فصل ۷

دنباله و سری

۷–۱ دنباله

تعریف. تابع f که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی باشد را یک دنباله می‌نامیم. مقدار تابع f در نقطه $x = n$ یعنی $f(n)$ را معمولاً با a_n نمایش می‌دهیم و آن را **جمله عمومی** دنباله می‌نامیم. در این صورت برای مشخص کردن دنباله a_n می‌توان اعضای آن یعنی $a_۱, a_۲, \dots$ را به ترتیب در یک سطر نوشت یا از نماد $\{a_n\}$ استفاده کرد.

تعاریف مربوط به یکنوایی و کرانداری را می‌توان مشابه توابع در مورد دنباله‌ها نیز بیان کرد.

۱) دنباله a_n را **صعودی** می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+۱} \geq a_n$ و با حذف علامت تساوی تعریف صعودی اکید به دست می‌آید.

۲) دنباله a_n را **نزولی** می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+۱} \leq a_n$ و با حذف علامت تساوی تعریف نزولی اکید به دست می‌آید.

۳) دنباله a_n را **یکنوا** می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

۴) دنباله a_n را **از بالا کراندار** می‌نامیم هرگاه عدد ثابت $\beta \in \mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر n : $a_n \leq \beta$

۵) دنباله a_n را **از پایین کراندار** می‌نامیم هرگاه عدد ثابت $\alpha \in \mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر n : $a_n \geq \alpha$

۶) اگر دنباله‌ای از بالا و پایین کراندار باشد آنگاه آن را **کراندار** می‌نامیم و دنباله‌ای که کراندار نباشد، **بی‌کران** نامیده می‌شود.

نکته ۱. **دنباله a_n کراندار است اگر و تنها اگر عدد $M > ۰$ موجود باشد که** $\forall n \ : \ |a_n| \leq M$.

مثال ۱. دنباله $a_n = \dfrac{n}{n+۱}\cos(n\pi)$ یکنوا نمی‌باشد زیرا $a_n = (-۱)^n \dfrac{n}{n+۱}$ و جملات آن عبارتند از $-\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, -\frac{۳}{۴}, \dots$ اما کراندار است زیرا $|a_n| = \dfrac{n}{n+۱} \leq ۱$.

روشهای بررسی یکنوایی دنباله

برای بررسی یکنوایی دنباله a_n می‌توانیم از روش‌های زیر استفاده کنیم.

۱) قرار می‌دهیم $L = a_{n+۱} - a_n$ دراین صورت علامت L وضعیت یکنوایی دنباله را مشخص خواهد کرد. در واقع برای $L \geq ۰$ نتیجه می‌گیریم دنباله صعودی و برای $L \leq ۰$ نتیجه می‌گیریم دنباله نزولی است.

۲) **(آزمون نسبت)** اگر جملات دنباله a_n علامت ثابت داشته باشند، قرار می‌دهیم $L = \dfrac{a_{n+۱}}{a_n}$.

الف) اگر $a_n > 0$ و $L \geq 1$ آنگاه دنباله صعودی است و اگر $L \leq 1$ آنگاه دنباله نزولی است.

ب) اگر $a_n < 0$ و $L \geq 1$ آنگاه دنباله نزولی است و اگر $L \leq 1$ آنگاه دنباله صعودی است.

۳) اگر $f(x)$ تابع سازنده دنباله باشد یعنی $a_n = f(n)$، صعودی یا نزولی بودن f وضعیت a_n را مشخص می‌کند.

الف) اگر برای $x \geq 1$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ آنگاه a_n صعودی اکید است.

ب) اگر برای $x \geq 1$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ آنگاه a_n نزولی اکید است.

۴) اگر $g(x)$ یک تابع یکنوا باشد و $b_n = g(a_n)$:

الف) اگر $g(x)$ صعودی باشد چنانچه a_n دنباله‌ای صعودی باشد، b_n نیز صعودی است و چنانچه a_n دنباله‌ای نزولی باشد، b_n نیز نزولی است.

ب) اگر $g(x)$ نزولی باشد چنانچه a_n دنباله‌ای صعودی باشد، b_n نزولی و چنانچه a_n دنباله‌ای نزولی باشد، b_n صعودی است.

نکته زیر در بررسی یکنوایی برخی از دنباله‌های بازگشتی قابل استفاده است که به سادگی با استقرا اثبات می‌شود.

نکته ۲. فرض کنید دنباله a_n با رابطه بازگشتی $a_n = f(a_{n-1})$ که f تابعی صعودی اکید است، تعریف شده و مقدار a_1 نیز داده شود. اگر $a_1 < a_2$ دنباله a_n صعودی و اگر $a_1 > a_2$ دنباله a_n نزولی خواهد بود. در حالت کلی اگر f نزولی اکید باشد دنباله a_n حکم مشخص ندارد.

نکته ۳. اگر $a_n = f(n)$ و تابع $f(x)$ برای $x \geq 1$ کراندار باشد، دنباله a_n نیز کراندار خواهد بود.

مثال ۲. دنباله $a_n = \frac{n}{e^n}$ از لحاظ یکنوایی و کرانداری چه وضعی دارد؟

اگر $f(x) = xe^{-x}$ آنگاه $a_n = f(n)$ و چون $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ برای $x \geq 1$ منفی است پس دنباله a_n نزولی اکید است. از طرفی چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $f(1) = e^{-1}$ بنابراین تابع f کراندار و لذا دنباله a_n نیز کراندار است.

تعریف. دنباله a_n را به عدد ℓ همگرا می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad n \geq N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$$

و اگر حد دنباله a_n موجود (یا متناهی) نباشد، آن را واگرا می‌نامیم.

تذکر۱. وقتی $a_n \to \ell$ برای هر اندیسی مانند m که به بینهایت میل کند نیز حد a_m برابر ℓ است. مثلاً $a_{n+1} \to \ell$ یا $a_{2n} \to \ell$.

قضیه ۱. هردنباله همگرا، کراندار است. (و بنابراین هر دنباله بی‌کران، واگراست)

قضیه ۲. هر دنباله یکنوا و کراندار همگراست.

نتیجه ۳. هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

نتیجه ۴. هر دنباله نزولی و از پایین کراندار همگراست.

قضیه ۵. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ و $a_n = f(n)$ آنگاه دنباله a_n به ℓ همگراست.

روشهای محاسبه حد یک دنباله

با توجه به قضیه بالا، قضایا و روش‌های محاسبه حد تابع در بی‌نهایت در اینجا نیز معتبر هستند و علاوه بر آن داریم:

۱) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = ۱$ و بنابراین اگر $p(n)$ یک چندجمله‌ای برحسب متغیر n باشد (که برای n های بزرگ مثبت باشد) آنگاه $\sqrt[n]{p(n)} \to ۱$ و ضمناً $\sqrt[n]{\ln(p(n))} \to ۱$.

۲) اگر p عددی ثابت و بزرگ‌تراز $۱-$ باشد آنگاه $۱^p + ۲^p + \cdots + n^p \sim \frac{n^{p+۱}}{p+۱} + \frac{n^p}{۲} \sim \frac{n^{p+۱}}{p+۱}$

۳) بنا به فرمول **استرلینگ** عدد $۰ < \theta < ۱$ موجود است که $n!e^n = \sqrt{۲\pi n}\, n^n e^{\frac{\theta}{۱۲n}}$ و لذا:

$$n! \sim \sqrt{۲\pi n}(\frac{n}{e})^n \qquad (۱-۷)$$

پس برای $a \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\sqrt[n]{(an)!} \sim \left(\frac{an}{e}\right)^a \implies \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \qquad (۲-۷)$$

۴) در قوانین رشد اگر $a > ۱$ عددی ثابت باشدآنگاه $n^n \gg n! \gg a^n$.

۵) اگر دنباله a_n همگرا به ℓ باشد، دنباله میانگین حسابی و هندسی یعنی

$$b_n = \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n} \quad \text{و} \quad c_n = \sqrt[n]{a_۱ \ldots a_n}$$

نیز همگرا به ℓ هستند.

۶) اگر $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \ell$ آنگاه $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

مثال ۳. حد هریک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $a_n = \sqrt[n]{\frac{۲^n + ۳^n}{۴^n + ۶^n}}$ ب) $a_n = \frac{۱^۳ + \cdots + n^۳}{n^۳} - \frac{n}{۴}$

ج) $a_n = \sqrt[n]{\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۵} \times \cdots \times \frac{n}{۲n+۱}}$ د) $a_n = \frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}$

الف) با توجه به قوانین رشد:

$$\frac{۲^n + ۳^n}{۴^n + ۶^n} \sim \frac{۳^n}{۶^n} = (\frac{۱}{۲})^n \implies a_n \sim \frac{۱}{۲} \implies a_n \to \frac{۱}{۲}$$

ب) از قاعده ۲ داریم $\frac{۱^۳ + \cdots + n^۳}{n^۳} \sim \frac{\frac{۱}{۴}n^۴ + \frac{۱}{۲}n^۳}{n^۳} = \frac{n}{۴} + \frac{۱}{۲}$ و لذا $a_n \sim \frac{n}{۴} + \frac{۱}{۲} - \frac{n}{۴} = \frac{۱}{۲}$.

ج) دنباله a_n میانگین هندسی $b_n = \frac{n}{۲n+۱}$ است و چون $b_n \to \frac{۱}{۲}$ پس a_n نیز همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است.

د) روش اول. مخرج عبارت‌های ظاهرشده در a_n، بزرگ می‌شوند، پس جملات ظاهر شده بین جمله اول و آخر قرار دارند و به عبارتی برای هر k داریم $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n\ \text{بار}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n\ \text{بار}} \Longrightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

و چون $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \to 1$ و $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$ پس از قضیه فشردگی $a_n \to 1$.

روش دوم. هر یک از عبارتهای ظاهر شده در مجموع هم‌ارز $\frac{1}{n}$ هستند و لذا $a_n \sim n \times \frac{1}{n} = 1$.

تذکر ۲. مجموع داده شده در مثال بالا، شامل n جمله و لذا مشابه مجموعهای ریمان است. برای بررسی این مطلب که آیا آنرا می‌توان به عنوان مجموع ریمان در نظر گرفت، فرض می‌کنیم مجموع داده شده برابر مجموع ریمان تابع $f(x)$ بر بازه $[0,1]$ باشد در این صورت $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} =$ جمله عمومی $= \frac{1}{n}f(c_k)$ و لذا $f(c_k) = \frac{n}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$ که چون عبارت $\frac{k}{n}$ به وجود نیامده است، مجموع مورد نظر ریمان نیست.

مثال ۴ حاصل حد $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1+\frac{i}{n^2}\right)$ را بدست آورید.

حاصلضرب مورد نظر را a_n می‌نامیم.

$$a_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2}\cdot\frac{n^2+2}{n^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2+n}{n^2}$$

$$= \frac{1\times 2\times\cdots\times n^2}{1\times 2\times\cdots\times n^2}\cdot\frac{(n^2+1)\cdots(n^2+n)}{(n^2)^n} = \frac{(n^2+n)!}{(n^2)!(n^{2n})}$$

در رابطه استرلینگ $m! \sim \left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2m\pi}$ جایگذاری می‌کنیم $m=n^2$ و $m = n^2+n = n(n+1)$ و لذا:

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{n(n+1)}{e}\right)^{n^2+n}\sqrt{2(n^2+n)\pi}}{\left(\frac{n^2}{e}\right)^{n^2}\sqrt{2n^2\pi}n^{2n}} = \frac{\frac{n^{n^2+n}(n+1)^{n^2+n}}{e^{n^2}\cdot e^n}\sqrt{2\pi}\sqrt{n^2+n}}{\frac{n^{2n^2}}{e^{n^2}}\sqrt{2\pi}(n)(n^{2n})} = \frac{(n+1)^{n^2+n}\sqrt{n^2+n}}{e^n n^n\times n\times n^{n^2}}$$

$$\sim \frac{(n+1)^{n^2+n}}{e^n\cdot n^{n^2+n}} = \frac{1}{e^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}$$

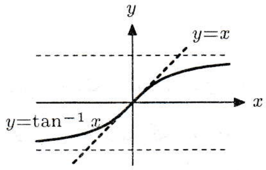
$$\ln a_n \sim \ln e^{-n} + (n^2+n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n+(n^2+n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\ldots\right) = \frac{1}{2}+\ldots \longrightarrow \frac{1}{2} \Longrightarrow a_n \longrightarrow e^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۵. دنباله x_n با رابطه بازگشتی $x_n = \tan^{-1} x_{n-1}$ و $x_0 = 1$ تعریف شده است. ابتدا بررسی کنید که این دنباله همگراست و سپس حد آنرا بیابید.[1]

---

[1] مبحث دنباله‌های بازگشتی (که مطلب درسی ویژه‌ای در کتابهای مرجع دانشگاهی ندارند) و خصوصاً بررسی کرانداری و یکنوایی آنها در بسیاری از سؤالات نیازمند ابتکارات خاصی است و در کنکور کمتر از این موارد سؤال آمده است. در مثالهای ۵ و ۶ و ۷ برخی ایده‌های معروف برای بررسی کرانداری و یکنوایی در دنباله‌های بازگشتی را مورد بررسی قرار داده‌ایم ولی توجه به آنها ضرورت چندانی ندارد و بهتر است به محاسبه مقدار حد دنباله بازگشتی در این مثالها قناعت نمایید.

برای بررسی همگرایی در دنباله‌های بازگشتی، یکی از روشها آن است که ابتدا کرانداری و یکنوایی آنها را بررسی نماییم. توجه کنید که چون معادله خط مماس بر نمودار $f(x) = \tan^{-1} x$ در مبدأ $y = x$ و تقعر نمودار برای $x > 0$ رو به پایین است، پس برای $x > 0$ خط مماس بالاتر از نمودار $y = \tan^{-1} x$ است و لذا $\tan^{-1} x < x$ که این موضوع از روی نمودار هم واضح است. حال چون $x_0 = 1 > 0$ پس همواره $x_n > 0$ و لذا $x_n = \tan^{-1} x_{n-1} < x_{n-1}$.



پس دنباله x_n نزولی است. از طرفی $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ و بنابراین x_n کراندار است و لذا با توجه به قضیه ۲ در صفحه ۴۸۸ همگراست. پس از اثبات همگرایی یک دنباله بازگشتی، برای محاسبه حد آن کافی است مقدار حد را برابر ℓ بگیریم و لذا $x_n, x_{n-1} \to \ell$. حال با اعمال حد روی رابطه بازگشتی به رابطه $\ell = \tan^{-1} \ell$ می‌رسیم که با توجه به شکل بالا تنها جواب آن $\ell = 0$ می‌باشد.

مثال ۶

دنباله a_n با رابطه $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ و $a_0 = \frac{3}{2}$ مفروض است. حد آنرا بیابید.

ابتدا یکنوایی دنباله را بررسی می‌کنیم.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 1)(a_n - 2) \qquad (*)$$

پس باید کرانهای a_n مشخص گردد. با توجه به اینکه $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1 \geq 1$ پس همواره $a_n \geq 1$.
چون $a_0 = \frac{3}{2} < 2$ پس $a_1 = (a_0 - 1)^2 + 1 < 1 + 1 = 2$ و لذا با استقرا می‌توان بررسی نمود که همواره $1 \leq a_n < 2$ و لذا این دنباله کراندار است. با توجه به نابرابری اخیر و رابطه $(*)$ داریم $a_{n+1} - a_n < 0$ و لذا دنباله a_n نزولی است. پس دنباله a_n همگراست. اگر مقدار حد را ℓ فرض کنیم، با اعمال حد بر رابطه بازگشتی:

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \implies \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \implies \ell = 1, 2$$

چون دنباله a_n نزولی‌است، پس $\ell \leq a_0$ و لذا $\ell = 1$ قابل قبول است.

توجه کنید که در این مثال مقدار a_0 در وضعیت دنباله و مقدار حد آن تأثیر گذار است. مثلاً برای هر $1 < a_0 < 2$ احکام بالا همچنان معتبر است. اما اگر $a_0 > 2$ آنگاه همواره $a_n > 2$ و لذا دنباله صعودی و واگرا خواهد بود.

مثال ۷

فرض کنید $b_0 > a_0 > 0$ و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با روابط زیر تعریف شوند.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{و} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

بررسی کنید این دو دنباله همگرا هستند و حد آنها را بیابید.

ابتدا توجه کنید که برای هر $x, y > 0$ داریم $\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$.(این نابرابری به نامساوی میانگین توافقی و حسابی معروف است و با طرفین وسطین کردن به سادگی اثبات می‌شود.) و بنابراین:

$$\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \implies a_{n+1} \leq b_{n+1} \quad (\text{برای هر } n)$$
$$\implies b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n \implies b_{n+1} \leq b_n$$

بنابراین دنباله b_n نزولی و چون $b_n > ۰$ پس از پایین کراندار و بنا به نتیجه ۴ در صفحه ۴۸۸ همگرا به عددی چون $\ell_۱$ می‌باشد. با توجه به $a_n \leq b_n$ داریم:

$$a_{n+۱} = \frac{۲a_nb_n}{a_n+b_n} \geq \frac{۲a_nb_n}{b_n+b_n} = \frac{۲a_nb_n}{۲b_n} = a_n \implies a_{n+۱} \geq a_n$$

پس دنباله a_n صعودی است و چون $a_n \leq b_n \leq b_۰$ پس از بالا کراندار و لذا همگرا به عددی چون $\ell_۲$ می‌باشد. حال توجه کنید که $a_{n+۱}b_{n+۱} = \frac{۲a_nb_n}{a_n+b_n} \cdot \frac{a_n+b_n}{۲} = a_nb_n$ و لذا با استقرا دیده می‌شود که $a_{n+۱}b_{n+۱} = a_۰b_۰$.

حال اگر از رابطه $b_{n+۱} = \frac{a_n+b_n}{۲}$ و رابطه اخیر حد بگیریم:

$$\begin{cases} \ell_۱ = \dfrac{\ell_۲+\ell_۱}{۲} \\ \ell_۲\ell_۱ = a_۰b_۰ \end{cases} \implies \ell_۱ = \ell_۲ = \sqrt{a_۰b_۰}$$

تعریف. اگر برخی جملات دنباله a_n (که تعداد آنها نامحدود است) با همان ترتیب در دنباله‌ای ظاهر شود، دنباله حاصل را زیردنباله a_n می‌نامیم. به صورت دقیق‌تر اگر تابع $\phi \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ صعودی اکید باشد، دنباله $a_{\phi(n)}$ را زیردنباله a_n می‌نامیم.

فرض کنید b_n و c_n دو زیردنباله از a_n هستند. در این صورت:

۱) اگر a_n کراندار باشد، b_n و c_n نیز کراندار هستند.

۲) اگر $a_n \to \ell$ آنگاه b_n و c_n نیز به ℓ همگرا می‌شوند.

۳) اگر $b_n \to \ell_۱$ و $c_n \to \ell_۲$ و $\ell_۱ \neq \ell_۲$ آنگاه دنباله a_n واگرا است.

تذکر۳. توجه کنید که اگر $\ell_۱ = \ell_۲$ نمی‌توان نتیجه گرفت که a_n همگراست، اما اگر $b_n \cup c_n$ فقط در متناهی جمله با a_n متفاوت باشد، آنگاه می‌توان گفت a_n نیز همگرا به $\ell_۱$ است. مثلاً اگر زیر دنباله‌های با اندیس زوج و فرد یک دنباله به اعداد یکسانی میل کنند، آنگاه دنباله همگراست.

۴) اگر b_n فاقد حد باشد، a_n نیز حد نخواهد داشت.

مثال ۸. دنباله $a_n = \cos(n\pi)$ فاقد حد است زیرا اگر جملات زوج آن دنباله b_n باشند، داریم $b_n = ۱$ و اگر جملات فرد را c_n بنامیم، $c_n = -۱$ پس دو زیردنباله از a_n حدودی متفاوت دارند.

قضیه ٦. اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x) = \ell$ و a_n دنباله‌ای همگرا به $x_۰$ باشد به‌طوریکه $a_n \neq x_۰$ آنگاه $f(a_n) \to \ell$.

استفاده مهمی که از این قضیه می‌شود، برای اثبات عدم وجود حد تابع است. به این صورت که اگر دو دنباله مناسب a_n و b_n همگرا به $x_۰$ موجود باشند که $f(a_n)$ و $f(b_n)$ حد منفاوتی داشته باشند آنگاه f در $x_۰$ فاقد حد است.

مثال ۹. آیا تابع $f(x) = \cos\frac{۱}{x-۲}$ در نقطه $x_۰ = ۲$ دارای حد است؟

اگر $a_n = ۲ + \frac{۱}{۲n\pi}$ و $b_n = ۲ + \frac{۱}{(۲n+۱)\pi}$ در این صورت a_n و b_n هر دو همگرا به $x_۰ = ۲$ هستند ولی

$$f(a_n) = \cos(۲n\pi) = ۱ \to ۱ \qquad \text{و} \qquad f(b_n) = \cos(۲n\pi+\pi) = -۱ \to -۱$$

پس f در $x_۰ = ۲$ فاقد حد است.

