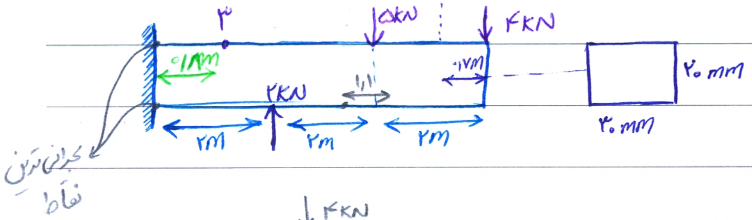
مروری بر جلسه گذشته

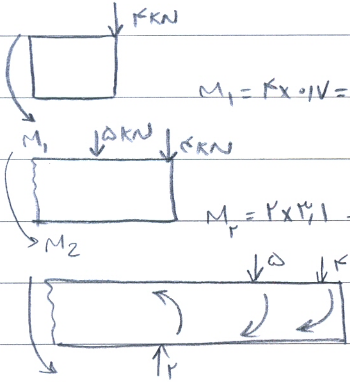
تنش ایجاد شده در تیر ناشی از بار خمشی ←

$$\delta = \frac{MC}{I}$$

مثال ← در تیر نشان داده شده در شکل مقدار تنش در نقاط 1، 2، 3 را محاسبه کنید و مقدار تنش بحرانی را بدست آورید؛



$$I = \frac{1}{12} \times 30 \times 20^3$$



$M_1 = 4 \times 0.07 = 2.8\ kN.m$ $\qquad \delta_1 = \frac{M_1 C_1}{I} = \frac{2.8 \times 10^6 (N.mm) \times 10}{\frac{1}{12} \times 30 \times 20^3}$

$M_2 = 2 \times 3.1 + 5 \times 1.1$ $\qquad \delta_2 = \frac{M_2 C_2}{I} = \frac{M_2 \times (-10)}{\frac{1}{12} \times 30 \times 20^3}$

$M_3 = 4 \times 5.2 + 5 \times 3.2 - 2 \times 1.2$ $\qquad \delta_3 = \frac{M_3 C_3}{I}$

بحرانی $\delta_{cr} = \delta_{MAX} = \frac{M_{max} C_{max}}{I}$

نقاط بحرانی = نقاطی که بیشترین تنش را داریم

در انتهای تیر $M_{max} = 4 \times 6 + 5 \times 4 - 2 \times 2$

$C_{max} = 2$

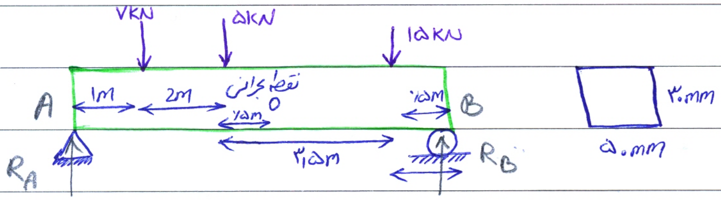
فواید نقاط بحرانی: یک سری نیرو، گشتاور روی سازه وجود دارد

هر مقطعی تحت (δ_{max}) حداکثر می‌تواند تحمل کند

که بدترین نقطه یا همان δ_{cr} را بدست آوردیم که با حتی استدلال کنیم که چه اتفاقی در زمینه‌ی شکست برای سازه رخ می‌دهد.

«مسئله‌ای با استفاده از معلومات استاتیکی»

با توجه به شکل مقابل تیری داریم که تحت اعمال 3 بار می‌باشد، برای این تیر الف) δ_{cr} و ب) δ را بیابید
نقطه میانی تیر



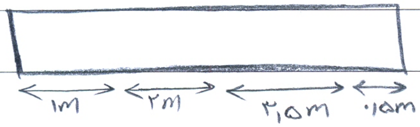
۱) ابتدا نوشتن تعادل

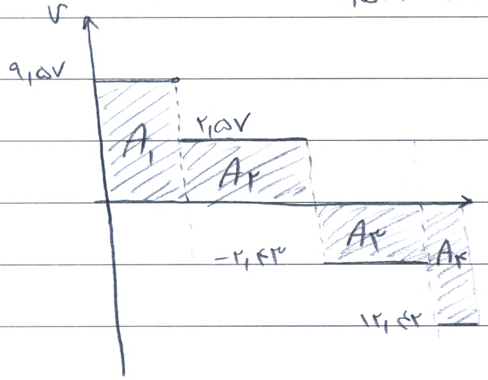
۲)

