دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده مهندسی مکانیک

جزوه درس

مکانیک محیط‌های پیوسته

دکتر مجتبی یزدانی

پاییز ۸۹

تانسورها

تمام قوانین در مکانیک محیط‌های پیوسته باید از کمیت‌هایی که مستقل از محورهای مختصات هستند بیان شوند.

نمادگذاری شاخصی (*Indicial Notation*)

تبدیلات خطی (*Linear Transformation*)

حساب تانسورها (*Tensor Calculus*)

سیستم‌های مختصات استوانه‌ای و کروی

بخش اول: نمادگذاری شاخصی (*Indicial Notation*)

۱-۴- جمع (*Summation*)

اگر چند جمه‌ای زیر مفروض باشد

$$s = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n. \tag{۱-۱}$$

معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{۱-۲}$$

و یا

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \qquad s = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m, \qquad s = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k. \tag{۱-۳}$$

اندیسهای i، j و k در معادله (۱-۳)، اندیسهای آزاد (*dummy index*) هستند و نشان می‌دهند که جمع مستقل از اندیس مشخص است.

تبصره: اگر در جایی اندیسی حداکثر یک بار به شکل فوق تکرار گردد آن اندیس یک اندیس آزاد بوده و بیانگر جمع است که به تعداد اعداد حد اندیس جمله خواهد داشت. $1, 2, 3, \ldots n$

$$s = a_i x_i \quad \text{or} \quad s = a_j x_j \quad \text{or} \quad s = a_m x_m, \qquad \text{etc.} \tag{۴-۱}$$

شایان ذکر است که جملاتی نظیر $a_i b_i x_i$ و $a_m b_m x_m$ بیانگر جمع نبوده زیرا که یک اندیس هرگز نباید بیش از یک‌بار در جمع تکرار گردد. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x_i,$$

بیانگر جمع نمی‌باشد.

برای جمع‌های دوگانه می‌توان به صورت زیر عمل کرد

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \tag{۵-۱}$$

$$\alpha = a_{ij} x_i x_j.$$

که اگر بسط داده شود معادل است با

$$\alpha = a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3.$$

و برای جمع‌های سه‌گانه به همین ترتیب می‌توان اقدام کرد.

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ijk} x_i x_j x_k = a_{ijk} x_i x_j x_k \tag{۶-۱}$$

۱-۵- اندیسهای آزاد (*Free Indices*)

سیستم زیر را درنظر بگیرید

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \tag{۷-۱}$$

با توجه به روش نگارش جمع تانسوری معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_1' = a_{1m}x_m,$$
$$x_2' = a_{2m}x_m,$$
$$x_3' = a_{3m}x_m, \tag{۸-۱}$$

که به صورت ساده شده عبارت است از:

$$x_i' = a_{im}\, x_m, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{۹-۱}$$

اندیسی که فقط یکبار در معادله فوق به کار رفته است را اندیس آزاد گویند و همانطور که قبلاً اشاره شد تکرار یک اندیس بیانگر جمع است. مثال دیگر از اندیس آزاد، ضرب داخلی (*dot product*) است که تصاویر یک بردار بر روی محورهای مختصات را به صورت زیر ارائه می‌کند.

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \tag{۱۰-۱}$$

واضح است که بردار **a** می‌تواند با تصاویرآن بر روی محورهای مختصات توصیف گردد.

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \tag{۱۱-۱}$$

و به عنوان مثالی دیگر

$$\mathbf{e}_i' = Q_{mi}\mathbf{e}_m \tag{۱۲-۱}$$

بنابراین

$$\mathbf{e}_1' = Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{21}\mathbf{e}_2 + Q_{31}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_2' = Q_{12}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{32}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}_3' = Q_{13}\mathbf{e}_1 + Q_{23}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3. \tag{۱۳-۱}$$

اندیس‌های آزاد که در تمام جملات معادله ظاهر می‌شوند باید یکسان باشند بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_i + k_i = c_i \quad \text{or} \quad a_i + b_i c_j d_j = f_i.$$

اگر دو اندیس آزاد در یک معادله ظاهر شوند نتیجه عبارت است از:

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm}, \tag{۱۴-۱}$$

بنابراین معادله فوق خلاصه شده نُه معادله زیر است

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13},\\
T_{12} &= A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23},\\
T_{13} &= A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33},\\
T_{21} &= A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_{33} &= A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}.
\end{aligned}$$

۱-۶- دلتای کرونیکر (*Kronecker Delta*)

دلتای کرونیکر به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j,\\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases} \tag{۱۵-۱}$$

بنابراین

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \qquad \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0. \tag{۱۶-۱}$$

به عبارت دیگر ماتریس دلتای کرونیکر معادل است با

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱۷-۱}$$

عبارات زیر از ماتریس دلتای کرونیکر به دست می‌آیند

(a) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1,$ (۱۸-۱)

that is,

$$\delta_{ii} = 3.$$

(b) (۱۹-۱)

$$\begin{aligned}
\delta_{1m}a_m &= \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = \delta_{11}a_1 = a_1,\\
\delta_{2m}a_m &= \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = \delta_{22}a_2 = a_2,\\
\delta_{3m}a_m &= \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = \delta_{33}a_3 = a_3,
\end{aligned}$$

that is,

$$\delta_{im}a_m = a_i.$$

$$\textbf{(c)}\quad \begin{aligned} \delta_{1m}T_{mj} &= \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j}, \\ \delta_{2m}T_{mj} &= \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = T_{2j}, \\ \delta_{3m}T_{mj} &= \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = T_{3j}, \end{aligned} \tag{۲۰-۱}$$

that is,

$$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}.$$

و به ویژه

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij}, \qquad \delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}, \qquad \text{etc.} \tag{۲۱-۱}$$

اگر $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ بردار یکه‌های متعامد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{۲۲-۱}$$

۱-۷- نماد جایگشت (*Permutation Symbol*)

نماد جایگشت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \equiv \text{according to whether } i,j,k \left(\begin{matrix} \text{form an even} \\ \text{form an odd} \\ \text{do not form} \end{matrix} \right) \text{permutation of } 1,2,3, \tag{۲۳-۱}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1, \\ \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \\ \varepsilon_{111} &= \varepsilon_{112} = \varepsilon_{222} = \ldots = 0. \end{aligned} \tag{۲۴-۱}$$

باید توجه داشت

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} - \varepsilon_{ikj}. \tag{۲۵-۱}$$

اگر $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ بردارهای یکه راستگرد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \text{etc.}, \tag{۲۶-۱}$$

که به صورت کوتاه شده به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k = \varepsilon_{jki}\mathbf{e}_k = \varepsilon_{kij}\mathbf{e}_k. \tag{۲۷-۱}$$

اگر $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e}_i$ با در نظر گرفتن مطالب ارائه شده

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \times (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \tag{۲۸-۱}$$

و در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که (اثبات گردد)

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \tag{۲۹-۱}$$

۱-۸- مهارت‌های نمادگذاری اندیسی

(a) جایگذاری

(i)

$$a_i = U_{im}\, b_m,$$

(ii)

$$b_i = V_{im}\, c_m,$$

برای جاگذاری b_i در معادله *(ii)* به جای b_m در معادله *(i)* باید ابتدا اندیس در معادله *(ii)* از i به m تغییر کند واندیس آزاد m به هر نماد دیگری باید تغییر داده شود.