تست ۱ کدام دنباله اعداد صعودی و کراندار است؟ (صنایع غذایی، مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) $\{\cos\frac{\pi}{n}\}$ ۲) $\{\frac{n^۲-۱}{n}\}$ ۳) $\{\sin\frac{\pi}{n}\}$ ۴) $\{\frac{n+۱}{n}\}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $|\cos\frac{\pi}{n}| \leq ۱$ پس این دنباله کراندار است. دنباله $\frac{\pi}{n}$ نزولی و $\frac{\pi}{n}$ همواره در ربع اول یا دوم قرار دارد و تابع $\cos x$ برای $۰ < x \leq \pi$ نزولی است، پس بنا به (۴) در صفحه ۴۸۸ این دنباله صعودی است. (همین مطلب را با مشتق گرفتن از این دنباله و بررسی مثبت بودن آن نیز می‌توان نتیجه گرفت.)

بررسی سایر گزینه‌ها: دنباله گزینه (۲) صعودی و بی‌کران، گزینه (۳) نه صعودی و نه نزولی اما کراندار و در گزینه (۴)، نزولی و کراندار است.

تست ۲ دنباله a_n با ضابطه $a_n = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$ در کدام یک از گزینه‌های زیر صدق می‌کند؟
(ریاضی ۷۴)

۱) کراندار نیست ولی یکنوا و واگراست. ۲) کران‌دار، یکنوا و همگراست.
۳) کران‌دار و همگراست ولی یکنوا نیست. ۴) کران‌دار و یکنوا نیست ولی واگراست.

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا یکنوایی را بررسی می‌کنیم.

$$a_{n+۱} = \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n+۲} \implies a_{n+۱} - a_n = \frac{۱}{۲n+۱} + \frac{۱}{۲n+۲} - \frac{۱}{n}$$

$$\implies a_{n+۱} - a_n = (\frac{۱}{۲n+۱} - \frac{۱}{۲n}) + (\frac{۱}{۲n+۲} - \frac{۱}{۲n}) = -\frac{۱}{۲n(۲n+۱)} - \frac{۲}{۲n(۲n+۲)} < ۰$$

پس a_n نزولی است. اما برای $۰ \leq k \leq n$ داریم $\frac{۱}{n+k} \leq \frac{۱}{n}$ و لذا:

$$۰ < a_n = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n} \leq \underbrace{\frac{۱}{n} + \frac{۱}{n} + \cdots + \frac{۱}{n}}_{n+۱ \text{ جمله}} = \frac{n+۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{n} \leq ۲$$

پس a_n کراندار است و بنا به قضیه ۲ در صفحه ۴۸۸ همگراست.

تذکر ۴. مقدار حد دنباله a_n برابر $\ln ۲$ است. به تست ۱۰۳ در صفحه ۳۵۲ مراجعه نمایید.

تست ۳ حد دنباله $a_n = n\sqrt[۳]{۱+\frac{۲}{n}} - n\sqrt[۵]{۱+\frac{۱}{n}}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به فرمول مک‌لورن $(۱+x)^r = ۱ + rx + \cdots$ داریم:

$$a_n = n(۱+\frac{۲}{n})^{\frac{۱}{۳}} - n(۱+\frac{۱}{n})^{\frac{۱}{۵}} = n(۱+\frac{۲}{۳n}+\cdots) - n(۱+\frac{۱}{۵n}+\cdots) \to \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۵} = \frac{۷}{۱۵}$$

تست ۴ چنانچه $y_n(t) = n\cos(t-\frac{۱}{n}) - n\cos t$ باشد، حاصل $\lim_{n\to+\infty} y_n(t)$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) $\cos t$ ۲) ۰ ۳) $\sin t$ ۴) ∞

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. با توجه به گزینه‌ها حالت خاص $t = \frac{\pi}{۲}$ را در نظر می‌گیریم.

$$y_n(\frac{\pi}{۲}) = n\cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{n}) - n\cos\frac{\pi}{۲} = n\sin\frac{۱}{n} \sim n\cdot\frac{۱}{n} = ۱$$

و فقط گزینه (۳) به ازای $t=\frac{\pi}{۲}$ برابر یک است.

روش دوم. با توجه به (د ـ ۳) در صفحه ۲۴:

$$y_n(t)=n\Big(\cos(t-\frac{۱}{n})-\cos t\Big)=n\Big(-۲\sin\frac{t-\frac{۱}{n}+t}{۲}\sin\frac{t-\frac{۱}{n}-t}{۲}\Big)=-۲n\sin\big(\frac{-۱}{۲n}\big)\sin\big(t-\frac{۱}{۲n}\big)$$

$$=۲n\sin\frac{۱}{۲n}\sin\big(t-\frac{۱}{۲n}\big)$$

وقتی $n\to+\infty$ داریم $\sin\frac{۱}{۲n}\sim\frac{۱}{۲n}$ و $\sin(t-\frac{۱}{۲n})\to\sin t$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(t)=\sin t$.

تست ۵ مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-na}\Big(۱+\frac{a}{n}\Big)^{n^۲}$ برای $a>۰$ کدام است؟

۱) $e^{-\frac{a^۲}{۲}}$ ۲) ۱ ۳) $e^{\frac{a^۲}{۲}}$ ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. عبارت $\Big(۱+\frac{a}{n}\Big)^{n^۲}$ به‌صورت ۱^∞ است. از کل عبارت لگاریتم می‌گیریم.

$$-na+n^۲\ln\big(۱+\frac{a}{n}\big)=-na+n^۲\Big(\frac{a}{n}-\frac{۱}{۲}\big(\frac{a}{n}\big)^۲+\cdots\Big)\to-\frac{a^۲}{۲}\implies \text{حد}=e^{-\frac{a^۲}{۲}}$$

تذکر۵. استفاده نادرست از هم ارزی در حل این تست می‌تواند پاسخ نادرستی ایجاد کند.[۲] با توجه به نکته ۲۰ در صفحه ۷۸ داریم $\Big(۱+\frac{a}{n}\Big)^{n^۲}\sim e^{n^۲(۱+\frac{a}{n}-۱)}=e^{na}$ و پاسخ برابر ۱ $=e^{۰}=e^{-na}.e^{na}$ است. دلیل نادرستی این روش آن است که توان na با $-na$ در توان عبارت نمایی همدیگر را حذف کرده و در توان به عدد صفر رسیدیم. یعنی جملات هم ارز یکدیگر را حذف نموده‌اند و لذا استفاده از هم ارزی نادرست است.

تست ۶ دنباله $a_n=\frac{n^۲+۱}{n}[\sin^۲ n]$ کدام وضع را دارد؟

۱) واگرا ۲) بی‌کران ۳) همگرا به صفر ۴) همگرا به ۱

حل: گزینه ۳ درست است. $\frac{n^۲+۱}{n}$ واگرا است اما چون $\frac{\pi}{۲}$ گویا نیست پس هیچ ضریبی از n برابر $\frac{\pi}{۲}$ نمی باشد ولذا ۱, $\sin^۲ n\neq ۰$ پس $۰<\sin^۲ n<۱$ پس $[\sin^۲ n]=۰$ ولذا a_n دنباله ثابت صفر و حد آن نیز برابر صفر است.

تست ۷ کدام دنباله همگراست؟([ ] به معنای جز صحیح می‌باشد.) (سیستم ـ آزاد ۷۸)

۱) $\Big\{(-۱)^n\frac{n^۲}{n^۲+۱}\Big\}$ ۲) $\Big\{\Big[۱+\frac{(-۱)^n}{n}\Big]\Big\}$ ۳) $\Big\{\Big[\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}\Big]\Big\}$ ۴) $\Big\{(-۱)^n\frac{n}{n^۲+۱}\Big\}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\frac{n}{n^۲+۱}\to ۰$ و $(-۱)^n=\pm ۱$ ولذا کراندار است. پس این گزینه به صورت صفر در کراندار و لذا صفر است.

بررسی سایر گزینه‌ها: با توجه به $(-۱)^n$ باید n فرد و زوج جداگانه بررسی شود. حد در صورتی وجود دارد که زیر دنباله‌های فرد و زوج به اعداد یکسانی همگرا شوند. در گزینه (۱) برای n زوج دنباله به $L_۱=۱$ و برای n فرد به $L_۲=-۱$ میل می‌کند و لذا حد وجود ندارد. در گزینه (۲) برای n زوج $۱+\frac{(-۱)^n}{n}=۱+\frac{۱}{n}\to ۱^+$ و لذا حد دنباله $L_۱=[۱^+]=۱$ است. برای n فرد $۱+\frac{(-۱)^n}{n}=۱-\frac{۱}{n}\to ۱^-$ و لذا حد دنباله $L_۲=[۱^-]=۰$ است پس حد وجود ندارد. در گزینه (۳) برای n زوج $\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}=\frac{n^۲+۱}{n^۲}\to ۱^+$ و لذا حد دنباله $[۱^+]=۱$ و

---

[۲] این روش را برخی دانشجویان در کلاس برای حل این سؤال پیشنهاد دادند که نادرست است.

برای n فرد $\frac{n^۲+(-۱)^n}{n^۲}=\frac{n^۲-۱}{n^۲}\to ۱^-$ و لذا حد دنباله $L_۲=[۱^-]=۰$ و لذا حد وجود ندارد.

تست ۸ مقدار $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) ۰ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) e

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به (۲) در صفحه ۴۸۹ برای $p=\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\text{عبارت}\sim\frac{\frac{n^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}}{n\sqrt{n}}\to\frac{۲}{۳}$$

تست ۹ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^۳+۴^۳+۶^۳+\cdots+(۲n)^۳}{n^۴}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه ۴ درست است. هر یک از جملات مجموع در صورت کسر $(۲k)^۳=۸k^۳$ است و لذا:

$$\text{کسر}=\frac{۸(۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳)}{n^۴}\sim\frac{۸\times\frac{n^۴}{۴}}{n^۴}=۲$$

تست ۱۰ حد دنباله $a_n=\frac{۵^n}{۲^n(۱+\frac{۱}{n})^{n^۲}}$ برابر است با: (ریاضی ۷۹)

۱) ۰ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲e^۲}$ ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. چون $(۱+\frac{۱}{n})^n\to e$ پس $a_n\sim\frac{۵^n}{۲^ne^n}=(\frac{۵}{۲e})^n$ و چون $\frac{۵}{۲e}<۱$ پس $a_n\to ۰$.

تست ۱۱ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}\sqrt[n]{\frac{(۲n+۱)!}{n!}}$ کدام است؟ (ریاضی و آمار ۷۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{e}$ ۳) $\frac{۴}{e}$ ۴) $+\infty$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به رابطه (۷ ـ ۲) در صفحه ۴۸۹:

$$\sqrt[n]{(۲n+۱)!}=\sqrt[n]{۲n+۱}\,\sqrt[n]{(۲n)!}\sim(\frac{۲n}{e})^۲ \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}\implies \text{عبارت}\sim\frac{۱}{n}\frac{\frac{۴n^۲}{e^۲}}{\frac{n}{e}}\longrightarrow\frac{۴}{e}$$

تست ۱۲ جمله عمومی دنباله a_n در رابطه $\cos\frac{\pi}{n}<a_n^۳-۲a_n^۲+a_n-۱<\frac{n^۲+n}{n^۲+۳}$ صدق می‌کند. دنباله مذبور: (کشاورزی ۷۵)

۱) واگراست. ۲) همگرا به یک است.
۳) همگرا به دو است. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

حل: گزینه ۳ درست است. توجه کنید که $\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲+n}{n^۲+۳}=۱$ و لذا بنا به قضیه فشردگی:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^۳-۲a_n^۲+a_n-۱=۱\implies a_n^۳-۲a_n^۲+a_n-۲\longrightarrow ۰$$

$$\implies a_n^۲(a_n-۲)+(a_n-۲)=(a_n-۲)(a_n^۲+۱)\longrightarrow ۰\implies a_n\longrightarrow ۲$$

تست ۱۳ اگر $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$، مقدار $\lim_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۴) ۰

حل: گزینه ۴ درست است. هریک از جملات در a_n بین جمله اول و آخر قراردارند.

$$\frac{1}{(n+n)^2} + \frac{1}{(n+n)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \le a_n \le \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{(n+n)^2} \le a_n \le \frac{n}{(n+1)^2}$$

و چون $\frac{n}{(n+n)^2} \to 0$ و $\frac{n}{(n+1)^2} \to 0$ پس از قضیه فشردگی حد برابر صفر است.

تست ۱۴ حد دنباله $a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ برای $x \ne k\pi$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}$ ۲) $\frac{2\sin x}{x}$ ۳) $\frac{\sin 2x}{2x}$ ۴) $\frac{\sin x}{x}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به اتحاد $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ دنباله a_n را در $\sin\frac{x}{2^n}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$a_n = \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\left(\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\underbrace{\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\left(\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\underbrace{\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}_{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}\right)$$

$$= \cdots = \frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \times \sin x$$

وقتی $n \to +\infty$ داریم $\sin\frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}$ و لذا $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sin x}{x}$.

تست ۱۵ اگر $a_n = n\left(\tan^{-1}\frac{n-2}{n} - \frac{\pi}{4}\right)$، حد دنباله a_n عبارت است از:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

حل: گزینه ۳ درست است. می‌توان از قاعده هوپیتال برای محاسبه حد استفاده کرد اما اگر $f(x) = \tan^{-1}x$:

$$a_n = n\left(f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f(1)\right) = \frac{f(1 + \frac{-2}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}}$$

با انتخاب $t = -\frac{2}{n}$ حد بالا برابر $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{t\to 0^-}\frac{f(1+t) - f(1)}{-\frac{1}{2}t} = -2f'_-(1)$ است. چون $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ پس $f'(1) = \frac{1}{2}$ و لذا $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$.

تست ۱۶ کدامیک از عبارات زیردر مورد دنباله $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ درست است؟ (عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) همگرا، صعودی و ازبالا کراندار است.

۲) همگرا، نزولی و از پایین کراندار است.

۳) واگرا می‌باشد.

۴) وابسته به‌مقدار a_1، گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانند درست باشد.

حل: گزینه ۴ درست است. توجه کنید که با تعریف $f(x) = \sqrt{x+2}$ داریم $a_{n+1} = f(a_n)$. حال اگر $a_1 > 2$:

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{a_1 + a_1} = \sqrt{2a_1} < \sqrt{a_1.a_1} = a_1 \implies a_2 < a_1$$

و چون $f(x)$ صعودی است بنا به نکته ۲ در صفحه ۴۸۸ دنباله a_n نزولی است از طرفی برای هر n داریم $a_n > 0$ و لذا دنباله از پایین کراندار و بنا به نتیجه ۴ در صفحه ۴۸۸ همگراست. با استدلال مشابه اگر $a_1 < 2$ آنگاه $a_2 > a_1$ و بنا به نکته ۲ دنباله صعودی است. برای بررسی کرانداری توجه کنید اگر $a_1 < 2$ آنگاه $a_2 = \sqrt{2 + a_1} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$ و لذا با استقرا دیده می‌شود که $a_n < 2$ و دنباله از بالا کراندار و چون صعودی است بنا به نتیجه ۳ در صفحه ۴۸۸ همگرا می‌باشد. برای $a_1 = 2$ نیز دنباله ثابت $\{2\}$ حاصل می‌شود که یکنواست. (توجه کنید که برای $a_1 < -2$ این دنباله تعریف نمی‌شود.)

تذکر۶. می‌توانیم مقدار حد دنباله را محاسبه کنیم. اگر $a_n \to \ell$ با حد گرفتن از رابطه بازگشتی:

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \implies \ell^2 = 2 + \ell \implies \ell = -1, 2$$

چون $a_n \geq 0$ پس $\ell \geq 0$ و لذا $\ell = 2$ پاسخ سؤال است.

$\boxed{\text{تست ۱۷}}$ اگر $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ به کدام عدد همگراست؟ (هوافضا ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به گزینه‌ها این دنباله همگراست، اگر $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ آنگاه:

$$\ell = \sqrt{2\ell + 15} \implies \ell^2 = 2\ell + 15 \implies \ell^2 - 2\ell - 15 = 0 \implies \ell = -3, 5$$

ولی چون $a_n > 0$ پس $\ell \geq 0$ و لذا $\ell = 5$ قابل قبول است.

تذکر۷. برای حل سؤال به طور کامل ابتدا باید بررسی می‌کردیم که آیا دنباله همگراست. چون $a_2 = \sqrt{17} > a_1$ مانند تست قبل می‌توان بررسی کرد دنباله a_n صعودی و از بالا به عدد ۵ کراندار و لذا همگراست.

تست ۱۸ **دنباله $\{x_n\}$ از اعداد گویا به صورت $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ تعریف می‌شود. این دنباله:** (آمار ۷۶)

۱) صعودی و کراندار است. ۲) صعودی و همگرا است.

۳) نزولی و کراندار است. ۴) نزولی و همگرا به $\sqrt{3}$ است.

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به گزینه‌ها x_n صعودی یا نزولی است. با جایگذاری $n = 1$ داریم $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{3}{2}$ پس $x_2 < x_1$ و لذا x_n نزولی است و چون برای هر n داریم $x_n > 0$ پس $0 < x_n < 2$ و لذا دنباله x_n کراندار است و لذا گزینه (۳) درست است.

تذکر۸. این تست را در حالت کلی نیز می‌توان حل نمود. اگر $a > 0$ عددی دلخواه باشد و $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ آنگاه ادعا می‌کنیم به ازای هر $x_1 > 0$ دنباله x_n نزولی و کراندار و همگرا به $\sqrt{a}$ است.

برای بررسی این حکم ابتدا توجه کنید که $x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \times 2 = \sqrt{a}$ و بنابراین دنباله x_n از پایین کراندار است. برای اثبات نزولی بودن داریم:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - x_n = -\frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} = \frac{\sqrt{a} + x_n}{2x_n}(\sqrt{a} - x_n)$$

چون برای هر n داریم $x_n > 0$ پس $\frac{\sqrt{a}+x_n}{2x_n} > 0$ و چون $x_n \geq \sqrt{a}$ پس $\sqrt{a} - x_n \leq 0$ پس $x_{n+1} - x_n \leq 0$ و لذا $\{x_n\}$ نزولی است و طبق نتیجه ۴ در صفحه ۴۸۸ دنباله x_n همگراست. اگر $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$ برای محاسبه ℓ از دو طرف رابطه بازگشتی برای $n \to +\infty$ حد می‌گیریم در این صورت $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$ و لذا:

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell}) \implies \frac{\ell}{2} = \frac{a}{2\ell} \implies 2\ell^2 = 2a \implies \ell = \pm\sqrt{a}$$

و چون $x_n > 0$ پس $\ell \geq 0$ و لذا $\ell = \sqrt{a}$ پاسخ سؤال است.

نکته ۴. به رابطه بازگشتی $u_n + pu_{n-1} = 0$ **یک معادله مشخصه به صورت** $r + p = 0$ **متناظر می‌شود که** $r = r_1 = -p$. **جمله عمومی این دنباله** $u_n = ar_1^n$ **است که مقدار** a **با توجه به شرایط اولیه داده شده یعنی مقدار** u_1 **مشخص می‌شود.**

نکته ۵. **در حالت کلی به دنباله بازگشتی** $u_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} = 0$ **یک معادله مشخصه به صورت** $r^2 + pr + q = 0$ **متناظر می‌شود.**

الف) اگر r_1, r_2 **ریشه‌های حقیقی و متمایز آن باشند** $u_n = ar_1^n + br_2^n$ **جمله عمومی است.**

ب) اگر $r_1 = r_2$ **آنگاه جمله عمومی برابر** $u_n = ar_1^n + bnr_1^n$ **است .**

a **و** b **با توجه به شرایط اولیه داده شده یعنی مقادیر** u_1 **و** u_2 **مشخص می‌شوند.**

$\boxed{\text{تست ۱۹}}$ فرض کنید $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و به ازای هر $n \geq 2$، $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. در این صورت:

(ریاضی ۸۲)

۱) a_n واگراست.

۲) a_n همگراست و $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$

۳) a_n همگراست و $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

۴) a_n همگراست و $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$

حل: گزینه ۴ درست است. رابطه بازگشتی را با توجه به نکته بالا به صورت $2a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = 0$ می‌نویسیم. معادله مشخصه آن $2r^2 - r - 1 = 0$ دارای ریشه‌های $r = 1, -\frac{1}{2}$ است و لذا داریم $a_n = A(1)^n + B(-\frac{1}{2})^n = A + B(-\frac{1}{2})^n$. برای یافتن A و B شرط اولیه‌ها را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{cases} 0 = a_0 = A + B \\ 1 = a_1 = A - \frac{1}{2}B \end{cases} \implies A = \frac{2}{3}, B = -\frac{2}{3} \implies a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

۲-۷ سری‌های عددی

تعریف. a_k دنباله‌ای دلخواه است. دنباله $\{s_n\}$ را از جمع‌زدن n جمله اول $\{a_k\}$ به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$s_1 = a_1 \ , \ s_2 = a_1 + a_2 \ , \ \dots \ , \ s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

دنباله s_n را یک سری با جمله عمومی a_k می‌نامیم. s_n **مجموع جزئی** n ام این سری نامیده می‌شود.

اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$، سری s_n را همگرا به s نامیده و می‌نویسیم $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ و اگر دنباله s_n واگرا باشد می‌گوییم سری، واگراست.

قرارداد: وقتی سری $\sum a_n$ همگراست، می‌نویسیم $\sum a_n < \infty$ و اگر واگرا باشد می‌نویسیم $\sum a_n = \infty$.

نکاتی در مورد سری‌ها

۱) حذف کردن یا افزودن متناهی جمله، تأثیری در وضعیت همگرایی یا واگرایی سری ندارد.

۲) اگر $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ و $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت باشد:

الف) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A$

ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

۳) اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda b_n$ برای $\lambda \neq 0$ واگرا هستند.

