از ضلع‌های زاویه، موازی‌اند

(ردیف‌های «قائم» و ردیف‌های «افقی»). آیا می‌توان در هر خانه یک عدد

طبیعی نوشت، به نحوی که در هر ردیف، همه عددهای طبیعی و، از هر کدام

یکبار آمده باشند؟

۸. دو قاعده ذوزنقه چه نسبتی داشته باشند تا خط راستی وجود

داشته باشد که از نقطه برخورد آن با قطرها، ساق‌ها و امتدادهای دو قاعده،

۵ پاره خط راست برابر به دست آید؟

۹. چند جمله‌ای با ضریب‌های درستی در اختیار داریم که ۱ و ۲

ریشه‌های آن هستند. ثابت کنید، می‌توان ضریبی از چند جمله‌ای را پیدا کرد

که از ۱ — کوچکتر باشد.

۱۰. کارت‌هایی در اختیار داریم که، روی هر کدام از آنها، یکی از

شماره‌های ۱ تا ۳۰ نوشته شده است (ممکن است شماره‌های تکرار شده

باشد). هر دانش‌آموزی، یکی از کارت‌ها را برمی‌دارد. معلم می‌تواند از

گروهی دانش‌آموزان، شماره کارت را پرسد و از آنها بخواهد تا دست

خود را بلند کنند (ممکن است، این گروه شامل يك نفر باشد). معلم دست کم از چند گروه باید سؤال کند تا شماره کارت‌های همه دانش‌آموزان را بداند؟ (ضرورتی ندارد، تعداد دانش‌آموزان، ۳۰ باشد.)

۱۱. مکعبی $20 \times 20 \times 20$ از ۲۰۰۰ قوطی کبریت $1 \times 2 \times 2$ تشکیل شده است. ثابت کنید، می‌توان آن را با سوزن طوری سوراخ کرد که سوزن، از مکعب بگذرد، ولی به قوطی کبریت‌ها فرو نرود.

۱۲. واژه‌هایی را در نظر می‌گیریم که با دو حرف A و B درست شده‌اند. نخستین واژه در این دنباله « A » و k امین واژه از واژه $(k-1)$ ام با این قاعده به دست آمده است. هر حرف A به AAB و هر حرف B به A تبدیل می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که، هر واژه، به صورت زیر آغاز می‌شود و، در ضمن، دنباله‌ای نامتناهی از حرف‌ها به دست می‌آید.

$AAB AAB AAAB AAB AAAB \dots$

- (a) در کجا از این دنباله، به هزارمین حرف A برخورد می‌کنیم؟
(b) ثابت کنید، این دنباله نامتناوب است.

سیاهه نمادها

N : مجموعه عددهای طبیعی

Z : مجموعه عددهای درست

R : مجموعه عددهای حقیقی

$a \in A$: عضو a متعلق به مجموعه A است

$A \cap B$: اشتراک مجموعه‌های A و B

$A \cup B$: اجتماع دو مجموعه A و B

$\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$: عدد n رقمی در دستگانه دهدهی

$a \equiv b \pmod{m}$: نسبت به مدول m با b هم نهشت است (باقی مانده‌های تقسیم دو عدد درست a و b بر m یکی است؛ تفاضل $a - b$ بر m بخش پذیر است.)

$n!$: (فاکتوریل n) حاصل ضرب $1 \times 2 \times \dots \times n$ ؛ $1! = 1$ ؛ $0! = 1$

C_n^k : ضریب بسط دو جمله‌ای برابر با $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$[x]$: بخش درست عدد x (بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی‌کند).

$\max_i x_i = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: بزرگترین عدد از بین عددهای

x_n, \dots, x_2, x_1

$\min_i x_i = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: کوچکترین عدد از بین عددهای

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ مجموع} : \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{1 \leq x \leq n} x_i$$

AB : پاره خط راست با دو انتهای A و B ، طول این پاره خط، نیم خط راست به مبداء A که از B می گذرد؛ خط راستی که از دو نقطه A و B می گذرد.

$$AB : CD \text{ نسبت طول های دو پاره خط راست } AB \text{ و } CD = \frac{AB}{CD}$$

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \text{ بردار به مبداء } A \text{ و انتهای } B$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \text{ حاصل ضرب اسکالر (عددی) دو بردار } \mathbf{u} \text{ و } \mathbf{v}$$

$$\widehat{ABC} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ زاویه } ABC \text{ ، مقدار این زاویه (مقدار زاویه بین}$$

بردارهای \mathbf{u} و \mathbf{v})

$$\widehat{AMB} \text{ (} \widehat{AB} \text{) : کمانی با دو انتهای } A \text{ و } B \text{ (که از نقطه } M$$

می گذرد)

$$S_{ABC} \text{ (} S_{ABCD} \text{) : مساحت مثلث } ABC \text{ (مساحت چهار ضلعی } ABCD \text{) .}$$