(iii)

$$b_m = V_{mn}\, c_n.$$

(iv)

$$a_i = U_{im} V_{mn}\, c_n.$$

معادله *(iv)* بیانگر سه معادله است که هر کدام دارای نُه جمله است.

(b) ضرب

اگر

$$p = a_m b_m \quad \text{and} \quad q = c_m d_m,$$

$$pq = a_m b_m c_n d_n.$$

باید توجه شود که $pq \neq a_m b_m c_m d_m$. البته باید در نظر داشت که سمت راست این معادله اصلاً در حالت جمع وجود ندارد و بنابراین

$$pq \neq \sum_{m=1}^{3} a_m b_m c_m d_m.$$

با توجه به ضرب داخلی اگر $\mathbf{a}=a_i\mathbf{e_i}$ و $\mathbf{b}=b_i\mathbf{e_i}$ بنابراین

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_i\mathbf{e}_i)\cdot(b_j\mathbf{e}_j) = a_i b_j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j).$$

در حالت ویژه اگر $\mathbf{e_1}$، $\mathbf{e_2}$ و $\mathbf{e_3}$ بردار یکه‌های متعامد باشند آنگاه

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

(c) فاکتورگیری

اگر

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0,$$

با استفاده از دلتای کرونیکر می‌توان نوشت

$$n_i = \delta_{ij} n_j,$$
$$T_{ij}n_j - \lambda\delta_{ij}n_j = 0.$$

و در نهایت

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0.$$

(d) تجمیع *(Contraction)*

تجمیع اندیسها جمع بر روی یک اندیس است. به عنوان مثال $\mathbf{T_{ii}}$ تجمیع $\mathbf{T_{ij}}$ است.

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

اگر

$$T_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu E_{ij},$$

آنگاه

$$T_{ii} = \lambda\Delta\delta_{ii} + 2\mu E_{ii} = 3\lambda\Delta + 2\mu E_{ii}.$$

مسائل بخش اول حل گردند

بخش دوم: تانسورها *(Tensors)*

۱-۹- تبدیلات خطی

اگر $\boldsymbol{T}$ تبدیلی باشد که برداری را به برداری دیگر تبدیل کند اگر $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{a}$ را به $\boldsymbol{c}$ و $\boldsymbol{b}$ را به $\boldsymbol{d}$ تبدیل کند می‌توان نوشت که $Ta=c$ و $Tb=d$.

اگر T دارای خصوصیات خطی زیر باشد

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{Ta} + \mathbf{Tb}, \qquad (۱-۳۰)$$
$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{Ta},$$

که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای اختیاری و α یک کمیت اسکالر هستند، پس می‌توان گفت تبدیل $\mathbf{T}$ یک تبدیل خطی است که به آن تانسور مرتبه دو و یا به اختصار تانسور گویند. رابطه دیگری که بیانگر تبدیل خطی است به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{Ta} + \beta\mathbf{Tb}, \qquad (۱-۳۱)$$

که در آن $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ بردارهای اختیاری و α و β کمیت‌های اسکالر هستند.

مثال‌ها ۱-۶

۱-۱۰- اجزای تانسورها

اگر $\mathbf{e_1}$، $\mathbf{e_2}$ و $\mathbf{e_3}$ به ترتیب بردار یکه‌ها در راستاهای x_1، x_2 و x_3 در مختصات متعامد کارتزین باشند. تحت تبدیل $\mathbf{T}$ بردارهای $\mathbf{e_1}$، $\mathbf{e_2}$ و $\mathbf{e_3}$ به بردارهای $\mathbf{Te_1}$، $\mathbf{Te_2}$ و $\mathbf{Te_3}$ تبدیل می‌گردند.

$$\begin{aligned}\mathbf{Te}_1 &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{Te}_2 &= T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{Te}_3 &= T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3,\end{aligned} \qquad (۱-۳۲)$$

و یا

$$\mathbf{Te}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j. \qquad (۱-۳۳)$$

و به صورت ماتریسی

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \tag{۳۴-۱}$$

مثال: ماتریس تبدیل **T** به نحوی بیابید که بردارهای یکه را به صورت زیر تبدیل کند.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{T}\mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{۳۵-۱}$$

جواب

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{۳۶-۱}$$

ادامه مثال‌ها

از آنجاییکه $\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2.\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3.\mathbf{e}_1 = 0$ به راحتی معلوم است که

$$\begin{aligned} T_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{13} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \\ T_{21} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{22} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1, & T_{32} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2, & T_{33} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{۳۷-۱}$$

و یا

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j. \tag{۳۸-۱}$$

۱-۱۱- اجزاء بردارهای تبدیل شده

بردار **a** و تانسور **T** که **a** را به **b** تبدیل می‌کند مفروض است.(**b=Ta**) هدف از این بخش مقایسه اجزای **T**، **a** و **b** است. بردار **a** عبارت است از:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \tag{۳۹-۱}$$

از طرف دیگر بردار **b** عبارت است از:

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = a_1\mathbf{T}\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{T}\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{T}\mathbf{e}_3, \tag{۴۰-۱}$$

پس:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_3),\\
b_2 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_3),\\
b_3 &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) = a_1(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_2) + a_3(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_3).
\end{aligned}
\tag{۴۱-۱}
$$

با توجه به ضرب‌های داخلی

$$
\begin{aligned}
b_1 &= T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3,\\
b_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3,\\
b_3 &= T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3.
\end{aligned}
\tag{۴۲-۱}
$$

و به صورت ماتریسی

$$
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},
\tag{۴۳-۱}
$$

و

$$
[\mathbf{b}] = [\mathbf{T}][\mathbf{a}].
\tag{۴۴-۱}
$$

اگر مطلب فوق به صورت نمادگذاری شاخصی نوشته شود.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i,\\
&\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{T}(a_i\mathbf{e}_i) = a_i\mathbf{T}\mathbf{e}_i,\\
&\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j\\
&\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a} = a_iT_{ji}\mathbf{e}_j
\end{aligned}
\tag{۴۵-۱}
$$

بنابراین

$$
b_m = \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_m = a_iT_{ji}\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_m = a_iT_{ji}\delta_{jm} = a_iT_{mi},
\tag{۴۶-۱}
$$

و

$$
b_m = a_iT_{mi} = T_{mi}a_i.
\tag{۴۷-۱}
$$

۱-۱۲- جمع تانسورها

برای جمع تانسورها المانهای متناظر با هم جمع می‌گردند

$$
W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}.
\tag{۴۸-۱}
$$

۱-۱۳- ضرب دو تانسور

اگر **T** و **S** دو تانسور و **a** یک بردار اختیاری باشند

$$(\mathbf{TS})\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{Sa}), \tag{۱-۴۹}$$

و

$$(\mathbf{ST})\mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{Ta}). \tag{۱-۵۰}$$

اجزای TS عبارتند از

$$(\mathbf{TS})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{TS})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{Se}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}S_{mj}\mathbf{e}_m = S_{mj}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Te}_m = S_{mj}T_{im}, \tag{۱-۵۱}$$

