



۱.۱.۲ تعریف

هر جدولی از اعداد را که شامل m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس $m \times n$ می‌نامیم و به شکل زیر نشان می‌دهیم.

$$n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

هر یک از اعداد a_{ij} را یک عنصر یا درایه ماتریس می‌نامیم. در اینجا i اندیس سطر و j اندیس ستون است، به بیان دیگر، عنصر a_{ij} در محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام ماتریس قرار دارد.

www.samousavi.ir

تعريف

الف) هر گاه ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ تنها داراي يك سطر باشد، يعني $m=1$ ، اين ماتريس را يك ماتريس سطري (بردار سطري) مي ناميم.
ماتريس $[1 \text{ و } 4 \text{ و } -3]$ يك ماتريس سطري است.

www.samousavi.ir

اگر ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ تنها داراي يك ستون باشد، يعني $n=1$ ، اين ماتريس را يك ماتريس ستوني (بردار ستوني) مي ناميم.
ماتريس $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ يك ماتريس ستوني است.

www.samousavi.ir

پ) اگر تمام عناصر ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ صفر باشند آن را ماتريس صفر مي ناميم و به صورت $A=0_{mn}$ يا $A=0$ نشان مي دهيم. مانند:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F يك ماتريس صفر 3×4 است.

www.samousavi.ir

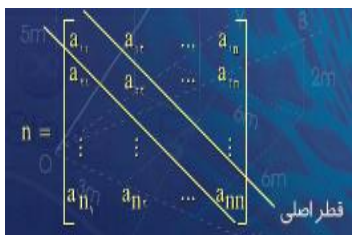
۲.۱.۳ تعریف

ماتریسی را که تعداد سطرها و تعداد ستونهایش برابر باشد،
یک ماتریس مربع می نامیم. به بیان دیگر $A=(a_{ij})_{mn}$ یک
ماتریس مربع است اگر و تنها اگر $m=n$

www.samousavi.ir

در ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$ ، قطری را که شامل عناصر
 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ قطر اصلی و این عناصر را عناصر
قطر اصلی می نامیم.

www.samousavi.ir



www.samousavi.ir

۲.۱.۴ تعریف

ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$ را يك ماتریس هماني یا واحد $n \times n$ می نامیم اگر هر يك از عناصر قطر اصلی برابر ۱ و همه ي عناصر دیگر آن صفر باشند.

www.samousavi.ir

ماتریس واحد $n \times n$ را با نشان می دهیم. مانند:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۵ تعریف تساوي دو ماتریس

دو ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ را برابر می گوئیم اگر $m=p$ و $n=q$ و برای هر i و j که $i=1,2,\dots,n$ و $j=1,2,\dots,n$ داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$

www.samousavi.ir

برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۷ تعریف

فرض می‌کنیم $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{mn}$ دو ماتریس $k \times m \times n$ عددی حقیقی باشند.

www.samousavi.ir

الف) حاصل جمع این دو ماتریس را با $A+B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m \times n}$$

www.samousavi.ir

ب) حاصل ضرب عدد حقیقی k در A ماتریس را با kA نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

www.samousavi.ir

توجه کنید که $A+B$ و kA ماتریسهای $m \times n$ هستند. توجه داشته باشید که جمع دو ماتریس که دارای تعداد سطرها یا متفاوت یا تعداد ستونها متفاوت باشند تعریف نشده است.

www.samousavi.ir

۲.۱.۹ تعریف

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ماتریس A (۱-) را قرینه ی ماتریس A می‌نامیم و با $A = (-a_{ij})_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{m \times n}$ بنابر تعریف داریم:

$$A - B = A + (-B)$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۱۱ قضیه

اگر A و B و C سه ماتریس $m \times n$ و k و h دو عدد حقیقی باشند
آنگاه:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A & \text{(الف)} \\ A + (B + C) &= (A + B) + C & \text{(ب)} \\ k(A + B) &= kA + kB & \text{(پ)} \\ (k + h)A &= kA + hA & \text{(ت)} \end{aligned}$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۱۳ تعریف

ماتریسهای $A = (a_{ij})_{m \times p}$ و $B = (b_{ij})_{p \times n}$ را در نظر می
گیریم. منظور از حاصل ضرب A در B ماتریس $m \times n$ ای
چون C به طوری که

$$\begin{aligned} C &= (c_{ij})_{m \times n} \\ c_{ij} &= x_{ij} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