۴) (قاعدهٔ لغزاندن حدود)

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1-i}^{m-i} a_{n+i} = \sum_{n=1+i}^{m+i} a_{n-i}$$

۷-۲-۱ بررسی چند سری خاص

۱) سری تلسکوپی

اگر جمله‌عمومی یک سری به صورت $a_k - a_{k+1}$ یا $(-1)^k(a_k + a_{k+1})$ نوشته شود، سری حاصل را تلسکوپی می‌نامیم. در یک مجموع تلسکوپی جملات به صورت متناوب حذف می‌شوند و فقط جمله اول و آخر باقی می‌ماند.

۱) $\sum\limits_{k=1}^{m} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{m+1}$

۲) $\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k (a_k + a_{k+1}) = (-1)^1 a_1 + (-1)^m a_{m+1}$

خصوصاً اگر $m \to +\infty$ داریم:

۳) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_\infty \qquad (a_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} a_k)$

۴) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (a_k + a_{k+1}) = (-1)^1 a_1 \qquad$ (به شرط آنکه $a_n \to 0$)

توجه کنید که در (۴) اگر a_n به صفر همگرا نباشد، آنگاه سری واگراست.

تذکر۹. در این فرمول‌های لزومی ندارد اندیس پایین از $k = 1$ شروع شود و اندیس پایین در جمله اول مجموع یعنی a_k یا $(-1)^k a_k$ و اندیس بالا درجمله دوم مجموع یعنی $-a_{k+1}$ یا $(-1)^k a_{k+1}$ قرار می‌گیرد.

تذکر ۱۰. اگر در قواعد (۱) و (۳) اختلاف اندیس‌های مجموع یک واحد نباشد، باید به تعداد اختلاف اندیس‌ها جمله از اول و آخر دنباله نوشت. به‌عنوان مثال:

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k+2}) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\text{دو جمله از اول}} - \underbrace{(a_{m+1} + a_{m+2})}_{\text{دو جمله از آخر}} \quad : \text{اختلاف اندیسها ۲ واحد}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k - a_{k+3}) = \underbrace{a_2 + a_3 + a_4}_{\text{سه جمله از اول}} - \underbrace{3a_\infty}_{\text{سه جمله از آخر}} \quad : \text{اختلاف اندیسها ۳ واحد}$$

قاعده تلسکوپی که گاهی قاعده ادغام هم نامیده می‌شود در مورد حاصلضرب هم قابل استفاده است. اگر $\prod_{k=1}^{n} a_k$ را نماد خلاصه نویسی برای حاصلضرب $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ بگیریم آنگاه:

نکته ۶. با فرض آنکه همه جملات دنباله a_n مخالف صفر باشند داریم $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$

۲) سری هندسی

اگر $a \neq 0$ و q اعدادی ثابت باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \cdots$ **سری هندسی با قدرنسبت** q نامیده می‌شود. این سری برای $|q| < 1$ به $\frac{a}{1-q}$ همگرا و برای $|q| \geq 1$ واگراست.

تذکر ۱۱. مجموع جملات یک تصاعد هندسی توسط رابطه $\frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \underbrace{a + aq + \cdots + aq^n}_{n+1}$ قابل محاسبه است.

۳) p سری (سری ریمان)

به سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p \in \mathbb{R}$ ثابت، یک p سری گفته می‌شود و در حالت خاص $p = 1$ سری هارمونیک (همساز) نامیده می‌شود. این سری برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.

مثال ۱۰. حاصل هریک از مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$ و $m \geq 2$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{1}{2n^2}$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

الف) مجموع به صورت تلسکوپی است.

$$\text{سری} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1+n+2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = (-1)^3 \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

دقت کنید که $\frac{1}{n+2} \to 0$ و لذا سری همگراست.

ب) با توجه به اینکه در $n^{۲}+۳n=n(n+۳)$ اختلاف دو عامل سه واحد است، از نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷ آنرا تجزیه می‌کنیم.

$$\text{سری} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۳)} = \frac{۱}{۳}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۳}\right) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-۳\times ۰\right) = \frac{۱۱}{۱۸}$$

در محاسبه عبارت بالا اگر $a_n=\frac{۱}{n}$ آنگاه $a_{n+۳}=\frac{۱}{n+۳}$ و لذا اختلاف اندیسها سه واحد است. به همین خاطر سه اندیس اول یعنی $n=۱,۲,۳$ در a_n قرار می‌گیرد تا سه جمله از اول حاصل شود و سه اندیس آخر که بینهایت هستند را در $a_{n+۳}$ قرار می‌دهیم تا سه جمله از آخر حاصل گردد.

ج) سری را به صورت $\frac{۱}{m}\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n(n+۱)\cdots(n+m-۱)}-\frac{۱}{(n+۱)\cdots(n+m)}\right)$ می‌نویسیم. جمله اول در مجموع بالا را a_n می‌گیریم، جمله دوم $a_{n+۱}$ است و لذا این مجموع تلسکوپی می‌باشد.

$$\text{سری} = a_۱-a_\infty=\frac{۱}{m}\frac{۱}{۱\times ۲\times\cdots\times m}=\frac{۱}{mm!}$$

د) باید سری را به‌صورت تلسکوپی بنویسیم، از فرمول (الف ـ ۱) در صفحه ۲۳ استفاده می‌کنیم.

$$\sin\frac{۱}{n(n+۱)}=\sin\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)=\sin\frac{۱}{n}\cos\frac{۱}{n+۱}-\sin\frac{۱}{n+۱}\cos\frac{۱}{n}$$

$$\text{سری} = \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\tan\frac{۱}{n}-\tan\frac{۱}{n+۱}\right)=\tan ۱-\tan\frac{۱}{\infty}=\tan ۱$$

ه) برای تبدیل مجموع مورد نظر به تلسکوپی از اتحاد (ج ـ ۵) در صفحه ۲۹ استفاده می‌کنیم.

$$\tan^{-۱}\frac{۱}{۲n^{۲}}=\tan^{-۱}\frac{۲}{۴n^{۲}}=\tan^{-۱}\frac{۲}{۱+(۴n^{۲}-۱)}=\tan^{-۱}\frac{(۲n+۱)-(۲n-۱)}{۱+(۲n+۱)(۲n-۱)}$$

$$=\tan^{-۱}(۲n+۱)-\tan^{-۱}(۲n-۱)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\tan^{-۱}\frac{۱}{۲n^{۲}}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\tan^{-۱}(۲n+۱)-\tan^{-۱}(۲n-۱)\right)$$

$$=\tan^{-۱}(+\infty)-\tan^{-۱}۱=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

و) نخست اتحاد $\cot x-\tan x=۲\cot ۲x$ را اثبات می‌کنیم.

$$\cot x-\tan x=\frac{۱}{\tan x}-\tan x=\frac{۱-\tan^{۲}x}{\tan x}=\frac{۲}{\tan ۲x}=۲\cot ۲x$$

اگر این اتحاد را به صورت $\tan x=\cot x-۲\cot ۲x$ بنویسیم آنگاه:

$$\frac{۱}{۲^n}\tan\frac{\pi}{۲^{n+۱}}=\frac{۱}{۲^n}\left(\cot\frac{\pi}{۲^{n+۱}}-۲\cot\frac{\pi}{۲^n}\right)=\underbrace{\frac{۱}{۲^n}\cot\frac{\pi}{۲^{n+۱}}}_{a_{n+۱}}-\underbrace{\frac{۱}{۲^{n-۱}}\cot\frac{\pi}{۲^n}}_{a_n}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}\tan\frac{\pi}{۲^{n+۱}}=\sum_{n=۱}^{\infty}(a_{n+۱}-a_n)=a_\infty-a_۱$$

اما $a_۱=\cot\frac{\pi}{۲}=۰$ و $a_\infty=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{۲^{n-۱}}\cot\frac{\pi}{۲^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۱}{۲^{n-۱}\tan\frac{\pi}{۲^n}}=\frac{۲}{\pi}$ و پاسخ برابر $\frac{۲}{\pi}$ است.

مثال ۱۱. حاصل هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^{۳n}\cos(n\pi)}{۳^{۲n}}$

ب) $\sum_{n=\circ}^{\infty} x^{[\frac{n}{۲}]}y^{[\frac{n+۱}{۲}]}$ برای $\circ < x, y < ۱$

ج) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{۲^k(n+۱)}{n^k}$

د) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{۳^k}$

الف) چون $\cos(n\pi) = (-۱)^n$ پس

$$\text{سری} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۸^n(-۱)^n}{۹^n} = \sum_{n=۱}^{\infty}\left(-\frac{۸}{۹}\right)^n = \frac{-\frac{۸}{۹}}{۱+\frac{۸}{۹}} = -\frac{۸}{۱۷}$$

ب) سری داده شده، هندسی با تصاعد xy است زیرا:

$$\text{سری} = (۱+y) + (xy + xy^۲) + \cdots = (۱+y)(۱+xy+\cdots) = (۱+y)\frac{۱}{۱-xy} = \frac{۱+y}{۱-xy}$$

ج) عبارتی که حدآن خواسته شده است را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(n+۱)\left(\frac{۲}{n} + \frac{۴}{n^۲} + \cdots + \frac{۲^n}{n^n}\right) = (n+۱)\left(\left(\frac{۲}{n}\right) + \left(\frac{۲}{n}\right)^۲ + \cdots + \left(\frac{۲}{n}\right)^n\right)$$

عبارت موجود در پرانتز، مجموع جملات یک تصاعد هندسی با $q = \frac{۲}{n}$ است و بنابراین وقتی $n \to +\infty$ داریم $|q| < ۱$ و عبارت موجود در پرانتز برابر(هم‌ارز) $\frac{\frac{۲}{n}}{۱-\frac{۲}{n}} = \frac{۲}{n-۲}$ است پس:

$$\text{حد} = \lim_{n\to+\infty} (n+۱)\frac{۲}{n-۲} = ۲$$

د) چون $\sin k\theta$ قسمت موهومی $e^{k\theta i}$ است ابتدا مجموع $z = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{e^{k\theta i}}{۳^k}$ را محاسبه می‌کنیم.

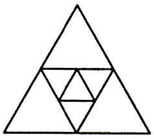
$$z = \sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{e^{\theta i}}{۳}\right)^k = \frac{\frac{۱}{۳}e^{i\theta}}{۱-\frac{۱}{۳}e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}}{۳-e^{i\theta}} = \frac{۱}{۳e^{-i\theta}-۱} \qquad (\text{سری هندسی با قدرنسبت } q = \frac{e^{i\theta}}{۳})$$

پاسخ مسأله $S = \mathrm{Im}(z)$ است.

$$z = \frac{۱}{۳e^{-i\theta}-۱} = \frac{۳e^{i\theta}-۱}{(۳e^{-i\theta}-۱)(۳e^{i\theta}-۱)} = \frac{۳\cos\theta - ۱ + ۳i\sin\theta}{۹ - ۳e^{-i\theta} - ۳e^{i\theta} + ۱} = \frac{۳\cos\theta - ۱ + ۳i\sin\theta}{۱۰ - ۶\cos\theta}$$

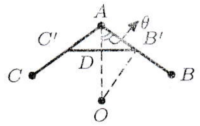
$$\Longrightarrow S = \mathrm{Im}(z) = \frac{۳\sin\theta}{۱۰-۶\cos\theta}$$

مثال ۱۲ یک n ضلعی منتظم $(n \geq ۳)$ به ضلع a مفروض است. وسط اضلاع آنرا به هم وصل می‌کنیم تا n ضلعی منتظم جدیدی حاصل شود. سپس وسط اضلاع شکل حاصل را به هم وصل می‌کنیم و این عمل را تا بینهایت ادامه می‌دهیم. مجموع محیط و مجموع مساحت n ضلعی‌هایی که ساخته می‌شوند را محاسبه نمایید.



در شکل مقابل وضعیت توصیف شده در سؤال را در حالت $n = ۳$ یعنی وقتی با یک مثلث متساوی‌الاضلاع مواجه هستیم، ملاحظه می‌کنید. در این حالت در هر مرحله طول ضلع مثلث، نصف حالت قبل می‌شود.

در حالت کلی باید محاسبه کنیم وقتی با یک n ضلعی منتظم (n ضلعی که اضلاع آن با هم و زوایای آن با هم مساوی هستند) مواجه هستیم، در هر مرحله طول ضلع چند برابر می‌شود. قسمتی از شکل n ضلعی و در واقع دو ضلع AB و AC مطابق شکل است که وسط اضلاع آنرا به هم وصل کرده ایم تا $B'C'$ یکی از اضلاع n ضلعی جدید باشد.



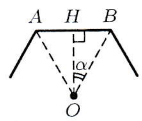
چون در هر مرحله یک n ضلعی منتظم حاصل می‌شود، پس اضلاع آن با هم برابر هستند و لذا $B'C'$ با طول سایر اضلاع برابر خواهد بود. برای محاسبه $B'C'$ توجه کنید که مجموع زوایای هر n ضلعی برابر $(n-۲)\pi$ و لذا هر زاویه از n ضلعی منتظم و مثلاً زاویه CAB برابر $\frac{(n-۲)\pi}{n} = \pi - \frac{۲\pi}{n}$ می‌باشد. از مرکز n ضلعی به A وصل می‌کنیم و بنا به تقارن خط OA نیمساز زاویه A و عمود منصف $B'C'$ است و لذا زاویه OAB برابر $\theta = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{n}$ می‌باشد. حال در مثلث قائم الزاویه ADB' داریم:

$$\sin\theta = \frac{DB'}{AB'} = \frac{\frac{۱}{۲}B'C'}{\frac{۱}{۲}a} = \frac{B'C'}{a} \implies B'C' = a\sin\theta = a\sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{n}) = a\cos\frac{\pi}{n}$$

پس در هر بار وصل کردن وسط اضلاع به هم، طول ضلع شکل جدید ضریب ثابتی در طول ضلع شکل قبلی است. یعنی طول ضلع شکلهای حاصل تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\cos\frac{\pi}{n}$ می‌دهند. اولین n ضلعی ساخته شده در این فرایند دارای طول ضلع $a_۱ = a\cos\frac{\pi}{n}$ و محیط $P_۱ = na_۱ = na\cos\frac{\pi}{n}$ بوده و چون در مرحله بعد طول ضلع در $\cos\frac{\pi}{n}$ ضرب می‌شود، محیط نیز در همین ضریب ضرب شده و لذا محیط اشکال تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = \cos\frac{\pi}{n}$ را داده و بنابراین مجموع آنها برابر است با:

$$P_۱ + P_۲ + \cdots = \frac{P_۱}{۱-q} = \frac{na\cos\frac{\pi}{n}}{۱-\cos\frac{\pi}{n}}$$

برای محاسبه مجموع مساحتها، در ابتدا مساحت یک n ضلعی منتظم به طول ضلع b را بدست می‌آوریم. از مرکز n ضلعی به دو رأس مجاور A و B وصل می‌کنیم. اگر از مرکز بر ضلع AB عمودی رسم نماییم، به خاطر تقارن این خط نیمساز زاویه AOB و عمود منصف ضلع AB نیز هست و لذا $HB = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}b$. توجه کنید که چون n زاویه مساوی با AOB در



این شکل می‌توانیم تشکیل دهیم، هر یک از آنها $\frac{۲\pi}{n}$ بوده و لذا $\alpha = \frac{\pi}{n}$. در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

$$\tan\alpha = \frac{BH}{OH} \implies OH = HB\cot\alpha = \frac{۱}{۲}b\cot\alpha$$

$$\text{مساحت مثلث } AOB = \frac{۱}{۲}AB\cdot OH = \frac{۱}{۲}b\cdot OH = \frac{۱}{۴}b^۲\cot\alpha$$

$$\text{مساحت } n \text{ ضلعی منتظم} = n\times(\text{مساحت مثلث } AOB) = \frac{n}{۴}b^۲\cot\alpha = \frac{n}{۴}b^۲\cot\frac{\pi}{n}$$

بنابراین مساحت با مربع طول ضلع در ارتباط است و چون در اولین مرحله طول ضلع $a_۱ = a\cos\frac{\pi}{n}$ است، پس $S_۱ = \frac{n}{۴}(a\cos\frac{\pi}{n})^۲\cot\frac{\pi}{n}$ می‌باشد و مساحتها تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q = \cos^۲\frac{\pi}{n}$ را می‌دهند و مجموع آنها برابر است با:

$$S_1 + S_2 + \cdots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{n}{4}a^2 \cot\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}}{1-\cos^2\frac{\pi}{n}} = \frac{na^2}{4}\cot^3\frac{\pi}{n}$$

تست ۲۰ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون اختلاف بین اندیسها، عددی ثابت است، بنا به نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷ کسر را تجزیه می‌کنیم.

$$\text{سری} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{4n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{4n+3}}_{a_{n+1}}\Big) = \frac{1}{4}(a_1 - a_\infty) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{\infty}\Big) = \frac{1}{12}$$

تست ۲۱ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) n ۴) ∞

حل: گزینه ۱ درست است. می‌دانیم $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ پس حد مورد نظر برابر است با:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

که یک مجموع تلسکوپی و همگرا به ۲ است.

تست ۲۲ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{8}$

حل: گزینه ۳ درست است. توجه کنید که $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$ یعنی اختلاف عوامل مخرج در صورت آمده است و لذا مجموع را به صورت تلسکوپی می‌نویسیم.

$$\text{مجموع} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) = a_1 - a_\infty = 1$$

تست ۲۳ مقدار سری $\cdots + \frac{3}{4!} + \frac{2}{3!} + \frac{1}{2!}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. جمله عمومی $\frac{n}{(n+1)!}$ است.

$$\text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1$$

تست ۲۴ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$ کدام است؟

(هسته‌ای ۷۸، معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\text{حد} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}_{a_{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{4}$$

تست ۲۵ اگر $u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$، آنگاه مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ برابر است با: (علوم کامپیوتر، نفت ۸۱، شیمی نساجی ۸۲)

۱) $\ln \frac{1}{2}$ ۲) $\ln 2$ ۳) $\ln \sqrt{2}$ ۴) $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. باید u_n را به‌صورت تلسکوپی نوشت.

$$u_n = \ln \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \underbrace{\ln \frac{n}{n+1}}_{a_n} - \underbrace{\ln \frac{n+1}{n+2}}_{a_{n+1}} \Longrightarrow \text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_\infty = \ln \frac{1}{2}$$

توجه کنید که $a_\infty = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n+1} = 0$.

تست ۲۶ مقدار $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{12}$

حل: گزینه ۲ درست است. مخرج را به صورت $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ می‌نویسیم و با استفاده از نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷ کسر را به صورت $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ تجزیه می‌کنیم. اگر $a_n = \frac{1}{n-1}$ آنگاه $a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ و لذا اختلاف اندیسها ۲ واحد است. پس باید دو جمله از اول و دو جمله از آخر سری را بنویسیم.

$$\text{مجموع} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n+2}) = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - 2a_\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

تست ۲۷ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{11}{24}$ ۴) $\frac{11}{96}$

حل: گزینه ۴ درست است. مانند مثال (۱۰ ـ ج) کسر را به صورت $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}\right)$ تجزیه می‌کنیم. در این صورت با تعریف $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ داریم $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+4)}$ و لذا اختلاف اندیسها دو واحد است، پس:

$$\text{مجموع} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+2}) = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 - 2a_\infty) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{11}{96}$$

تست ۲۸ فرض کنید $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. دراین صورت S برابراست با:

(ریاضی ۸۲، سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۲ درست است. مجموع به صورت تلسکوپی است.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{(n+1)+n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^2\frac{1}{1} = 1$$

تست ۲۹ به‌ازای $n \geq ۲$ عبارت $T_n = (۱ - \frac{۱}{۴})(۱ - \frac{۱}{۹})(۱ - \frac{۱}{۱۶})\cdots(۱ - \frac{۱}{n^۲})$ با کدام عدد برابر است؟

(معدن ۷۸)

۱) $\frac{n-۱}{۲n}$ ۲) $\frac{۲n}{n-۱}$ ۳) $\frac{۲n}{n+۱}$ ۴) $\frac{n+۱}{۲n}$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. به‌ازای $n = ۲$ داریم $T_۲ = \frac{۳}{۴}$ و فقط گزینه (۴) به‌ازای $n = ۲$ برابر $\frac{۳}{۴}$ است!!