و در نتیجه

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im}S_{mj}. \tag{۱-۵۲}$$

و به صورت مشابه

$$(\mathbf{ST})_{ij} = S_{im}T_{mj}. \tag{۱-۵۳}$$

معادلات (۱-۵۲) و (۱-۵۳) به ترتیب به صورت ماتریسی با معادلات زیر برابرند

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}], \tag{۱-۵۴}$$

$$[\mathbf{ST}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]. \tag{۱-۵۵}$$

و همانند حساب ماتریسی در حالت عمومی **TS≠ST**

برای تانسورهای **T**، **S** و **V**

$$(\mathbf{T}(\mathbf{SV}))\mathbf{a} \equiv \mathbf{T}((\mathbf{SV})\mathbf{a}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{Va})) \quad \text{and} \quad (\mathbf{TS})(\mathbf{Va}) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{Va})), \tag{۱-۵۶}$$

بنابراین

$$\mathbf{T}(\mathbf{SV}) = (\mathbf{TS})\mathbf{V} = \mathbf{TSV}. \tag{۱-۵۷}$$

بنابراین عملگر ضرب شرکت‌پذیر می‌باشد. برای ضرب تانسور در خود نیز می‌توان نوشت

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{TT}, \quad \mathbf{T}^3 = \mathbf{TTT}, \ldots \tag{۱-۵۸}$$

مثالها حل گردند

۱-۱۴- ترانهاده یک تانسور (*TRANSPOSE OF A TENSOR*)

ترانهاده تانسور $\mathbf{T}$ با $\mathbf{T}^T$ نشان داده می‌شود که برای هر دو بردار اختیاری $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دارای رابطه زیر است.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}. \tag{۱-۵۹}$$

با توجه به مطالبی که در قبل اشاره گردید.

$$\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_j. \tag{۱-۶۰}$$

بنابراین

$$T_{ji}=T^{\mathrm{T}}_{ij}, \tag{۱-۶۱}$$

از طرف دیگر

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}. \tag{۱-۶۲}$$

با توجه به معادله (۱-۵۹) می‌توان نتیجه گرفت

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{T}. \tag{۱-۶۳}$$

می‌توان اثبات کرد که (اثبات شود)

$$(\mathbf{T}\mathbf{S})^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}. \tag{۱-۶۴}$$

و در صورتی که تعداد تانسورهایی که در هم ضرب شده باشند بیشتر باشد

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\ldots\mathbf{D})^{\mathrm{T}}=\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\ldots\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \tag{۱-۶۵}$$

۱-۱۵- ضرب دوتایی دو بردار (*Dyadic Product of vectors*)

ضرب دوتایی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{ab}$ نشان داده می‌شود به تبدیلی گفته می‌شود که بردار $\mathbf{c}$ را به صورت زیر تبدیل می‌کند.

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}). \tag{۱-۶۶}$$

حال برای تمام بردارهای $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ و تمام اسکالرهای α و β می‌توان نوشت

$$(\mathbf{ab})(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot(\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d})) = \mathbf{a}((\alpha\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+(\beta\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})) = \alpha\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\beta\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) = \alpha(\mathbf{ab})\mathbf{c}+\beta(\mathbf{ab})\mathbf{d}. \tag{۶۷-۱}$$

پس تبدیل **ab** یک تبدیل خطی است. اگر **W=ab** باشد المانهای این تبدیل خطی عبارتند از:

$$W_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{W}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{ab})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_j) = a_i b_j, \tag{۶۸-۱}$$

در نتیجه

$$W_{ij} = a_i b_j, \tag{۶۹-۱}$$

ویا در صورت ماتریسی

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}. \tag{۷۰-۱}$$

و در حالت خاص برای ضرب برداری دوتایی $\mathbf{e_i}$

$$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots. \tag{۷۱-۱}$$

بنابراین هر تانسور **T** را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{T} = T_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + T_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \ldots = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{۷۲-۱}$$

۱-۱۶- اثر یا نشان ماتریس (*Trace of a tensor*)

اثر یا نشان یک ماتریس یک کمیت اسکالر است. برای تانسورهای **T** و **S** و بردارهای **a** و **b**

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathbf{T}+\mathbf{S}) &= \mathrm{tr}\,\mathbf{T} + \mathrm{tr}\,\mathbf{S}, \\ \mathrm{tr}(\alpha\,\mathbf{T}) &= \alpha\mathrm{tr}\,\mathbf{T}, \\ \mathrm{tr}(\mathbf{ab}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{۷۳-۱}$$

به صورت شکل تانسوری برای اثر یا نشان ماتریس می‌توان نوشت

$$\mathbf{tr\ T = T_{ii}} \tag{۷۴-۱}$$

و به عبارت دیگر

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{sum of diagonal elements.} \tag{۱-۷۵}$$

با توجه به روابط بخش ترانهاده به سادگی معلوم می‌گردد که

$$\operatorname{tr}\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \operatorname{tr}\mathbf{T}. \tag{۱-۷۶}$$

۱-۱۷- تانسور همانی و معکوس تانسور (*Identity tensor and Tensor inverse*)

تبدیل خطی که هر بردار را به همان بردار تبدیل کند تانسور همانی گفته می‌شود.

$$\mathbf{Ia} = \mathbf{a}. \tag{۱-۷۷}$$

و برای حالت خاص

$$\mathbf{Ie}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Ie}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Ie}_3 = \mathbf{e}_3. \tag{۱-۷۸}$$

برای سیستم مختصات کارتزین المانهای تانسور همانی عبارتند از:

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Ie}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \tag{۱-۷۹}$$

وبه صورت ماتریسی

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱-۸۰}$$

اگر تانسور **T** موجود باشد و بتوان تانسور دیگری نظیر **S** یافت که

$$\mathbf{ST} = \mathbf{I}, \tag{۱-۸۱}$$

در این صورت گفته می‌شود که تانسور **S** معکوس تانسور **T** است. معکوس یک تانسور فقط و فقط زمانی موجود است که $det(\mathbf{T})\neq 0$ باشد (**T** غیر تکین باشد).

برای تانسور **T**

$$(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^{\mathrm{T}}, \tag{۱-۸۲}$$

$$(\mathbf{TS})^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}^{-1}. \tag{۱-۸۳}$$

و برای حالت کلی و برای دو بردار دلخواه

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{b} \quad \text{and} \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}. \tag{۸۴-۱}$$

معادله (۱-۸۴) نشان می‌دهد که وقتی تانسوری وارون‌پذیر باشد آنگه یک نگاشت یک به یک بین بردارهای **a** و **b** وجود خواهد داشت. در غیر این صورت و عدم وارون‌پذیری تانسور **T** برای بردار داده شده **b** در حالت کلی بیش از یک بردار **a** وجو دارد که بر روی **b** نگاشته می‌گردد.

۱-۱۸- تانسورهای متعامد (*Orthogonal tensors*)

یک تانسور متعامد تبدیل خطی است که تحت اثر آن جهت و طول بردارها حفظ می‌گردند. اگر **Q** بیانگر یک تانسور متعامد باشد با توجه به تعریف **|Qa|=|a|**، **|Qb|=|b|** و *cos(***a,b***)=cos(***Qa,Qb***)* بنابراین

$$\mathbf{Qa} \cdot \mathbf{Qb} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{۸۵-۱}$$

با توجه به تعریف ترانهاده

$$(\mathbf{Qa}) \cdot (\mathbf{Qb}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Qa})$$
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q})\mathbf{a} \quad \text{or} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{Ia} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Qa}.$$

پس برای هر بردار دلخواه **a** و **b**

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \tag{۸۶-۱}$$

که این امر نشان می‌دهد که برای یک تانسور متعامد، ترانهاده و معکوس مشابه هم هستند.

