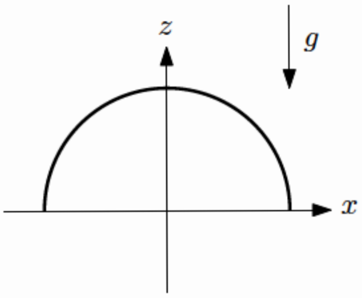
بسمه تعالی

آزمون اول نظری - دوره تابستان ۱۴۰۳

مدت آزمون : ۴ ساعت

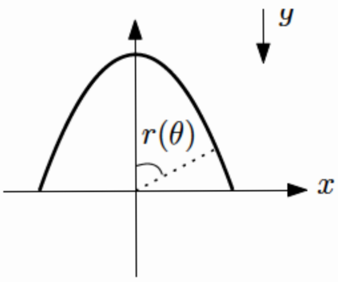
مسئله ۱

آ) چشمه‌ای از ذرات بسیار ریز به صورت نیمکره‌ای وارونه به شعاع ناچیز، مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید که به صورت همسانگرد ذرات را به اطراف می‌پاشد، یعنی تعداد ذرات خارج شده از واحد سطح کره در تمام جهت‌ها یکسان است. پس از طی یک مدت معین، تعداد N ذره ازسطح کره به اطراف پخش شده است. از اثر مقاومت هوا چشم بپوشید. ذرات در جهت شعاعی $\hat{r}$ خارج می‌شوند و اندازه سرعت همه آنها در هنگام خروج ازچشمه v_0 است. فرض کنید هر ذره تحت اثر شتاب گرانش g حرکتی پرتابی از مبدا مختصات انجام می‌دهد و بر سطح افق فرود می‌آید. چگالی سطحی ذرات پخش شده در سطح افق (تعداد ذرات در واحد سطح) را به صورت تابعی از فاصله از مرکز کره، ρ، به دست آورید.



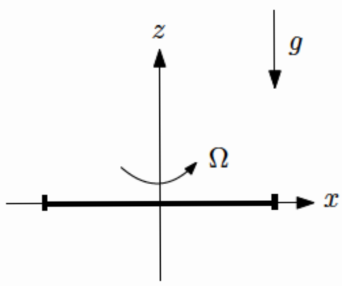
شکل ۱

ب) به جای نیمکره فرض قبل، سطح دواری در نظر بگیرید که در مختصات کروی با معادله $r = r(\theta)$ به ازای $0 \leq \theta \leq \pi/2$ داده شده باشد. در شکل ۲ مقطع چشمه در صفحه xz نشان داده شده است. کماکان چشمه را کوچک بگیرید طوری که بتوان فرض کرد که ذرات از مبدا مختصات با سرعت اولیه v_0 در راستای شعاعی $\hat{r}$ به اطراف پخش شده‌اند. در یک مدت معین، تعداد ذرات خارج شده از واحد سطح چشمه مقداری ثابت و برابر k است. می‌خواهیم $r(\theta)$ را چنان تعیین کنیم که چگالی سطحی ذرات در ناحیه پخش شده در سطح افق ثابت باشد. برای این امر معادله دیفرانسیلی که $r(\theta)$ باید از آن تبعیت کند را به دست آورید.

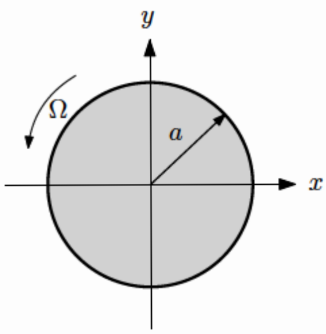


شکل ۲

پ) چشمه ذرات را در این حالت دایره‌ای افقی به شعاع متناهی a بگیرید که، در یک مدت معین، تعداد ذرات خارج شده از واحد سطح آن ثابت و برابر k است. اگر دایره ساکن باشد ذرات با سرعت اولیه v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شوند. دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور تقارن خود می‌چرخد و ذرات را در سطح افق پخش می‌کند. شکل ۳ چشمه دایره‌ای را از نمای نیمرخ و شکل ۴ نمای دستگاه را از بالا نشان می‌دهد. مرکز دایره را مبدا مختصات صفحه افقی xy بگیرید و چگالی سطحی ذرات پخش شده در آن را به صورت تابعی از فاصله محل پرتاب از مبدا، ρ، به دست آورید.