روش دوم. حاصلضرب را به صورت $T_n = \prod_{k=۲}^{n}(۱ - \frac{۱}{k^۲})$ می‌نویسیم.

$$۱ - \frac{۱}{k^۲} = \frac{k^۲ - ۱}{k^۲} = \frac{(k-۱)(k+۱)}{k.k} = \frac{\frac{k-۱}{k}}{\frac{k}{k+۱}}$$

با تعریف $a_k = \frac{k-۱}{k}$ داریم $\frac{a_k}{a_{k+۱}} = ۱ - \frac{۱}{k^۲}$ و با توجه به نکته ۶ در صفحه ۵۰۰:

$$T_n = \prod_{k=۲}^{n}(۱ - \frac{۱}{k^۲}) = \prod_{k=۲}^{n}\frac{a_k}{a_{k+۱}} = \frac{a_۲}{a_{n+۱}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{n}{n+۱}} = \frac{n+۱}{۲n}$$

تست ۳۰ مجموع سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱ + ۲^{n+۱}}{۳^n}$ کدام است؟

(سیستم ۸۰)

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. سری داده‌شده، مجموع دو سری هندسی $\sum_{n=۱}(\frac{۱}{۳})^n$ و $\sum_{n=۱}۲(\frac{۲}{۳})^n$ است.

$$\text{سری} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۳}} + \frac{\frac{۴}{۳}}{۱ - \frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲} + ۴ = \frac{۹}{۲}$$

تست ۳۱ حاصل مجموع $\sum_{k=-\infty}^{۲}۲^k$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۸

حل: گزینه ۴ درست است. مجموع مورد نظر عبارت است از:

$$\cdots + ۲^{-۲} + ۲^{-۱} + ۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ = ۲^۲ + ۲^۱ + ۲^۰ + \frac{۱}{۲^۱} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots = \sum_{n=-۲}^{+\infty}\frac{۱}{۲^n} = \frac{۴}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۸$$

تست ۳۲ اگر $A = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$، مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$ کدام است؟

(ریاضی ۷۷)

۱) $\frac{۲}{۳}A$ ۲) $\frac{۴}{۳}A$ ۳) $\frac{۳}{۲}A$ ۴) $\frac{۳}{۴}A$

حل: گزینه ۴ درست است. توجه کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$ فقط شامل جملات فرد از A است. به همین خاطر A را به دو قسمت جملات فرد و زوج تجزیه می‌کنیم.

$$A = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)^۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{۱}{۴}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{A}{۴} + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)^۲} = \frac{۳A}{۴}$$

تست ۳۳ اگر $A = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ برای $p > ۱$ حاصل $B = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^p}$ برابر است با:

۱) $\frac{(۲^{p-۱}-۱)A}{۲^p}$ ۲) $\frac{(۲^{p-۱}-۱)A}{۲^{p-۱}}$ ۳) $\frac{(۲^p-۱)A}{۲^p}$ ۴) $\frac{(۲^p-۱)A}{۲^{p-۱}}$

حل: گزینه ۲ درست است. توجه کنید که:

$$A = \frac{۱}{۱^p} + \frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۳^p} + \frac{۱}{۴^p} + \frac{۱}{۵^p} + \cdots \quad \text{و} \quad B = \frac{۱}{۱^p} - \frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۳^p} - \frac{۱}{۴^p} + \frac{۱}{۵^p} - \cdots$$

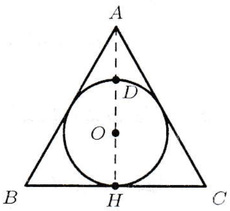
$$\Longrightarrow A - B = ۲\left(\frac{۱}{۲^p} + \frac{۱}{۴^p} + \cdots\right) = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n)^p} = \frac{۲}{۲^p}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p} = \frac{A}{۲^{p-۱}}$$

$$\Longrightarrow B = A - \frac{A}{۲^{p-۱}} = \frac{(۲^{p-۱}-۱)A}{۲^{p-۱}}$$

تست ۳۴ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$، دایره‌ای که بر سه ضلع مماس است، محاط می‌کنیم. مجدداً در سه گوشه مثلث سه دایره طوری محاط می‌کنیم که بر دو ضلع مثلث و دایره اول مماس باشد. مجدداً در سه گوشه باقیمانده مثلث اینکار را بینهایت بار تکرارمی‌کنیم. مساحت اشغال شده به وسیله دایره‌های محاطی کلاً چه مقدار است؟ (سیستم ۷۸)

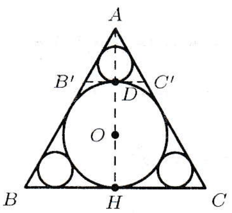
۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۶\pi}{۵}$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، در مرحله اول شعاع دایره محاط شده را محاسبه می‌کنیم. شعاع دایره در اولین مرحله را $r_۱$ می‌گیریم. ارتفاع AH را در مثلث رسم می‌کنیم. بنا به تقارن ارتفاع AH میانه نیز هست و از مرکز دایره (که محل همرسی میانه‌ها می‌باشد.) عبور می‌کند. می‌دانیم فاصله مرکز مثلث تا هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ طول میانه است و لذا:



$$OH = \frac{۱}{۳}AH \Longrightarrow r_۱ = OH = \frac{۱}{۳}AH$$

با توجه به اینکه $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AC = \frac{\sqrt{۳}a}{۲}$ پس $r_۱ = \frac{\sqrt{۳}a}{۶}$ و لذا مساحت اولین دایره $S_۱ = \pi r_۱^۲ = \frac{\pi a^۲}{۱۲}$ می‌باشد. توجه کنید که در هر مرحله شعاع دایره محاطی برابر $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع مثلث است و لذا در مرحله دوم (که سه دایره رسم می‌شود.) شعاع دایره‌ها با هم برابر و هر یک با $\frac{۱}{۳}AD$ برابر می‌باشد. چون $AD = OD = OH$ پس $AD = \frac{۱}{۳}AH$ و بنابراین در هر مرحله ارتفاع و لذا شعاع دایره محاطی $\frac{۱}{۳}$ برابر می‌شود پس مساحت هر یک از دایره‌هایی که در مرحله دوم رسم می‌شوند $\frac{۱}{۹}$ برابر مساحت دایره اول است. چون سه دایره در مرحله دوم رسم می‌شوند، مجموع مساحت در این مرحله $\frac{\pi a^۲}{۳۶} = ۳\frac{S_۱}{۹} = ۳S_۲$. در مرحله سوم نیز سه دایره



رسم می‌کنیم که مساحت هر یک $\frac{1}{9}$ برابر مساحت دایره‌ها در مرحله دوم است. بنابراین از مرحله دوم به بعد، مساحتها تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{9}$ و جمله اول $3S_2$ را می‌دهند و لذا:

$$S_1 + 3S_2 + 3S_3 + \cdots = \frac{\pi a^2}{12} + \frac{3S_2}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\pi a^2}{12} + \frac{\frac{\pi a^2}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{\pi a^2}{12} + \frac{\pi a^2}{32} = \frac{11\pi a^2}{96}$$

$$a = 2\sqrt{3} \implies \text{مجموع} = \frac{11\pi}{8}$$

۷ــ۲ــ۲ آزمون‌های بررسی همگرایی و واگرایی

بررسی همگرایی و واگرایی سری‌ها با استفاده از یافتن مقدار آنها به‌جز در مواردی خاص امکان‌پذیر نمی‌باشد. به‌همین خاطر روش‌هایی را بیان می‌کنیم که به‌کمک آنها بدون محاسبه مقدار سری دربارهٔ همگرایی یا واگرایی سری می‌توان اظهارنظر کرد. یادآوری می‌کنیم که همگرا بودن یک سری به این مفهوم است که حاصل آن یک عدد باشد و در غیر این صورت آنرا واگرا می‌نامیم.

۱) **شرط لازم برای همگرایی:** اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه حد جمله عمومی یعنی a_n صفر است بنابراین اگر a_n همگرا به صفر نباشد، سری واگراست.

۲) **آزمون همگرایی برای سری‌های با جملات نامنفی**

در مورد سری‌های با جملات نامنفی یعنی وقتی $a_n \geq 0$، توجه کنید که مجموع‌های جزئی یعنی $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ دنباله‌ای صعودی است و بنابراین شرط لازم و کافی برای همگرایی، آن است که کراندار باشد.

آزمون‌هایی که در زیر ذکر می‌کنیم دارای شرایطی هستند (مثلاً مثبت بودن جملات) که اگر این شرایط از مرتبه‌ای به‌بعد (برای $n \geq n_0$) برقرار باشند، بازهم می‌توان از آنها استفاده کرد.

الف) **(شرط لازم)** اگر a_n ها نامنفی و نزولی و سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

ب) **آزمون مقایسه**

فرض کنید برای هر عدد طبیعی n داریم $0 \leq a_n \leq b_n$:

i) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز همگراست.

ii) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum b_n$ نیز واگراست.

ج) **آزمون مقایسه حدی**

فرض کنید $a_n, b_n > 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

(i) اگر $0 < L < +\infty$، دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

(ii) اگر $L = 0$ و سری $\sum b_n$ همگرا باشد، سری $\sum a_n$ نیز همگراست.

(iii) اگر $L = +\infty$ و سری $\sum b_n$ واگرا باشد، سری $\sum a_n$ نیز واگراست.

تذکر ۱۲. در دو آزمون بالا برای مقایسه یا نسبت نوشتن، از سری‌هایی که در مورد همگرایی یا واگرایی آنها اطلاعات داریم مانند سری هندسی و p سری استفاده می‌کنیم.

پر کاربردترین قسمت آزمون مقایسه حدی، برای حالتی است که $L = 1$ یعنی دو دنباله هم ارز هم باشند.

نکته ۷. (آزمون هم ارزی) **اگر $a_n \sim b_n$ آنگاه دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ از لحاظ همگرایی یا واگرایی هم وضعیت هستند.**

خصوصاً اگر از p سریها به عنوان هم ارز استفاده کنیم، به حکم زیر می‌رسیم.

نکته ۸. اگر $a_n \sim \frac{k}{n^p}$ ($k \neq 0$ عدد ثابت) **آنگاه در حالت $p > 1$ سری $\sum a_n$ همگرا و در حالت $p \leq 1$ واگرا است.**

مثال ۱۳. مشخص کنید سری‌های زیر همگرا یا واگرا هستند.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n^2 + 3}{n^3 + n\sqrt{n} + 1}$

ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n}$

ج) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$

د) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

الف) کسر مورد نظر هم ارز $\frac{-n^2}{n^3} = -\frac{1}{n}$ است و با توجه به نکته ۷ چون $p = 1$ سری واگرا خواهد بود. در واقع چون اختلاف توان مخرج و صورت یک واحد است، پس سری واگراست. واضح است که همگرایی فقط وقتی رخ می‌دهد که اختلاف از یک واحد بیشتر باشد.

ب) با استفاده از قوانین رشد $\frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n} \sim \frac{4^n}{5^n} = (\frac{4}{5})^n$ و سری هندسی $\sum(\frac{4}{5})^n$ با توجه به اینکه $-1 < q = \frac{4}{5} < 1$، همگراست پس این سری نیز همگرا خواهد بود.

ج) **روش اول.** با توجه به قوانین رشد برای هر α داریم $\frac{\ln^{\alpha} n}{n} \to 0$ بنابراین برای $n \geq n_0$ داریم $\ln^{\alpha} n < n$ و لذا $\frac{1}{\ln^{\alpha} n} > \frac{1}{n}$ و چون $\sum \frac{1}{n}$ واگراست، سری موردنظر نیز واگرا خواهد بود.

روش دوم. برای $\alpha \leq 0$ شرط لازم همگرایی برقرار نیست و لذا سری واگراست. برای $\alpha > 0$ چون $a_n = \frac{1}{\ln^{\alpha} n}$ نزولی و مثبت است اما $na_n = \frac{n}{\ln^{\alpha} n} \not\to 0$ پس از آزمون (الف) سری واگراست.

د) توجه کنید که برای $n \geq 3$ داریم $\ln n \geq 1$ و لذا $\frac{\ln n}{n^p} \geq \frac{1}{n^p}$. چون $\sum \frac{1}{n^p}$ برای $p \leq 1$ واگراست، پس سری مورد نظر نیز برای $p \leq 1$ واگرا خواهد بود. برای $p > 1$ تعریف می‌کنیم $a = \frac{p-1}{2}$ در این صورت $a > 0$ و چون $\frac{\ln n}{n^a} \to 0$ پس برای مقادیر بزرگ n داریم $\ln n < n^a$ و لذا $\frac{\ln n}{n^p} \leq \frac{n^a}{n^p} = \frac{1}{n^{p-a}}$ چون $p - a = p - \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}$ و $p > 1$ پس $b = p - a > 1$ و با توجه به همگرایی $\sum \frac{1}{n^b}$ در این حالت، سری مورد نظر نیز همگراست.

نتایج به دست آمده از این مثالها را به عنوان نکته به خاطر بسپارید.

نکته ۹. در سریهای کسری که صورت و مخرج به شکل چند جمله‌ای (با توان حقیقی) بر حسب n هستند، شرط لازم و کافی برای همگرایی آن است که:

$$\text{(درجه مخرج)} - \text{(درجه صورت)} > ۱$$

نکته ۱۰.

الف) سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^{\alpha}}$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ واگراست.

ب) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ برای $p > ۱$ همگرا و برای $p \leq ۱$ واگراست.

تذکر۱۳. در حکم بالا به جای ln از لگاریتم در هر مبنایی نیز می‌توانیم استفاده نماییم.

د) آزمون نسبت (آزمون دالامبر):

فرض کنید $a_n > ۰$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = L$

i) اگر $L < ۱$ سری $\sum a_n$ همگراست.

ii) اگر $L > ۱$ آنگاه $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ و لذا سری $\sum a_n$ واگراست.

iii) اگر $L = ۱$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. (آزمون جواب نمی‌دهد)

ه) آزمون ریشه (آزمون کوشی):

فرض کنید $a_n > ۰$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. در این صورت وضعیت مشابه آزمون قبل است، یعنی:

i) اگر $L < ۱$ سری $\sum a_n$ همگراست.

ii) اگر $L > ۱$ آنگاه $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ و لذا سری $\sum a_n$ واگراست.

iii) اگر $L = ۱$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. (آزمون جواب نمی‌دهد)

تذکر۱۴. معمولاً از این دو آزمون در حالتی که a_n شامل بی‌نهایت با مرتبه نامتناهی مثلاً نمایی یا فاکتوریل است استفاده می‌کنیم. توجه کنید که استفاده از این دو آزمون برای چندجمله‌ای‌ها و لگاریتم (بی‌نهایت با مرتبه متناهی) به $L = ۱$ منجر شده و جواب نمی‌دهد.

مثال ۱۴. مشخص کنید سری‌های زیر همگرا یا واگرا هستند.

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n)!۶^n}{(۳n)!}$ ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)^{n^۲-۱}$

الف) جمله عمومی را a_n نامیده بدلیل ظاهر شدن فاکتوریل از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\frac{(۲n+۲)!۶^{n+۱}}{(۳n+۳)!}}{\frac{(۲n)!۶^n}{(۳n)!}} = \frac{۶(۲n+۱)(۲n+۲)}{(۳n+۱)(۳n+۲)(۳n+۳)} \to ۰ = L < ۱ \Longrightarrow \text{سری همگرا می‌باشد}$$

همین سؤال را با توجه به رابطه (۷ ـ ۲) در صفحه ۴۸۹ با آزمون ریشه نیز می‌توان حل نمود.

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{(۲n)!۶^n}{(۳n)!}}=\frac{۶\sqrt[n]{(۲n)!}}{\sqrt[n]{(۳n)!}}=\frac{۶(\frac{۲n}{e})^۲}{(\frac{۳n}{e})^۳}\to ۰=L<۱\implies$$ سری همگرا می‌باشد

ب) عبارت، نمایی است پس از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n+۱}{n+۲}\right)^{\frac{n^۲-۱}{n}}\sim e^{\frac{n^۲-۱}{n}.\left(\frac{n+۱}{n+۲}-۱\right)}\to e^{-۱}<۱\implies$$ سری همگرا می‌باشد

در بین این دو آزمون، آزمون ریشه قویتر است. زیرا با توجه به (۶) در صفحه ۴۸۹ اگر نسبت به ℓ میل کند، آنگاه ریشه نیز دارای حدی برابر ℓ است یعنی وجود حد نسبت، وجود حد ریشه را نتیجه می‌دهد. اما برعکس این موضوع درست نمی‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۵ سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ که $a_n=\begin{cases}\frac{۱}{۲^{n^۲}} & n \text{ زوج}\\ \frac{۱}{۳^{n^۲}} & n \text{ فرد}\end{cases}$ چه وضعی دارد؟

با توجه به آزمون ریشه $\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\frac{۱}{۲^n} & n \text{ زوج}\\ \frac{۱}{۳^n} & n \text{ فرد}\end{cases}$ و لذا $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=۰=\ell<۱$ و لذا این سری همگرا می‌باشد. اگر این سؤال را با آزمون نسبت حل کنیم. چنانچه n فرد باشد، $n+۱$ زوج است و لذا $\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{\frac{۱}{۲^{(n+۱)^۲}}}{\frac{۱}{۳^{n^۲}}}=\frac{۳^{n^۲}}{۲^{(n+۱)^۲}}$ و با استدلال مشابه برای n زوج داریم $\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{۲^{n^۲}}{۳^{(n+۱)^۲}}$. در این صورت $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ برای n فرد برابر بینهایت و برای n زوج صفر بوده و لذا فاقد حد است. پس از آزمون نسبت نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود.

و) آزمون انتگرال

اگر $a_n=f(n)$ و تابع $f(x)$ برای $x\geq x_۰$ (برای x های بزرگ) تابعی مثبت، پیوسته و نزولی باشد، سری $\sum a_n$ و انتگرال ناسره $\int_{x_۰}^{+\infty}f(x)dx$ هم‌رفتار هستند.

مثال ۱۶. برای مقادیر مختلف q بررسی کنید که سری $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{n\ln^q n}$ همگرا یا واگراست.

اگر $f(x)=\frac{۱}{x\ln^q x}$، این تابع پیوسته و مثبت است. برای بررسی نزولی بودن از مشتق استفاده می‌کنیم. در واقع ثابت می‌کنیم مخرج کسر، تابعی صعودی اکید است.

$$g(x)=x(\ln x)^q\implies g'(x)=(\ln x)^q+x.\frac{q(\ln x)^{q-۱}}{x}=(\ln x)^{q-۱}(\ln x+q)$$

عبارت بالا برای مقادیر بزرگ x و در واقع $x>e^{-q}$ مثبت است و بنابراین g از مرتبه‌ای به بعد صعودی و لذا $f(x)$ از مرتبه‌ای به بعد نزولی است. پس باید وضعیت $\int_{۲}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}$ بررسی شود.

$$u=\ln x\implies \text{انتگرال}=\int_{\ln ۲}^{+\infty}\frac{du}{u^q}$$

و با توجه به نتیجه ۷ در صفحه ۲۸۶ انتگرال و لذا سری برای $q > ۱$ همگرا و برای $q \leq ۱$ واگراست.

نتیجه این مثال نیز در حل تستها می‌تواند مفید باشد.

نکته ۱۱. سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^p (\ln n)^q}$ مفروض است.

الف) اگر $p > ۱$ به ازای هر مقدار $q \in \mathbb{R}$ این سری همگراست.

ب) اگر $p < ۱$ به ازای هر مقدار $q \in \mathbb{R}$ این سری واگراست.

ج) اگر $p = ۱$ سری به ازای $q > ۱$ همگرا و برای $q \leq ۱$ واگراست.

در حکم بالا به جای ln از لگاریتم در هر مبنایی نیز می‌توانیم استفاده نماییم.

ز) آزمون تراکم کوشی [۱]

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات نامنفی و همگرا به صفر و از مرتبه‌ای به بعد نزولی باشد. دو سری $\sum a_n$ و $\sum ۲^n a_{۲^n}$ از لحاظ همگرایی و واگرایی هم وضعیت هستند.

مثال ۱۷. با توجه به آزمون کوشی بررسی کنید که سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$ چه وضعی دارد.

اگر $a_n = \frac{۱}{n \ln n}$ آنگاه شرایط آزمون کوشی به وضوح برقرار است و $۲^n a_{۲^n} = ۲^n \times \frac{۱}{۲^n \ln ۲^n} = \frac{۱}{n \ln ۲}$ چون $\sum \frac{۱}{n \ln ۲}$ واگراست، بنا به آزمون کوشی سری مورد نظر نیز واگرا می‌باشد.

ح) آزمون رابه

فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات (از مرتبه‌ای به بعد) مثبت و حد $A = \lim_{n \to +\infty} n\left(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n}\right)$ موجود باشد آنگاه :

i) اگر $A > ۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ii) اگر $A < ۱$ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا است.

تذکر۱۵. از آزمون رابه معمولاً وقتی در آزمون نسبت مقدار L برابر یک می‌شود، استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۸ وضعیت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۴ \times ۶ \times \cdots \times (۲n+۲)}$ را مشخص نمایید.

اگر جمله عمومی را برابر a_n قرار دهیم آنگاه $a_{n+۱} = a_n \times \frac{۲n+۱}{۲n+۴}$ و لذا $\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۲n+۱}{۲n+۴}$ و چون

[۱] در کتابهای مرجع برای ریاضی عمومی آزمونهای «تراکم کوشی» و «رابه» و «آبل» مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. اما استفاده از آنها برای حل ساده‌تر برخی تستها می‌تواند مفید باشد.

۱ $= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ آزمون نسبت در این مورد جوابی نمی‌دهد.

روش اول. چون جملات a_n مثبت است. از آزمون رابه استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n\to+\infty} n(1-\frac{2n+1}{2n+4}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n+4} = \frac{3}{2} = A > 1$$

و لذا این سری همگرا می‌باشد.

روش دوم. اگر جمله عمومی را در $(2n) \times \cdots \times 4 \times 2 = 2^n n!$ ضرب و تقسم کنیم، صورت کسر برابر $(2n)!$ خواهد شد. در مخرج کسر هم $(2n+2) \times \cdots \times 6 \times 4 = 2^n(n+1)!$ و لذا $a_n = \frac{(2n)!}{4^n n!(n+1)!}$. اما با توجه به فرمول استرلینگ $m! \sim \frac{1}{e^m}m^m\sqrt{2m\pi}$ به ازای $m=n$ و $m=n+1$ و $m=2n$ داریم:

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{e^{2n}}(2n)^{2n}\sqrt{2(2n)\pi}}{4^n(\frac{1}{e^n}n^n\sqrt{2n\pi})(\frac{1}{e^{n+1}}(n+1)^{n+1}\sqrt{2(n+1)\pi})} = \frac{en^n}{\sqrt{(n+1)\pi}(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{e}{(n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}.(\frac{n}{n+1})^n \sim \frac{e}{(n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}.e^{n(\frac{n}{n+1}-1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$$

و بنابراین با توجه به نکته ۸ در صفحه ۵۰۹ این سری همگرا می‌باشد.