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{۸۷-۱}$$

در روش نگارش ماتریسی

$$[\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{I}], \tag{۸۸-۱}$$

و به صورت نگارش اندیسی

$$Q_{mi}Q_{mj} = Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij} \tag{۸۹-۱}$$

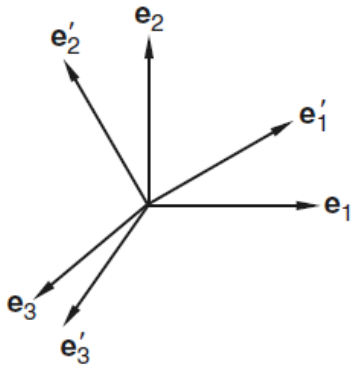
واضح است که دترمینان یک تانسور متعامد همواره ۱+ و یا ۱- است.

$$|[\mathbf{Q}][\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{Q}||\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{I}|.$$

حال $|\mathbf{Q}|=|\mathbf{Q}^T|$ و $|\mathbf{I}|=1$، پس $|\mathbf{Q}|^2=1$ در نتیجه

$$|\mathbf{Q}| = \pm 1 \tag{۹۰-۱}$$

۱-۱۹- ماتریس تبدیل بین دو سیستم مختصات متعامد کارتزین



شکل (۱-۲)

بردارهای یکه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3\}$ و $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ و $\mathbf{e}_3'\}$ برای دو سیستم مختصات کارتزین نشان داده شده در شکل (۱-۲) مفروض می‌باشند. معلوم است که بردارهای $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3\}$ با یک چرخش جسم صلب (در صورتی که دو مرکز بر هم منطبق باشند) می‌توان بر $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ و $\mathbf{e}_3'\}$ منطبق گردد. اگر مراکز بر هم منطبق نباشند با یک چرخش بعد از تصویر کردن این اتفاق می‌افتد. در هر صورت، $\{\mathbf{e}_i\}$ و $\{\mathbf{e}_i'\}$ با یک تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ با هم مرتبط هستند.

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i = Q_{mi}\mathbf{e}_m, \tag{۹۱-۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= Q_{11}\mathbf{e}_1 + Q_{21}\mathbf{e}_2 + Q_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= Q_{12}\mathbf{e}_1 + Q_{22}\mathbf{e}_2 + Q_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= Q_{13}\mathbf{e}_1 + Q_{23}\mathbf{e}_2 + Q_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{۹۲-۱}$$

از طرف دیگر

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}, \tag{۹۳-۱}$$

و یا

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \tag{۹۴-۱}$$

با توجه به مطالب گذشته

$$Q_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' = \text{cosine of the angle between } \mathbf{e}_1 \text{ and } \mathbf{e}_1',$$
$$Q_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2' = \text{cosine of the angle between } \mathbf{e}_1 \text{ and } \mathbf{e}_2', \text{etc.}$$

که به معنی آنست که Q_{ij} برابر با کسینوس زاویه بین دو بردار $\mathbf{e_i}$ و $\mathbf{e_i}'$ است.

$$Q_{ij} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j'). \tag{۹۵-۱}$$

به عبارت دیگر ماتریس تبدیل برابر است با

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{۹۶-۱}$$

۱-۲۰- قانون تبدیل برای المانهای یک بردار در سیستم کارتزین

بردار اختیاری $\mathbf{a}$ مفروض است.المانهای کارتزین این بردار در راستاهای $\{\mathbf{e_1}$، $\mathbf{e_2}$ و $\mathbf{e_3}\}$ برابر است با

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \tag{۹۷-۱}$$

و المانهای آن متناسب با $\{\mathbf{e_1}'$، $\mathbf{e_2}'$ و $\mathbf{e_3}'\}$ برابر است با

$$a_i' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i'. \tag{۹۸-۱}$$

حال با توجه به معادله (۱-۹۱) می‌توان نوشت:

$$a_i' = \mathbf{a} \cdot Q_{mi}\mathbf{e}_m = Q_{mi}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m), \tag{۹۹-۱}$$

و بنابراین

$$a_i' = Q_{mi}a_m. \tag{۱۰۰-۱}$$

و در حالت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \tag{۱۰۱-۱}$$

و

$$[\mathbf{a}]' = [\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{a}]. \tag{۱۰۲-۱}$$

معادلات (۱-۱۰۰)، (۱-۱۰۱) و (۱-۱۰۲) بیانگر تبدیل المانهای بردار دلخواه در یک سیستم مختصات به بردار دیگر در سیسم مختصات کارتزین هم مرکز دیگر. عکس این نتایج نیز صادق است

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{a}]'. \tag{۱-۱۰۳}$$

و

$$a_i = Q_{im}a'_m. \tag{۱-۱۰۴}$$

۱-۲۱- قانون تبدیلات برای المانهای یک تانسور در سیستم کارتزین

تانسور $\mathbf{T}$ مفروض است. المانهای $\mathbf{T}$ در سیستم با بردارهای یکه $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ و $\mathbf{e_3}\}$ عبارتند از:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j. \tag{۱-۱۰۵}$$

مشابه روش فوق برای سیستم با بردارهای یکه $\{\mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}'$ و $\mathbf{e_3}'\}$ می‌توان نوشت:

$$T'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}'_j. \tag{۱-۱۰۶}$$

که با توجه به تبدیل بردارهای یکه به صورت زیر

$$\mathbf{e}'_i = Q_{mi}\mathbf{e}_m$$

و با جاگذاری در معادله (۱-۱۰۶)

$$T'_{ij} = Q_{mi}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T}Q_{nj}\mathbf{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_n \tag{۱-۱۰۷}$$

و به صورت خلاصه

$$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}. \tag{۱-۱۰۸}$$

در صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{۱-۱۰۹}$$

یا

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}\,[\mathbf{T}]\,[\mathbf{Q}] \tag{۱-۱۱۰}$$

می‌توان المانهای تانسور ثانویه را بر مبنای المانهای تانسور اولیه محاسبه نمود و برعکس

$$[\mathbf{Q}]\,[\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}} = [\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{Q}] = [\mathbf{I}] \qquad (۱۱۱-۱)$$

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{Q}]\,[\mathbf{T}]'\,[\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}} \qquad (۱۱۲-۱)$$

و در شکل تانسوری

$$T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn} \qquad (۱۱۳-۱)$$

۱-۲۲- معین کردن یک تانسور با استفاده از قوانین تبدیل

با در نظر گرفتن سیستم مختصات کارتزین متعامد و بردارهای یکه در راستاهای مثبت محورهای مختصات، می‌توان عناصر کارتزین تانسورها از مرتبه‌های مختلف را با استفاده از قوانین تبدیل به دست آورد.اگر کمیتهای اولیه به بردارهای پایه $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ و غیر اولیه به بردارهای پایه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ مرتبط باشند و بردارهای پایه با رابطه $\mathbf{e}_i'=\mathbf{Q}\,\mathbf{e}_i$ به هم مرتبط باشند و $\mathbf{Q}$ یک تانسور متعامد باشد

$$\begin{aligned}
&\alpha' = \alpha && \text{zeroth-order tensor (or scalar)},\\
&a'_i = Q_{mi}a_m && \text{first-order tensor (or vector)},\\
&T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn} && \text{second-order tensor (or tensor)},\\
&S'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}S_{mnr} && \text{third-order tensor},\\
&C'_{ijkl} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}Q_{sl}C_{mnrs} && \text{fourth-order tensor},
\end{aligned} \qquad (۱۱۴-۱)$$

. . . . . .