$\sum F_x = 0 \rightarrow$ ✓

$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A + R_B - ۷ - ۵ - ۱۰ = ۰ \rightarrow R_A + R_B = ۲۲ \rightarrow R_A = ۹,۵۷$

$\sum M_A = 0 \rightarrow ۷ \times ۱ + ۵ \times ۳ + ۱۰ \times ۶,۵ - R_B \times ۷ = ۰ \rightarrow R_B = ۱۲,۴۲$



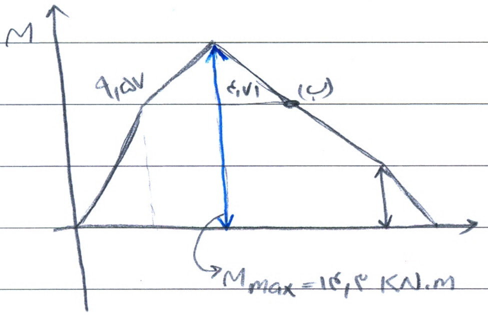


$A_1 = ۹,۵۷ \times ۱ = ۹,۵۷$ KN.m

$A_۲ = ۲,۵۷ \times ۲ = ۴,۷۱$ KN.m

$A_۳ = ۲,۴۳ \times ۳,۵ = -۸,۵$ KN.m

$A_۴ = ۱۲,۴۲ \times ۰,۵ = -۶,۲۱$



$M_{max} = ۱۴,۳$ KN.m

$|A_1 + A_۲| = |A_۳ + A_۴|$

۱۴,۳ ≃ ۱۴,۲۸ ≃ ۱۴,۷

اوج نمودار { شیب‌های + صعودی / شیب‌های - نزولی

man

تیر اگر بخواهد شکند در آنجایی که 5KN اعمال می‌شود مشکند با توجه به نمودار M (جایی که تیر بیشترین ممان را دچار میشود.)

$$\delta_{cr} = \frac{M_{max} \times C}{I} = \frac{14/3 \times 10^6 (N.mm) \times 15}{\frac{1}{12} \times 50 \times 30^3} \sim 1900 \; Mpa$$

δ_{ult} فولاد $= 700 \; Mpa$

پس قطعاً می‌شکند $\delta_{ult} < \delta_{cr}$

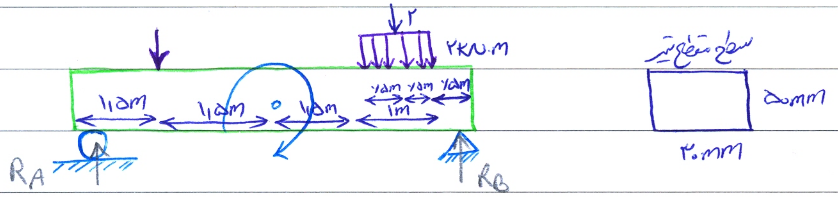
ب)

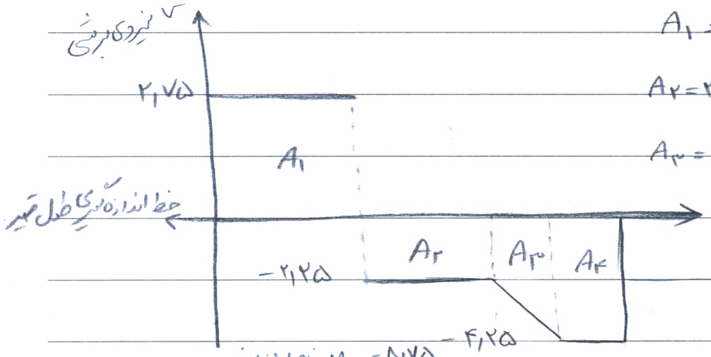
$\delta_{mid \; section} = ?$

$$\delta_{mid \; section} = \frac{M_{m.s} \times C}{I}$$

یا با استفاده از تالس در مثلث

مثال ۵: با توجه به تیر شکل مقابل که تحت بارگذاری گسترده و نقطه‌ایی و گشتاور اعمالی می‌باشد. در تیر مقابل δ_{cr} را بیابید:





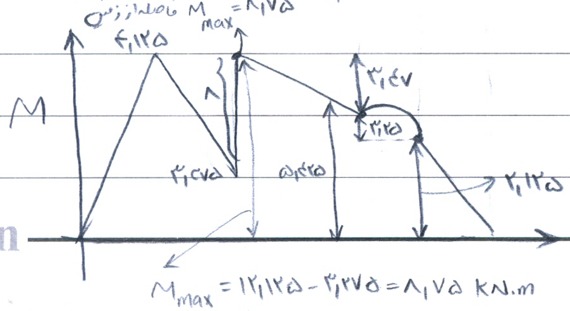
$A_1 = 2/75 \times 1/5 = 4/125$

$A_2 = 2/25 \times 3 = -6/75$

$A_3 = \frac{2/25 + 4/25}{2} \times 1 = -3/25$

$A_4 = 5 \times 4/25 = -2/125$

در نمودار خود بار گسترده با بینهایت می‌شود بار معادل به اندازه مختصات بار توزیعی که پایین می‌آییم.



$M_{max} = 12/125 - 3/375 = 8/75 \; KN.m$

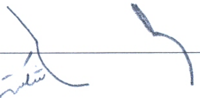
$|A_2 + A_3 + A_4| = |-12/125|$

$A_1 = 4/125$

+ و - بالانس نیست زمانی بالانس بود که عامل گشتاور اعمالی نداشتیم

$|A_1 + 8| = |A_2 + A_3 + A_4|$

گشتاور خارجی اعمالی



{ تغییرات گشتاور باید تا حدودی پیوسته باشد } تقعر نمودار در حالت 2 زیاد هم نیست

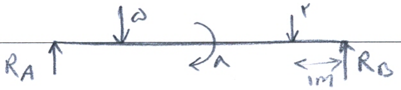
در استاتیک { نیروی نرمال، نیروی برشی، گشتاور خمشی } تحت برش ایجاد می‌شود

می‌توانیم به جای بار گسترده در مقصود جایگزین سازی کنیم

نیروی متمرکز معادل جانشین بار توزیعی گسترده می‌شود

نیروی متمرکز معادل ← اندازه $= 2 \times 1 = 2KN$

محل اثر نیروی متمرکز معادل ← در مرکز ثقل



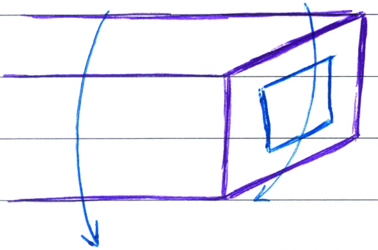
$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_B + R_A - 5 - 2 = 0 \longrightarrow R_A + R_B = 7$$

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow 5 \times 1.5 + 8 + 2 \times 5 - R_B \times 6 = 0 \longrightarrow R_B = 4.25\,KN$$

$$R_A = 2.75\,KN$$

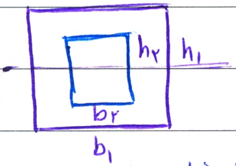
$$\sigma_{cr} = \frac{M_{max} \times C}{I} = \frac{8.75 \times 10^6 (N.mm) \times 25}{\frac{1}{12} \times 40 \times 50^3}$$

نکته: تا این جا تیر را توپر فرض کرده‌ایم. تیر می‌تواند توخالی هم باشد



$$S = \frac{MC}{I}$$

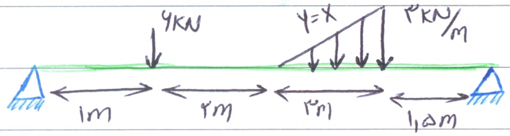
I مقطع توخالی با I مقطع توپر متفاوت است

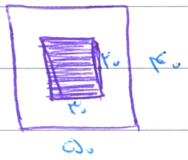


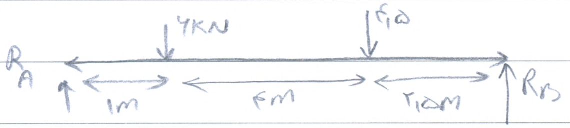
همان اینرسی $I_{(\text{hollow})} = I_{(\text{outer})} - I_{(\text{inner})}$

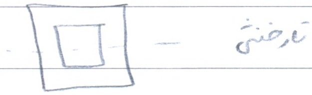
مقاطع مستطیلی شکل توخالی $= \frac{1}{12} b_1 h_1^3 - \frac{1}{12} b_2 h_2^3$

مثال: با توجه به شکل مقابل، δ_{Cr} را بدست آورید:





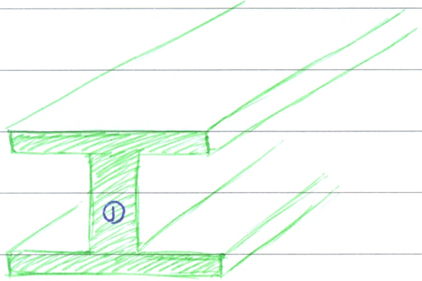


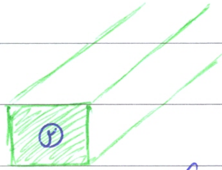


$$\Sigma F_y=0 \longrightarrow R_A+R_B-6-4.5=0$$

$$\Sigma M_A=0 \longrightarrow -6\times1-4.5\times5+R_B\times7.5=0 \longrightarrow R_B=3.8 \longrightarrow R_A=6.7$$

«جلسه دهم»



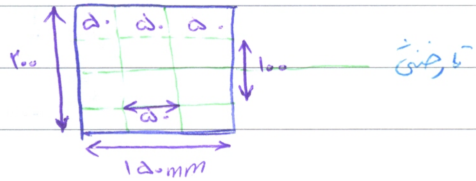


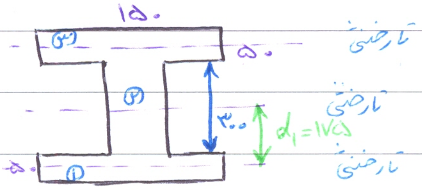
چرا از ① به جای ② در ساختمان سازی استفاده می‌کنیم؟

$$\downarrow \delta = \frac{MC}{I\uparrow}$$

M و C که در دست ماست، بین I را تنها می‌توان تغییر داد.

اثبات: به شکل I تبدیل کردیم





$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}\times150\times200^3$$

$I_1 = \frac{1}{12} b h^3 +$ ترم انتقال (طبق قضیه محورهای موازی)

$I_1 = \frac{1}{2} \times b_1 h_1^3 + \underbrace{A_1 d_1^2}_{\text{ترم انتقال}} = \frac{1}{12} \times 150 \times 50^3 + (150 \times 50) \times 175^2$

$I_2 = \frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 d_2^2$ (صفر) $= \frac{1}{12} \times 50 \times 300^3 + 0$

تارخنثی مستطیل (۲) و تارخنثی مستطیل اصلی یکسان است به همین خاطر $d_2 = 0$ است

$I_3 = I_1 = \frac{1}{12} b_3 h_3^3 = \frac{1}{12} \times 150 \times 50^3 + (150 \times 50) \times 175^2$

$I_{کل} = I_1 + I_2 + I_3$

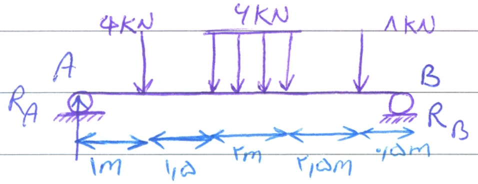
$I_{I} \gg I_{\square} \longrightarrow \sigma_{I} \ll \sigma_{\square}$

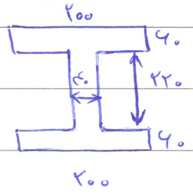
$\sigma = \frac{MC}{I}$ ← ممان اینرسی مقطع حول تارخنثی کل مجموعه

هر چقدر فاصله نیرو تا تارخنثی بیشتر شود I را زیاد می‌توانیم بکنیم پس در حالت I بهتر □ است

چون در این حالت است که فاصله نیروها تا تارخنثی بیشتر می‌شود.

مثال: در تیر بارگذاری شده مطابق شکل با مقطع I شکل مقدار تنش بحرانی را محاسبه کنید:





مقطع تیر

حل: $\sum F_y = 0 \longrightarrow R_A - 4 - 12 - 8 + R_B = 0$

$\sum M_A = 0 \longrightarrow 4 \times 1 + 12 \times 4.5 + 8 \times 7 - R_B \times 7.5 = 0$

$R_A = 10.4$ KN

$R_B = 13.6$ KN

$\frac{6.4}{x} = \frac{5.6}{2 - x}$ — تناسب در مثلث A_3 و A_4 برای به دست آوردن x

$x = 1.06$ m

$A_1 = ۱۰٫۴ \times ۱ = ۱۰٫۴$

$A_2 = ۶٫۴ \times ۱٫۵ = ۹٫۶$

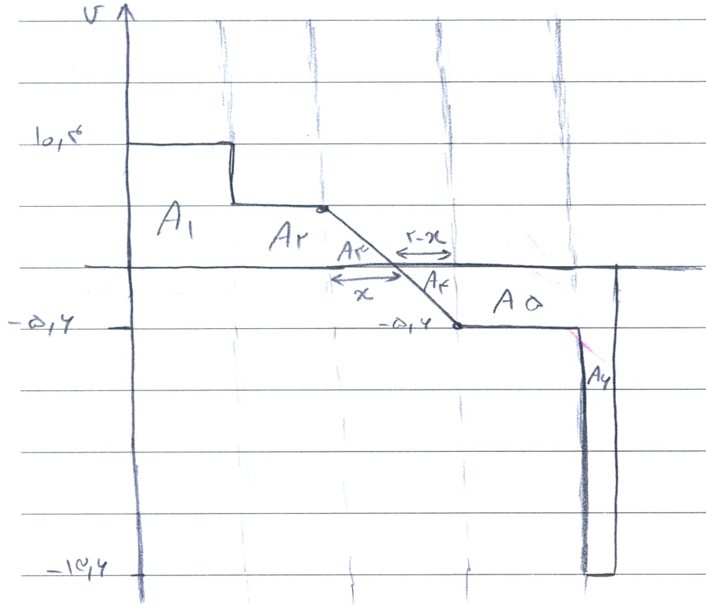
$A_3 = \dfrac{۶٫۴ \times ۱٫۰۶}{۲} = ۳٫۳۹ \simeq ۳٫۴$

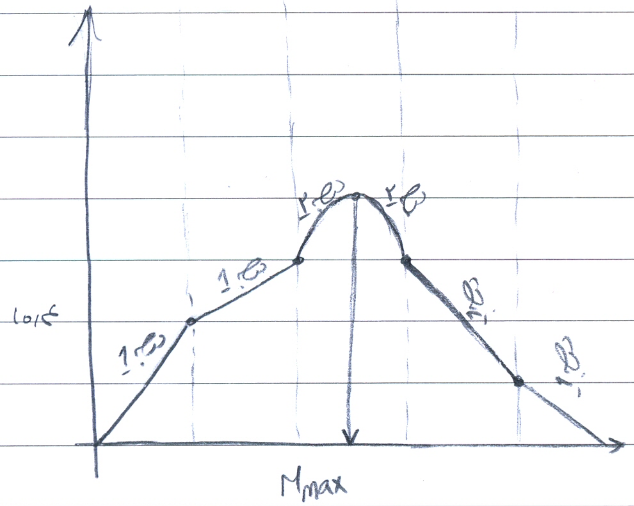
$A_4 = \dfrac{۵٫۶ \times ۰٫۹۴}{۲} = ۲٫۶۳$

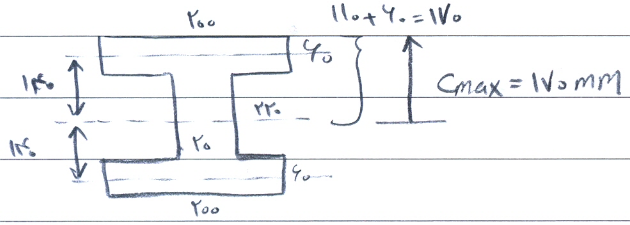
$A_5 = ۵٫۶ \times ۲٫۵ = ۱۴$

$A_6 = ۱۳٫۶ \times ۰٫۵ = ۶٫۸$

$M_{MAX} = |A_1 + A_2 + A_3| = ۲۳٫۴ \text{ KN·m}$







$$I_1 = \frac{1}{12} \times ۲۰۰ \times ۶۰^{۳} + (۲۰۰ \times ۶۰) \times ۱۴۰^{۲}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \times ۴۰ \times ۲۲۰^{۳}$$

$$I_3 = \frac{1}{12} \times ۲۰۰ \times ۶۰^{۳} + (۲۰۰ \times ۶۰) \times ۱۴۰^{۲}$$

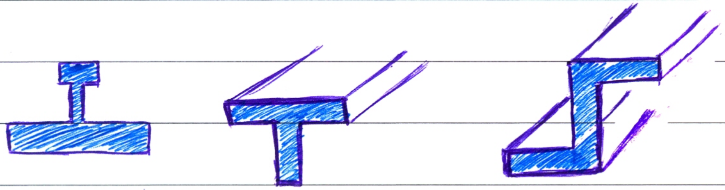
$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + I_3$$

$I_{\text{کل}}$ تارخنثی اصلی است

تارخنثی اصلی جایگاهش در مرکز ثقل است.

$$۲۶,۴ \times ۱۰^{۶} \ (N.mm)$$

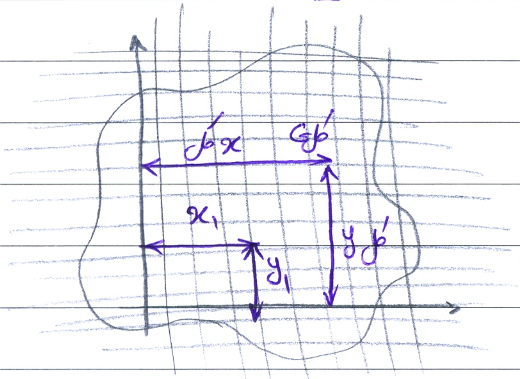
$$\sigma_{cr} = \frac{\vec{M}_{max} C_{max}}{I_{\text{کل}}} \quad C_{max} \rightarrow ۱۴۰$$



خمش مقاطع نامتقارن

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

محل تارخنثی یا مرکز ثقل



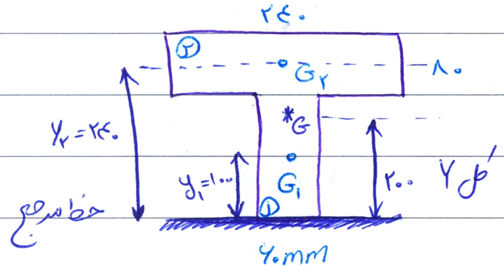
$$\Sigma x_i A_i = X_{\text{کل}} A_{\text{کل}} \qquad X_{\text{کل}} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + \dots}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\Sigma y_i A_i = Y_{\text{کل}} A_{\text{کل}} \qquad Y_{\text{کل}} = \frac{Y_1A_1 + Y_2A_2 + Y_3A_3 + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots}$$

مثال:

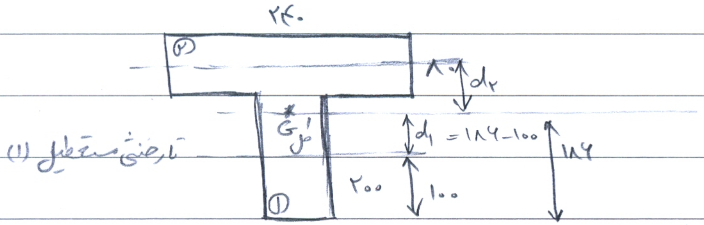
در شکل مقابل ابتدا باید مختصات دقیق تار خنثی اصلی را بدست آوریم

سپس I ها را بدست آوریم



$$X_{کل} = 0$$

$$Y_{کل} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2} = \frac{100(40\times200) + 240(240\times80)}{(40\times200)+(240\times80)} = 186$$

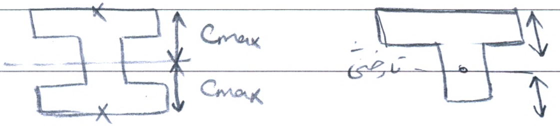


تار خنثی مقطع T شکل

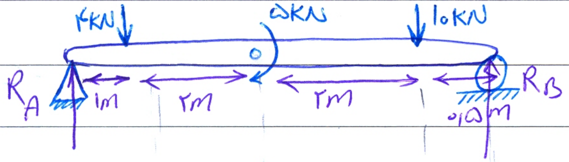
$$I_1 = \frac{1}{12}\times 40\times 200^3 + (40\times200)\times(186-100)^2$$