۳) آزمون آبل

الف) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت و از مرتبه‌ای به بعد نزولی و همگرا به صفر بوده و مجموع جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یعنی $\sum_{n=1}^{k} b_n$ کراندار باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگرا است.

ب) اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا و از مرتبه‌ای به بعد یکنوا بوده و سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگرا است.

۴) **آزمون سری‌های متناوب (آزمون لایب‌نیتز)**

اگر $a_n \geq 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ که جملات آن یک در میان مثبت و منفی هستند، **سری متناوب** نامیده می‌شود. احکام زیر در مورد سری متناوب می‌تواند مفید باشد.

i) اگر a_n نزولی و همگرا به‌صفر باشد، این سری همگراست.

ii) تحت شرایط بالا اگر مقدار واقعی سری برابر S باشد و مجموع جزئی k ام یعنی $S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$ را به‌عنوان تقریبی از S به‌کار ببریم، دراین صورت قدرمطلق خطا از قدرمطلق اولین جمله‌ای که به‌کار برده نمی‌شود کمتر است. یعنی $|S - S_k| \leq a_{k+1}$ ضمناً $S - S_k$ هم‌علامت با اولین جمله حذف شده درمجموع خواهد بود.

تذکر۱۶. توجه کنید که آزمون سریهای متناوب، حالت خاصی از آزمون آبل به ازای $b_n = (-1)^n$ است. در این آزمون فرض مثبت و همگرا به صفر بودن دنباله a_n، نزولی بودن را نتیجه نمی‌دهد و این موضوع باید جداگانه بررسی گردد. مثلاً سری $\cdots + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ یک سری متناوب است و داریم

$\{a_n\} = \{\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۴}, \cdots\}$. در این صورت a_n مثبت و همگرا به صفر است اما نزولی نمی‌باشد. ضمناً این سری واگراست، زیرا جملات منفی آن به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^n}$ و همگرا هستند اما جملات مثبت آن به شکل $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲n+۱}$ بوده و واگرا می‌باشند.

مثال ۱۹ وضعیت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ را برای $x \in \mathbb{R}$ بررسی نمایید.

توجه کنید که $a_n = \frac{۱}{n}$ مثبت و نزولی و همگرا به صفراست. $\sin nx$ برای $x = m\pi$ برابر صفر است ولذا به ازای این مقادیر، سری همگراست. در غیر اینصورت برای $m \in \mathbb{Z}$, $x \neq m\pi$ ثابت، نشان می‌دهیم مجموعهای جزئی $B = \sum_{k=۱}^{n} \sin kx$ کراندار هستند. مجموع را در $۲\sin\frac{x}{۲}$ ضرب و تقسیم کرده و از فرمول تبدیل ضرب به جمع در صفحه ۲۴ استفاده می‌کنیم.

$$B = \frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}} \sum_{k=۱}^{n} ۲\sin\frac{x}{۲}\sin kx = \frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}} \sum_{k=۱}^{n} \left(\cos(kx - \frac{x}{۲}) - \cos(kx + \frac{x}{۲})\right)$$

مجموع بالا تلسکوپی است و لذا $B = \frac{\cos\frac{x}{۲} - \cos(nx + \frac{x}{۲})}{۲\sin\frac{x}{۲}}$.(توجه کنید که در مثال ۸ در صفحه ۴۵۶ با توجه به اعداد مختلط نیز این مجموع را محاسبه کرده بودیم.) اما برای هر n داریم:

$$|B| = \left|\frac{\cos\frac{x}{۲} - \cos(nx + \frac{x}{۲})}{۲\sin\frac{x}{۲}}\right| \leq \frac{|\cos\frac{x}{۲}| + |\cos(nx + \frac{x}{۲})|}{۲\sin\frac{x}{۲}} \leq \frac{۲}{۲\sin\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}$$

بنابراین B کراندار است و لذا بنا به آزمون آبل سری مورد نظر همگراست.

نکته ۱۲. برای محاسبه مجموعهای $\sin x + \sin(x+d) + \ldots + \sin(x+nd)$ یا $\cos x + \cos(x+d) + \ldots + \cos(x+nd)$ که در آن زوایا به صورت تصاعد حسابی با قدرنسبت d هستند، با ضرب و تقسیم کردن در $۲\sin\frac{d}{۲}$ و استفاده از فرمولهای تبدیل ضرب به جمع به سری تلسکوپی می‌رسیم و لذا مقدار مجموع محاسبه می‌شود.

۵) همگرایی مطلق

اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همگرا خواهد بود که دراین حالت می‌گوییم $\sum a_n$ **همگرای مطلق** است.

تعریف. اگر $\sum a_n$ همگرا ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد سری $\sum a_n$ را **همگرای مشروط** می‌نامند.

مثال ۲۰. بررسی کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{(\ln n)^p}{n^q}$ که $p, q > ۰$ همگرای مطلق یا مشروط است.

با توجه به نکته ۱۱ در صفحه ۵۱۲ سری قدرمطلق یعنی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^q}$ برای $q > ۱$ همگرا و برای $q \leq ۱$ واگراست و لذا S برای $q > ۱$ همگرای مطلق است. اما دنباله $a_n = \frac{(\ln n)^p}{n^q}$ از مرتبه‌ای به بعد نزولی است زیرا:

$$a'_n = \frac{\frac{p}{n}(\ln n)^{p-۱} n^q - qn^{q-۱}(\ln n)^p}{n^{۲q}} = \frac{(\ln n)^{p-۱}(p - q\ln n)}{n^{q+۱}}$$

مشتق a_n برای مقادیر بزرگ n (در واقع $n > e^{\frac{p}{q}}$) منفی و لذا a_n از مرتبه‌ای به بعد نزولی است. ضمناً a_n همگرا به صفر است پس سری متناوب S همواره همگراست و لذا در حالت $q \leq ۱$ این سری همگرای مشروط است.

مثال ۲۱ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است. ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است.

چون $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا است، پس b_n همگرا به صفر بوده و لذا کراندار است. پس $M > 0$ موجود است که $|b_n| < M$ بنابراین $|a_n b_n| \leq M|a_n|$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است، پس $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا و لذا بنا به آزمون مقایسه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ همگرا بوده و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است.

نتیجه ۷. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا بوده و یکی از a_n, b_n نامنفی باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است.

تست ۳۵ سری $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \ln(1-\frac{1}{m})}$: (مکانیک ۷۹)

۱) واگرا می‌باشد.

۲) متناوب ولی نامعین است.

۳) همگرا می‌باشد.

۴) به‌دلیل وجود لگاریتم در مخرج کسر نمی‌توان اظهارنظر کرد.

حل: گزینه ۱ درست است. شرط لازم همگرایی را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{1}{m \ln(1-\frac{1}{m})} \sim \frac{1}{m(-\frac{1}{m})} \to -1 \neq 0 \implies \text{سری واگرا می‌باشد.}$$

تست ۳۶ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{2n-1}\right)^2$ (محیط زیست ـ آزاد ۷۹)

۱) واگراست.

۲) همگراست.

۳) به زوج یا فرد بودن n بستگی دارد.

۴) هیچکدام

حل: گزینه ۲ درست است. جمله عمومی نامنفی است و داریم:

$$\left(\frac{\cos n}{2n-1}\right)^2 = \frac{\cos^2 n}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ همگراست پس $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ نیز همگرا بوده و بنا به آزمون مقایسه سری مورد نظر نیز همگراست.

تست ۳۷ اگر $A = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2}$، آنگاه کدام گزاره درست است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) A واگرا ولی B همگراست.

۲) A همگرا ولی B واگراست.

۳) A و B هر دو همگرا هستند.

۴) A و B هر دو واگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به نکته ۸ در صفحه ۵۰۹:

$$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2} \implies p = 2 > 1 \implies A \text{ همگراست.}$$

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n^2} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \implies p = \frac{3}{2} > 1 \implies B \text{ همگراست.}$$

تست ۳۸ برای سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{4}+2n+1}-\sqrt{n^{4}+an}\right)$، $(a>0)$ کدام گزینه درست است؟ (معدن ۸۲)

۱) به‌ازای تمام مقادیر a همگراست.
۲) به‌ازای تمام مقادیر a واگراست.
۳) به‌ازای $a=2$ همگراست و به‌ازای $a\neq 2$ واگراست.
۴) به‌ازای $a=2$ واگرا و به‌ازای $a\neq 2$ همگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. با ضرب و تقسیم در مزدوج داریم:

$$\text{جمله عمومی} = \frac{(2-a)n+1}{\sqrt{n^{4}+2n+1}+\sqrt{n^{4}+an}} \sim \frac{(2-a)n+1}{2n^{2}}$$

اگر $a=2$ چون سری هم‌ارز $\frac{1}{2n^{2}}$ است، همگراست و برای $a\neq 2$ چون هم‌ارز ضریبی از $\frac{1}{n}$ است، واگراست.

تست ۳۹ هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+a\cos\frac{1}{n}+b\sin\frac{1}{n}$ همگرا باشد، a و b برابر است با:
(آمار ـ آزاد ۸۲)

۱) $a=1\ ,\ b=1$ ۲) $a=-1\ ,\ b=\frac{1}{2}$ ۳) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-1$ ۴) $a=1\ ,\ b=-\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. باید شرط لازم همگرایی یعنی اینکه جمله عمومی به صفر میل کند برقرار باشد.

$$\text{جمله عمومی} \sim n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^{2}}+\frac{1}{3n^{3}}-\cdots\right)+a\left(1-\frac{1}{2n^{2}}+\cdots\right)+b\left(\frac{1}{n}+0\times\frac{1}{n^{2}}-\cdots\right)$$
$$=(a+1)+\left(b-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{n^{2}}+\cdots$$

برای آنکه حد جمله عمومی صفر شود باید $a=-1$ اما اگر $b\neq\frac{1}{2}$ جمله عمومی هم‌ارز ضریبی از $\frac{1}{n}$ است و لذا واگراست پس باید $b=\frac{1}{2}$ در اینحالت جمله عمومی با ضریبی از $\frac{1}{n^{2}}$ هم‌ارز می‌شود و لذا همگراست.

تست ۴۰ در مورد سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}3^{n}}{n!}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh n}{3^{n}+n}$ به‌ترتیب کدام گزینه درست است؟

۱) همگرا ـ واگرا ۲) واگرا ـ واگرا ۳) واگرا ـ همگرا ۴) همگرا ـ همگرا

حل: گزینه ۴ درست است. در مورد هر سری از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{\frac{n^{2}3^{n}}{n!}}=\frac{3\sqrt[n]{n^{2}}}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{\sqrt[n]{n^{2}}\times 3}{\frac{n}{e}}\to\frac{3e}{n}\to 0=L<1 \implies \text{سری همگراست}$$

$$\sqrt[n]{\frac{\sinh n}{3^{n}+n}}\sim\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{2}e^{n}}{3^{n}}}\to\frac{e}{3}=L<1 \implies \text{سری همگراست.}$$

تست ۴۱ کدامیک از سریهای زیر واگرا است؟$(i=\sqrt{-1})$ (عمران ۷۵)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{2^{n}}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^{n}}{n!}$ ۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^{n}}{4^{n}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{(2n)!}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به آزمون ریشه، اگر $a_n=\frac{(3-4i)^{n}}{4^{n}}$ آنگاه:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{|3-4i|^{n}}}{\sqrt[n]{4^{n}}}=\frac{\sqrt[n]{5^{n}}}{\sqrt[n]{4^{n}}}=\frac{5}{4}>1 \implies \text{سری واگراست.}$$

بررسی سایر گزینه‌ها: در مورد هر گزینه از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

گزینه (۱) : $\sqrt[n]{\frac{n^{۲}}{۲^{n}}}=\frac{\sqrt[n]{n^{۲}}}{\sqrt[n]{۲^{n}}}\longrightarrow\frac{۱}{۲}<۱\Longrightarrow$ سری همگراست.

گزینه (۲) : $\sqrt[n]{\frac{|۳-۴i|^{n}}{n!}}=\frac{\sqrt[n]{|۳-۴i|^{n}}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{\sqrt[n]{۵^{n}}}{\sqrt[n]{n!}}\sim\frac{۵}{\frac{n}{e}}\longrightarrow ۰<۱\Longrightarrow$ سری همگراست.

گزینه (۴) : $\sqrt[n]{\frac{(n!)^{۲}}{(۲n)!}}=\frac{(\sqrt[n]{n!})^{۲}}{\sqrt[n]{(۲n)!}}\sim\frac{(\frac{n}{e})^{۲}}{(\frac{۲n}{e})^{۲}}=\frac{۱}{۴}<۱\Longrightarrow$ سری همگراست.

تست ۴۲ کلیه مقادیر حقیقی پارامتر α که به‌ازای آنها سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۲}}{e^{n\alpha}}$ همگراست، کدامند؟ (معدن ۷۶)

۱) $\alpha>۰$ ۲) $\alpha\geq ۰$ ۳) $\alpha>۱$ ۴) $\alpha\geq ۱$

حل: گزینه ۱ درست است. از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n^{۲}}}{e^{\alpha}}\to\frac{۱}{e^{\alpha}}=L<۱\Longrightarrow\alpha>۰$$

ضمناً در حالت $L=۱$ یعنی $\frac{۱}{e^{\alpha}}=۱$ داریم $\alpha=۰$ و به سری $\sum n^{۲}$ می‌رسیم که واگراست.

تست ۴۳ دو سری با جملات $s=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{۲}}{۲n^{۳}-۱}$ و $t=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ از نظر همگرایی به‌کدام صورت است؟ (مکانیک ۷۷)

۱) هر دو همگرا هستند. ۲) هر دو واگرا هستند.

۳) s واگرا و t همگرا است. ۴) s همگرا و t واگراست.

حل: گزینه ۳ درست است. در s چون اختلاف صورت و مخرج یک واحد است پس بنا به نکته ۹ در صفحه ۵۱۰ واگراست. درمورد t تابع $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ مثبت و پیوسته است و اگر آنرا به صورت $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ بنویسیم مشخص است که مخرج آن صعودی و لذا $f(x)$ نزولی است، پس از آزمون انتگرال استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u=\sqrt{x}$:

$$\int_{۱}^{+\infty}f(x)dx=۲\int_{۱}^{+\infty}e^{-u}du=-۲e^{-u}\Big|_{۱}^{+\infty}=\frac{۲}{e}\Longrightarrow$$ سری همگراست.

تست ۴۴ سری $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n\ln n\big(\ln(\ln n)\big)^{p}}$ را درنظر بگیرید. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟ (حفاری ۷۹)

۱) سری همگراست اگر و تنها اگر $p<۱$ ۲) سری همگراست اگر و تنها اگر $p\geq ۱$

۳) سری همگراست اگر و تنها اگر $p=۱$ ۴) سری همگراست اگر و تنها اگر $p>۱$

حل: گزینه ۴ درست است. شرایط آزمون انتگرال به وضوح برقرار است. قرار می‌دهیم $u=\ln(\ln x)$ و $du=\frac{dx}{x\ln x}$:

$$\int_{۳}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^{p}}=\int_{\ln\ln ۳}^{+\infty}\frac{du}{u^{p}}$$

انتگرال بالا برای $p>۱$ همگراست و لذا شرط لازم و کافی برای همگرایی سری آن است که $p>۱$.

تست ۴۵ کدام سری واگراست؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \cos\frac{1}{n})$
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\left((1+\frac{1}{n^2})^n - 1\right)$
۴) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

حل: گزینه ۳ درست است. نشان می‌دهیم جمله عمومی در این گزینه هم‌ارز $\frac{1}{n}$ است.

$$(1+\frac{1}{n^2})^n - 1 = e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})} - 1 \sim e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

و چون $\sum \frac{1}{n}$ واگراست، سری مورد نظر نیز بنا به نکته ۷ در صفحه ۵۰۹ واگراست.

بررسی سایر گزینه‌ها: در گزینه (۱) کسر هم ارز $\frac{\ln n}{2n^3}$ و بنا به نکته (۱۰ ـ ب) در صفحه ۵۱۰ همگراست. در گزینه (۲) چون $1 - \cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$ پس بنا به نکته ۸ در صفحه ۵۰۹ همگراست. برای گزینه (۴) نیز به تست قبل برای $p = 2$ مراجعه کنید.

تست ۴۶ از بین سریهای $s_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$ و $s_2 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ و $s_3 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$ چند مورد همگرا هستند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به اینکه برای هر n داریم:

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \le \ln n + \ln n + \cdots + \ln n = n\ln n \implies \frac{1}{\ln(n!)} \ge \frac{1}{n\ln n}$$

و چون سری $\sum \frac{1}{n\ln n}$ با توجه به نکته (۱۱ ـ ج) در صفحه ۵۱۲ واگراست، بنا به آزمون مقایسه s_1 نیز واگرا می‌باشد. در مورد s_2 توجه کنید که برای n های بزرگ داریم:

$$\ln n > e^2 \implies (\ln n)^{\ln n} > (e^2)^{\ln n} = n^{\ln e^2} = n^2 \implies \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

و چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگراست، پس s_2 نیز همگرا می‌باشد. برای s_3 با توجه به اینکه برای $n \ge 3$ داریم $1 \le \ln 3 \le \ln n$ پس $\frac{1}{n^2\ln n} \le \frac{1}{n^2}$ و چون $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگراست، سری مورد نظر نیز همگرا می‌باشد.

تست ۴۷ سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$: (معماری‌کشتی ۸۱)

۱) همگراست ولی به‌طور مطلق همگرا نمی‌باشد.
۲) همگراست و به‌طور مطلق نیز همگراست.
۳) همگرا نیست ولی به‌طور مطلق همگرا می‌باشد.
۴) همگرا نیست و به‌طور مطلق نیز همگرا نمی‌باشد.

حل: گزینه ۲ درست است. قدرمطلق جملات $\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ است بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx = \int_1^2 + \int_2^3 + \cdots = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$$

و چون $x \geq 1$ پس $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ و $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ همگراست. پس سری همگرای مطلق است.

تست ۴۸ کدام سری زیر واگراست؟ (آمار ۷۷)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln \frac{1}{n}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\ln \frac{1}{n} = -\ln n \to -\infty$ پس این سری شرط لازم همگرایی را ندارد و واگراست. بقیه گزینه‌ها در شرایط سری‌های متناوب صدق می‌کنند و همگرا هستند.

تست ۴۹ اگر $\sum a_n^2$ و $\sum b_n^2$ همگرا باشند، آنگاه $\cdots$ است. (ریاضی ۷۹)

۱) $\sum a_n b_n$ همگرای مطلق ۲) $\sum a_n + b_n$ همگرای مطلق

۳) $\sum \frac{a_n}{b_n}$ همگرای مطلق ۴) $\sum \frac{a_n^2}{b_n^2}$ همگرا

حل: گزینه ۱ درست است. چون $(a_n \pm b_n)^2 \geq 0$ پس:

$$a_n^2 + b_n^2 \geq \pm 2 b_n a_n \implies |a_n b_n| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad (*)$$

(توجه کنید که نابرابری $(*)$ را می‌توانیم از نابرابری میانگین حسابی و هندسی بین دو عدد مثبت نامنفی x و y یعنی $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ به ازای $x = a_n^2$ و $y = b_n^2$ نیز نتیجه بگیریم.) چون $\sum a_n^2 + b_n^2$ همگرا است پس $\sum |a_n b_n|$ همگرا و لذا $\sum a_n b_n$ همگرای مطلق است.

نتیجه ۸. اگر دو سری نامنفی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند، سری $\sum \sqrt{a_n b_n}$ نیز همگراست.

تست ۵۰ اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه ... واگراست. (علوم‌کامپیوتر ۸۱)

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $n a_n \geq a_n$ و $\sum a_n$ واگراست، از آزمون مقایسه $\sum n a_n$ نیز واگرا است.

بررسی‌سایر گزینه‌ها: اگر $a_n = \frac{1}{n}$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا ولی گزینه‌های (۱) و (۲) همگرا هستند. مثال نقض برای گزینه (۳) سری با جمله عمومی $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n^2} & n \text{ زوج} \end{cases}$ می‌باشد. زیرا به خاطر وجود $\frac{1}{n}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست اما اندیسهای زوج آن یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ یک سری همگرا هستند.

۷–۳ سری‌های توانی

تعریف. اگر $x_\circ$ عدد حقیقی و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^n$ را یک **سری توانی** حول $x_\circ$ (به مرکز $x_\circ$) می‌نامند و به a_n ها، ضرایب سری گفته می‌شود. کلیه مقادیر (حقیقی) x که به‌ازای آن، سری بالا همگرا می‌شود را **فاصله(بازه، دامنه) همگرایی** می‌نامند.

در مورد سری‌های توانی می‌توان ثابت کرد:

۱) **قضیه آبل:** اگر سری در نقطه $x = x_1$ همگرا باشد، برای هر x که $|x - x_\circ| < |x_1 - x_\circ|$ سری همگرای مطلق است و اگر سری در نقطه $x = x_1$ واگرا باشد، برای هر x که $|x - x_\circ| > |x_1 - x_\circ|$ سری واگرا است.