با توجه به قوانین تبدیلات، قواعد زیر برای عناصر ماتریس حاکم هستند.

قاعده جمع (*addition rule*)

قاعده ضرب (*multiplication rule*)

قاعده کسر (خارج قسمت) (*quotient rule*)

۱) قاعده جمع

اگر T_{ij} و S_{ij} عناصر هر تانسور دلخواه مرتبه دو باشند، آنگاه $T_{ij}+S_{ij}$ عناصر یک تانسور مرتبه دو می‌باشند و مشابه آن اگر T_{ijk} و S_{ijk} عناصر هر تانسور دلخواه مرتبه سه باشند، آنگاه $T_{ij}+S_{ij}$ عناصر یک تانسور مرتبه سه می‌باشند.

۲) قاعده ضرب

اگر a_i عناصر یک بردار دلخواه و T_{ij} عناصر یک تانسور دلخواه باشند تنوع بسیاری برای ضرب این دو وجود خواهد داشت به عنوان مثال a_ia_j، $a_ia_ja_k$، $T_{ij}T_{kl}$، $T_{ij}T_{jk}$ و غیره.برای تمام موارد ذکر شده و ذکر نشده، نتیجه، عناصر یک تانسور می‌باشد که مرتبه آن برابر با تعداد اندسههای آزاد است. به عنوان مثال a_ia_j المانهای یک تانسور مرتبه دو می‌باشد و $a_ia_ja_k$ المانهای یک تانسور مرتبه سه و $T_{ij}T_{kl}$ المانهای یک تانسور مرتبه چهار و $T_{ij}T_{jk}$ المانهای یک تانسور مرتبه دو می‌باشند.

۳) قاعده کسر

اگر a_i المانهای یک بردار اختیاری و T_{ij} عناصر یک تانسور اختیاری باشند و برای تمام سیستم‌های مختصات رابطه $a_i=T_{ij}b_j$ صادق باشد آنگاه b_i المانهای یک بردار می‌باشد. همین قضیه برای یک تانسور مرتبه دو T_{ij} و یک تانسور مرتبه چهار C_{ijkl} با رابطه $T_{ij}=C_{ijkl}E_{kl}$ صادق است و نتیجه نهایی تانسور مرتبه دو C_{kl} است.

۱-۲۳- تانسورهای متقارن و پادمتقارن (*Symmetric and Antisymmetric Tensors*)

تانسوری متقارن است که در آن $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$ بنابراین عناصر یک تانسور متقارن دارای خاصیت زیر می‌باشند.

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{۱-۱۱۵}$$

که برای المانیها تانسور مرتبه دو

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{23} = T_{32} \tag{۱-۱۱۶}$$

تانسوری پادمتقارن نامیده می‌شود که در آن $\mathbf{T}=-\mathbf{T}^T$ بنابراین المانهای تانسور پادمتقارن دارای خاصیت زیر می‌باشند.

$$T_{ij} = -T_{ji}, \tag{۱-۱۱۷}$$

که درنتیجه

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0, \quad T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad T_{23} = -T_{32} \tag{۱۱۸-۱}$$

هر تانسور پادمتقارن عملاً دارای سه مؤلفه می‌باشد (شبیه به یک بردار)

تمام تانسورها را می‌توان به صورت جمع دو تانسور متقارن و پادمتقارن نوشت

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{S}} + \mathbf{T}^{\mathrm{A}}, \tag{۱۱۹-۱}$$

که در آن

$$\mathbf{T}^{\mathrm{S}} = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}}}{2} \text{ is symmetric and } \mathbf{T}^{\mathrm{A}} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}}}{2} \text{ is anti-symmetric.} \tag{۱۲۰-۱}$$

۱-۲۴- بردار دوگان یک تانسور پادمتقارن (*The dual vector of an antisymmetric tensor*)

برای هر تانسور پادمتقارن $\mathbf{T}$ بردار متناظر $\mathbf{t}^A$ برای هر بردار $\mathbf{a}$ وجو دارد که بردار تبدیل $\mathbf{a}$ تحت $\mathbf{T}$ برابر با $\mathbf{Ta}$ است که به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \times \mathbf{a} \tag{۱۲۱-۱}$$

به بردار $\mathbf{t}^A$ بردار دوگان تانسور پادمتقارن گویند. با توجه به معادلاتی که در قبل اشاره شده بود مؤلفه‌های تانسور $\mathbf{T}$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} T_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Te}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_3 = -t_3^{\mathrm{A}}, \\ T_{31} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{Te}_1 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_2 = -t_2^{\mathrm{A}}, \\ T_{23} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Te}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{t}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{e}_1 = -t_1^{\mathrm{A}}. \end{aligned} \tag{۱۲۲-۱}$$

مشابه معادلات فوق نتیجه می‌شود که

$$T_{21} = t_3^{\mathrm{A}}, T_{13} = t_2^{\mathrm{A}}, T_{32} = t_1^{\mathrm{A}} \text{ and } T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0. \tag{۱۲۳-۱}$$

پس بردار دوگان اختصاص به تانسورهای پادمتقارن دارد و این بردار عبارت است از:

$$\mathbf{t}^{\mathrm{A}} = -(T_{23}\mathbf{e}_1 + T_{31}\mathbf{e}_2 + T_{12}\mathbf{e}_3) = T_{32}\mathbf{e}_1 + T_{13}\mathbf{e}_2 + T_{21}\mathbf{e}_3 \tag{۱۲۴-۱}$$

و یا به صورت نگارش تانسوری

$$2\mathbf{t}^{\mathrm{A}} = -\varepsilon_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i \tag{۱۲۵-۱}$$

۱-۲۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک تانسور (*Eigenvalues and eigenvectors of a tensor*)

تانسور **T** مفروض است، اگر **a** برداری باشد که تحت تبدیل **T** به برداری موازی با خود تبدیل گردد.

$$\mathbf{Ta} = \lambda\mathbf{a}, \tag{۱-۱۲۶}$$

در نتیجه **a** یک بردار ویژه و λ یک مقدار ویژه می‌باشد. اگر **a** یک بردار ویژه برای با مقدار ویژه متناظر λ برای تبدیل خطی **T** باشد، هر بردار موازی **a** نیز یک بردار ویژه با همان مقدار ویژه λ است.

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{Ta} = \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a}). \tag{۱-۱۲۷}$$

بنابراین بردار ویژه به دست آمده دارای طول دلخواه می‌باشد برای پرهیز از این امر باید بردارهای ویژه با طول واحد به دست آیند.