شکل ۳



شکل ۴

مسئله 2) درپوش باردار الکتریکی روی استوانه بسیار بلند

فرض کنید چگالی بار الکتریکی سطحی σ بر روی یک استوانه خیلی بلند (نیم‌بی‌نهایت) به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است. یک درپوش دیسکی شکل با همان شعاع استوانه و به جرم m روی آن قرار دارد. محور استوانه در امتداد قائم در راستای شتاب گرانش است. شتاب گرانش زمین را g در نظر بگیرید.

آ) اگر چگالی بار الکتریکی سطحی σ بر روی درپوش به طور یکنواخت توزیع شده باشد کمینه جرم درپوش باید چقدر باشد تا درپوش از روی استوانه نپرد؟

ب) در این بخش، درپوش را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید به طوری که چگالی بار الکتریکی سطحی بر روی این قسمت‌ها به طور یکنواخت و به صورت σ و 3σ (یک در میان) توزیع شده باشد کمینه جرم درپوش باید چقدر باشد تا درپوش از روی استوانه نپرد؟

پ) اگر درپوش مورد نظر به دو قسمت مساوی با چگالی بار الکتریکی یکنواخت سطحی σ و 3σ تقسیم شود در این صورت گشتاور مکانیکی اولیه که به درپوش وارد می شود را محاسبه نمایید.

راهنمایی : مرکز جرم یک جسم، یک نقطه مشخصی در جسم است و طوری رفتار می‌کند که گویی همه‌ی جرم آن جسم در آن نقطه متمرکز است. مرکز جرم فقط تابعی از مکان و جرم ذراتی است که جسم صلب را تشکیل می‌دهند. مرکز جرم یک نیم دیسکی با شعاع R برابر با فاصله $\frac{4R}{3\pi}$ از قطر نیم دیسک روی محور آن است. در این مساله، نیرو در هر قسمت را در مرکز جرم آن قسمت در نظر بگیرید.

$$\int x \sin x \ dx = \sin x - x \cos x$$

مسئله 3) نوسانات الکترون در حضور حلقه باردار الکتریکی

فرض کنید بار الکتریکی q روی حلقه ای به شعاع R به طور یکنواخت توزیع شده است.

آ) پتانسیل الکتریکی حلقه را در فاصله z از مرکز حلقه روی محور آن به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی حلقه را در راستای محور حلقه حساب کنید.

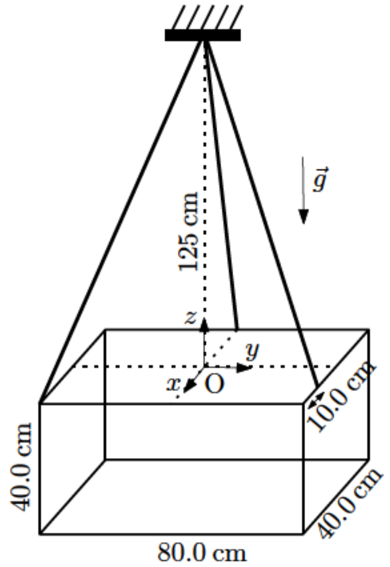
پ) در چه فاصله ای از مرکز حلقه روی محور آن، میدان الکتریکی بیشینه است؟

ت) یک الکترون به جرم m و بار $-e$ را در نقطه z از مرکز حلقه مفروض قرارمی‌دهیم با فرض $z \ll R$ ، علامت بار الکتریکی حلقه یعنی q را طوری تعیین کنید که منجر به حرکت نوسانی الکترون با سرعت زاویه ای ω_1 شود. مقدار ω_1 را تعیین کنید. فرض کنید حرکت الکترون تاثیری روی توزیع بار الکتریکی حلقه نداشته باشد.

