منطق مقدماتی

① گزاره ها

گزاره: جمله‌ای خبری که درست است یا نادرست (راست یا دروغ)

گزاره ساده: گزاره جمله‌ای است که می‌گوید شئ‌ای خاص، خاصیتی مشخص را دارد.

گزاره مرکب: گزاره‌ای که از گزاره های ساده و با استفاده از رابطهای گزاره‌ای نقیض، و، یا، شرطی و دوشرطی بدست می‌آید.

مثال: ۳ عددی گویا است.

۵ عددی اول است و ۴ عددی زوج است.

چنین نیست که ۴ عددی اول است.

۲ عددی اول است یا ۵ عددی فرد است.

عدد n زوج است اگر و تنها اگر $n+1$ فرد باشد.

قرارداد: ① گزاره های ساده مشخص را با نمادهایی چون $A, B, \dots$ نشان می‌دهیم.

② گزاره های ساده نامشخص (متغیرهای گزاره‌ای) را با نمادهای $p, q, r, \dots$ نشان می‌دهیم.

③ گزاره های دلخواه گزاره‌ای (ساده یا مرکب) نامشخص را با نمادهای $P, Q, R, \dots$ نشان می‌دهیم.

④ رابطهای گزاره‌ای فوق را به ترتیب با $\sim$ ، $\wedge$ ، $\vee$ ، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ نشان می‌دهیم.

جدول ارزش:

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

تذکر: جدولهای ارزش فوق در مورد گزاره های مرکب هم برقرار هستند.

تعریف: ① دو گزاره P, Q را هم ارز (منطقی) گوییم هرگاه به ازای هر ارزش دهی به گزاره های ساده تشکیل دهنده آنها، ارزش یکسان داشته باشند. در این حالت می‌نویسیم $P \equiv Q$.

۲) گزاره P را یک راستگو نامیم هرگاه به ازای هر ارزش‌دهی به گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آن ارزش T داشته باشد. یک گزاره را تناقض گوییم هرگاه نقیضش راستگو باشد.

۳) اگر $P \to Q$ یک راستگو باشد، گوییم P مستلزم Q است و می‌نویسیم $P \Rightarrow Q$

ضمناً، اگر $P \leftrightarrow Q$ یک راستگو باشد، گوییم P و Q هم‌ارزند و می‌نویسیم $P \Leftrightarrow Q$ یا $P \equiv Q$.

مثال: همه موارد زیر را می‌توان به کمک جدول ارزش ثابت کرد.

*① $p \Rightarrow p \vee q$

*② $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$

*③ $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ رفع مؤلفه

*④ $\sim\sim p \Rightarrow p$

*⑤ $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ جابجایی

*⑥ $p \vee q \equiv p$ $\quad p \wedge p \equiv p$

*⑦ $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ عکس نقیض

*⑧ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ دمورگان

*⑨ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $\quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ شرکت‌پذیری

*⑩ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ توزیع‌پذیری

*⑪ $((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$ تعدی

⑫ $((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \vee r) \to (q \vee s))$

⑬ $((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \to (q \wedge s))$

⑭ $((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow ((\sim q \vee \sim s) \to (\sim p \vee \sim r))$

⑮ $((p \to q) \wedge (r \to s)) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)$

*⑯ $((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q$ قیاس استثنایی

⑰ $((p \to q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$ قیاس دفع

۱۸) $(p\to q)\Leftrightarrow((p\wedge\sim q)\to(q\wedge\sim p))$ برهان خلف

*۱۹) $(p\to q)\Leftrightarrow\sim(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow\sim p\vee q$ تعریف ← از نظر کتاب

تذکر: ① $P\Leftrightarrow Q$ و $P\equiv Q$ معنی یکسانی دارند.

② از $P\equiv Q$ و $Q\equiv R$ ، $P\equiv R$ نتیجه می‌شود.