۲) **شعاع همگرایی:** $R \in [\circ, +\infty]$ موجود است که سری در فاصله $|x - x_\circ| < R$ همگرای مطلق و برای $|x - x_\circ| > R$ واگراست. R **شعاع همگرایی** سری نامیده می‌شود.

۳) **محاسبه شعاع همگرایی:** شعاع همگرایی از روابط $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ یا $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (به شرط عدد یا بینهایت به دست آمدن حد) قابل محاسبه است.

نکته ۱۳. اگر سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^{kn\pm m}$ باشد که k, m اعداد طبیعی و ثابت هستند، شعاع همگرایی در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{R^k} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k}$$

تذکر۱۷. در محاسبه شعاع همگرایی $\frac{1}{\circ} = +\infty$ و $\frac{1}{\infty} = \circ$ در نظر گرفته می‌شود.

۴) **محاسبه بازه همگرایی:** برای یافتن بازه همگرایی، ابتدا شعاع همگرایی یعنی R را محاسبه کنید. سری بر فاصله $|x - x_\circ| < R$ همگرا می‌باشد. سپس همگرایی یا واگرایی سری در $x = x_\circ \pm R$ یعنی نقاط ابتدا و انتهای بازه همگرایی را با جایگذاری $x_\circ \pm R$ به جای x در سری بررسی نمایید.(در این دو نقطه استفاده از آزمون نسبت و ریشه برای بررسی همگرایی هیچ نتیجه‌ای نخواهد داد.)

نکته ۱۴. بازه همگرایی هر سری توانی بازه‌ای متقارن و به مرکز $x_\circ$ است یعنی وسط بازه نقطه $x_\circ$ خواهد بود.

مثال ۲۲. بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n}}$ را محاسبه کنید.

سری موردنظر، سری توانی حول $x_\circ = 2$ است. ابتدا شعاع همگرایی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{n}} \implies \frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{2} \implies R = 2$$

پس سری بر فاصله $|x - 2| < 2$ یعنی $(\circ, 4)$ همگرای مطلق است. همگرایی در نقاط ابتدایی و انتهایی باید بررسی شود. در $x = 4$ سری $\sum \frac{2^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ حاصل می‌شود که واگراست. در $x = \circ$ سری متناوب $\sum \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ را داریم که چون $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نزولی و همگرا به صفر است، پس این سری همگرا خواهد بود. بنابراین بازه همگرایی $[\circ, 4)$ است.

امکان دارد در سؤالی حدود حاصل از آزمون نسبت و ریشه برای محاسبه شعاع همگرایی موجود نباشند. در این صورت اگر زیر دنباله‌های $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ یا $\sqrt[n]{|a_n|}$ به اعداد مختلفی میل کنند، بزرگترین حد زیر دنباله‌ای را در فرمول محاسبه شعاع به جای $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ یا $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ استفاده می‌کنیم.

تعریف. اگر $\{b_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد، و مجموعه حدود زیر دنباله‌های آن را برابر A فرض کنیم، **حد بالای** b_n برابر $\max(A)$ تعریف می‌شود و آنرا با نماد $\limsup b_n$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که اگر b_n کراندار نباشد، حد بالا برابر کوچکترین کران بالا(سوپریمم) A تعریف می‌شود.

تذکر۱۸. با توجه به توضیحات بالا، برای یافتن شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ کافی است حد بالای ریشه یا نسبت را برابر $\frac{1}{R}$ قرار دهیم. یعنی $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

مثال ۲۳. شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(3+\sin\frac{n\pi}{2})^n x^n$ را محاسبه نمایید.

برای محاسبه شعاع همگرایی داریم $\sqrt[n]{|a_n|} = |3+\sin\frac{n\pi}{2}|$ اما حد این عبارت وجود ندارد. با توجه به اینکه برای n زوج $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ و برای n فرد داریم $\sin\frac{n\pi}{2} = \pm 1$ پس زیر دنباله‌های $\sqrt[n]{|a_n|}$ به ۳ و ۴ و ۲ میل می‌کنند و لذا با توجه به تذکر بالا باید بزرگترین عدد یعنی $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 4$ را برابر $\frac{1}{R}$ قرار دهیم و لذا $R = \frac{1}{4}$.

اعمال جبری روی سری‌های توانی

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ دو سری توانی با شعاع‌های R_1 و R_2 باشند:

الف) در جمع و تفریق آنها، دو سری جمله به جمله جمع یا تفریق می‌شوند و شعاع همگرایی سری حاصل $\min(R_1, R_2)$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

ب) ضرب آنها یک سری توانی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ است که شعاع آن $\min(R_1, R_2)$ است. ضرب دو سری توانی دراین حالت به ضرب کوشی موسوم است و مانند ضرب دوچندجمله‌ای است یعنی

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ج) حاصل تقسیم دو سری توانی(که سری مخرج صفر نیست) یک سری توانی حول x_0 است.

مشتق و انتگرال گرفتن از سری‌های توانی

اگر سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ در فاصله $|x-x_0| < R$ برابر تابع $f(x)$ باشد می‌توان از آن جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت، بدون آنکه شعاع همگرایی عوض شود درواقع اگر

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad : \quad |x-x_0| < R$$

آنگاه برای $|x-x_0| < R$:

$$f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} na_n(x-x_۰)^{n-۱} \quad , \quad \int_{x_۰}^{x} f(x)dx=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{n+۱}(x-x_۰)^{n+۱}$$

تذکر۱۹. توجه کنید که در عمل مشتق یا انتگرال ممکن است بازه همگرایی عوض شود یعنی نقاط ابتدا و انتها به بازه همگرایی اضافه یا حذف شوند.

بازه همگرایی سریهای تابعی

در برخی مسائل با سریهایی شامل متغیر x به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ (سریهای تابعی) مواجه هستیم که سری توانی نیستند. در مورد این سریها بازه همگرایی کلیه x هایی است که سری به ازای آنها همگراست. اما بر خلاف سریهای توانی ممکن است بازه همگرایی آنها بازه متقارن نباشد. برای یافتن بازه همگرایی این سریها با آنها مانند سریهای عددی رفتار کرده و یکی از آزمونها را در مورد آنها استفاده می‌کنیم. معمولاً این کار با توجه به آزمون ریشه انجام می‌شود، به این ترتیب که $L=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}$ را تشکیل می‌دهیم که معمولاً عبارتی بر حسب x است. حال به ازای کلیه مقادیری از x که به ازای آنها $L<۱$، سری همگرا و برای $L>۱$ واگرایی رخ می‌دهد. ضمناً در نقاطی که $L=۱$ باید با کمک سایر آزمونها وضعیت سری را بررسی نماییم.

تذکر۲۰. توجه کنید که این روند را برای محاسبه بازه همگرایی سریهای توانی هم می‌توان انجام داد. در این صورت نقاط ابتدا و انتهای بازه در روشی که برای سریهای توانی ارائه شد، نقاط متناظر $L=۱$ در این روش هستند.

مثال ۲۴ بازه همگرایی سری $\sum_{n=۲}^{\infty} n^{n-۲}\left(\frac{x}{۳}\right)^{n!}$ را بیابید.

چون این سری توانی نیست، از آزمون ریشه در مورد جمله عمومی استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{\left|n^{n-۲}\left(\frac{x}{۳}\right)^{n!}\right|}=n^{\frac{n-۲}{n}}\left|\frac{x}{۳}\right|^{(n-۱)!}\sim n\left(\frac{|x|}{۳}\right)^{(n-۱)!}\longrightarrow\begin{cases}+\infty & |x|>۳\\ +\infty & |x|=۳\\ ۰ & |x|<۳\end{cases}$$

برای محاسبه حدود بالا توجه کنید که اگر $|x|>۳$ آنگاه $+\infty \to \left(\frac{|x|}{۳}\right)^{(n-۱)!}$ ولی اگر $|x|<۳$ $\left(\frac{|x|}{۳}\right)^{(n-۱)!}\to ۰$ و چون این عبارت نمایی است پس حاصلضرب آن در n هم به صفر میل می‌کند. حال باید حد بالا کوچکتر از یک باشد که برای $|x|<۳$ رخ می‌دهد و برای $|x|\geq ۳$ نیز سری واگرا می‌باشد. ضمناً چون سری دارای مرکز $x=۰$ است پس شعاع همگرایی آن $R=۳$ می‌باشد.

تست ۵۱ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ کدامیک از مقادیر زیر را دارد؟ (عمران ۷۰، هسته‌ای ۷۶)

۱) ∞ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) e

حل: گزینه ۴ درست است. با استفاده از فرمول ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\sim\frac{\frac{n}{e}}{n}\to\frac{۱}{e}=\frac{۱}{R}\implies R=e$$

تست ۵۲ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ برابر است با: (مکانیک ۷۳)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم.

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4 = \frac{1}{R} \implies R = \frac{1}{4}$$

روش دوم. از آزمون ریشه استفاده می‌کنیم. با توجه به رابطه (۷ ـ ۲) در صفحه ۴۸۹:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \frac{(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{n}{e})^2} \longrightarrow 4 = \frac{1}{R} \implies R = \frac{1}{4}$$

تست ۵۳ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(2z+1)^n$ برابر است با: (اتوماسیون ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) ۶

حل: گزینه ۳ درست است. سری را به صورت $\sum \frac{6^n}{n}(z+\frac{1}{2})^n$ می‌نویسیم. با توجه به آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{6^n}{n}} = \frac{6}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 6 = \frac{1}{R} \implies R = \frac{1}{6}$$

تست ۵۴ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2} x^{2n}$ برابراست با:

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $\frac{1}{e^2}$ ۳) e ۴) e^2

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به نکته ۲۰ در صفحه ۷۸:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n \sim e^{n(\frac{n+3}{n+1}-1)} \to e^2 = \frac{1}{R^2} \implies R = \frac{1}{e}$$

تست ۵۵ شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(5+(-1)^n)^n(x-2)^{2n}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(5+(-1)^n)^n} = 5+(-1)^n$ پس برای n زوج حد برابر ۶ و برای n فرد برابر ۴ است ولذا $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 6$. با توجه به توان $2n$ داریم $\frac{1}{R^2} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ و لذا $R = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

تست ۵۶ اگر شعاع همگرایی سری $\sum a_n x^n$ برابر R باشد، شعاع همگرایی سری $\sum \frac{n!}{n^n} a_n^2 x^n$ کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $\frac{1}{e}R^2$ ۲) R^2 ۳) eR^2 ۴) e^2R

حل: گزینه ۳ درست است. توجه کنید که $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{R}$، اگر شعاع همگرایی سری موردنظر را R' بنامیم.

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}a_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{e}}{n}(\sqrt[n]{|a_n|})^2 = \frac{1}{e}(\frac{1}{R})^2 = \frac{1}{eR^2} \implies R' = eR^2$$

تست ۵۷ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!2^n}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $(-2,2)$
۲) $(1,3)$
۳) $[1,3]$
۴) مجموعه تمام اعداد حقیقی

حل: گزینه ۴ درست است. ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\sim\frac{e}{2n}\to 0=\frac{1}{R}\implies R=+\infty\implies$$ سری بر $\mathbb{R}$ همگراست.

تست ۵۸ برای کدام مقادیر x، سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ همگراست؟ (آمار ۷۷)

۱) $[0,2)$
۲) $(0,2]$
۳) $(1,3)$
۴) $[1,3)$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا شعاع همگرایی را محاسبه می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 1=\frac{1}{R}\implies R=1\implies -1<x-1<1\implies 0<x<2$$

$$x=0\implies\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\implies$$ واگرا است.

$$x=2:\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}\implies$$ سری متناوب و همگرا $\implies 0<x\leq 2$ بازه همگرایی

تست ۵۹ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n(\ln n)^2}$ برابراست با:

۱) $[-1,3]$
۲) $[1,3]$
۳) $(-1,1]$
۴) $[-1,1]$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. بنا به نکته ۱۴ در صفحه ۵۲۰ باید وسط بازه همگرایی برابر مرکز سری یعنی $x_0=2$ باشد و فقط گزینه (۲) دارای این خصوصیت است!!

روش دوم. برای حل کامل این تست، ابتدا شعاع همگرایی را تعیین می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln n)^2}}\to 1=\frac{1}{R}\implies R=1\implies -1<x-2<1\implies 1<x<3$$

حال باید در $x=1,3$ نیز همگرایی بررسی شود. در $x=3$ به سری $\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ می‌رسیم که از نکته ۱۱ در صفحه ۵۱۲ همگراست و در $x=1$ سری $\sum\frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$ به دست می‌آید که همگرای مطلق است. پس بازه همگرایی $[1,3]$ می‌باشد.

تست ۶۰ فاصله همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $(0,1)$
۲) $(-1,1)$
۳) $(0,e)$
۴) $(-e,e)$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به تست ۵۱ در صفحه ۵۲۲ شعاع همگرایی $R=e$ است. پس برای $-e<x<e$ سری همگراست و باتوجه به گزینه‌ها، بررسی در $\pm e$ لازم نمی‌باشد.

بررسی دقیق‌تر: برای اطمینان از درستی گزینه‌ها در $x=\pm e$ نیز همگرایی را بررسی می‌کنیم. در $x=e$ سری

پس سری، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ به دست می‌آید که با توجه به رابطه (۷ ـ ۱) در صفحه ۴۸۹، $\frac{n!e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ شرط لازم همگرایی را ندارد و لذا واگراست. در $x=-e$ نیز سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{n^n}$ حاصل می‌شود که با استدلالی مشابه واگرا است. توجه کنید که در $x=e$ با آزمون رابه نیز می‌توان واگرایی را بررسی نمود. در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}$ داریم $b_n=\frac{n!e^n}{n^n}$ و لذا:

$$n\left(1-\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)=n\left(1-\frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{n!e^n(n+1)^{n+1}}\right)=n\left(1-\frac{en^n}{(n+1)^n}\right)=n-ne\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=n-ne.e^{n\ln\frac{n}{n+1}}=n-ne^{1+n\ln(1-\frac{1}{n+1})}=n-ne^{1-\frac{n}{n+1}-\frac{n}{2(n+1)^2}+\cdots}$$
$$=n-ne^{\frac{n+2}{2(n+1)^2}+\cdots}=n-n\left(1+\frac{n+2}{2(n+1)^2}+\cdots\right)\sim-\frac{n^2+2n}{2(n+1)^2}\to-\frac{1}{2}$$

و بنا به آزمون رابه چون $A=-\frac{1}{2}<1$ پس این سری واگراست.

تست ۶۱ بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2x^n}{(2n)!}$ عبارت است از: (عمران ۷۷)

۱) $-1\leq x<1$ ۲) $-1<x<1$ ۳) $-2\leq x<2$ ۴) $-2<x<2$

حل: گزینه ۴ درست است. شعاع سری را با آزمون ریشه محاسبه می‌کنیم. با توجه به دستور استرلینگ:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=2\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\sim 2\frac{(\frac{n}{e})^2}{(\frac{2n}{e})^2}\to\frac{1}{2}=\frac{1}{R}\implies R=2\implies -2<x<2$$

با توجه به گزینه‌ها، فقط در $x=-2$ باید همگرایی بررسی شود که دراین نقطه به سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ می‌رسیم. از رابطه (۷ ـ ۱) برای جمله عمومی یعنی c_n استفاده می‌کنیم.

$$c_n=(-1)^n\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\sim(-1)^n\frac{4^n(\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n})^2}{\sqrt{4\pi n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}=(-1)^n\sqrt{\pi n}\longrightarrow\pm\infty$$

چون شرط لازم همگرایی برقرار نمی‌باشد، سری واگراست. پس سری بر $(-2,2)$ همگراست.

بررسی دقیق‌تر: برای بررسی وضعیت سری در $x=2$ توجه کنید که در این نقطه به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ می‌رسیم. که با توجه به هر یک از سه روش زیر واگراست. فرض کنید $b_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$:

روش اول. با استفاده از رابطه (۷ ـ ۱) مانند $x=-2$ جمله عمومی هم‌ارز $\sqrt{n\pi}$ (در واقع اختلاف b_n و c_n در $(-1)^n$ است.) و چون شرط لازم همگرایی را ندارد، واگراست.

روش دوم. جمله عمومی در $x=2$ عبارت است از

$$b_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2^nn!)^2}{(2n)!}=\frac{(2\times4\times\cdots\times(2n))^2}{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}$$
$$=\frac{2\times4\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}$$

توجه کنید که هر یک از جملات b_n از یک بیشتر هستند و لذا $b_n>1$. بنابراین حد دنباله b_n در صورت وجود

مخالف صفر است. پس شرط لازم همگرایی برقرار نبوده و لذا سری واگراست.

روش سوم. از آزمون رابه استفاده می‌کنیم.

$$n(1-\frac{b_{n+1}}{b_n}) = n\left(1-\frac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+2)!}\right) = n\left(1-\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\right)$$
$$= \frac{n(-2n-2)}{(2n+1)(2n+2)} \to -\frac{1}{2} = A$$

و چون $A < 1$ بنا به آزمون رابه این سری واگرا می‌باشد.

$\boxed{\text{تست ۶۲}}$ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n(n+1)}$ کدام است؟ (هسته‌ای، نفت ۸۱)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $[-3,-1]$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} \to 1 = \frac{1}{R^2} \Longrightarrow R=1 \Longrightarrow |x+2|<1 \Longrightarrow -3<x<-1$$

با توجه به گزینه‌ها نیاز به بررسی همگرایی در ابتدا و انتها نیست. اما برای حل کامل این تست توجه کنید که در هر دو نقطه ۳- و ۱- به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ می‌رسیم که همگرا می‌باشد.

$\boxed{\text{تست ۶۳}}$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ به‌ازای کدام مقادیر x همگراست؟ (ریاضی ۸۱)

۱) $x>-e$ ۲) $x<\sqrt{e}$ ۳) $|x|<e$ ۴) $|x|<\sqrt{e}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته ۱۳ در صفحه ۵۲۰:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} = \frac{1}{R^2} \Longrightarrow R=\sqrt{e} \Longrightarrow |x|<\sqrt{e} \Longrightarrow \text{(۴) گزینه}$$

بررسی دقیق‌تر: برای حل کامل همگرایی در $x=\pm\sqrt{e}$ را نیز بررسی می‌کنیم. در هر دو نقطه به سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$ می‌رسیم.

روش اول. جمله عمومی را b_n می‌نامیم. واضح است که $\lim_{n\to+\infty} b_n$ به صورت 1^∞ است. لگاریتم می‌گیریم.

$$\ln(b_n) = \ln e^n - n^2\ln(1+\frac{1}{n}) = n - n^2\ln(1+\frac{1}{n}) = n - n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots \to \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = e^{\frac{1}{2}}$$

پس شرط لازم همگرایی برقرار نبوده و لذا این سری واگراست.

روش دوم. با توجه به مثال ۱۴ در صفحه ۱۴۸ چون $(1+\frac{1}{n})^n$ دنباله‌ای صعودی و همگرا به e است، پس $(1+\frac{1}{n})^n < e$ و لذا:

$$b_n = \left(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\right)^n > 1^n = 1 \Longrightarrow b_n > 1$$

پس b_n نمی‌تواند به صفر میل کند و چون شرط لازم برقرار نیست، سری واگرا می‌باشد.

تست ۶۴ کلیه نقاط همگرایی سری حقیقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ عبارتست از: (معدن ۷۳)

۱) $x \geq \frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ۳) $x > 0$ ۴) $0 < x < 1$

حل: گزینه ۱ درست است. این سری توانی نیست. با استفاده از آزمون ریشه n ام برای سری‌های عددی:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |\frac{x-1}{x}| \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to |\frac{x-1}{x}| = L$$

می‌دانیم که سری برای $L < 1$ همگراست و لذا:

$$L < 1 \implies |x-1| < |x| \implies |x-1|^2 < |x|^2 \implies 2x - 1 > 0 \implies x > \frac{1}{2}$$

پس سری برای $x > \frac{1}{2}$ همگراست. ضمناً برای حالتی که $L = 1$ یعنی $x = \frac{1}{2}$ نیز باید بررسی انجام شود. در این نقطه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ به دست می‌آید که همگراست.

تست ۶۵ مجموعه همگرایی سری $\cdots + 3^9x^9 + 3^4x^4 + 3x$ کدام است؟ (آمار ۷۶)

۱) $\{x : |x| < \frac{2}{3}\}$ ۲) $\{x : |x| \leq \frac{2}{3}\}$ ۳) $\{x : |x| \leq \frac{1}{3}\}$ ۴) $\{x : |x| < \frac{1}{3}\}$

حل: گزینه ۴ درست است. سری مورد نظر به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}x^{n^2}$ است و چون این سری، توانی نیست باید ریشه n ام کل جملات را تشکیل دهیم.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|3^{n^2}x^{n^2}|} = \lim_{n\to+\infty} 3^n|x|^n = \lim_{n\to+\infty} (3|x|)^n = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{1}{3} \\ 1 & |x| = \frac{1}{3} \\ +\infty & |x| > \frac{1}{3} \end{cases}$$

برای $L < 1$ یعنی $|x| < \frac{1}{3}$ این سری همگرا می‌باشد و برای $L = 1$ یعنی $x = \pm\frac{1}{3}$ باید همگرایی مورد بررسی قرار گیرد. در $x = \frac{1}{3}$ سری $\sum 1 = \sum 3^{n^2}(\frac{1}{3})^{n^2}$ به دست می‌آید که چون شرط لازم همگرایی را ندارد واگراست و در $x = -\frac{1}{3}$ نیز سری $\sum(-1)^{n^2} = \sum 3^{n^2}(-\frac{1}{3})^{n^2}$ حاصل می‌شود که بخاطر نداشتن شرط لازم همگرایی، واگرا می‌باشد و لذا فاصله همگرایی $|x| < \frac{1}{3}$ است.