حاصل ضرب A در B یعنی C را با AB نشان می دهیم.

www.samousavi.ir

۲.۱.۱۵ قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد آنگاه:

$$A I_n = A = I_n A$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۱۶ قضیه

اگر $A=(a_{ij})_{mp}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ و $C=(c_{ij})_{qn}$ آنگاه
 $A(BC)=(AB)C$

www.samousavi.ir

۲.۱.۱۹ قضیه

اگر $A=(a_{ij})_{pn}$ و $B=(b_{ij})_{pn}$ و $C=(c_{ij})_{mp}$
 $C(A+B)=CA+CB$

www.samousavi.ir

۲.۱.۲۰ تعریف

اگر در ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ جای سطرها و ستونها را با
 یکدیگر عوض کنیم، ماتریس حاصل را
 ترانزپوز (Transpose) ماتریس A^T می نامیم و آن را با A
 نشان می دهیم. به بیان دیگر $A^T=(b_{ij})_{nm}$ که در آن برای i
 و j داریم:

$$b_{ij}=a_{ji}$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۲۱ قضیه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ و k عددی حقیقی باشند آنگاه:
 الف) $(A^T)^T = A$ یعنی ترانهاده، ترانهاده ماتریس با ماتریس برابر است.
 ب) $(kA)^T = k(A^T)$ یعنی ترانهاده مضربی از یک ماتریس با همان مضرب ترانهاده ماتریس برابر است.

www.samousavi.ir

پ) $(A+B)^T = A^T + B^T$ ، یعنی ترانهاده مجموع دو ماتریس با مجموع ترانهاده های دو ماتریس برابر است.
 ت) اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، آنگاه $\bar{A}^T \bar{A} = \bar{A} \bar{A}^T$ ، یعنی ترانهاده ی حاصلضرب دو ماتریس با حاصلضرب ترانهاده ماتریس دومی در ترانهاده ماتریس اولی برابر است.

www.samousavi.ir

۲.۱.۲۳ تعریف

الف) ماتریس مربع A را متقارن می نامیم اگر $A = A^T$.
 برای مثال ماتریس زیر متقارن است. توجه کنید که در ماتریس متقارن عناصر ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

ب) ماتریس A مربع را شبه متقارن می نامیم اگر $A=A^T$. اگر یک ماتریس شبه متقارن باشد باید برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij}=-a_{ji}$ اما از $a_{ii}=-a_{ii}$ نتیجه می شود $a_{ii}=0$. پس عناصر قطر اصلی در ماتریس شبه متقارن همگی برابر صفرند.

www.samousavi.ir

پ) ماتریس A مربع را قطری می نامیم اگر همه ی عناصر غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. مانند:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

ت) ماتریس قطری S را یک ماتریس اسکالر می نامیم، اگر عناصر قطر اصلی آن برابر عدد ثابت k باشد، یعنی

$$S = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

ن(ماتریس $n \times n$ و C را متعامد می‌گوییم اگر :

$$CC^T = C^T C = I_n$$

www.samousavi.ir

برای مثال:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^T C = I_2 \quad \text{آنگاه}$$

پس C ماتریسی متعامد است.

www.samousavi.ir

ج) ماتریس مربع U را ماتریس مثلثی بالایی نامیم، اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشد. مانند:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

چ) ماتریس مربع L را ماتریس مثلثی پایین می نامیم، اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد. مانند:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

۲.۱.۲۵ تعریف

در ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{nn}$ مجموع تمام قطر اصلی را اثر A می نامیم و با $\text{tr}(A)$ نشان می دهیم. پس:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

www.samousavi.ir

۲.۲ دترمینان

www.samousavi.ir

دترمینان ماتریس A را با $\det A$ یا A نشان می‌دهیم.

www.samousavi.ir

۲.۲.۱ تعریف

(۱) ماتریس 1×1 تنها دارای یک عنصر a_{11} است، دترمینان این ماتریس را برابر با عدد a_{11} تعریف می‌کنیم.

www.samousavi.ir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(۲) دترمینان ماتریس 2×2