تعریف: از نمادهای t و c به ترتیب برای نمایش یک راستگو و تناقض دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال: ①

$$(p\to q)\equiv\sim p\vee q\equiv(\sim p)\vee\sim(\sim q)$$
$$\equiv\sim(\sim q)\vee(\sim p)\equiv\sim q\to\sim p$$

②

$$(p\vee q)\wedge\sim p\equiv\sim p\wedge(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge p)\vee(\sim p\wedge q)$$
$$\equiv c\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p\wedge q\Rightarrow q$$

③

$$(p\wedge q)\to r\overset{?}{\equiv}p\to(q\to r)$$
$$(p\wedge q)\to r\equiv\sim(p\wedge q)\vee r\equiv(\sim p\vee\sim q)\vee r\equiv$$
$$\sim p\vee(\sim q\vee r)\equiv p\to(q\to r)$$

④

$$(p\to r)\vee(q\to s)\overset{?}{\equiv}((p\wedge q)\to(r\vee s))$$
$$(p\to q)\vee(q\to s)\equiv(\sim p\vee q)\vee(\sim q\vee s)\equiv$$
$$(\sim p\vee\sim q)\vee(r\vee s)\equiv\sim(p\wedge q)\to(r\vee s)$$
$$\equiv(p\wedge q)\to(r\vee s)$$

تعریف: گوییم گزاره P از گزاره‌های $P_1,\dots,P_n$ نتیجه می‌شود، هرگاه از فرض درستی $P_1,\dots,P_n$ ، درستی P نتیجه شود. این یعنی،

$$(P_1\wedge\dots\wedge P_n)\Rightarrow P$$

مثال : نشان دهید حکم زیر معتبر است

$$\begin{array}{c} P \to D \\ T \to Z \\ D \vee Z \to \sim S \\ S \\ \hline \therefore \sim P \wedge \sim T \end{array}$$

حل : یک راه ، استفاده از جدول ارزش است . راه دیگر روش گام به گام و استفاده از نتایج قبلی است .

۱)	$P \to D$	فرض
۲)	$T \to Z$	فرض
۳)	$(D \vee Z) \to \sim S$	فرض
۴)	S	فرض
۵)	$\sim (D \vee Z)$	از ۳ و ۴ و قیاس دفع
۶)	$\sim D \wedge \sim Z$	از ۵ و دمورگن
۷)	$\sim D$	از ۶ و اختصار
۸)	$\sim Z$	از ۶ و اختصار
۹)	$\sim P$	از ۱ و ۷ و قیاس دفع
۱۰)	$\sim T$	از ۲ و ۸ و قیاس دفع
۱۱)	$\sim P \wedge \sim T$	از ۹ و ۱۰ و قانون عطف

مثال : گاهی مواقع از برهان خلف برای تعیین اعتبار یک حکم استفاده می شود . مثلاً برای آنکه نشان دهیم

$$\begin{array}{c} p \vee q \to r \\ s \to (p \wedge u) \\ q \vee s \\ \hline \therefore r \end{array}$$

کافی است نشان دهیم

$$\begin{array}{c} p \vee q \to r \\ s \to (p \wedge u) \\ q \vee s \\ \sim r \\ \hline c \end{array}$$

دلیل این موضوع آن است که $(P \wedge Q) \to R \equiv (P \wedge Q \wedge \sim R) \to C$

مثال ۱۱ صفحه ۲۹ را ببینید.

② گزاره نماها، سورهای عمومی و وجودی

در این بخش، منطق گزاره ای را گسترش می دهیم.

منظور از یک گزاره نما چون $P(x)$، عبارتی است مانند «x عددی اول است.»

برای تبدیل $P(x)$ به یک گزاره می توان دو راه زیر را پیش گرفت:

۱) x را عددی مشخص قرار دهیم: ۲ عددی اول است $P(2)$

۲) از سور عمومی یا وجودی استفاده کنیم: عدد طبیعی x وجود دارد بطوریکه $P(x)$ $\exists x\ P(x)$ ،

به ازای هر عدد طبیعی x $P(x)$ $\forall x\ P(x)$

تذکر: برای اثبات حکمی کلی که با سور عمومی بیان می شود، می بایست درستی حکم را به ازای هر عضو عالم سخن تحقیق کرد.