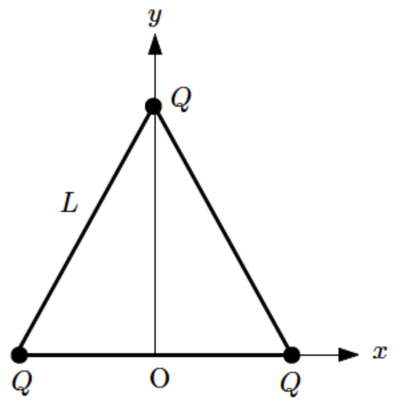
ث) در این بخش، فرض کنید الکترون مورد نظر در بخش (ت) در ابتدا در مرکز حلقه مفروض قرار دارد. بر اثر یک ضربه کوچک، الکترون در فاصله کوچک r از مرکز حلقه مورد نظر و در صفحه حلقه قرار می‌گیرد. با فرض $r \ll R$ ، علامت بار الکتریکی حلقه یعنی q را طوری تعیین کنید که منجر به حرکت نوسانی الکترون با سرعت زاویه ای ω_2 شود. مقدار ω_2 را تعیین کنید. فرض کنید حرکت الکترون تاثیری روی توزیع بار الکتریکی حلقه نداشته باشد و حرکت الکترون در صفحه حلقه مقید باشد.

راهنمایی: در حالتی که مقدار ϵ کوچک باشد عبارت زیر برقرار است: $(1+\epsilon)^n \sim 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \cdots$

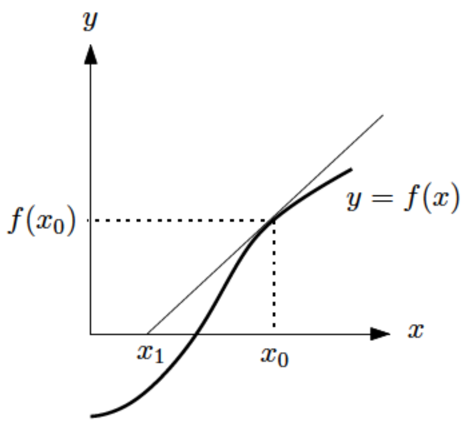
مسئله 4) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.



a) جسم مکعب مستطیل شکلی به جرم 75.0 kg و ابعاد 80.0 cm × 40.0 cm × 40.0 cm مطابق شکل، به وسیلهٔ سه طناب به نقطه‌ای آویزان شده است. فاصلهٔ نقطهٔ آویز تا نقطهٔ O مرکز وجه بالایی جسم 125 cm است. مکعب مستطیل افقی است، یعنی وجوه بالایی و پایینی آن موازی سطح زمین هستند. شتاب جاذبه را $9.80\ \mathrm{m/s^2}$ بگیرید. بردار نیروی کشش هر طناب را (با رعایت تعداد ارقام معنی‌دار) به دست آورید.



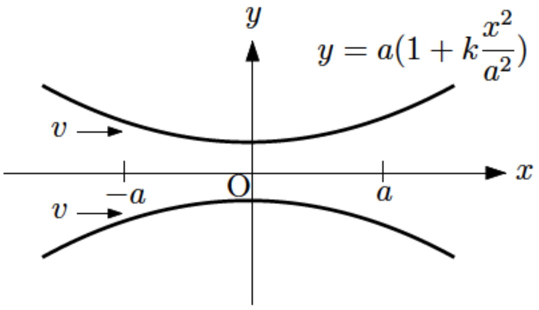
b) سه بار نقطه‌ای Q مطابق شکل بر روی رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع L نگه داشته شده‌اند. چهار نقطهٔ تعادل در صفحهٔ شکل وجود دارد. مختصات دکارتی آن‌ها را با دقت سه رقم معنی‌دار به دست آورید.



راهنمایی: با توجه به شکل برای به دست آوردن ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ کافی است از نقطه‌ای مانند x_0 شروع کنیم و با تکرار به جواب برسیم. در شکل مقابل، خط در نقطهٔ x_0 بر منحنی مماس است و لذا

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

مسئله 1) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.

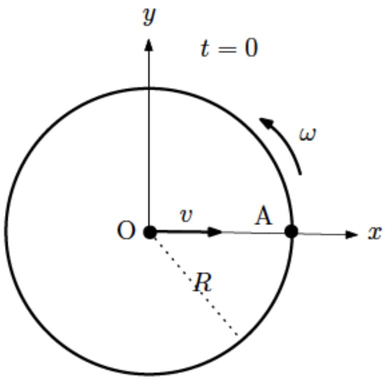


a) لوله‌ای در نظر بگیرید که مطابق شکل از دوران منحنی $y = a(1+k\frac{x^2}{a^2})$ حول محور x حاصل شده است. یک شارهٔ تراکم ناپذیر از چپ به راست داخل این لوله جریان دارد. فرض کنید k آنقدر کوچک است که می‌توان بردار سرعت ذرات شاره در هر مقطعی را موازی محور x فرض کرد.