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

www.samousavi.ir

۲.۲.۲ تعریف

ماتریس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M_{ij} ماتریسی $(n-1) \times (n-1)$ باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست آمده است. دترمینان ماتریس M_{ij} یعنی $|M_{ij}|$ را مینور عنصر در ماتریس می‌نامیم.

www.samousavi.ir

۲.۲.۳ تعریف

همسازه عنصر a_{ij} در ماتریس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را با A_{ij} نشان می‌دهیم و برابر با عدد زیر است:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

www.samousavi.ir

۲.۲.۴ تعریف

دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را به صورت

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

تعریف می‌کنیم. می‌گوییم دترمینان A بر حسب سطر i ام بسط داده شده است.

www.samousavi.ir

بنابر این تعریف برای محاسبه ی دترمینان یک ماتریس، یک سطر یا یک ستون را انتخاب می کنیم . این سطر یا ستون را در همسازه اش ضرب ، سپس مقادیر حاصل را با هم جمع می کنیم.

www.samousavi.ir

اگر دترمینان را بر حسب سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر را دارد محاسبه می کنیم، محاسبات کوتاهتر می شود، زیرا نیازی به محاسبه ی همسازه های صفر نیست. چون حاصلضرب صفر در هر همسازه ای صفر است.

www.samousavi.ir

۲.۲.۷ قضیه (خواص دترمینان)

(۱) دترمینان ماتریس مربع A و ترانهاده A برابر است. یعنی:

$$A^T = A$$

(۲) اگر تمام عناصر یک سطرا یا یک لستون ماتریس A صفر باشند، آنگاه

$$A = 0$$

www.samousavi.ir

۳) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A در عدد r ضرب مي كنيم آنگاه دترمینان ماتريس حاصل برابر با $r|A|$ است.

۴) دترمینان ماتريس حاصل از تعويض دو سطر يا دو ستون ماتريس A مساوي است با منهاي دترمینان A .

www.samousavi.ir

۵) اگر دو سطر يا دو ستون ماتريسي برابر باشند، آنگاه مقدار دترمینان آن برابر با صفر است.

۶) دترمینان حاصل از جمع مضرب اسكالري از يك سطر (يا ستون) با سطري (يا ستوني) ديگر از ماتريس A مساوي است با دترمینان A .

www.samousavi.ir

۷) دترمینان حاصلضرب دو ماتريس برابر با حاصلضرب دترمینانهاي آنها است يعني

$$|AB| = |A||B|$$

۸) دترمینان يك ماتريس قطري برابر است با حاصلضرب عناصر روي قطر اصلي آن.

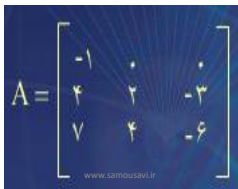
۹) دترمینان ماتريس واحد برابر يك است، يعني

$$|I_n| = 1$$

www.samousavi.ir

۲.۲.۱۵ تعریف

اگر دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{nn}$ برابر صفر باشد ، ماتریس A را منفرد می نامیم. در غیر این صورت ماتریس را غیر منفرد می نامیم.
ماتریس زیر منفرد است.



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

۲.۳ وارون ماتریس

۲.۳.۱ تعریف

ماتریس $A=(a_{ij})_{nn}$ را وارون پذیر می نامیم ، اگر ماتریسی مانند $B=(b_{ij})_{nn}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$AB=BA=I_n$$

اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است و آن را با A^{-1} نشان می دهیم.

۲.۳.۵ اعمال سطري مقدماتي

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را در نظر مي گيريم. هر يك از اعمال
زير را كه بر روي سطر هاي ماتريس A انجام مي پذيرد،
يك عمل سطري مقدماتي مي ناميم.
(۱) تعويض دو سطر ماتريس A .
(۲) ضرب يك سطر ماتريس A در يك عدد نا صفر.
(۳) افزودن مضربي از يك سطر ماتريس A به سطري ديگر.

www.samousavi.ir

براي اختصار در نوشتن اعمال سطري مقدماتي ، از حرف R
، اول كلمه ي Row به معنای سطر به صورت زير استفاده
مي كنيم.