اگر **n** یک بردار ویژه به طول واحد باشد. آنگاه

$$\mathbf{Tn} = \lambda\mathbf{n} = \lambda\mathbf{In}, \tag{۱-۱۲۸}$$

بنابراین

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1. \tag{۱-۱۲۹}$$

اگر $\mathbf{n}=\alpha_i\mathbf{e_i}$ در نظر گرفته شود.

$$\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)\alpha_j = 0 \quad \text{with} \quad \alpha_j\alpha_j = 1. \tag{۱-۱۳۰}$$

و به صورت بسط داده شده

$$\begin{aligned}(T_{11} - \lambda)\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 &= 0,\\ T_{21}\alpha_1 + (T_{22} - \lambda)\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 &= 0,\\ T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + (T_{33} - \lambda)\alpha_3 &= 0.\end{aligned} \tag{۱-۱۳۱}$$

باید توجه داشت که $\mathbf{n}\neq 0$ در نتیجه

$$|\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \tag{۱-۱۳۲}$$

که اگر به صورت ماتریسی نگاشته شود

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (۱۳۳-۱)$$

با بسط دترمینان فوق یک معادله مرتبه سه که معادله توصیفی تانسور **T** نامیده می‌شود به دست می‌آید. حل معادله مرتبه سه فوق مقادیر ویژه تبدیل **T** را به دست می‌دهد. از معادله (۱-۱۳۱) می‌توان بردارهای ویژه با طول واحد متناظر برای مقادیر ویژه به دست آمده را محاسبه نمود.

مثالها

توجه: اگر تانسوری دارای مؤلفه‌های حقیقی بوده و متقارن باشد در نتیجه تمام مقادیر ویژه آن نیز حقیقی خواهند بود. اما اگر تانسور حقیقی باشد ولی عدم تقارن در آن وجود داشته باشد، آنگاه از مجموع سه مقدار ویژه آن، دو مقدار ویژه می‌توانند غیر حقیقی باشند.

۱-۲۶- مقادیر و جهت‌های اصلی برای تانسورهای متقارن

این مبحث بیشترین کاربرد را در محاسبه مقادیر و جهت‌های اصلی تانسورهای تنش و کرنش خواهد داشت. برای یک تانسور مرتبه دو در حالت کلی سه مقدار و سه جهت اصلی عمود برهم وجود خواهد داشت. اگر $\mathbf{n_1}$ و $\mathbf{n_2}$ دو بردار ویژه متناظر با دو مقدار ویژه λ_1 و λ_2 باشند

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_1, \qquad (۱۳۴-۱)$$

و

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_2. \qquad (۱۳۵-۱)$$

در نتیجه

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1, \qquad (۱۳۶-۱)$$

و

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2. \qquad (۱۳۷-۱)$$

برای یک تانسور متقارن $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1. \tag{۱۳۸-۱}$$

در نتیجه

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0. \tag{۱۳۹-۱}$$

اگر λ_1 و λ_2 با هم برابر نباشند، آنگاه $\mathbf{n_1}.\mathbf{n_2}=0$ که نشان می‌دهد راستاهای اصلی بر هم عمودند. در مورد تانسور متقارن حقیقی سه راستای متعامد وجود خواهد داشت.

۱-۲۷- ثوابت اسکالر اصلی یک تانسور (*Principal scalar invariant of a tensor*)

معادله توصیفی یک تانسور **T** ، $|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$ است که به صورت زیر نیز بیان می‌گردد.

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{۱۴۰-۱}$$

که در آن

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{T}, \tag{۱۴۱-۱}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left[(tr\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{T}^2)\right], \tag{۱۴۲-۱}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det\,[\mathbf{T}]. \tag{۱۴۳-۱}$$

با توجه به معادلات فوق مشخص است که مقادیر ویژه تانسور **T** به بردارهای پایه انتخابی وابستگی ندارد و به همین دلیل به آنها ثوابت اسکالر اصلی **T** گویند. بر مبنای مقادیر ویژه تانسور معادلات فوق را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{۱۴۴-۱}$$

بخش سوم: حساب تانسوری (*Tensor Calculus*)

۱-۲۸- مقادیر تانسور تابعی از یک اسکالر باشند

T=T(*t*) تانسوری است که مقادیر آن تابعی از اسکالر *t* می‌باشند. مشتق **T** نسبت به **t** به صورت زیر است:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{T}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t} \tag{۱۴۵-۱}$$

معادلات زیر به راحتی با توجه به تعریف مشتق به دست می‌آیند.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}+\mathbf{S}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \tag{۱۴۶-۱}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{T}) = \frac{d\alpha}{dt}\mathbf{T} + \alpha\frac{d\mathbf{T}}{dt}, \tag{۱۴۷-۱}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{TS}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{S} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{S}}{dt}, \tag{۱۴۸-۱}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \tag{۱۴۹-۱}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}) = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{۱۵۰-۱}$$

به عنوان مثال اشاره‌ای به معادله (۱-۱۴۹) می‌شود. با توجه به تعریف اشاره شده در معادله (۱-۱۴۵)

(۱۵۱-۱)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{Ta}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t)\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)\mathbf{a}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{T}(t+\Delta t) - \mathbf{T}(t)}{\Delta t}\mathbf{a}(t+\Delta t) + \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{T}(t)\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

$$\frac{d(\mathbf{Ta})}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

مثال: نشان دهید که در سیستم مختصات کارتزین، مؤلفه‌های $d\mathbf{T}/dt$ را به دست آورید:

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j,$$

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\cdot\mathbf{T}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{T}\frac{d\mathbf{e}_j}{dt}.$$

با توجه به طول ثابت بردارهای پایه مشتق آنها برابر با صفر است.

$$\frac{dT_{ij}}{dt} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{e}_j = \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right)_{ij}.$$

ادامه مثالها:

۱-۲۹- میدان اسکالر و گرادیان یک تابع اسکالر

اگر $\Phi(\mathbf{r})$ یک تابع اسکالر از بردار موقعیت $\mathbf{r}$ باشد یعنی با ازای هر $\mathbf{r}$، $\Phi(\mathbf{r})$ یک مقدار اسکالر را به عنوان نتیجه اعلام دارد نظیر دانسیته، دما و یا پتانسیل الکتریکی در یک نقطه. به عبارت دیگر $\Phi(\mathbf{r})$ یک میدان اسکالر است. اشتراک یک میدان اسکار با یک میدان برداری گرادیان Φ نامیده می‌شود. گرادیان Φ در هرنقطه یک بردار است و با $grad\ \Phi$ و یا $\nabla\Phi$ نشان داده می‌شود که اگر با $d\mathbf{r}$ ضرب داخلی شود بیانگر تفاضل مقادیر اسکالر $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ است.

$$d\phi = \phi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}. \qquad (۱۵۲-۱)$$

اگر dr بیانگر مقدار بردار $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{e}$ یک بردار یکه در $d\mathbf{r}$ راستای باشد. ($\mathbf{e}=d\mathbf{r}/dr$) پس با توجه به رابطه (۱۵۲-۱) می‌توان نوشت

$$\frac{d\phi}{dr} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}. \qquad (۱۵۳-۱)$$

می‌توان نتیجه گرفت، مؤلفه‌های $\nabla\Phi$ در راستای بردار $\mathbf{e}$ تغییرات تابع Φ را در این راستا به دست می‌دهند (مشتق در راستا). در حالت ویژه، مؤلفه‌های $\nabla\Phi$ در راستاهای سیستم مختصات $\mathbf{e_i}$ عبارتند از:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\mathbf{e}_i - dir} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_i. \qquad (۱۵۴-۱)$$