تست ۶۶ بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ برابر است با:

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $(-1, 1]$

حل: گزینه ۱ درست است. این سری توانی نیست و آزمون ریشه هم در مورد آن جوابی نمی‌دهد. اما توجه کنید که برای هر x:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

و چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست، سری مورد نظر نیز برای هر x همگرا بوده و لذا بازه همگرایی $\mathbb{R}$ است.

۴–۷ سری تیلور و سری مک لورن

تحت شرایطی به تابع $f(x)$ حول نقطه $x_\circ$ می‌توان یک سری توانی متناظر کرد که در یک بازه همگرایی حول $x_\circ$ برابر تابع $f(x)$ شود. اگر مشتقات تابع f تا هر مرتبه دلخواهی در $x_\circ$ موجود باشد، سری توانی

$$f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{1!}(x - x_\circ) + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n$$

را سری (بسط) تیلور تابع f می‌نامیم. در حالت خاصی که $x_\circ = \circ$ به آن **سری (بسط) مک لورن** می‌گوییم. اگر سری تیلور در یک همسایگی از $x_\circ$ مانند $|x - x_\circ| < R$ برابر $f(x)$ شود، آنگاه تابع f را در $x_\circ$ **تحلیلی** می‌نامند. توابع مقدماتی غالبا تحلیلی هستند اما مثال‌هایی وجود دارند که سری تیلور برای آنها موجود است اما برابر تابع نیست. (تست ۸۰ در صفحه ۵۳۶ را ملاحظه نمایید.)

تذکر۲۱. سری تیلور تابع f در $x_\circ$ درصورت وجود یکتاست.

قضیه ۹. (قضیه باقیمانده تیلور) فرض کنید $f(x)$ دریک همسایگی $x_\circ$ دارای مشتق مرتبه $(n+1)$ باشد دراین صورت:

$$f(x) = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{1!}(x - x_\circ) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n + R_n(x, x_\circ)$$

که $R_n(x) = R_n(x, x_\circ)$ **باقیمانده تیلور مرتبه** n است و عدد مناسب c موجود است که بین x و $x_\circ$ قرار دارد و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_\circ)^{n+1}$$

در رابطه بالا $P_n(x) = f(x) - R_n(x)$ یا به عبارتی $P_n(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x - x_\circ)^k$، **چندجمله‌ای تیلور** از درجه n نامیده می‌شود.

رابطه بالا را می‌توان برای تقریب زدن مقدار $f(x)$ با داشتن $f(x_\circ)$ به‌کار برد و در حالت خاص $n = 1$، چند جمله‌ای $P_n(x)$ همان تقریب خطی در صفحه ۱۸۲ است. دقت کنید که $R_1(x)$ برابر با خطای تقریب خطی است که در نکته ۴۶ در صفحه ۱۸۲ به آن اشاره کردیم.

حال اگر $P_n(x)$ را برای n ثابت به‌جای $f(x)$ به‌کار ببریم، خطای محاسبه $R_n(x)$ است و اگر در بازه‌ای که تقریب در آن اعمال می‌شود، $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ دراین صورت:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x - x_\circ)^{n+1}$$

دقت کنید که در این حالت $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = \circ$ و بنابراین $P_n(x) \to f(x)$ یعنی سری تیلور f برابر خود تابع است و لذا تابع f در $x_\circ$ تحلیلی می‌باشد.

تذکر۲۲. با توجه به اینکه $\lim_{x\to x_\circ} \frac{R_n(x)}{(x - x_\circ)^n} = \circ$، رابطه بیان‌شده در قضیه بالا را گاهی به‌صورت $f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)(x - x_\circ)^n$ می‌نویسیم که $\lim_{x\to x_\circ} \varepsilon(x) = \circ$.

با داشتن سری تیلور تابع و با اعمال مشتق و انتگرال روی آن می‌توان سری تیلور برای توابع جدید به دست

آورد. در اینصورت شعاع همگرایی سری هیچ تغییری نمی‌کند. توجه به این نکته ضروری است که محاسبات باید در داخل بازه همگرایی یعنی $(x_\circ - R, x_\circ + R)$ انجام شود و همگرایی سری حاصل از مشتق یا انتگرال گرفتن در $x = x_\circ \pm R$ باید بررسی شود. با استفاده از قضیه زیر به شرط آنکه سری حاصل در نقاط انتهایی همگرا باشد و تابع موردنظر نیز پیوسته باشد، مقدار سری در نقاط انتهایی با مقدار تابع برابر است.

قضیه ۱۰. (قضیه آبل)

اگر $f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(x-x_\circ)^n$ برای $|x - x_\circ| < R$ دراین صورت f در داخل فاصله همگرایی، پیوسته است و علاوه برآن اگر سری به‌ازای $x = x_\circ + R$ همگرا باشد:

$$\text{مقدار سری در } x_\circ + R = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to(x_\circ+R)^-} f(x)$$

و اگر سری در $x = x_\circ - R$ همگرا باشد:

$$\text{مقدار سری در } x_\circ - R = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (-R)^n = \lim_{x\to(x_\circ-R)^+} f(x)$$

مثال ۲۵.

الف) سری مک لورن و بازه همگرایی آن را برای $f(x) = \frac{۱}{۱-x}$ به دست آورید.
ب) سری مک لورن و بازه همگرایی آن را برای $g(x) = \frac{x}{(۱-x)^۲}$ به دست آورید.
ج) سری مک لورن و بازه همگرایی آن را برای $h(x) = \mathrm{Arctan}x$ به دست آورید.

الف) با توجه به مثال ۱۰ در صفحه ۱۴۴ داریم $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(۱-x)^{n+۱}}$ و بنابراین $f^{(n)}(\circ) = n!$ پس

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}(x-\circ)^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} x^n$$

با استفاده از آزمون ریشه داریم $R = ۱$ ضمناً سری در $x = \pm ۱$ به سریهای $\sum_{n=\circ}^{\infty} ۱$ و $\sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n$ می‌رسیم که چون شرط لازم همگرایی را ندارد، واگراست. پس:

$$f(x) = \frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} x^n \qquad \text{و} \qquad |x| < ۱ \qquad (*)$$

ب) توجه کنید که $g(x) = xf'(x)$ پس باید از سری $f(x)$ مشتق بگیریم.

$$f'(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} nx^{n-۱} = \circ + \sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^{n-۱} \implies g(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} nx^n$$

چون در مشتق گرفتن، شعاع همگرایی عوض نمی‌شود، $R = ۱$ و به‌ازای $x = \pm ۱$ نیز سری واگراست پس بسط موردنظر برای $-۱ < x < ۱$ معتبر است.

ج)چون $h'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ پس کافی‌است در فرمول $(*)$ از تبدیل x به $-x^۲$ استفاده کنیم و بازه همگرایی نیز تغییر نمی‌کند. زیرا باید $-۱ < -x^۲ < ۱$ که نتیجه می‌دهد $|x| < ۱$.

$$\frac{۱}{۱+x^۲} = \sum_{n=\circ}^{\infty} (-۱)^n x^{۲n} \qquad \text{و} \qquad |x| < ۱$$

حال اگر از این رابطه $\int_{\circ}^{x}$ بگیریم:

$$\text{Arctan}x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} x^{۲n+۱} \qquad (**)$$

شعاع همگرایی سری حاصل $R = ۱$ است، اما دقت کنید که در $x = \pm ۱$ به دو سری متناوب و همگرا می‌رسیم یعنی بسط $(**)$ برای $|x| \leq ۱$ همگرا است و چون $h(x)$ تابعی پیوسته است، با توجه به قضیه آبل در رابطه $(**)$ مقدار سری سمت راست تساوی در $x = \pm ۱$ برابر با $h(\pm ۱)$ است و بدین ترتیب بسط مک لورن تابع $\text{Arctan}x$ در بازه $[-۱, ۱]$ معتبر می‌باشد. یعنی:

$$\text{Arctan}(۱) = \frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \cdots$$

$$\text{Arctan}(-۱) = -\frac{\pi}{۴} = -۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \cdots$$

سری مک لورن توابع معروف که به تعدادی از آنها در صفحه ۷۰ اشاره شد، به‌صورت زیراست.

۱) $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!} x^{۲n+۱} \qquad x \in \mathbb{R}$

۲) $\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n)!} x^{۲n} \qquad x \in \mathbb{R}$

۳) $\tan x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲x^۵}{۱۵} + \frac{۱۷x^۷}{۳۱۵} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{۲}$

۴) $e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$

۵) $\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \cdots = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} x^n \qquad -۱ < x \leq ۱$

۶) $\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \qquad x \in \mathbb{R}$

۷) $\cosh x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} \qquad x \in \mathbb{R}$

۸) $\text{Arcsin}x = x + \frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۴}\frac{x^۵}{۵} + \cdots = x + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۲^n n!} \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} \qquad |x| < ۱$

۹) $\text{Arctan}x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} x^{۲n+۱} \qquad |x| \leq ۱$

۱۰) $\sinh^{-۱} x = x - \frac{۱}{۲}\frac{x^۳}{۳} + \cdots = x + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۲^n n!} \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} \qquad |x| < ۱$

۱۱) $\tanh^{-۱} x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} \qquad |x| < ۱$

$$۱۲)\ \frac{۱}{۱-x} = ۱+x+x^۲+x^۳+\cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \qquad |x| < ۱$$

$$۱۳)\ (۱+x)^r = ۱+rx+\frac{r(r-۱)}{۲!}x^۲+\cdots = ۱+\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{r(r-۱)\cdots(r-n+۱)}{n!}x^n \qquad |x| < ۱$$

در رابطه (۱۳) که **بسط دوجمله‌ای نیوتن** نامیده می‌شود اگر $r \in \mathbb{N}$ رابطه برای هر x و اگر $۰ > r > -۱$ رابطه برای $-۱ < x \leq ۱$ و اگر $r > ۰$ غیرطبیعی باشد رابطه برای $|x| \leq ۱$ معتبر است.

نکته ۱۵. اگر تابعی زوج باشد، در سری مک‌لورن آن، توانهای فرد دیده نمی‌شود و در بسط مک‌لورن توابع فرد، توانهای زوج وجود ندارد.

تذکر۲۳. فرمول توابع هیپربولیک و مثلثاتی متناظر، به هم شبیه هستند. مثلاً اگر در فرمول $\sin x$ همه ضرایب را با علامت مثبت بنویسیم فرمول (٦) که مربوط به $\sinh x$ است به دست می‌آید.

مثال ۲٦. ضریب $x^۳$ در بسط مک لورن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۱+\tan^{-۱} x}$ را محاسبه نمایید.

برای حل این نوع سؤالات دو روش وجود دارد.

روش اول. ضریب x^n در بسط مک‌لورن هر تابعی برابر $\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}$ است. استفاده از این روش به دلیل نیاز به مشتق‌گیری ، معمولاً حجم عملیاتی بالایی دارد.

روش دوم. از فرمولهای مک‌لورن استفاده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\sqrt[۳]{۱+t} = (۱+t)^{\frac{۱}{۳}} = ۱+\frac{۱}{۳}t+\frac{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}-۱)}{۲!}t^۲+\frac{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}-۱)(\frac{۱}{۳}-۲)}{۳!}t^۳+\cdots \qquad (*)$$

اما چون $t = \tan^{-۱} x \sim x$ پس $t^۳ \sim x^۳$. این موضوع نشان می‌دهد که کافی است، بسط مک‌لورن $\sqrt[۳]{۱+t}$ را فقط تا جمله دارای $t^۳$ بنویسیم. زیرا اگر جمله بعدی که به شکل $at^۴$ است را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه $t^۴ = (\tan^{-۱} x)^۴ \sim x^۴$ پس کوچکترین توان در $t^۴$ برابر ۴ است و لذا ضریب $x^۳$ در جمله $at^۴$ و جملات توان ۴ به بعد برابر صفر است. حال با توجه به $(*)$ داریم:

$$\sqrt[۳]{۱+\tan^{-۱} x} = ۱+\frac{۱}{۳}\tan^{-۱} x-\frac{۱}{۹}(\tan^{-۱} x)^۲+\frac{۵}{۸۱}(\tan^{-۱} x)^۳+\cdots$$

کافی است در هر یک از جملات بالا، ضریب $x^۳$ را محاسبه و حاصل را با هم جمع نماییم. در جمله اول یعنی ۱ ضریب $x^۳$ برابر $a_۱ = ۰$ است. در $\tan^{-۱} x = x - \frac{۱}{۳}x^۳ + \cdots$ ضریب $x^۳$ برابر $-\frac{۱}{۳}$ و لذا در جمله دوم از مجموع بالا برابر $a_۲ = \frac{۱}{۳}(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۹}$ می‌باشد. با توجه به اینکه $(\tan^{-۱} x)^۲$ تابعی زوج است و با توجه به نکته ۱۵ ضریب $x^۳$ برابر $a_۳ = ۰$ می‌باشد. بالاخره در $(\tan^{-۱} x)^۳ = (x - \frac{۱}{۳}x^۳ + \cdots)^۳$ نیازی به محاسبه توان نیست. با توجه به هم ارزی داریم $(\tan^{-۱} x)^۳ \sim x^۳$ که نشان می‌دهد، ضریب $x^۳$ در این عبارت برابر یک و لذا در جمله چهارم برابر $a_۴ = \frac{۵}{۸۱}$ می‌باشد. پس ضریب $x^۳$ در $f(x)$ برابر است با:

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_۴ = ۰-\frac{۱}{۹}+۰+\frac{۵}{۸۱} = -\frac{۴}{۸۱}$$

ضمناً با توجه به رابطه اشاره شده در روش اول، می‌توانیم $f'''(۰)$ را نیز محاسبه نماییم.

$$-\frac{۴}{۸۱} = x^۳ \text{ ضریب } = \frac{f'''(۰)}{۳!} \implies f'''(۰) = -\frac{۴}{۸۱} \times ۳! = -\frac{۸}{۲۷}$$

یکی از کاربردهای سری تیلور توابع، محاسبه مجموع‌ها است. به این صورت که با جایگذاری مقدار عددی برای x در سمت راست تساوی‌های مک لورن می‌توان مقدار برخی سری‌ها را محاسبه کرد.

مثال ۲۷. مقدار $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n(n-۱)}{۲^n}$ را محاسبه کنید.

اگر سری $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)x^n$ را درنظربگیریم، با جایگذاری $x = \frac{۱}{۲}$، مقدار موردنظر به دست می‌آید. ظاهرشدن ضریب n و $(n-۱)$ از مشتق گرفتن ایجاد می‌شوند پس کافی‌است از سری $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$ دو بار مشتق بگیریم.

$$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \frac{۱}{(۱-x)^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} nx^{n-۱} \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \frac{۲}{(۱-x)^۳} = \sum_{n=۰}^{\infty} n(n-۱)x^{n-۲}$$

و بنابراین $f(x) = \frac{۲x^۲}{(۱-x)^۳}$ و جواب مسأله $f(\frac{۱}{۲}) = ۴$ است.

یکی دیگر از کاربردهای سری تیلور، تقریب زدن می‌باشد. به این ترتیب که چندجمله‌ای تیلور یک تابع را تا توان مشخصی به جای خود تابع قرار می‌دهیم. واضح است که هر چه توان به کار رفته بزرگتر باشد، تقریب به واقعیت نزدیکتر است.

مثال ۲۸

چند جمله از بسط مک‌لورن تابع $f(x) = e^x$ باید نوشته شود تا خطای محاسبه $f(۱) = e$ از $۱۰^{-۳}$ کمتر باشد.

توجه کنید که $e^x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ و لذا اگر چند جمله‌ای تیلور درجه n یعنی $P_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{x^k}{k!}$ را در نظر بگیریم، بنا به قضیه ۹ در صفحه ۵۲۸ خطای تقریب برابر $R_n(۱) = \frac{f^{(n+۱)}(c)}{(n+۱)!} = \frac{e^c}{(n+۱)!}$ برای $۰ < c < ۱$ خواهد بود.

$$R_n(۱) = \frac{e^c}{(n+۱)!} \leq \frac{e^۱}{(n+۱)!} \leq \frac{۳}{(n+۱)!} < ۱۰^{-۳} \implies (n+۱)! > ۳۰۰۰ \implies n \geq ۶$$

پس با نوشتن ۷ جمله خطای مورد نظر تامین می‌شود. در این حالت مقدار تقریبی e برابر است با:

$$e \simeq P_۶(۱) = \sum_{k=۰}^{۶} \frac{۱}{k!} = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۶!} \simeq ۲/۷۱۸$$

مثال ۲۹

برای محاسبه مقدار تقریبی $\ln ۲$ از چند جمله‌ای درجه چهار تیلور $\ln(۱+x)$ حول $x = ۰$ استفاده نمودیم. خطای محاسبه را تقریب زده و مقدار تقریبی $\ln ۲$ را بیابید.

می‌دانیم $\ln(۱+x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} x^n$ و لذا تقریب مورد نظر برابر $P_۴(x) = \sum_{n=۱}^{۴} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} x^n$ است و بنابراین $\ln ۲ \simeq P_۴(۱) = \sum_{n=۱}^{۴} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$. با توجه به اینکه این سری متناوب است، قدرمطلق خطای تقریب از اولین جمله‌ای که حذف شده یعنی $\frac{(-۱)^۴}{۵} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$ کمتر است.

$$\ln 2 \simeq P_4(1) = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0/583$$

توجه کنید که چون اولین جمله حذف شده دارای علامت مثبت است، پس مقدار به دست آمده در بالا از مقدار واقعی $\ln 2$ کمتر است.

نکته ۱۶. در توابعی که به‌صورت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هستند به‌شرط آنکه شعاع همگرایی سری تیلور صورت و مخرج حول x_0 برابر بینهایت باشد شعاع همگرایی سری تیلور f حول x_0 برابر با نزدیک‌ترین فاصله x_0 از ریشه‌های (حقیقی و مختلط) مخرج است.[1]

مثال ۳۰. شعاع همگرایی سری تیلور $f(x) = \frac{\cot x}{x^2+1}$ حول $x_0 = 1$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{\cos x}{(x^2+1)\sin x} \quad \text{و} \quad (x^2+1)\sin x = 0 \implies x = \pm i, k\pi$$

فاصله $x_0 = 1$ از $\pm i$ برابر $|1 \pm i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ و فاصله آن از $x = k\pi$ برابر $|1 - k\pi|$ است که به ازای $k = 0$ عدد یک به عنوان کمترین فاصله، حاصل می‌گردد. پس شعاع همگرایی $R = 1$ خواهد بود.

تست ۶۷ ضریب x^4 در بسط مک لورن $\sinh x$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{4!}$ ۲) 0 ۳) $-\frac{1}{4!}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\sinh x$ فرد است، ضریب x^4 صفر می‌شود.

تست ۶۸ ضریب x^3 در بسط مک لورن تابع $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $\frac{4}{27}$ ۲) $-\frac{8}{81}$ ۳) $-\frac{4}{27}$ ۴) $-\frac{4}{81}$

حل: گزینه ۴ درست است. در فرمول (۱۳) در صفحه ۵۳۱ اگر $r = \frac{2}{3}$ و بجای x از $-x$ استفاده کنیم، جمله شامل توان سه عبارت است از:

$$\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{3!}(-x)^3 = -\frac{4}{81}x^3$$

تست ۶۹ در سری مک لورن تابع $f(x) = x\ln(1+x^2)$ ضریب x^7 کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است. ضریب x^6 را در $\ln(1+x^2)$ محاسبه می‌کنیم. کافی‌است در فرمول (۵) در صفحه ۵۳۰ به جای x از x^2 استفاده کنیم.

$$x^6 \text{ جمله شامل} = \frac{1}{3}(x^2)^3 = \frac{1}{3}x^6$$

تست ۷۰ ضریب x^2 در بسط تابع $f(x) = \ln(\sec x)$ برحسب قوای صعودی x کدام است؟ (هسته‌ای ۷۶)

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ۲ درست است. توجه کنید که $f'(x) = \tan x$

$$f'(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots \xrightarrow{\int} \ln(\sec x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 \cdots$$

---

[1] کاربرد اساسی این نکته در درس معادلات دیفرانسیل در «یافتن حداقل شعاع همگرایی سری جواب حول نقطه عادی» است.

تست ۷۱ ضریب x^5 در بسط مک لورن $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ **(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۰)**

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به فرمول (۴) در صفحه ۵۳۰ داریم $\cdots - e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4$ و لذا:

$$f(x) = \int_0^x (1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \cdots)\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \cdots$$

تست ۷۲ ضریب x^4 در بسط مک‌لورن $e^{\sin x}$ کدام است؟ **(برق ـ آزاد ۷۸، انرژی ـ آزاد ۸۲)**

۱) $\frac{1}{4!}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{4!}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $t = \sin x \sim x$ پس باید بسط e^t را تا جمله دارای توان چهار بنویسیم.