الف) $R_i \leftrightarrow R_j$ به معنای تعويض سطرها i و j سطر
ب) kR_i به معنای ضرب سطر i ام ماتريس در عدد ناصفر k
پ) R_j+kR_i به معنای افزودن برابر سطر i ام به سطر j ام

www.samousavi.ir

۲.۳.۸ قضيه

اگر ماتريس وارون پذير A به وسيله ي يك سلسله اعمال
مقدماتي تبديل به ماتريس واحد شود، آنگاه با انجام همين
سلسله اعمال سطري مقدماتي بر روي ماتريس واحد ،
وارون ماتريس A به دست مي آيد.

www.samousavi.ir

برای به دست آوردن وارون ماتریس A معمولاً اعمال سطری مقدماتی را به طور هم زمان بر روی ماتریس A و ماتریس واحد انجام می دهند. لذا ماتریس مرکب $[A \ I]$ را در نظر گرفته و با انجام یک سلسله اعمال مقدماتی سطری آن را تبدیل به $[I \ B]$ می کنیم. بنا بر قضیه ی بالا، برابر وارون ماتریس است.

www.samousavi.ir

۲.۳.۱۱ تعریف

ترانهاده ماتریس همسازه های ماتریس مربع A را ماتریس الحاقی A می نامیم و با نشان می دهیم ، پس:

$$\text{adj} A = (A_{ij})^T$$

www.samousavi.ir

۲.۳.۱۳ قضیه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه :

$$A(\text{adj} A) = (\text{adj} A)A = (\text{adj} A)I_n$$

www.samousavi.ir

۲.۳.۱۳ قضیه

اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه وارون وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

عکس این نتیجه نیز درست است. یعنی اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه

$$\det A \neq 0$$

www.samousavi.ir

۲.۳.۱۷ قضیه

اگر A و B دو ماتریس مربع $n \times n$ و وارون پذیر باشند آنگاه الف) ماتریس حاصلضرب وارون پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ب) ماتریس ترانواده A وارون پذیر است و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

www.samousavi.ir

پ) وارون ماتریس وارون A برابر A است، یعنی

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ت) دترمینان وارون ماتریس A برابر با معکوس دترمینان A است یعنی

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

www.samousavi.ir

فصل سوم: دستگاه معادلات خطی و توابع خطی

www.samousavi.ir

در این فصل با استفاده از مفهوم ماتریس و دترمینان روشی برای حل و بحث در وجود جوابهای دستگاه معادلات خطی ارائه دهیم. سپس استقلال و وابستگی خطی يك مجموعه از بردارها را مورد بررسی قرار دهیم. در خاتمه ي فصل با توابع خطی آشنا می شویم.

www.samousavi.ir

۱. دستگاه معادلات خطی

www.samousavi.ir

معادله اي به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$ با مجهول $x_1, x_2, \dots, x_n$ را يك معادله ي n مجهولي خطي مي ناميم.
 n تايي $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اعداد حقيقي را كه در اين معادله صدق كنند يك جواب آن مي ناميم.

www.samousavi.ir

۱.۳ تعريف

مجموعه اي از معادلات خطي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

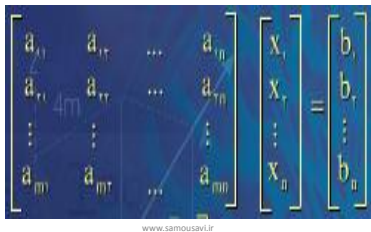
را يك دستگاه m معادله ي n مجهولي مي ناميم.

www.samousavi.ir

تايي از اعداد حقيقي را در تمام معادله هاي دستگاه صدق كند يك جواب اين دستگاه مي ناميم.

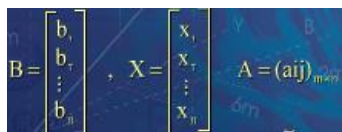
www.samousavi.ir

این دستگاه را میتوان به صورت معادله ی ماتریسی زیر نوشت:



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir



$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

www.samousavi.ir

با فرض

معادله ی ماتریسی اخیر به صورت خلاصه ی زیر در می آید.

$$AX=B$$

A را ماتریس ضرایب X را ماتریس مجهولها و B را ماتریس طرف دوم دستگاه معادلات خطی می نامیم.

توجه کنید يك دستگاه معادلات خطی ممکن است دارای يك جواب منحصر به فرد یا بینهایت جواب باشد و یا اصلا جوابی نداشته باشد.