مؤلفه‌های کارتزین $\nabla\Phi$ عبارتند از $\partial\Phi/\partial x_i$ و در نتیجه

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i. \qquad (۱۵۵-۱)$$

بردار گرادیان می‌تولند تفصیر هندسی داشته باشد. اگر $\Phi(\mathbf{r})$ بیانگر یک میدان دما باشد آنگاه در یک سطح همدما $\Phi=a\ (constant)$. فرض کنید $\mathbf{r}$ بیانگر نقطه‌ای در روی سطح همدما باشد.در نتیجه برای هر و همه $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ بر روی همان سطح همدما، $d\Phi=0$. بنابراین $\nabla\Phi.d\mathbf{r}=0$. به عبارت دیگر $\nabla\Phi$ یک بردار عمود بر سطح در نقطه $\mathbf{r}$ است. به عبارت دیگر مقدار $\nabla\Phi.d\mathbf{r}$ ماکزیمم است اگر $d\mathbf{r}$ در راستای $\nabla\Phi$ باشد. به عبارت دیگر $\nabla\Phi$ بیشترین است اگر $d\mathbf{r}$ عمود بر سطح با مقدار ثابت Φ باشد و در این صورت $d\Phi = |\nabla\Phi|dr$ و یا

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\max} = |\nabla\phi| \tag{۱۵۶-۱}$$

۱-۳۰- میدان برداری و گرادیان یک تابع برداری

فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری برای توصیف موقعیت باشد. به عنوان مثال میدان جابجایی و یا میدان سرعت. اشتراک $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با میدان تانسوری گرادیان v گفته می‌شود. گرادیان $\mathbf{v}$ با یک تانسور نرتبه دو بیان می‌گردد.

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}. \tag{۱۵۷-۱}$$

اگر dr برابر با $|d\mathbf{r}|$ و $\mathbf{e}$ برابر با $d\mathbf{r}/dr$ باشد.

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in e-direction}} = (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}. \tag{۱۵۸-۱}$$

بنابراین ماتریس مرتبه دو $\nabla\mathbf{v}$ بردار یکه $\mathbf{e}$ به بردار نرخ تغییرات $\mathbf{v}$ در همان راستا تبدیل می‌کند. در مختصات کارتزین

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\text{in}\,\mathbf{e}_j\text{-direction}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j} = (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_j, \tag{۱۵۹-۱}$$

بنابراین مؤلفه‌های $\nabla\mathbf{v}$ در نمادگذاری اندیسی عبارتند از

$$(\nabla\mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot(\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \tag{۱۶۰-۱}$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{۱-۱۶۱}$$

توصیف هندسی این گرادیان در بخش بعدی ارائه خواهد شد.

۱-۳۱- واگرایی (دیورژانس *Divergence*) یک میدان برداری و واگرایی یک میدان تانسوری

فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است. واگرایی $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با میدان اسکالر تریس (*trace*) گرادیان $\mathbf{v}$ بیان می‌گردد.

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \text{tr}(\nabla \mathbf{v}). \tag{۱-۱۶۲}$$

در سیستم مختصات کارتزین

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \tag{۱-۱۶۳}$$

فرض کنید $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ یک میدان تانسوری است. واگرایی $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است به صورت $div\ \mathbf{T}$، به صورتی که برای هر بردار $\mathbf{a}$

$$(\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} \equiv \text{div}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right) - \text{tr}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\nabla \mathbf{a}\right). \tag{۱-۱۶۴}$$

در مختصات کارتزین

$$b_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i = \text{div}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i\right) - \text{tr}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\nabla \mathbf{e}_i\right) = \text{div}\left(T_{ij}\mathbf{e}_j\right) - 0 = \partial T_{ij}/\partial x_j. \tag{۱-۱۶۵}$$

و به عبارت دیگر

$$\text{div } \mathbf{T} = \left(\partial T_{ij}/\partial x_j\right)\mathbf{e}_i. \tag{۱-۱۶۶}$$

۱-۳۲- چرخش (*Curl*) یک میدان برداری

فرض کنید $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است. چرخش $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری است که به دوبرابر بردار دوگان قسمت غیر متقارن $\nabla \mathbf{v}$ برابر است.

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv 2\mathbf{t}^{\mathrm{A}}, \tag{۱-۱۶۷}$$

که در آن $\mathbf{t}^{A}$ بردار دوگان $(\nabla\mathbf{v})^{A}$ است. در کارتزین

$$[\nabla\mathbf{v}]^{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{۱-۱۶۸}$$

بنابراین چرخش $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ با معادله (۱-۱۲۴) بیان می‌گردد.

$$\text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{t}^{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \tag{۱-۱۶۹}$$

و به صورت نگارش اندیسی

$$\text{curl } \mathbf{v} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\mathbf{e}_i. \tag{۱-۱۷۰}$$

۱-۳۳- لاپلاسین (*Laplasian*) یک میدان اسکالر

اگر $f(\mathbf{r})$ تابع اسکالر از بردار موقعیت $\mathbf{r}$ باشد. لاپلاسین میدان اسکالر عبارت است از

$$\nabla^2 f = \text{div } (\nabla f) = \text{tr}(\nabla(\nabla f)). \tag{۱-۱۷۱}$$

در مختصات متعامد

$$\nabla^2 f = \text{tr}(\nabla(\nabla f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \tag{۱-۱۷۲}$$

۱-۳۴- لاپلاسین (*Laplasian*) یک میدان برداری

اگر $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری باشد. لاپلاسین میدان برداری عبارت است از

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla\,(\text{div } \mathbf{v}) - \text{curl } (\text{curl } \mathbf{v}). \tag{۱-۱۷۳}$$

در مختصات متعامد

$$\nabla(\text{div } \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i, \quad \text{curl } \mathbf{v} = -\varepsilon_{\alpha jk}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_\alpha, \tag{۱-۱۷۴}$$

با جاگذاری معادلات فوق در معادله لاپلاسین میدان برداری و ساده سازی لاپلاسین میدان برداری در مختصات متعامد عبارت است از:

$$\nabla^2\mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\beta \partial x_\beta}\mathbf{e}_i = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i. \tag{۱-۱۷۵}$$

و در حالت باز شده

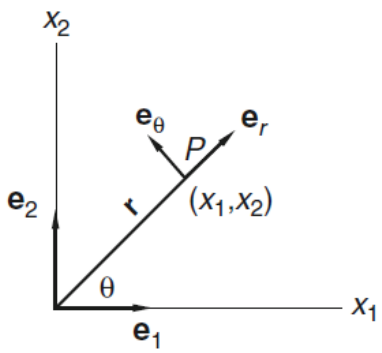
$$\nabla^2\mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)\mathbf{e}_3. \tag{۱-۱۷۶}$$

برای سایر سیستمهای مختصات این لاپلاسین در بخشهای بعدی به دست خواهد آمد.

