بسمه تعالی

دانشکده ریاضی

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

شماره آزمون:

وقت : ۱۲۰ دقیقه

تاریخ : ۹۸/۱۰/۲۲

نام و نام‌خانوادگی: math-teacher.blog.ir

شماره دانشجویی:

دانشکده:

رشته تحصیلی:

استاد درس:

سوال۱	سوال۲	سوال۳	سوال۴	سوال۵	سوال۶	سوال۷	جمع

توضیحات:

الف) به هیچ وجه برگه‌ها از محل دوخت جداً نشود.

ب) از نوشتن هرگونه مطلب اضافی بر روی برگه‌های پاسخ نامه جداً خودداری نمایید.

ج) پاسخ هر سوال بر روی برگه مربوط به همان سوال داده شود. در غیر این صورت از تصحیح برگه خودداری می‌شود.

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۱. انتگرال های زیر را محاسبه کنید: (۳۰ نمره)

الف) $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$ ب) $\int \frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

حل.

(الف) سؤال خواجه نصیر دی ۹۲

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+2t-1+t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2+2t} = \int \frac{dt}{t^2+t} \overset{\text{تجزیه کسر}}{=} \int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \ln t - \ln(1+t) = \boxed{\ln\left|\frac{t}{1+t}\right| \quad , \quad t = tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۸

(ب) تغییر متغیر $\begin{cases} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{cases} \longrightarrow \int \frac{\sin^{-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t \cdot \sin^{-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

جزء به جزء
$$\begin{cases} \sin^{-1}(t) = u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = du \\ \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\sqrt{1-t^2} = v \end{cases} \xrightarrow{uv-\int v\,du}$$

$$= -\sqrt{1-t^2}\sin^{-1}t + \underbrace{\int \frac{dt}{1-t^2}}_{\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|} = \boxed{-\sqrt{1-t^2}\sin^{-1}t + \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|} \quad \boxed{t=\sqrt{x}}$$

روش دیگر: تغییر متغیر $u = \sin^{-1}(\sqrt{x})$ و تبدیل به $\int 2u\sin(u)$ و حل با جزء به جزء

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۸

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

math-teacher.blog.ir

مسئله ۲. طول قوس منحنی $y = \int_0^x \sqrt{\cosh 2t}\,dt$ را در بازهٔ $[0,1]$ به دست آورید.(۱۰ نمره)

حل.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y = \int_0^x \sqrt{\cosh 2t}\,dt \xrightarrow{\text{قضیه اول حساب}} y' = \sqrt{\cosh 2x} \longrightarrow y'^2 = \cosh 2x$$

$$\longrightarrow l = \int_0^1 \sqrt{1+\cosh 2x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2\cosh^2 x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{2}\cdot\cosh x\,dx$$

$$\begin{cases} \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{2}\sinh x \Big|_0^1$$

$$= \sqrt{2}(\sinh 1 - \cancel{\sinh 0})$$

$$= \boxed{\sqrt{2}\sinh(1)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۸

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱ ، ریاضی۲
معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی
محاسبات عددی

در این قسمت چیزی ننویسید: math-teacher.blog.ir

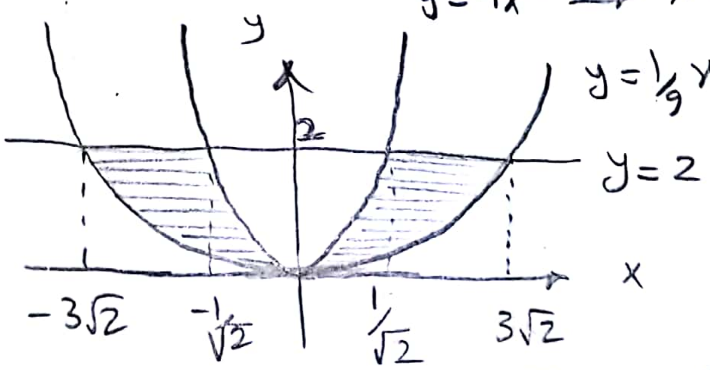
شماره آزمون:

مسئله ۳. مساحت ناحیه واقع بین منحنی های $y = \frac{۱}{۹}x^۲$ و $y = ۴x^۲$ و خط $y = ۲$ را بیابید.(۱۵ نمره)

$y = 4x^2 \longrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$

حل.

$y = \frac{1}{9}x^2 \longrightarrow x = 3\sqrt{y}$



این تیپ سوال به راحتی در درس ریاضی ۲ قابل حل است.

اما در ریاضی ۱ نیز قابل کشف است.

با توجه به زوج بودن تابع در بازه می‌توانیم یک قسمت ناحیه را حساب کنیم و ۲ برابر کنیم.

$$A = 2\int_{y=0}^{2} (f(y) - g(y))\, dy$$

$$= 2\int_{y=0}^{2} \left(3\sqrt{y} - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) dy = 2 \times \frac{5}{2} \int_{y=0}^{2} \sqrt{y}\, dy$$

$$= 5\left(\frac{2}{3} y\sqrt{y}\right)\Big|_{y=0}^{2}$$

$$= \frac{10}{3}\left(2\sqrt{2} - 0\right) = \boxed{\frac{20}{3}\sqrt{2}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۸

math-teacher.blog.ir

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۴. حد مجموع زیر را در صورت وجود حساب کنید.(۱۵ نمره)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}\sin\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{n}{(n+2)^2}\sin\left(\frac{n}{n+2}\right)+\cdots+\frac{n}{4n^2}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

حل.

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)^2}\sin\left(\frac{n}{n+i}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}(1+\frac{i}{n})^2}\sin\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{i}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\sin\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\sin\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$$

تغییر متغیر
$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}=t\\[2mm] -\dfrac{1}{(1+x)^2}\,dx=dt\end{cases}\longrightarrow\int_1^{1/2}-\sin(t)\,dt=\cos t\,\Big|_1^{1/2}$$

$$=\boxed{\cos(\tfrac{1}{2})-\cos(1)}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - دی ۹۸

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:

math-teacher.blog.ir

شماره آزمون:

مسئله ۵. همگرایی یا واگرایی $\int_e^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(\ln x)^2}dx$ را بررسی کنید.(۱۰ نمره)

حل.

انتگرال داده شده، ناسره نوع اول است.

$$\int_e^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(\ln x)}dx < \int_e^{\infty} \frac{1}{x(x)^2}dx = \int_e^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$$

و با مقایسه با $\int \frac{1}{x^p}$ در ناسره نوع اول، با توجه به اینکه $P=3>1$

$\int_e^{\infty} \frac{1}{x^3}$ همگراست و طبق آزمون مقایسه $\int_e^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x(\ln x)}$ نیز همگراست.

ابراهیم شاه ابراهیمی - دی ۹۸

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱ ، ریاضی۲
معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی
محاسبات عددی

math-teacher.blog.ir

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۶. بر حسب مقادیر مختلف p در همگرایی یا واگرایی سری زیر بحث کنید.(۱۵ نمره)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{3n^p+1}-\sqrt{3n^p-3}\right)$$

حل.

$$a_n=\sqrt{3n^P+1}-\sqrt{3n^P-3}\quad \underline{\times\text{مزدوج}}\quad \times\frac{\sqrt{3n^P+1}+\sqrt{3n^P-3}}{\sqrt{3n^P+1}+\sqrt{3n^P-3}}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{\cancel{3n^P}+1-\cancel{3n^P}+3}{\sqrt{3n^P+1}+\sqrt{3n^P-3}}=\frac{4}{\sqrt{3n^P+1}+\sqrt{3n^P-3}}$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{3n^P+1}+\sqrt{3n^P-3}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{3n^P}+\sqrt{3n^P}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{3n^P}}$$

$$=\frac{4}{2\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{P/2}}\xrightarrow[P>1\ \text{همگرا}]{\Sigma\frac{1}{x^P}}P/2>1\longrightarrow\boxed{P>2}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - دی ۹۸

math-teacher.blog.ir

در این قسمت چیزی ننویسید:
math-teacher.blog.ir
شماره آزمون:

مسئله ۷. همگرایی یا واگرایی سری را بررسی کنید:(۱۵ نمره)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{n^n}$$

حل.

(خواجه‌نصیر ــ دی ۹۷

$$\xrightarrow{\text{آزمون نسبت}} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{e^{\frac{n+1}{2}}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^{n/2}\cdot n!}{n^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{e^{n/2}}\cdot e^{1/2}\cdot \cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\cdot n^n}{\cancel{e^{n/2}}\cdot \cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \right| = e^{1/2}\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\text{مبهم } 1^\infty} = e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-1} = \boxed{e^{-\frac{1}{2}} < 1}$$

(یادتونه سر کلاس چقدر 1^∞ تاکید کردم :)

همگراست

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = A \xrightarrow{\text{Ln گرفتن}} \ln A = \lim_{n\to\infty} n\cdot \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n+1)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{-\frac{1}{n^2}} = -1 \longrightarrow \boxed{A = e^{-1}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی ــ دی ۹۸

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
ریاضی۱ ، ریاضی۲
معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی
محاسبات عددی

math-teacher.blog.ir