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + \cdots$$

چون $\sin x$ و $\sin^3 x$ فرد هستند، ضریب x^4 در آنها صفر است. چون $\sin^2 x \sim (x - \frac{x^3}{6})^2$ ضریب x^4 در $\frac{1}{2}\sin^2 x$ برابر $-\frac{1}{6}$ و در $\frac{1}{4!}\sin^4 x$ برابر $\frac{1}{4!}$ است پس:

$$x^4 \text{ ضریب } = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4!} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{8}$$

تست ۷۳ ضریب x^2 در بسط مک لورن تابع $e^{\cos x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک ۷۷)**

۱) $-\frac{e}{2}$ ۲) $-\frac{e}{6}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $\frac{e}{6}$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. ضریب x^2 برابر $\frac{f''(0)}{2!}$ است.

$$f(x) = e^{\cos x} \implies f'(x) = -\sin x e^{\cos x} \implies f''(0) = -e^1 = -e \implies x^2 \text{ ضریب } = -\frac{e}{2}$$

روش دوم. با توجه به اینکه $f(x) = e \times e^{\cos x - 1}$ و اینکه $y = \cos x - 1$ در $x = 0$ صفر می‌شود، کافی است از $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots$ استفاده کنیم. چون $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ پس جمله $\frac{y^2}{2}$ لازم نیست زیرا حداقل توان در آن x^4 است پس:

$$f(x) = e \times \Big(1 + (\cos x - 1)\Big) + \cdots \sim e(1 - \frac{1}{2}x^2) + \cdots \implies x^2 \text{ ضریب } = -\frac{e}{2}$$

تست ۷۴ ضریب x^3 در بسط $(1 + x)^x$ کدام است؟ **(ژئوفیزیک ۷۶)**

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. ضریب x^3 برابر $\frac{f'''(0)}{3!}$ است که محاسبه مشتق نیاز به استفاده از مشتق لگاریتمی دارد و وقت گیر است. اما $f(x) = e^{x \ln(1+x)}$ و چون هدف محاسبه ضریب x^3 است، کافی است بسط $\ln(1 + x)$ را تا جمله شامل x^2 بنویسیم.

$$f(x) \sim e^{x(x - \frac{x^2}{2} + \cdots)} = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \cdots} = 1 + (x^2 - \frac{x^3}{2} + \cdots) + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^3}{2} + \cdots)^2 + \cdots$$

چون در پرانتز دوم حداقل توانی که ایجاد می‌شود x^4 است پس ضریب x^3 با توجه به پرانتز اول برابر $-\frac{1}{2}$ است.

تست ۷۵ اگر $\varepsilon(x)$ با رابطه $\lim\limits_{x\to ۰}\varepsilon(x)=۰$ تعریف شده باشد، کدامیک از روابط زیر برقرار است؟ (عمران ۷۸)

۱) $\sqrt{۱+x}\cos x=۱+\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۴}x^۲+x^۲\varepsilon(x)$ ۲) $\sqrt{۱+x}\cos x=۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۴}x^۲+x^۲\varepsilon(x)$

۳) $\sqrt{۱+x}\cos x=۱+\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۸}x^۲+x^۲\varepsilon(x)$ ۴) $\sqrt{۱+x}\cos x=۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۸}x^۲+x^۲\varepsilon(x)$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به گزینه‌ها، هدف محاسبه چندجمله‌ای تیلور درجه دوم برای $\sqrt{۱+x}\cos x$ است. پس کافی است چندجمله‌ای تیلور درجه‌دوم $\sqrt{۱+x}$ و $\cos x$ درهم ضرب شود.

$$\sqrt{۱+x}\cos x=(۱+\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۸}x^۲+\cdots)(۱-\frac{x^۲}{۲}+\cdots)=۱+\frac{x}{۲}+(-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۸})x^۲+x^۲\varepsilon(x)$$

تست ۷۶ ضریب $x^۴$ در بسط مک‌لورن تابع $f(x)=\dfrac{۱+\frac{۲}{۳}x}{۱+\frac{۱}{۶}x}\ln(۱+x)$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۷۶)

۱) $\frac{۱}{۷۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا بسط مک‌لورن $\dfrac{۱}{۱+\frac{x}{۶}}$ را می‌نویسیم. اگر آنرا به صورت $\dfrac{۱}{۱-(-\frac{x}{۶})}$ در نظر بگیریم، یک سری هندسی با جمله اول یک و قدرنسبت $-\frac{x}{۶}$ است و لذا:

$$\frac{۱}{۱+\frac{x}{۶}}=۱-\frac{x}{۶}+\frac{x^۲}{۶^۲}-\frac{x^۳}{۶^۳}+\frac{x^۴}{۶^۴}-\cdots$$

حال باید بسط مک‌لورن $\ln(۱+x)$ را در $g(x)=\dfrac{۱+\frac{۲}{۳}x}{۱+\frac{۱}{۶}x}$ ضرب کنیم. چون ضریب $x^۴$ خواسته شده است، بسط هر یک را حداکثر تا توان ۴ می‌نویسیم اما چون $\ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots$ فاقد عدد ثابت است، کافی است بسط $g(x)$ را تا $x^۳$ بنویسیم. توجه کنید که:

$$g(x)=\frac{۱+\frac{x}{۶}+\frac{x}{۲}}{۱+\frac{x}{۶}}=۱+\frac{x}{۲}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{x}{۶}}=۱+\frac{x}{۲}\Big(۱-\frac{x}{۶}+\frac{x^۲}{۳۶}-\cdots\Big)=۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۱۲}+\frac{x^۳}{۷۲}-\cdots$$

$$\Longrightarrow\ f(x)=\Big(۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۱۲}+\frac{x^۳}{۷۲}-\cdots\Big)\Big(x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots\Big)$$

$$\Longrightarrow\ x^۴\ \text{ضریب}=-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۷۲}=-\frac{۱}{۳۶}$$

تست ۷۷ بسط محدود تا مرتبه سوم تابع $f(x)=\ln(۱+\tan x)$ برابر (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۲x^۳}{۳}$ ۲) $x+\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۲}$ ۳) $x-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{۲x^۳}{۳!}$ ۴) $\frac{x}{۱!}-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\tan x\sim x$ باید بسط $\tan x$ را تا توان ۳ جایگذاری کنیم و $\ln$ را تا توان $x^۳$ بسط دهیم.

$$f(x)=\ln(۱+x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots)=(x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots)-\frac{۱}{۲}(x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots)^۲+\frac{۱}{۳}(x+\frac{x^۳}{۳}+\cdots)^۳+\cdots$$

$$=x-\frac{۱}{۲}x^۲+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳})x^۳+\cdots=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{۲}{۳}x^۳+\cdots$$

تست ۷۸ مشتق مرتبه نهم تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ در نقطه $x=0$ برابر است با:

۱) $8!$ ۲) $9!$ ۳) $-8!$ ۴) $-9!$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا ضریب x^9 را در بسط مک‌لورن تابع $f(x)$ محاسبه می‌کنیم. توجه کنید که با ضرب صورت و مخرج در $x-1$ داریم $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^3}$. عبارت $\dfrac{1}{1-x^3}$ یک سری هندسی با قدر نسبت x^3 است و لذا:

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+\cdots \implies f(x)=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)$$

x^9 فقط در اثر حاصلضرب یک از پرانتز اول در x^9 از پرانتز دوم ایجاد می‌شود و لذا ضریب x^9 برابر یک است پس:

$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!}=1 \implies f^{(9)}(0)=9!$$

تست ۷۹ مقدار انتگرال $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$ با خطای کمتر از $0/001$ برابر است با:

۱) $\dfrac{241}{280}$ ۲) $\dfrac{26}{30}$ ۳) $\dfrac{243}{30}$ ۴) $\dfrac{239}{280}$

حل: گزینه ۱ درست است. با جایگذاری $-x^2$ به‌جای x در بسط مک لورن e^x داریم:

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}\right)=\frac{1}{x^2}\left(1-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n-2}$$

$$\implies I=-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n-2}dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)n!}x^{2n-1}\Big|_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)n!}$$

توجه کنید که مجموع بالا یک سری متناوب است و لذا خطای محاسبه از قدرمطلق اولین جمله‌ای که حذف شود، کوچکتر خواهد بود. اگر k جمله از مجموع بالا را در نظر بگیریم، خطای محاسبه از قدرمطلق جمله $(k+1)$ ام یعنی $\dfrac{1}{(2k+1)(k+1)!}$ کمتر است ولذا:

$$\frac{1}{(2k+1)(k+1)!}<\frac{1}{1000} \implies (2k+1)(k+1)!>1000 \implies k\geq 4$$

پس باید ۴ جمله اول را به عنوان تقریبی برای مقدار انتگرال در نظر بگیریم.

$$I\simeq\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)n!}=1-\frac{1}{3\times 2!}+\frac{1}{5\times 3!}-\frac{1}{7\times 4!}=\frac{241}{280}$$

تست ۸۰ کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ درست است؟ (ریاضی ۸۲)

۱) حول نقطه $x=0$ به صورت سری تیلور نمایش داده می‌شود.

۲) در نقطه $x=0$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است.

۳) در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

۴) در نقطه $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به نکته ۲۶ در صفحه ۱۴۵ داریم $f^{(n)}(0)=0$ برای هر $n\in\mathbb{N}$. بنابراین سری تیلور f حول $x=0$ به‌صورت $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=0$ است که به خود تابع همگرا نیست. این تابع مثالی است که نشان می‌دهد ممکن است سری تیلور f به f همگرا نباشد.

تست ۸۱ فرض کنید $0 < x < 1$. دراین صورت $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ برابراست با: (ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ ۲) $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{x-x^2}{(1+x)^3}$ ۴) $\frac{1-x}{(1+x)^3}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به وجود n^2 سری موردنظر با دو بار مشتق گرفتن از $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ به دست می‌آید.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Longrightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ و با ضرب آن در x حاصل موردنظر $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ خواهد بود.

تست ۸۲ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ برابراست با: (مکانیک ۷۲)

۱) $(x+1)e^x$ ۲) $x^2 e^x$ ۳) $(x^2+1)e^x$ ۴) $(x^2+x)e^x$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. با توجه به گزینه‌ها، باید $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را در عبارت داده شده ایجاد کنیم.

$$\text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!} \xlongequal{n \to n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n+1} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xlongequal{n \to n+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + xe^x = x^2 e^x + xe^x = (x^2+x)e^x$$

روش دوم. n^2 در صورت این سری در اثر دو بار مشتق از سری $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ایجاد می‌شود.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \xRightarrow{\text{مشتق}} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$$

$$\xRightarrow{\times x} xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n \xRightarrow{\text{مشتق}} (x+1)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} \xRightarrow{\times x} (x^2+x)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$

تست ۸۳ اگر $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ آنگاه مقدار $\lim_{n \to +\infty} S_n$ کدام است؟ (ریاضی ۸۱)

۱) 0 ۲) $\ln 2$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. اگر در فرمول $\tan^{-1} x$ عدد $x = 1$ جایگذاری شود:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

تست ۸۴ مجموع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ با کدام گزینه برابراست؟ (عمران ۸۱)

۱) $e-3$ ۲) $2e-3$ ۳) $e+1$ ۴) $2e+1$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. مجموع داده شده قابل تبدیل به e^x برای $x=1$ است.

$$\text{سری} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}}_{e}-(1+1)\xrightarrow{n\to n+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+e-2$$

$$=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-1\Big)+e-2=e-1+e-2=2e-3$$

روش دوم. ضریب $n+1$ در صورت کسر می‌تواند در اثر مشتق گرفتن از x^{n+1} حاصل شده باشد.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x\Big)=xe^x-x-x^2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}=xe^x+e^x-1-2x\xrightarrow{x=1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=2e-3$$

تست ۸۵ مقدار سری $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+3)!}$ برابر است با:

۱) $\frac{e^3}{27}$ ۲) $\frac{1}{27}(e^3-4)$ ۳) $\frac{1}{54}(2e^3-17)$ ۴) $\frac{1}{6}(2e^3-17)$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ داریم:

$$S=\frac{1}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+3}}{(n+3)!}=\frac{1}{27}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=\frac{1}{27}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-1-3-\frac{9}{2}\Big)=\frac{1}{54}(2e^3-17)$$

تست ۸۶ مجموع جملات سری $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک، ریاضی ۷۷)

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

حل: گزینه ۴ درست است. کافی است از فرمول $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ مشتق گرفته و آن را در $x=\frac{2}{3}$ محاسبه کنیم.

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=0+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad \text{و} \quad x=\frac{2}{3}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=9$$

تست ۸۷ اگر $\frac{7501}{7500}=\frac{\tan x}{x}$ مقدار x تقریباً چند رادیان است؟

۱) $\frac{1}{25}$ ۲) $\frac{1}{50}$ ۳) $\frac{1}{100}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل: گزینه ۲ درست است. بسط مک لورن تابع را می‌نویسیم.

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{x}\Big(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\Big)=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^4+\cdots$$

اگر از دو جمله اول به عنوان تقریبی از $\frac{\tan x}{x}$ استفاده کنیم:

$$1+\frac{1}{3}x^2\simeq\frac{7501}{7500}\Longrightarrow\frac{1}{3}x^2\simeq\frac{7501}{7500}-1=\frac{1}{7500}\Longrightarrow x^2\simeq\frac{1}{2500}\Longrightarrow x\simeq\frac{1}{50}$$

خلاصه نکات مهم

۱) اگر برای $x \geq ۱$ داشته باشیم $f'(x) \geq ۰$ آنگاه دنباله $a_n = f(n)$ صعودی است و اگر $f'(x) \leq ۰$ دنباله نزولی خواهد بود.

۲) برای محاسبه حدود دنباله‌ها از تمام قواعد محاسبه حد توابع در بینهایت می‌توان استفاده نمود.

۳) اگر $p(n)$ یک چندجمله‌ای برحسب متغیر n باشد $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p(n)} = ۱$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln\left(p(n)\right)} = ۱$

۴) p عددی ثابت و بزرگ‌تر از ۱− باشد آنگاه $۱^p + ۲^p + \cdots + n^p \sim \dfrac{n^{p+۱}}{p+۱} + \dfrac{n^p}{۲} \sim \dfrac{n^{p+۱}}{p+۱}$

۵) (فرمول استرلینگ)

$$n! \sim \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \implies \sqrt[n]{(n)!} \sim \frac{n}{e} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{(an)!} \sim \left(\frac{an}{e}\right)^a$$

۶) در قوانین رشد اگر $a > ۱$ عددی ثابت باشدآنگاه $n^n \gg n! \gg a^n$

۷) اگر دنباله a_n همگرا به ℓ باشد، دنباله‌های زیر نیز به ℓ همگرا هستند.

$$b_n = \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n} \quad \text{و} \quad c_n = \sqrt[n]{a_۱ \ldots a_n}$$

۸) (سری تلسکوپی)

$$۱)\ \sum_{k=۱}^{m}(a_k - a_{k+۱}) = a_۱ - a_{m+۱}$$

$$۲)\ \sum_{k=۱}^{m}(-۱)^k(a_k + a_{k+۱}) = (-۱)^۱ a_۱ + (-۱)^m a_{m+۱}$$

خصوصاً اگر $m \to +\infty$ داریم:

$$۳)\ \sum_{k=۱}^{\infty}(a_k - a_{k+۱}) = a_۱ - a_\infty \qquad (a_\infty = \lim_{k\to+\infty} a_k)$$

$$۴)\ \sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k(a_k + a_{k+۱}) = (-۱)^۱ a_۱ \qquad (\text{به شرط آنکه } a_n \to ۰)$$

۹) در مجموع تلسکوپی (۱) و (۳) اگر اختلاف اندیس‌های دو عبارت موجود در مجموع یک واحد نباشد، باید به تعداد اختلاف اندیس‌ها جمله از اول و آخر دنباله نوشت.

۱۰) با فرض آنکه همه جملات دنباله a_n مخالف صفر باشند داریم $\displaystyle\prod_{k=۱}^{n} \frac{a_k}{a_{k+۱}} = \frac{a_۱}{a_{n+۱}}$

۱۱) (سری هندسی) اگر $a \neq 0$ و q اعدادی ثابت باشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \cdots$ برای $|q| < 1$ به $\frac{a}{1-q}$ همگرا و برای $|q| \geq 1$ واگراست.

۱۲) (سری ریمان) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.

۱۳) (شرط لازم همگرایی) اگر a_n همگرا به صفر نباشد، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست.

۱۴) اگر a_n ها نامنفی و نزولی و سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

۱۵) (آزمون مقایسه) اگر از مرتبه‌ای به بعد $0 \leq a_n \leq b_n$:

i) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز همگراست.

ii) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum b_n$ نیز واگراست.

۱۶) (آزمون مقایسه حدی) فرض کنید از مرتبه‌ای به بعد $a_n, b_n > 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

i) اگر $0 < L < +\infty$، دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

ii) اگر $L = 0$ و سری $\sum b_n$ همگرا باشد، سری $\sum a_n$ نیز همگراست.

iii) اگر $L = +\infty$ و سری $\sum b_n$ واگرا باشد، سری $\sum a_n$ نیز واگراست.

۱۷) (آزمون هم ارزی) اگر $a_n \sim b_n$ آنگاه دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ از لحاظ همگرایی یا واگرایی هم وضعیت هستند.

۱۸) اگر $a_n \sim \frac{k}{n^p}$ ($k \neq 0$ عدد ثابت) آنگاه در حالت $p > 1$ سری $\sum a_n$ همگرا و در حالت $p \leq 1$ واگرا است.

۱۹) (آزمون نسبت و ریشه) فرض کنید $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ یا $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

i) اگر $L < 1$ سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ii) اگر $L > 1$ آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ و لذا سری $\sum a_n$ واگراست.

iii) اگر $L = 1$ سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد.(آزمون جواب نمی‌دهد)

معمولاً از این دو آزمون در حالتی که a_n شامل بی‌نهایت با مرتبه نامتناهی مثلاً نمایی یا فاکتوریل است استفاده می‌کنیم.

۲۰) (**آزمون انتگرال**) اگر $a_n = f(n)$ و تابع f برای $x \geq x_0$(برای x های بزرگ) تابعی مثبت، پیوسته و نزولی باشد، سری $\sum a_n$ و انتگرال ناسره $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ هم‌رفتار هستند.

۲۱) (**آزمون سری‌های متناوب**) در مورد سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ احکام زیر را داریم:

i) اگر a_n نزولی و همگرا به‌صفر باشد، این سری همگراست.

ii) تحت شرایط بالا اگر مقدار واقعی سری برابر S باشدو مجموع جزئی k ام یعنی $S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$ را به‌عنوان تقریبی از S به‌کار ببریم، دراین صورت قدرمطلق خطا از قدرمطلق اولین جمله‌ای که به‌کار برده نمی‌شود کمتر است. یعنی $|S - S_k| \leq a_{k+1}$ ضمناً $S - S_k$ هم‌علامت با اولین جمله حذف شده درمجموع خواهد بود.

۲۲) (**همگرایی مطلق**) اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همگرا خواهد بود که دراین حالت می‌گوییم $\sum a_n$ **همگرای مطلق** است.

۲۳) سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ مفروض است.

الف) اگر $p > 1$ به ازای هر مقدار $q \in \mathbb{R}$ این سری همگراست.

ب) اگر $p < 1$ به ازای هر مقدار $q \in \mathbb{R}$ این سری واگراست.

ج) اگر $p = 1$ سری به ازای $q > 1$ همگرا و برای $q \leq 1$ واگراست.

در حکم بالا به جای ln از لگاریتم در هر مبنایی نیز می‌توانیم استفاده نماییم.

۲۴) برای محاسبه بازه همگرایی در یک سری توانی ابتدا شعاع همگرایی یعنی R را محاسبه کنید. سری بر فاصله $|x - x_0| < R$ همگرا می‌باشد. سپس همگرایی یا واگرایی سری در $x = x_0 \pm R$ یعنی نقاط ابتدا و انتهای بازه همگرایی را با جایگذاری $x_0 \pm R$ به جای x در سری بررسی نمایید.

۲۵) بازه همگرایی هر سری توانی یک بازه متقارن به مرکز x_0 است.

۲۶) شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ از روابط $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ یا $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ قابل محاسبه است. در حالت کلی به جای $\lim_{n\to+\infty}$ باید lim sup دنباله‌ها را به کار برد.

۲۷) اگر سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^{kn\pm m}$ باشد که k, m اعداد طبیعی و ثابت هستند، شعاع همگرایی در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R^k} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{R^k}$$

در حالت کلی به جای $\lim_{n\to+\infty}$ باید lim sup دنباله‌ها را به کار برد.

۲۸) برای محاسبه بازه همگرایی سریهای غیر توانی با آنها مانند سریهای عددی رفتار کرده و یکی از آزمونها را در مورد آنها استفاده می‌کنیم. معمولاً این کار با توجه به آزمون ریشه انجام می‌شود، به این ترتیب که $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$ را تشکیل می‌دهیم که معمولاً عبارتی بر حسب x است. حال به ازای کلیه مقادیری از x که به ازای آنها $L < 1$، سری همگرا و برای $L > 1$ واگرایی رخ می‌دهد. ضمناً در نقاطی که $L = 1$ باید با کمک سایر آزمونها وضعیت سری را بررسی نماییم.

۲۹) در مشتق و انتگرال گرفتن از یک سری توانی، شعاع همگرایی عوض نمی‌شود.

۳۰) سریهای مک لورن مطرح شده در صفحه ۵۳۰ و ۵۳۱ را به خاطر بسپارید و برای یافتن سری مک‌لورن توابع جدید تا حد امکان از آنها استفاده نمایید.

۳۱) سری تیلور تابع f حول x_0 برابر $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ است.

۳۲) اگر چند جمله‌ای تیلور تابع f در نقطه x_0 تا درجه n یعنی $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k$ را به عنوان تقریبی از f به کار ببریم، خطای محاسبه برابر $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ برای c مناسب بین x و x_0 است.