اینک به معرفی روشهایی برای حل یک دستگاه معادلات خطی

می پردازیم.

۱- روش حذف گوسی

۲- دستور کرامر

www.samousavi.ir

۲. ۱. روش حذف گوسی

میتوان نشان داد دو دستگاه معادلات خطی که یکی از آنها به

وسیله ی انجام اعمال زیر روی معادلات دستگاه دیگری به

دست آمده باشد دارای جواب یا جوابهای یکسان هستند:

www.samousavi.ir

۱) ضرب یک معادله ی دستگاه در عددی غیر صفر.

۲) تعویض محل دو معادله ی دستگاه و

۳) افزودن مضربی از یک معادله به معادله ی دیگر دستگاه.

www.samousavi.ir

پس براي حل دستگاه $AX=B$ بايد تا جايي كه ممكن است به وسيله ي اعمال سطري مقدماتي ماتريس $[A \ B]$ را به ماتريس ساده تري تبديل كنيم تا جوابها به آساني به دست آيند.

www.samousavi.ir

۳.۱.۶ قضيه

اگر تعداد مجهولها با تعداد معادله ها ي يك دستگاه معادلات خطي برابر باشد (دستگاه n معادلات n مجهولي) و ماتريس ضرايب دستگاه وارون پذير باشد آنگاه دستگاه همواره داراي يك جواب منحصر به فرد است.

www.samousavi.ir

۳.۱.۸ دستور كرامر

اگر ضرايب يك دستگاه n معادلات n مجهولي وارون پذير باشد آنگاه جواب دستگاه برابر است با

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i=1,2,\dots,n \quad (*)$$

كه دران A_i ماتريس حاصل از جايگزين كردن ماتريس ستوني $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ در ستون i ام ماتريس A است. فرمول $*$ را دستور كرامر مي ناميم.

www.samousavi.ir

۳.۱.۱۰ تعریف

اگر در دستگاه m معادله y خطی مجهولی طرف دوم تمام معادلات صفر باشند دستگاه را همگن می نامیم. در غیر این صورت دستگاه را غیر همگن می نامیم.

www.samousavi.ir

روشن است که در دستگاه همگن همواره $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ يك جواب دستگاه هست. این جواب به جواب بدیهی دستگاه موسوم است.

www.samousavi.ir

۳.۱.۱۱ قضیه

دستگاه n معادله y خطی مجهولی همگن دارای يك جواب غیر بدیهی (غیر صفر) است. اگر و تنها اگر دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد.

www.samousavi.ir

۳.۱.۱۳ نتیجه

يك دستگاه m معادله ي n خطي مجهولي همگن همواره داراي يك جواب غير بديهی (غير صفر) است اگر

$$m < n$$

www.samousavi.ir

۳.۱.۱۵ قضیه

اگر X_1 و X_2 دو جواب دستگاه غير همگن $AX=B$ باشند
آنگاه $X_2 - X_1$ جوابي براي دستگاه همگن $AX=0$ است.

www.samousavi.ir

۳.۱.۱۳ نتیجه

دستگاه غير همگن $AX=B$ داراي يك جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر جواب $AX=0$ منحصر به فرد باشد.

www.samousavi.ir

۳.۲ استقلال و وابستگی خطی

www.samousavi.ir

۳.۲.۱ تعریف

مجموعه m بردار $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ از عناصر فضاي برداري R را مستقل خطي مي ناميم اگر هيچ مجموعي از اعداد حقيقي $c_1, c_2, \dots, c_n$ به جز $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ وجود نداشته باشد به طوري که

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

www.samousavi.ir

به بيان ديگر مجموعه m بردار $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ مستقل خطي است تنها جواب معادله ي

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

برابر با $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ باشد. در غير اين صورت اين مجموعه را وابسته ي خطي مي ناميم.

www.samousavi.ir

۳.۳ رتبه ي يك ماتريس

www.samousavi.ir

در این بخش به هر ماتريس عدد صحيح و مثبتی به نام رتبه ي ماتريس را نسبت می دهیم. با استفاده از این عدد در مورد جوابهاي دستگاههاي معادلات خطي را بررسی می کنیم.