مثال. نشان دهید گزاره $\forall x\ (x+1)^2 = x^2+2x+1$ در عالم سخن اعداد حقیقی درست است.

حل: فرض کنید x عدد حقیقی دلخواهی باشد، داریم $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2+2x+1$

تذکر: برای اثبات حکمی وجودی که با سور وجودی بیان می شود، می بایست درستی آن را به ازای حداقل یک عضو عالم سخن تحقیق کرد.

مثال. گزاره $\exists x\ \ x^2+1-2x=0$ در عالم سخن اعداد حقیقی درست است.

حل. حکم به ازای $x=1$ برقرار است، زیرا $1^2+1-(2\times1)=0$.

تذکر (قواعد مورگان) هم ارزی های زیر در هر عالم سخن D برقرارند (منطقاً معتبرند)

$$\sim(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \sim P(x)$$

مثال: در عالم سخن اعداد طبیعی داریم:

$$\sim(\forall m\ \exists n\quad m>n) \equiv \exists m \sim(\exists n\quad m>n)$$
$$\equiv \exists m\ \forall n\ \underbrace{\sim m>n}_{m\leqslant n}$$

گوییم یک عبارت منطقی حاوی گزاره‌نما، سورها، معتبر است هرگاه عالم سخن سورها را هرچه بگیریم و گزاره نماها را در آن عالم سخن هرگونه تعبیر کنیم، گزاره حاصل درست باشد.

مثال: آیا $\forall x\ p(x) \to \exists x\ p(x)$ معتبر است؟

حل: خیر، زیرا اگر عالم سخن $\emptyset$ فرض شود سمت چپ آن درست و سمت راست آن نادرست است. البته در بقیه حالت‌ها این ادعا درست است.

تذکر: یک گزاره‌نما می‌تواند حاوی بیش از یک متغیر باشد، مثلاً $R(x,y)$ که می‌گوید $x>y$.

مثال. نشان دهید که $\exists y\ \forall x\ p(x,y) \to \forall x\ \exists y\ p(x,y)$ معتبر است.

حل. عالم سخن را مجموعهٔ دلخواه D در نظر بگیرید و $p(x,y)$ را خاصیتی در مورد اعضای D فرض کنید. $\exists y\ \forall x\ p(x,y)$ درست باشد. پس b در عالم سخن موجود است که $\forall x\ p(x,b)$ درست است.

حال نشان می‌دهیم که $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ درست است. فرض کنید a عضو دلخواهی از عالم سخن باشد. باید نشان دهیم $\exists y\ p(a,y)$ درست است. ولی این درست است چون می‌توان y را b قرار داد.

مثال. نشان دهید که $\forall x\ \exists y\ p(x,y) \to \exists y\ \forall x\ p(x,y)$ معتبر نیست.

حل. عالم سخن را $\mathbb{N}$ بگیرید و $p(x,y)$ را $x<y$ تعبیر کنید. در این صورت سمت چپ درست است ولی سمت راست غلط است. پس جملهٔ داده شده منطقاً معتبر نیست.

تذکر. در برخی احکام ریاضی، دامنهٔ سورهای بکاررفته در آن باهم متفاوت است. مثلاً
در تعریف حد دنباله می‌نویسیم : $a_n \to l$ یعنی

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (n > m \to |a_n - l| < \varepsilon)$$

نکته.

$$\exists x \in D \ A(x) \equiv \exists x \,(x \in D \wedge A(x)) \quad , \quad \forall x \in D \ A(x) \equiv \forall x \,(x \in D \to A(x))$$

درضمن $x \in D$ را می‌توان بصورت یک گزاره‌ای مناسب $D(x)$ نمایش داد.
با این روش می‌توان دامنهٔ سورهای بکاررفته در یک فرمول (عبارت منطقی) را یکسان کرد.