برخی از اثرهای مترجم این کتاب

۱. ریاضیات خالص

۱. روش‌های جبر (دو جلد تألیف)
۲. دوره اختصاصی جبر مقدماتی
۳. مثلثات مستقیم الخط و کروی
۴. هندسه غیر اقلیدسی
۵. انعکاس
۶. نامساوی‌ها
۷. ورودی به منطق ریاضی
۸. روش مختصاتی و هندسه چهار بعدی
۹. نظریه مجموعه‌ها
۱۰. استقرای ریاضی
۱۱. مثلثات
۱۲. جبر، از آغاز تا پایان
۱۳. ماکزیمم و مینیمم بدون استفاده از مشتق (با آقای عادل)
۱۴. جبر برداری (با آقای عادل)
۱۵. روش‌های مثلثات (با آقای فیروزنیا)
۱۶. عبارتهای متقارن در جبر مقدماتی (تألیف)
۱۷. قدر مطلق در حوزه عددهای حقیقی (تألیف)
۱۸. بخش درست عدد (تألیف)
۱۹. تابع‌های متناوب (تألیف)
۲۰. روش استقرای ریاضی (تألیف)
۲۱. بسط دو جمله‌ای (تألیف)
۲۲. ورودی به آنالیز ترکیبی (تألیف)
۲۳. ورودی به نظریه احتمال (تألیف)
۲۴. تربیع دایره و غیرجبری بودن عدد پی
۲۵. هندسه پرگار
۲۶. بخش‌پذیری عددها و مفهوم الگوریتم
۲۷. نقطه‌های بی حرکت
۲۸. محاسبه برداری (تألیف)

۲۹. همه چیز دربارهٔ سه جمله‌ای درجه دوم (تألیف)

۳۰. مسیر ریاضات جدید

۳۱. نظریه اعداد (با آقای قوامزاده)

۳۲. تقارن در جبر

۳۳. نظریهٔ ساختمان‌های هندسی

۳۴. آنالیز ریاضی (در سه جلد، با آقای امامی)

۳۵. ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها

۳۶. درباره حد

۳۷. منحنی‌ها در فضا

۳۸. ریاضیات محدود

II. مساله‌ها

۳۹. مسائل مسابقات ریاضی

۴۰. مسائل کنکورهای شوروی

۴۱. گزیده‌ای از مساله‌های دشوار ریاضی

۴۲. مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی

۴۳. ۲۵۰ مسالهٔ حساب

۴۴. آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۴۵. المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف

۴۶. المپیادهای بین‌المللی (با آقای عادل)

۴۷. المپیادهای ریاضی در مجارستان (با آقای عادل)

۴۸. المپیادهای ریاضی در شوروی

۴۹. ۱۷۵ مسالهٔ منطقی

۵۰. مسائل تاریخی ریاضیات

۵۱. تصاعدها و لگاریتم در مساله‌های عملی

۵۲. مساله‌های ریاضی، آسان ولی...

۵۳. المپیادهای ریاضی در آمریکا (با آقای عادل)

۵۴. گزیده‌ای از مساله‌ها و قضیه‌های ریاضیات مقدماتی (با آقای عادل)

III. ریاضیات کاربردی

۵۵. آنالیز برداری و نظریهٔ میدان‌ها

۵۶. ریاضیات کاربرده (تألیف و ترجمه)

IV. ریاضیات به زبان ساده و سرگرمی‌های ریاضی

۵۷. داستان مجموعه‌ها
۵۸. داستان‌های ریاضی
۵۹. بازی با بی‌نهایت
۶۰. سرگرمی‌های جبر
۶۱. سرگرمی‌های هندسه
۶۲. سرگرمی‌های ریاضی
۶۳. در قلمرو ریاضیات
۶۴. اندیشه ریاضی
۶۵. در پی فیثاغورث
۶۶. سرگرمی‌های توپولوژی
۷. تاریخ ریاضیات، فلسفه ریاضی و آموزش ریاضی
۶۷. ریاضیات، محتوی، روش و اهمیت آن (تا کنون دو جلد)
۶۸. اواريست گالوا، ریاضی‌دان و انقلابی فرانسوی
۶۹. من ریاضی‌دانم
۷۰. پویایی ریاضیات
۷۱. لباچوسکی و هندسه نااقلیدسی
۷۲. آفرینندگان ریاضیات عالی
۷۳. خلاقیت ریاضی
۷۴. هندسه در گذشته و حال
۷۵. تاریخ حساب
۷۶. آنالیز ریاضی
۷۷. ریاضیات در شرق
۸۷. لگاریتم (تاریخ استدلالی لگاریتم)
۷۱. برخی کتاب‌های دیگر
۷۹. سرگذشت حرکت
۸۰. نظریه نسبیت در مساله‌ها و تمرین‌ها
۸۱. علم، جامعه و انسان (در سه جلد)
۸۲. ژان هوس و جنبش هوسیسم (تألیف)
۸۳. جنبش مزدک و مزدکیان (تألیف)
۸۴. یک روز زندگی پسرک قبطی
۸۵. داستان‌های علمی
۸۶. اخلاق و انسان

نشر توسعه منتشر کرده است:

- ۱- روش‌های مثلثات
تألیف: پرویز شهریاری- احمد فیروزنیا (با همکاری نشر فردوس)
- ۲- مسائل ریاضی المپیادهای اتحاد شوروی
ترجمه: پرویز شهریاری
- ۳- تحول عصر (مسائل ایران و جهان معاصر)
تألیف: موسوی خوزستانی
- ۴- مکانی به وسعت هیچ (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
- ۵- الگویی برای توسعه اقتصادی ایران
تألیف: دکتر ابراهیم رزاقی (استاد اقتصاد دانشگاه تهران)
- ۶- ره آورد سرمایه‌داری تجاری ایران
تألیف: موسوی خوزستانی
- ۷- حلقه نفوذناپذیر گرگ‌های خاکستری (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز

کتاب‌های زیر چاپ:

- ۱- منشور توسعه (کتاب توسعه)
مجموعه مقالات و نظریات در حوزه مسائل فرهنگی، اجتماعی و اقتصادی توسعه
توسط جمعی از نویسندگان
- ۲- دردناک‌ترین داستان عالم (مجموعه داستان‌های کوتاه)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
- ۳- اقتصاد توسعه
تألیف: دکتر ابراهیم رزاقی
- ۴- در انتهای دراز دره‌ای بی‌نام و نشان (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز