math-teacher.blog.ir

① یافتن حدود ریشه
۱) پیوستگی در بازه (a,b)
۲) $f(a)f(b)<0$

....

② روش حل

۱) دو بخشی (تنصیف)

$$\boxed{x_0=\frac{a+b}{2}}$$

n	$\bar{a}$	b	x_n	$f(x_n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

۲) نیوتن رافسون

$\boxed{x_0 = \text{وسط بازه}}$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

۳) وتری (سکانت)

x_0 و x_1 را می دهند.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

۴) نابجایی

$$x_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

n	a	b	x_n
⋮	⋮	⋮	⋮

۵) تکرار ساده (نقطه ثابت)

$$x_{n+1}=g(x_n)$$

انتخاب $g(x)$ مناسب
۱) اگر $a<x<b \leftarrow a<g(x)<b$
۲) $|g'(X)|<1$

....

③ معیار توقف ⟵ میزان نزدیکی به ریشه

$$|f(x_n)|<\varepsilon$$
$$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$$

۹,۵۵

مثال ۱. تقریبی از ریشه معادله $f(x)=3x-e^{-x}=0$ را که در فاصله $(0/25,0/27)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم: $|f(x_n)|<0/001$

پاسخ:

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۲۶	-	۰/۰۰۸۹
۲	۰/۲۵	۰/۲۶	۰/۲۵۵	+	–۰/۰۰۹۹
۳	۰/۲۵۵	۰/۲۶	۰/۲۵۷۵	+	–۰/۰۰۰۵

چون $|f(x_3)|=0/0005<0/001$ بنابراین x_3 را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر می گیریم. لذا هرگاه α ریشه مورد نظر باشد،با سه رقم اعشار قرار می دهیم:

$$\alpha\simeq0/258$$

نکته : چون در مثال ۱ تقریب را با سه رقم اعشار خواسته ایم، محاسبات میانی را با چهار رقم اعشار انجام داده و در نهایت x_3 را تا سه رقم اعشار گرد نموده به عنوان تقریب α قرار داده ایم.

مثال۲. تقریبی از ریشه معادله $x^3+x-1=0$ را که در فاصله $(0,1)$ قرار دارد، به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<10^{-2}$ تقریب را با $4D$ به دست آورید.

پاسخ:

n	a	b	$x_n=\frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰/۵	+	–۰/۳۷۵
۲	۰/۵	۱	۰/۷۵	-	۰/۱۷۱۸۸
۳	۰/۵	۰/۷۵	۰/۶۲۵	+	–۰/۱۳۰۸۶
۴	۰/۶۲۵	۰/۷۵	۰/۶۸۷۵۰	-	۰/۰۱۲۴۵
۵	۰/۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۶۵۶۲۵	+	–۰/۰۶۱۱۳
۶	۰/۶۵۶۲۵	۰/۶۸۷۵	۰/۶۷۱۸۸	+	–۰/۰۲۴۸۳
۷	۰/۶۷۱۸۸	۰/۶۸۷۵	۰/۶۷۹۶۹	+	–۰/۰۰۶۳۱

چون $|f(x_n)|=0/00631<10^{-2}$ لذا تقریب ریشه با $4D$عبارت است از:

$$\alpha\simeq0/6797$$

تمرین ۱. تقریبی از ریشه معادله $x^{۲}-(۱-x)^{۵}=۰$ را که در فاصله $(۰,۱)$ قرار دارد با $۴D$ اعشار به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<۱۰^{-۲}$

مثال ۳. ریشه معادله $f(x)=x-\cos x=۰$ راکه در فاصله $[۰,۱]$ قرار دارد به روش نیوتن با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n-x_{n-1}|<۱۰^{-۴}$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\cos x_n}{1+\sin x_n}$$

پاسخ:داریم $f(x)=x-\cos x$ و $f'(x)=۱+\sin x$.

با قرار دادن $x_۰=۰/۵$ داریم:

$$n=0 \rightarrow x_1=x_0-\frac{x_0-\cos x_0}{1+\sin x_0}=0/5-\frac{0/5-\cos 0/5}{1+\sin 0/5}$$

$x_۱=۰/۷۵۵۲۲$

$x_۲=۰/۷۳۹۱۴$

$x_۳=۰/۷۳۹۰۹$

چون $|x_۳-x_۲|=۵\times۱۰^{-۵}<۱۰^{-۴}$ لذا $x_۳$ تقریب ریشه موردنظر است و با $۴D$این تقریب عبارتست از:

$$\alpha=۰/۷۳۹۱$$

توجـه: هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند، مد(حالت)رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۴. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x)=\sin x-\frac{x}{۲}$را که در فاصله $[۱/۵,۲]$قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)|<۱۰^{-۳}$ قرار دهید $x_۰=۱/۷۵$

پاسخ:داریم $f(x)=\sin x-\frac{x}{۳}$ و $f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\sin x_n-\frac{x}{۲}}{\cos x_n-۰/۵}$$

$x_۰=۱/۷۵$

$x_۱=۱/۹۱۰۶۹$

$x_۲=۱/۸۹۵۶۳$

$f(x_۲)=-۰/۰۰۰۱۱$

چون $|f(x_n)|<۱۰^{-۳}$لذا تقریبی از ریشه مورد نظر است وبا $۴D$ این تقریب عبارتست از:

$$\alpha=۱/۸۹۵۶$$

تمرین ۲. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۳e^x - \frac{۱}{x} = ۰$ را که در فاصله $(۰/۲,۰/۳)$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید. قرار دهید $x_۰ = ۰/۲۵$.

مثال ۵. به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی معادله $f(x) = \sin x - \frac{x}{۲} = ۰$ را که در فاصله $(-۲,-۱)$ قرار دارد با $۴D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < ۱۰^{-۲}$.

پاسخ: برای $x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$، جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	f(a)	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	−۲	−۱	−۱/۷۹۰۱۳	۰/۰۹۰۷۰	−۰/۰۸۰۹۸	-
۲	−۲	−۱/۷۹۰۱۳	−۱/۸۸۹۱۲	۰/۰۹۰۷۰	۰/۰۰۵۲۰	+

چـــون $|f(x_n)| = ۰/۰۰۵۲ < ۱۰^{-۲}$ پس $x_۲$ تقریب مورد نظر از ریشه است بنابراین با $۴D$ این تقریب عبارت است از:

$$\alpha = -۱/۸۸۹۱$$

تمرین ۳. یک ریشه معادله $۲x^۳ + x^۲ - ۲۰x + ۱۲ = ۰$ در فاصله $[۰,۱]$ قرار دارد با به کاربردن روش نابجایی پنجمین تقریب ریشه را به دست آورید.

مثال ۶. به روش وتری تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^۳ - ۰/۲x^۲ - ۰/۲x - ۱/۲ = ۰$ را که در فاصله $(۱,۲)$ قرار دارد با تقریب ۰/۰۰۲ و با $۳D$ به دست آورید.(قرار دهید $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۱/۵$)

A ← B ←

پاسخ: با استفاده از رابطه $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ و $x_۰ = ۱$ و $x_۱ = ۱/۵$ خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{n=1} x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{\underbrace{f(x_1)}_{A} - \underbrace{f(x_0)}_{B}}$$

نوشتن تابع با A

B ~ ~

$x_۲ = ۱/۱۴۸۱$

$x_۳ = ۱/۱۸۷۵ \quad f(x_۳) = -۰/۰۴۵۰$

$x_۴ = ۱/۲۰۰۶ \quad f(x_۴) = ۰/۰۰۲۳$

$x_۵ = ۱/۲۰۰۰ \quad f(x_۵) = ۰$

بنابراین :

$$\alpha = ۱/۲۰۰$$

تمرین ۴. برای به دست آوردن تقریبی از ریشه تابع $f(x)=e^x+10x-10$ با $x_0=0$ و $x_1=1$ با ۳ رقم اعشار از روش وتری استفاده نمایید.

مثال ۷ خواجه نصیر دی ۹۵. ریشه معادله $x^3-x-1=0$ را به روش تکرار ساده(نقطه ثابت)بیابید.

math-teacher.blog.ir

پاسخ:

ریشه معادله در بازه است.

$$f(1).f(2)<0$$

$$x^3-x-1=0$$

$$x=\sqrt[3]{x+1}\rightarrow g(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

بررسی شرط همگرایی:

۱- بازای هر $1<x<2$ واضح است که $1<g(x)<2$

۲- $g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}<1$

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+1}$$

$$\xrightarrow{x_0=1/5}x_1=\sqrt[3]{1/5+1}=1/35721$$

$$\xrightarrow{x_1=1/35721}x_2=1/33086$$

$$\xrightarrow{x_2=1/33086}x_3=1/32588$$

$$\xrightarrow{x_3=1/32588}x_4=1/32494$$

$$\xrightarrow{x_4=1/32494}x_5=1/32476$$

$$\xrightarrow{x_5=1/32476}x_6=1/32473$$

$$\xrightarrow{x_6=1/32473}x_7=1/32472\rightarrow x=1/3247$$

تمرین ۵ خواجه نصیر خرداد ۹۵

الف)بااستفاده از رسم نمودار تعداد و محل تقریبی ریشه های معادله $2\operatorname{tg}x+x-1=0$ را در فاصله $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ تعیین کنید.

ب)معادله ی تکراری مناسبی که کوچکترین ریشه ی مثبت معادله را در فاصله ی فوق با دقت 10^{-2} تعیین کنید($x_0=0/5$) را بیابید.

تمارین فصل

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) ریشه معادله $\ln(x-1)+\cos(x-1)=0$ را با روش نیوتن و با دقت 10^{-3} بیابید.

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) در حل معادله $x^3+2x^2-1=0$ ، $g(x)$ و (a,b) را چنان بیابید که روش تکرار ساده به یک جواب مثبت معادله همگرا شود.

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) مقادیر جدول زیر از تابع $f(x)$ استخراج شده است.

x_i	0	1	3	6	10
$f(x_i)$	1	0	10	145	801

الف) $f(x)$ را بیابید.

ب) مقادیر $f(-2)$ و $f(20)$ را محاسبه کنید.

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) حاصل انتگرال $I=\int_0^1 \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x}+1}$ را به کمک هر یک از روش های زیر بیابید.

الف) ذوزنقه با $n=4$ ۲) گاوس دو نقطه ای

ب) سیمپسون با $h=0.25$

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید، با طول گام $h=0.25$ مقدار $y(1)$ را در هر یک از روش های زیر بیابید:

$$\begin{cases} y' = e^{x^2}(x-y) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

الف) اویلر ب) رانگ کوتا مرتبه ۲

خواجه نصیر – خرداد ۹۶) در دستگاه معادلات خطی زیر:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

الف) طرح تکراری مناسب برای یافتن مقادیر مجهول را برای هر یک از روش های «ژاکوبی» و «گوس سایدل» بنویسید.

ب) جواب دستگاه را از روش «گوس سایدل» در تکرار دوم بیابید.

$x^0=[0,0,0,0]^t$

فرض کنید تابع نامعلوم $f(x)$ حاوی چند ورودی و خروجی مشخص باشد $(x_i,f(x_i))$ در این صورت درون یابی(برون یابی) عبارتست از یافتن تابع $p(x)$ که از نقاط داده شده با کمترین خطا عبور می کند.

math-teacher.blog.ir

درون یابـی (برون یابی)

۱)لاگرانژ

$$L_i=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}$$

$$p(x)=L_0f_0+L_1f_1+\dots+L_nf_n$$

۲)تفاضلات تقسیم شده نیوتن

$$p(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n]$$

۳)نیوتن پیشرو

نقطه موردنظردر ابتدای جدول

$$p(x)=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\dots$$
$$+\frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$\boxed{x-x_0=sh}$$

۴) نیوتن پسرو

نقطه موردنظردر انتهای جدول

$$p(x)=f_n\pm s\nabla f_n+\frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\dots$$
$$+\frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\Delta^n f_n$$

$$\boxed{x-x_n=sh}$$

مثال ۱. چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۲	-۱	۰	۷

پاسخ:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_1)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{x^3-x}{6}$$

چند جمله ای درونیاب $p(x)$ عبارت است از:

$$p(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+L_2(x)f_2+L_3(x)f_3$$

با توجه به جدول داریم:

$$p(x)=-2L_0(x)-1L_1(x)+0L_2(x)+7L_3(x)$$

$$=\frac{-2(x^3-3x^2+2x)}{-6}-\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}+0+7\frac{x^3-x}{6}$$

$$p(x)=x^3-1$$

تمرین ۱. چند جمله ای لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

مثال ۲. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست اورید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		-۷		
۱	-۶		۴	
		۵		۱
۳	۴		۱۰	
		۵۵		
۶	۱۶۹			

$$p(x) = f_۰ + (x - x_۰)f[x_۰, x_۱] + (x - x_۰)(x - x_۱)f[x_۰, x_۱, x_۲]$$
$$+(x - x_۰)(x - x_۱)(x - x_۲)f[x_۰, x_۱, x_۲, x_۳]$$

تفاضلات تقسیم شده موردنیاز در رابطه فوق، اعداد بالایی جدول تفاضلات هستند که زیر انها خط کشیده شده است، لذا خواهیم داشت:

$$p(x) = ۱ - ۷x + ۴x(x - ۱) + x(x - ۱)(x - ۳)$$
$$p(x) = x^۳ - ۸x + ۱$$

....

تمرین۲خواجه نصیر دی ۹۵. مقادیر جدول زیر از تابع $f(x)$ استخراج شده است.$f(x)$را بیابید و سپس $f(۴)$را محاسبه کنید.

x	۰	۱	۳	۶	۱۰
f(x)	-۱	-۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

....

مثال ۳. به کمک فرمول پیشرو نیوتن تقریب از $f(۱/۱)$ برای تابع جدولی زیر به دست آید.

x	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰/۷۶۵۱۹۷۷	۰/۶۲۰۰۸۶۰	۰/۴۵۵۴۰۲۲	۰/۲۸۱۸۱۸۶	۰/۱۱۰۳۶۳۲

حل:

x_i	f_i	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$	$\Delta^{۴}$
۱	۰/۷۶۵۱۹۷۷				
		−۰/۱۴۵۱۱			
۱/۳	۰/۶۲۰۰۸۶۰		−۰/۰۱۹۵۷		
		−۰/۱۶۴۶۸		۰/۰۱۰۴۷	
۱/۶	۰/۴۵۵۴۰۲۲		−۰/۰۰۸۹		۰/۰۰۰۳۵
		−۰/۱۷۳۵۸		۰/۰۱۱۰۲	
۱/۹	۰/۲۸۱۸۱۸۶		۰/۰۰۲۱۲		
		−۰/۱۷۱۴۶			
۲/۲	۰/۱۱۰۳۶۲۳				

$$p(x) = ۰/۷۶۵۱۹۷۷ - ۰/۱۴۵۱۱s + \frac{s(s-۱)}{۲}(-۰/۰۱۹۵۷) + \frac{s(s-۱)(s-۲)}{۶}(۰/۰۱۰۴۷)$$

$$+\frac{s(s-۱)(s-۲)(s-۳)}{۲۴}(-۰/۰۰۰۳۵)$$

$$p(x) = -۰/۰۰۰۰۱s^{۴} + ۰/۰۰۱۷۲s^{۳} - ۰/۰۱۵۰۲s^{۲} - ۰/۱۳۱۸۳s + ۰/۷۶۵۱۹۷۷$$

داریم:

$$x = ۱ + ۰/۳s \rightarrow ۰/۳s = x - ۱ \rightarrow s = \frac{x-۱}{۰/۳} \rightarrow x = ۱/۱ \rightarrow s = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین (۶D) :

$$f(۱/۱) = ۰/۷۱۹۶۴۹$$

تمرین ۳.خواجه نصیر خرداد۹۵. بااستفاده از جدول زیر و فرمول نیوتن پیشرو(نیوتن گریگوری)چند جمله ای درونیاب را پیدا کرده و $f(۰/۵۷)$ را تقریب بزنید.

x_i	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
f_i	۰/۲۰۴۱	۰/۳۰۱۰	۰/۳۸۰۲	۰/۴۴۷۱

تمارین آخر فصل

۱. با فرض اینکه

$f(-2)=46,\ f(-1)=4\ ,\ f(1)=4,\ f(3)=156,\ f(4)=484$

برای محاسبه $f(0)$ از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

۲. به کمک دستور تفاضلات تقسیم شده مقدار $f(0)$ را در جدول زیر حساب کنید:

x_i	-2	-1	1	3
f_i	46	4	4	169

۳. با به دست اوردن یک چندجمله ای درجه چهار که تابع جدولی زیر درونیابی می کند مقادیر $f(5)$ و $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	-1	1	-1	1

روش های حل عددی انتگرال

۱)روش ذوزنقه

$$\int_a^b f(x)dx = T(h) = \frac{h}{۲}[f_۰ + \underset{\uparrow}{\overset{۲f_i}{\cdots}} + f_n]$$

۲)روش سیمپسون

$$\int_a^b f(x)dx = S(h) = \frac{h}{۳}[f_۰ + \underset{\uparrow}{\overset{۴f_{\text{فرد}}}{\cdots}} + \underset{\uparrow}{\overset{۲f_{\text{زوج}}}{\cdots}} + f_n]$$

۳)نقطه میانی

$$\int_a^b f(x)dx = M(h) = h[f(x_۰ + \frac{h}{۲}) + f(x_۱ + \frac{h}{۲}) + \cdots + f(x_{n-۱} + \frac{h}{۲})]$$

۴)گاوس دو نقطه ای

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-۱}^{۱} f[\frac{۱}{۲}((b-a)u + (b+a))]du$$

$$\boxed{\int_{-۱}^{۱} f(x)\,dx \simeq f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})}$$

$x = \frac{1}{2}[(b-a)u+b+a]$

$dx = \frac{1}{2}(b-a)\,du$

نکات مهم :

۱)در روش سیمپسون باید تعداد نقاط فرد باشند(تعداد بازه ها زوج).

۲)روش نقطه میانی برای حل انتگرال های ناسره مناسب است.

۳) $h = \frac{b-a}{n}$

math-teacher.blog.ir

خطای ذوزنقه : $E = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \quad (f''(\eta) = \mathrm{Max} f'')$

خطای سیمپسون : $E = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad (f^{(۴)}(\eta) = M f^{(۴)})$

۱۸/۲

مثال۱. تقریب هایی از $\int_{۰/۱}^{۰/۳} e^x dx$ را به روش ذوزنقه ای و به ازای $h = ۰/۲, ۰/۱, ۰/۰۵$ به دست آورید.

باسخ:

داریم $a = ۰/۱ , b = ۰/۳ , f(x) = e^x$ لذا

$$T(۰/۲) = \frac{۰/۲}{۲}\left[f(۰/۱) + f(۰/۳)\right] = ۰/۱\left[۱/۱۰۵۱۷ + ۱/۳۴۹۸۶\right] = ۰/۲۴۵۵۰$$

$$T(۰/۱) = \frac{۰/۱}{۲}\left[f(۰/۱) + ۲f(۰/۲) + f(۰/۳)\right] = ۰/۰۵\left[۱/۱۰۵۱۷ + ۲(۱/۲۲۱۴۰) + ۱/۳۴۹۸۶\right] = ۰/۲۴۴۸۹$$

$$T(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۲}\left[f(۰/۱) + ۲(f(۰/۱۵) + f(۰/۲) + f(۰/۲۵)) + f(۰/۳)\right] =$$
$$۰/۰۲۵\left[۱/۱۰۵۱۷ + ۲(۱/۲۲۱۴۰) + ۱/۳۴۹۸۶\right] =$$
$$۰/۰۲۵\left[۱/۱۰۵۱۷ + ۲(۱/۱۶۱۸۳ + ۱/۲۲۱۴۰ + ۱/۲۸۴۰۳) + ۱/۳۴۹۸۶\right] = ۰/۲۴۴۷۴$$

تمرین۱خواجه نصیرخرداد۹۵. فـــــرض کنید $I = \int_{۰}^{۱} e^x \sin x dx$ تقریبـــــی از I بـه روش ذوزنقه ای بـا $h = ۰/۲۵, h = ۰/۵, h = ۰/۲۰$ به دست آورید.

توجه:هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند،مد(حالت)رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال۲. تقریب هایی از $\int_{۱}^{۱/۳} \sqrt{x} dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h = ۰/۱۵ , h = ۰/۰۵$ به دست آورید.

حل:داریم $f(x) = \sqrt{x}$ ، لذا

$$s(۰/۱۵) = \frac{۰/۱۵}{۳}\left[۱ + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۱/۱۴۰۱۸\right] = ۰/۳۲۱۴۸۵$$

$$s(۰/۰۵) = \frac{۰/۰۵}{۳}\left[۱ + ۴(۱/۰۲۴۷۰) + ۲(۱/۰۴۸۸۱) + ۴(۱/۰۷۲۳۸) + ۲(۱/۰۹۵۴۵) + ۴(۱/۱۱۸۰۳) + ۱/۱۴۰۱۸\right]$$
$$= ۰/۳۲۱۴۹$$

تمرین ۲ خواجه نصیر دی ۹۵. انتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin(۲\cos x).\sin^{۲} x dx$ را به روش سیمپسون با $n=۴$ بیابید.

مثال۳. تقریبی از $\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h=۰/۰۳$ به روش نقطه میانی به دست آورید.

حل:

$$\int_{۰}^{۰/۰۹} \frac{dx}{\sqrt{x}} = M(۰/۰۳) = ۰/۰۳(f(۰/۰۱۵)+f(۰/۰۴۵)+f(۰/۰۷۵)) = ۰/۰۳(۸/۱۶۵۰+۴/۷۱۴۰+۳/۶۵۱۵) = ۰/۴۹۵۹$$

تمرین ۳ خواجه نصیر دی ۹۵. انتگرال $I=\int_{-۱}^{۰} \frac{e^{x}}{\sqrt{-x}} dx$ را به روش ذوزنقه با $h=۰/۲۵$ حل کنید.

مثال۴. بااستفاده از روش گاوس دو نقطه ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx$$

حل: با قرار دادن $x=\frac{u+۳}{۲}$ خواهیم داشت $dx=\frac{۱}{۲}du$ لذا

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^{۲}(\frac{u+۳}{۲})}{(\frac{u+۳}{۲})} du = \int_{-۱}^{۱} \frac{\sin^{۲}(\frac{u+۳}{۲})}{u+۳} du = f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

که در آن $f(x)=\frac{\sin^{۲}(\frac{x+۳}{۲})}{x+۳}$ لذا

$f(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۳۶۱۶۹۱۲۳۱$ و $f(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = ۰/۲۶۶۴۷۵۲۳۶$

بنابراین:

$$\int_{۱}^{۲} \frac{\sin^{۲} x}{x} dx \simeq ۰/۶۲۸۱۶۶۴۶۷$$

تمرین۴. مقدار $\int_{۱}^{۱/۵} e^{-x^{۲}}$ را به روش گاوس دونقطه ای و با $h=\frac{۱}{۶}$ به دست آورید.

تمارین فصل

خواجه نصیر - دی ۹۶) ابتدا به کمک رسم نمودار محل تقریبی ریشه های معادله $x^2-4x+4-\ln x=0$ را مشخص کنید. سپس به روش نیوتن - رافسون ریشه کوچکتر معادله را با دقت 0.001 بیابید

خواجه نصیر - دی ۹۶) حاصل $\int_0^1 xe^x \sin x\,dx$ را به کمک روش های زیر بیابید

الف) ذوزنقه با $h=0.2$

ب) سیمپسون با $n=4$

ج) گاوس دو نقطه ای

خواجه نصیر - دی ۹۶) جدول زیر مقادیر تابع بسل نوع اول از مرتبه صفر در نقاط مختلف می باشد. به کمک روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن، چندجمله ای درونیاب را تشکیل داده و مقدار تقریبی $J_0(1.5)$ را بیابید. (نیازی به ساده سازی چندجمله ای نیست)

x	۱	۱٫۳	۱٫۶	۱٫۹	۲٫۲
$J_0(x)$	۰٫۷۶۵۱۹۸	۰٫۶۲۰۰۸۶	۰٫۴۵۵۴۰۲	۰٫۲۸۱۸۱۹	۰٫۱۱۰۳۶۲

خواجه نصیر - دی ۹۶) در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\cos^2(x+y+1)$ مقدار $y(2)$ را به کمک هریک از روش های زیر بیابید

الف) اویلر با شرط اولیه $y(1)=0$ و $h=0.25$

ب) رانگ کوتا مرتبه ۴ با شرط اولیه $y(1)=0$, $h=1$

حل عددی معادلات دیفرانسیل

۱)اویلر

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad h = \Delta x_i$$

۲)رانگ-کاتا(مرتبه ۲)

(اویلر پیراسته)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases}$$

۳)رانگ-کاتا(مرتبه ۴)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

۴)تیلور

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \cdots$$

math-teacher.blog.ir

مثال۱. تقریبی از $y(۰/۵)$ برای $\begin{cases} y' = x + y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$ به روش اویلر و با $h = ۰/۱$ به دست آورید.

حل: داریم $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۱$، $f(x,y) = x + y, h = ۰/۱$، لذا

$$y_{n+۱} = y_n + ۰/۱(x_n + y_n) = ۰/۱x_n + ۱/۱y_n$$

بنابراین

$$y_۱ = ۰/۱x_۰ + ۱/۱y_۰ = ۰/۱(۰) + ۱/۱(۱) = ۱/۱$$
$$y_۲ = ۰/۱x_۱ + ۱/۱y_۱ = ۰/۱(۰/۱) + ۱/۱(۱/۱) = ۱/۲۲$$
$$y_۳ = ۰/۱x_۲ + ۱/۱y_۲ = ۰/۱(۰/۲) + ۱/۱(۱/۲۲) = ۱/۳۶۲$$
$$y_۴ = ۰/۱x_۳ + ۱/۱y_۳ = ۰/۱(۰/۳) + ۱/۱(۱/۳۶۲) = ۱/۵۲۸۲$$
$$y_۵ = ۰/۱x_۴ + ۱/۱y_۴ = ۰/۱(۰/۴) + ۱/۱(۱/۵۲۸۲) = ۱/۷۲۱۰۲$$

در نتیجه

$$y(۰/۵) \simeq y_۵ = ۱/۷۲۱۰۲$$

تمرین ۱ .مطلوبست جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر در فاصله $[۰,۱]$ و به روش اویلر. $(h = ۰/۲۵)$

$$\begin{cases} y' = ۱ - y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

مثال۲. با $h = ۰/۰۵$ و به روش رونگه-کوتای مرتبه دوم تقریبی برای $y(۰/۰۵)$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = ۱ - y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

حل: داریم: $x_۰ = ۰$، $y_۰ = ۰$، $f(x,y) = ۱ - y, h = ۰/۰۵$، بنابراین

$$k_۱ = hf(x_۰, y_۰) = ۰/۰۵(۱-۰) = ۰/۰۵$$
$$k_۲ = hf(x_۰ + ۰/۰۵, y_۰ + k_۱) = ۰/۰۵f(۰/۰۵, ۰/۰۵) = ۰/۰۵(۱ - ۰/۰۵) = ۰/۰۴۷۵$$
$$y_۱ = y_۰ + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲) = ۰/۰۴۸۷۵$$

لذا

$$y(۰/۰۵) \simeq y_۱ = ۰/۰۴۸۷۵$$

تمرین۲. تقریبی از $y(\cdot/\text{۳})$ به دست آورید هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(\cdot) = \text{۱} \end{cases}$$

از روش رونگه–کوتای مرتبه ۲ استفاده کنیدو قرار دهید $h = \cdot/\text{۱}$.

مثال۳. معادله $y' = x + y$ را با شرط $y(\cdot) = \text{۱}$ در نظر بگیرید. تقریبی از $y(\cdot/\text{۱})$ را با استفاده از فرمول رونگه–کوتای مرتبه چهار با $h = \cdot/\text{۱}$ به دست آورید.

حل:داریم $h = \cdot/\text{۱}, f(x, y) = x + y, y_\cdot = \text{۱}, x_\cdot = \cdot$ بنابراین

$$k_1 = \cdot/\text{۱}(\cdot + \text{۱}) = \cdot/\text{۱}$$
$$k_2 = \cdot/\text{۱}(\cdot/\cdot\text{۵} + \text{۱}/\cdot\text{۵}) = \cdot/\text{۱۱}$$
$$k_3 = \cdot/\text{۱}(\cdot/\cdot\text{۵} + \text{۱}/\cdot\text{۵۵}) = \cdot/\text{۱۱}\cdot\text{۵}\cdot$$
$$k_4 = \cdot/\text{۱}(\cdot/\text{۱} + \text{۱}/\text{۱۱}\cdot\text{۵}\cdot) = \cdot/\text{۱۲۱}\cdot\text{۵}$$
$$y_1 = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۶}}(\cdot/\text{۱} + \text{۲} \times \cdot/\text{۱۱}\cdot\text{۵}\cdot + \cdot/\text{۱۲۱}\cdot\text{۵}) = \text{۱}/\text{۱۱}\cdot\text{۳۴}$$
$$y(\cdot/\text{۱}) = y_1 = \text{۱}/\text{۱۱}\cdot\text{۳۴}$$

تمرین۳. بااستفاده از روش رونگه–کوتا مرتبه چهار معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[\cdot,\text{۱}]$ حل نمائید.قرار دهید $h = \cdot/\text{۲۵}$

$$\begin{cases} \text{۱}\cdot y' = x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} \\ y(\cdot) = \text{۱} \end{cases}$$

مثال۴.بااستفاده روش تیلور مرتبه چهار مطلوبست برآورد $y(\cdot/\text{۵})$ مشروط به اینکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(\cdot) = \text{۱} \end{cases}$$

حل: داریم $f(x, y) = x + y, y_\cdot, x_\cdot = \cdot$ بنابراین:

$$y' = f(x, y) = x + y$$
$$y'' = f'(x, y) = \text{۱} + y' = \text{۱} + x + y$$
$$y''' = f''(x, y) = y'' = \text{۱} + x + y$$
$$y^{(\text{۴})} = f'''(x, y) = y''' = \text{۱} + x + y$$

$$y_{n+1} = y_n + 0/1(x_n + y_n) + \frac{(0/1)^2}{2!}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0/1)^3}{6}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0/1)^4}{24}(1 + x_n + y_n)$$
$$= 0/00517 + 0/10517x_n + 1/10517y_n$$

$$y_1 = 0/00517 + 0/10517(0) + 1/10517(1) = 1/11034$$
$$y_2 = 0/00517 + 0/10517(0/1) + 1/10517(1/11034) = 1/24280$$
$$y_3 = 0/00517 + 0/10517(0/2) + 1/10517(1/24280) = 1/39971$$
$$y_4 = 0/00517 + 0/10517(0/3) + 1/10517(1/39971) = 1/58364$$
$$y_5 = 0/00517 + 0/10517(0/4) + 1/10517(1/58364) = 1/79743$$

$$y(0/5) = y_5 = 1/79743$$

تمرین۴. معادله دیفرانسیل زیر را با روش تیلور مرتبه چهار حل کنید و تقریبی از $y(0/1)$ به دست آورید،قراردهید $h = 0/05$

$$\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

تمارین آخـــــــر فصل

---

۱. تقریبی از $y(0/1)$ را با $h = 0/1$ به روش اویلر به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = 2(x+1)\cos 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

---

۲. بااستفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[0,2]$ حل کنید ، قرار دهید $h = 0/1$.

$$\begin{cases} y' = -10(x-1)y \\ y(0) = e^{-5} \end{cases}$$

۳.خواجه نصیر خرداد۹۵ معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + 2y$ با $y(0) = 1$ مفروض است.
جواب معادله را در $0 \le x \le 0/3$ با $h = 0/1$ بوسیله روش های زیر به دست آورید.

i. روش اویلر ساده   **ii.** روش اویلر پیراسته(رانگ کاتا)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

روش های تکراری حل دستگاه

۱)ژاکوبی

$$x^{(i+1)} = \frac{A - a_{12}y^{(i)} - a_{13}z^{(i)}}{a_{11}}$$

$$y^{(i+1)} = \frac{B - a_{21}x^{(i)} - a_{23}z^{(i)}}{a_{22}}$$

$$z^{(i+1)} = \frac{C - a_{31}x^{(i)} - a_{32}y^{(i)}}{a_{33}}$$

۲)گوس-سایدل

$$x^{(i+1)} = \frac{A - a_{12}y^{(i)} - a_{13}z^{(i)}}{a_{11}}$$

$$y^{(i+1)} = \frac{B - a_{21}x^{(i+1)} - a_{23}z^{(i)}}{a_{22}}$$

$$z^{(i+1)} = \frac{C - a_{31}x^{(i+1)} - a_{32}y^{(i+1)}}{a_{33}}$$

*شرط همگرایی:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

مثال۱. بااستفاده از روش تکراری ژاکوبی جواب دستگاه معادلات زیر را به دست آورید. جواب اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید و محاسبات را با ۴D انجام دهید.

$$۴x_۱ - x_۲ + x_۳ = ۴$$
$$x_۱ + ۶x_۲ + ۲x_۳ = ۹$$
$$-x_۱ - ۲x_۲ + ۵x_۳ = ۲$$

حل:با به دست آوردن $x_۱$ از معادله اول، $x_۲$ از معادله دوم و $x_۳$ از معادله سوم خواهیم داشت:

$$x_۱ = \frac{۱}{۴}(۴ + x_۲ - x_۳)$$
$$x_۲ = \frac{۱}{۶}(۹ - x_۱ - ۲x_۳)$$
$$x_۳ = \frac{۱}{۵}(۲ + x_۱ + ۲x_۲)$$

لذا با قراردادن $x_۱^{(۰)} = x_۲^{(۰)} = x_۳^{(۰)} = ۰$ ،دستگاه تکرار ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود:

$$x_۱^{(k+۱)} = \frac{۱}{۴}(۴ + x_۲^{(k)} - x_۳^{(k)})$$
$$x_۲^{(k+۱)} = \frac{۱}{۶}(۹ - x_۱^{(k)} - ۲x_۳^{(k)})$$
$$x_۳^{(k+۱)} = \frac{۱}{۵}(۲ + x_۱^{(k)} + ۲x_۲^{(k)})$$

حال برای $k = ۰$ خواهیم داشت:

$$x_۱^{(۱)} = \frac{۱}{۴}(۴ + x_۲^{(۰)} - x_۳^{(۰)}) = \frac{۱}{۴}(۹۴ + ۰ - ۰) = ۱$$
$$x_۲^{(۱)} = \frac{۱}{۶}(۹ - x_۱^{(۰)} - ۲x_۳^{(۰)}) = \frac{۱}{۶}(۹ - ۰ - ۰) = ۱/۵$$
$$x_۳^{(۱)} = \frac{۱}{۵}(۲ + x_۱^{(۰)} + ۲x_۲^{(۰)}) = \frac{۱}{۵}(۲ + ۰ + ۰) = ۰/۴$$

حال برای $k = ۱$ تقریب بعدی جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x_۱^{(۲)} = \frac{۱}{۴}(۴ + x_۲^{(۱)} - x_۳^{(۱)}) = \frac{۱}{۴}(۴ + ۱/۵ - ۰/۴) = ۱/۲۷۵۰$$
$$x_۲^{(۲)} = \frac{۱}{۶}(۹ - x_۱^{(۱)} - ۲x_۳^{(۱)}) = \frac{۱}{۶}(۹ - ۱ - ۰/۸) = ۱/۲۰۰۰$$
$$x_۳^{(۲)} = \frac{۱}{۵}(۲ + x_۱^{(۱)} + ۲x_۲^{(۱)}) = \frac{۱}{۵}(۲ + ۱ + ۳) = ۱/۲۰۰۰$$

جوابهای فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده اند:

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱/۰۰۰۰	۱/۵۰۰۰	۰/۴۰۰۰
۲	۱/۲۷۵۰	۱/۲۰۰۰	۱/۲۰۰۰
۳	۱/۰۰۰۰	۰/۸۸۷۵	۱/۱۳۵۰
۴	۰/۹۳۸۱	۰/۹۵۵۰	۱/۰۵۴۰
۵	۰/۹۷۵۳	۰/۹۹۲۳	۱/۰۰۹۲
۶	۰/۹۹۵۸	۱/۰۰۱۱	۰/۹۹۲۰
۷	۱/۰۰۲۳	۱/۰۰۳۴	۰/۹۹۹۶
۸	۱/۰۰۱۰	۰/۹۹۹۸	۱/۰۰۱۸
۹	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۲	۱/۰۰۰۹
۱۰	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۶
۱۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۲	۰/۹۹۹۸
۱۲	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱
۱۳	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۱
۱۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار چهاردهم به صورت

$$x_1 = x_2 = x_1 = 1$$

به دست آمده است(توجه دارید که محاسبات را با ۴Dانجام داده ایم).

تمرین ۱.دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}$$

قرار دهید: $x^{(0)} = [0,0,0,0]^t$ و تقریبی از دستگاه در تکرار پنجم به روش ژاکوبی به دست آورید. محاسبات را با (۴D)انجام دهید.

مثال۲. جواب دستگاه معادلات مثال۱ را با استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل به دست آورید.محاسبات را با 4D انجام دهید و بردار اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید.

حل: با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ دستگاه تکرار گاوس-سایدل برای این مسئله عبارتست از:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})$$

بنابراین برای $k = 0$ خواهیم داشت:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 + 0) = 1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0) = \frac{4}{3}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + 1 + \frac{8}{3}) = \frac{17}{15}$$

جواب فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده اند:

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱/۰۰۰۰	۱/۳۳۳۳	۱/۱۳۳۳
۲	۱/۰۵۰	۰/۹۴۷۳	۰/۹۸۸۹
۳	۰/۹۸۹۶	۱/۰۰۵۰	۰/۹۹۹۹
۴	۱/۰۰۱۰	۰/۹۹۹۹	۱/۰۰۰۰
۵	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار پنجم به صورت زیر به دست آمده است:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

تمرین۲. جواب دستگاه زیر را به روش گاوس-سایدل به دست اورید، به طوری که اختلاف بین x,y,z در دو تکرار متوالی کمتر از ۰/۰۰۲ گردد.

$$10x + 2y + 6z = 28$$

$$x + 10y + 9z = 7$$

$$2x - 7y - 10z = -17$$

تمارین فصل

۱.خواجه نصیر دی۹۵ دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید،ابتدا شرط لازم برای همگرایی را بررسی کنید سپس با روش تکراری گوس-سایدل تا ۳ تکرار حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31 \\ 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30 \end{cases}$$

۲.خواجه نصیر خرداد۹۵

در دستگاه زیر

الف)شرط کافی برای همگرائی روش های تکراری را بررسی کنید.

ب)جواب دستگاه را با انتخاب $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ به روش گوس-سایدل با دقت 10^{-2} به دست آورید.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 2 \\ 5x - y + 3z = 6 \\ x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

math-teacher.blog.ir

روش حداقل مربعات:

$$E=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(x_i)\right]^2 \xrightarrow{E=0} y_i=f(x_i)$$

۱) خط $(y=ax+b)$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} y_i=a\sum_{i=1}^{n} x_i+nb\\ \sum_{i=1}^{n} x_iy_i=a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_i\end{cases}$$

۲) سهمی $(y=ax^2+bx+c)$

$$\begin{cases}\sum y=a\sum x^2+b\sum x+nc\\ \sum xy=a\sum x^3+b\sum x^2+c\sum x\\ \sum x^2y=a\sum x^4+b\sum x^3+c\sum x^2\end{cases}$$

۳) توانی و نمایی $\begin{pmatrix}y=ax^b\\ y=ae^{bx}\end{pmatrix}$

$$y=ae^{bx}\xrightarrow{Ln} Ln\,y=Ln\,a+bx \begin{cases}Ln\,y=Y\\ Ln\,a=A\end{cases}$$

$\rightarrow Y=A+bx \rightarrow$ معادله خط

$$y=ax^b\xrightarrow{Ln} Ln\,y=Ln\,a+b\,Ln\,x \begin{cases}Ln\,y=Y\\ Ln\,a=A\\ Ln\,x=X\end{cases}$$

$\rightarrow Y=A+bX \rightarrow$ معادله خط

مجموع مربع خطاها:

خط: $E=\sum y^2-a\sum xy-b\sum y$

سهمی: $E=\sum y^2-a\sum x^2y-b\sum xy-c\sum y$

مثال ۱) داده‌های جدول زیر را به روش حداقل مربعات روی خط و سهمی برازش کنید

x	10	12	15	20	23
y	14	17	23	21	25

n	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	10	14	100	1000	10000	140	1400
2	12	17	144	1728	20736	204	2448
3	15	23	225	3375	50625	345	5175
4	20	21	400	8000	160000	420	8400
5	23	25	529	12167	279841	575	13225
Σ	80	100	1398	26270	521202	1684	30648

سهمی:

$$\begin{cases} 100 = 1398a + 80b + 5c \\ 1684 = 26270a + 1398b + 80c \\ 30648 = 521202a + 26270b + 1398c \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = -0.07 \\ b = 3.03 \\ c = -8.89 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{y = -0.07x^2 + 3.03x - 8.89}$$

خط:

$$\begin{cases} 100 = 80a + 5b \\ 1684 = 1398a + 80b \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 0.71 \\ b = 8.61 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{y = 0.71x + 8.61}$$

(بررسی کنید کدام یک از این برازش‌ها دقیق‌تر است؟)