www.samousavi.ir

۳.۳.۱ تعریف

فرض کنیم A ماترиси $m \times n$ باشد. حداکثر تعداد سطرهاي مستقل خطي ماترиси A را رتبه ي ماترиси A می نامیم و با نشان $r(A)$ می دهیم.

www.samousavi.ir

به عبارت دیگر اگر $R_1, R_2, \dots, R_m$ سطرهاي ماتريس A باشند
رتبه ي a برابر با حداکثر تعداد بردارهاي مستقل خطي در
مجموعه ي $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ است.

www.samousavi.ir

يك روش تعيين رتبه ي ماتريس A اين است كه بزرگترين زير
ماتريس مربع A را كه دترمینانش مخالف صفر باشد به
دست آوریم ، تعداد سطرهاي اين ماتريس برابر رتبه ي
ماتريس A است.

www.samousavi.ir

۳.۳.۶ خواص رتبه ي ماتريس

الف) رتبه ي ماتريس واحد I_n برابر با n است، يعني:

$$r(I_n) = n$$

ب) رتبه ي ماتريس A با رتبه ي ترانواده ي A برابر است ،
يعني:

$$r(A) = r(A^T)$$

www.samousavi.ir

پ) اگر A ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه $r(A)=n$ اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ به بیان دیگر $r(A) < n$ اگر و تنها اگر $\det A = 0$.

ت) رتبه ی حاصلضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است ، یعنی:

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

www.samousavi.ir

۳.۷ نتیجه

اینک با استفاده از مفهوم رتبه ی ماتریس به طور خلاصه به بررسی جوابهای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ در حالتی مختلف می پردازیم.

فرض می کنیم ماتریس ضرایب A ، باشد m برابر با تعداد معادلات و n مساوی با تعداد مجهولهای دستگاه است. رتبه ی ماتریس مرکب $[A|B]$ را با $r(A|B)$ نشان می دهیم.

www.samousavi.ir

الف) اگر $r(A|B)=r(A)$ آنگاه دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

ب) اگر $r(A|B) \neq r(A)$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

پ) اگر $r(A|B) < r(A)$ آنگاه دستگاه دارای بی نهایت جواب و مجموع سطر های ماتریس A وابسته ی خطی است.

ت) اگر $r(A|B) < r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

www.samousavi.ir

۴. ۳. توابع خطي

www.samousavi.ir

در این بخش به مطالعه ی توابع خطي که توابعي از يك فضاي برداري به فضاي برداري ديگري هستند مي پردازيم.

www.samousavi.ir

۴. ۳. ۱ تعريف

تابع n متغيره ی f از فضاي برداري R^n به فضاي برداري R^m را که به ازاي هر عدد حقيقي r و هر دو n تايي

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زیر صدق مي کند، يك تابع خطي مي ناميم.

$$\begin{aligned} f(X + Y) &= f(X) + f(Y) \quad (1) \\ f(rX) &= rf(X) \quad (2) \end{aligned}$$

۳. ۴. ۳ قضیه

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است. اگر و تنها اگر هر مؤلفه مقدار تابع

در به صورت یک ترکیب خطی از اعداد

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

باشد. $x_1, x_2, \dots, x_n$

www.samousavi.ir

از این قضیه نتیجه می شود که اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابع خطی باشد
آنگاه اعداد حقیقی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وجود دارند به طوری که

www.samousavi.ir

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بنا بر این $A = (a_{ij})_{m \times n}$ قرار دادن مقدار تابع خطی f
را میتوان به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت ماتریسی

$$F(x) = Ax$$

نوشت. ماتریس A را یک ماتریس نمایشگر تابع خطی F مینامیم.

www.samousavi.ir

تعریف ۳.۴.۶

تابع $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را که برای هر به صورت زیر تعریف می شود، تابع صفر می نامیم.

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعریف میشود. تابع همانی می نامیم.

www.samousavi.ir

تعریف ۳.۴.۷

تابع $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$I \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

www.samousavi.ir

تعریف ۳.۴.۸

توابع خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را در نظر می گیریم:
(۱) مجموع f و g را با $f+g$ نشان میدهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

(۲) فرض میکنیم k عددی حقیقی باشد. حاصل ضرب عدد حقیقی k در f را با نشان kf میدهیم و به صورت زیر می نویسیم.

$$(kf)(x) = k f(x)$$

www.samousavi.ir