بخش چهارم: مختصات منحنی‌الخط

۱-۳۵- مختصات قطبی (*Polar Coordinate*)

مختصات قطبی زیر را در نظر بگیرید (r,θ)

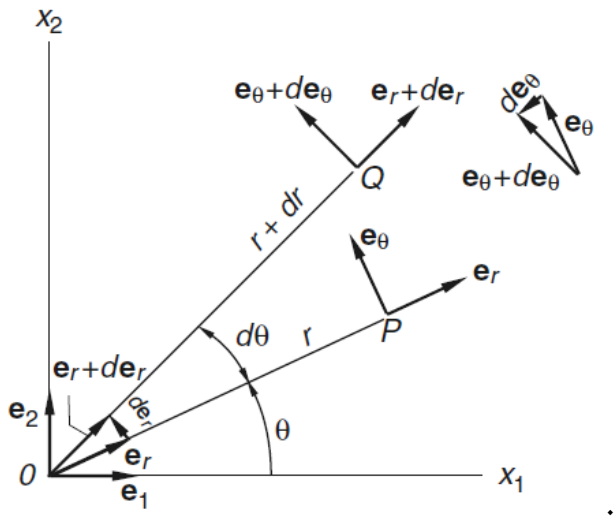


شکل (۱-۳)

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}. \tag{۱-۱۷۷}$$

بردارهای یکه $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ بر مبنای بردارهای یکه کارتزین $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2. \tag{۱-۱۷۸}$$



شکل (۱-۴)

بردارهای یکه پایه با تغییرات θ تغییر می‌کنند با توجه به معادله (۱-۱۷۸)

$$d\mathbf{e}_r = (-\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2)d\theta = d\theta\,\mathbf{e}_\theta, \quad d\mathbf{e}_\theta = (-\cos\theta\,\mathbf{e}_1 - \sin\theta\,\mathbf{e}_2)d\theta = -d\theta\,\mathbf{e}_r. \tag{۱-۱۷۹}$$

توضیح هندسی این امر به $d\mathbf{e}_r$ و $d\mathbf{e}_\theta$ در شکل (۱-۴) بر می‌گردد. توجه شود بردار $\mathbf{e}_r(P)$ به اندازه بسیار کوچک $d\theta$ دوران می‌کند تا به $\mathbf{e}_r(Q)= \mathbf{e}_r(P)+ d\mathbf{e}_r$ گردد. $d\mathbf{e}_r$ عمود است بر $\mathbf{e}_r(P)$ با مقدار $|d\mathbf{e}_r|=(1)d\theta=d\theta$ و مشابه به آن $d\mathbf{e}_\theta$ عمود است بر $\mathbf{e}_\theta(P)$ و ...

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \tag{۱-۱۸۰}$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\mathbf{e}_r. \tag{۱-۱۸۱}$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\,\mathbf{e}_\theta. \tag{۱-۱۸۲}$$

و در ادامه می‌توان مقادیر ∇f، $\nabla\mathbf{v}$، $div\ \mathbf{v}$، $curl\ \mathbf{v}$، $div\ \mathbf{T}$، $\nabla^2 f$ و $\nabla^2\mathbf{v}$ را برای مختصات قطبی محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)

۱-۳۶- مختصات استوانه‌ای (*Cylindrical Coordinates*)

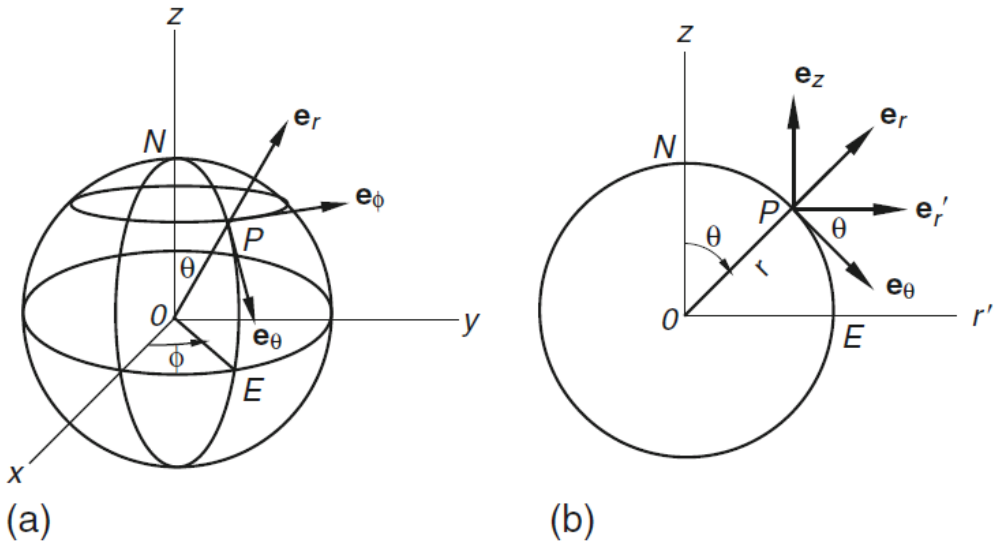
در مختصات استوانه‌ای موقعیت یک نقطه در فضا با سه مؤلفه بیان می‌گردد (r,θ,z).

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \tag{۱-۱۸۳}$$

$$d\mathbf{R} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z. \tag{۱-۱۸۴}$$

و در ادامه می‌توان مقادیر ∇f، $\nabla\mathbf{v}$، $div\ \mathbf{v}$، $curl\ \mathbf{v}$، $div\ \mathbf{T}$، $\nabla^2 f$ و $\nabla^2\mathbf{v}$ را برای مختصات استوانه‌ای محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)

۱-۳۷- مختصات کروی (*Spherical Coordinates*)



شکل (۱-۵)

با توجه به شکل (۱-۵) مختصات یک نقطه عمومی نظیر P در سیستم مختصات کروی با مؤلفه‌های (r,θ,Φ) نشان داده می‌شوند.در این شکل $\mathbf{e}_r$، $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\Phi$ به ترتیب به عنوان بردار یکه‌های راستاهای r، θ و Φ می‌باشند. بردار مکان P عبارت است از:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \tag{۱-۱۸۵}$$

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\mathbf{e}_r. \tag{۱-۱۸۶}$$

با توجه به شکل (۱-۵)

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_z + \sin\theta\mathbf{e}_r', \quad \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\mathbf{e}_r' - \sin\theta\mathbf{e}_z, \tag{۱-۱۸۷}$$

$$d\mathbf{e}_r = d\theta\mathbf{e}_\theta + \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi. \tag{۱-۱۸۸}$$

$$d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r d\theta + \cos\theta d\phi\mathbf{e}_\phi. \tag{۱-۱۸۹}$$

$$d\mathbf{e}_\phi = -\sin\theta d\phi\mathbf{e}_r - \cos\theta d\phi\mathbf{e}_\theta. \tag{۱-۱۹۰}$$

و در نهایت

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\,\mathbf{e}_\theta + r\,\sin\theta\, d\phi\,\mathbf{e}_\phi. \qquad (۱۹۱-۱)$$

و در ادامه می‌توان مقادیر ∇f، $\nabla \mathbf{v}$، $div\ \mathbf{v}$، $curl\ \mathbf{v}$، $div\ \mathbf{T}$، $\nabla^2 f$ و $\nabla^2 \mathbf{v}$ را برای مختصات کروی نیز محاسبه کرد. (بسیار مهم: اثبات گردد)