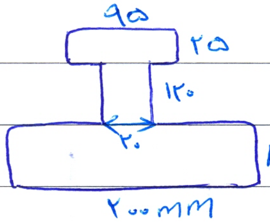
$$I_2 = \frac{1}{12}\times 240\times 80^3 + (240\times80)\times(240-186)^2$$

$$I_{کل} = I_1 + I_2$$



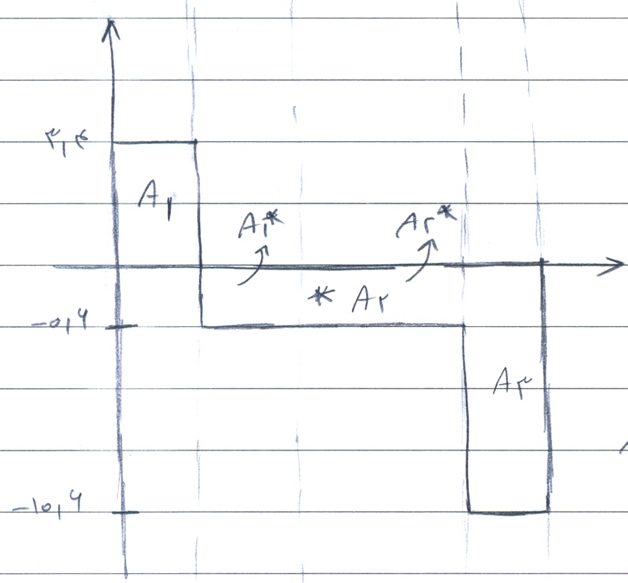
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\,C_{max}}{I}$$





مثال:

$\delta_{cr} = ?$



$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_A - 4 - 10 + R_B = 0$

$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow 4 \times 1 + 5 + 10 \times 5.5 - R_B \times 6 = 0$

$\rightarrow R_A = 3.4\ kN \qquad R_B = 10.6\ kN$

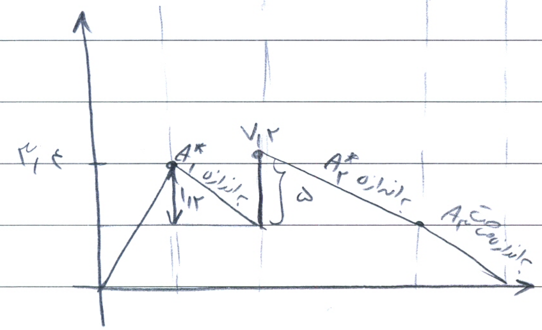
$A_1 = 3.4 \times 1 = 3.4$

$A_2 = 0.6 \times 4.5 = -2.7$

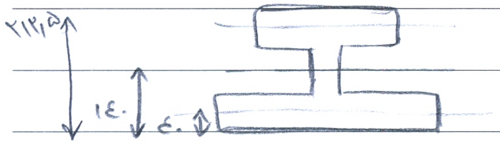
$A_3 = 10.6 \times 0.5 = -5.7$

$A^* = 0.6 \times 2 = 1.2$

$|3.4 + 5| = |-2.7 - 5.7|$



$M_{max} = 7.2\ kN.m$



$\bar{y}' = \dfrac{40 \times (200 \times 80) + 140 \times (30 \times 120) + 212.5 \times (95 \times 25)}{(200 \times 80) + (30 \times 120) + (95 \times 25)} = 72\ mm$

$I_1 = \frac{1}{12} \times 200 \times 80^3 + (200 \times 80)(72 - 40)^2$

$I_2 = \frac{1}{12} \times 30 \times 120^3 + (30 \times 120)(140 - 72)^2$

$I_3 = \frac{1}{12} \times 95 \times 25^3 + (95 \times 25) \times (212.5 - 72)^2$

$\delta_{cr} = \dfrac{C_{max} M_{max}}{I}$, $I \rightarrow I_1 + I_2 + I_3$

$\delta_{cr} = \dfrac{\overbrace{(225 - 72)}^{C_{max}} \times 7.2 \times 10^6}{I_{tot}}$