اگر سرعت ذرات شارهٔ داخل لوله در تمام سطح مقطع لوله واقع در $x=-a$ برابر v باشد

آ) سرعت شاره در مقطعی از لوله واقع در مکان x در بازهٔ $-a \le x \le a$ چقدر است؟

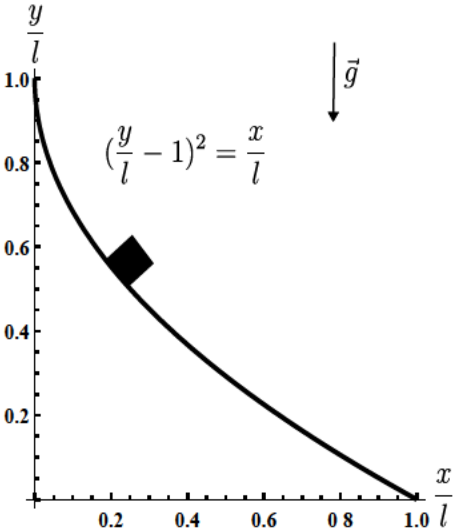
ب) چه مدت زمانی طول می‌کشد تا شاره مسافت بین دو نقطهٔ $-a$ تا a را طی کند.



b) متحرکی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω روی دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد. تعقیب‌کننده‌ای قرار است متحرک را تعقیب کند. در لحظهٔ $t=0$ مطابق شکل، متحرک در نقطهٔ A و تعقیب کننده در نقطهٔ O است. اندازهٔ سرعت تعقیب‌کننده همواره v $(v > R\omega)$ است و تعقیب به گونه‌ای انجام می‌شود که متحرک، تعقیب‌کننده و مرکز دایره در تمام زمان‌ها بر روی شعاع‌های دایره واقع‌اند.

آ) معادلهٔ مسیر تعقیب‌کننده را به دست آورید و آن را در صفحهٔ $x-y$ رسم کنید.

ب) چه مدت زمانی طول می‌کشد تا تعقیب‌کننده به متحرک برسد؟



مسئله 2)

جسمی به جرم m روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که تقاطع آن با صفحهٔ $z=0$ منحنی $(y/l-1)^2=x/l$ است می‌تواند بلغزد. در لحظهٔ $t=0$ جسم از نقطهٔ $(x=0, y=l)$ بدون سرعت اولیه رها می‌شود. فرض کنید جسم همواره در صفحهٔ $z=0$ باقی می‌ماند. در بازهٔ $0 \le x \le l$ در نقطهٔ دلخواه x:

آ) اندازهٔ سرعت جسم را به دست آورید.

ب) شتاب مماسی جسم را به دست آورید.

پ) شعاع انحنای مسیر را به دست آورید.

ت) شتاب جانب مرکز جسم را به دست آورید.

ث) نیروی وارد بر جسم از طرف سطح شیب‌دار را به دست آورید.

ج) زمان طی مسیر از لحظهٔ رها شدن جسم در نقطهٔ $(x=0, y=l)$ تا رسیدن به نقطهٔ $(x=l, y=0)$، T، را بر حسب انتگرالی به شکل

$$T=\int_0^l f(x)dx,$$

بنویسید. $f(x)$ را حتی‌الامکان ساده کنید.

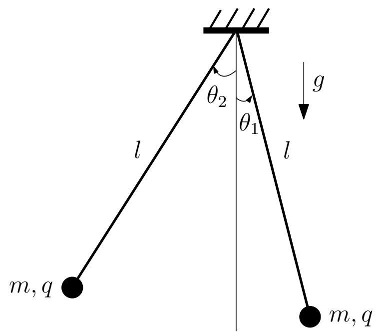
راهنمایی: اگر $\vec{r}(t)=x(t)\hat{\mathbf{i}}+y(t)\hat{\mathbf{j}}$ بردار مکان یک ذره بر حسب زمان t باشد بردار یکهٔ مماس بر مسیر $\hat{\mathbf{T}}=\frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ است که $\vec{v}(t)$ بردار سرعت لحظه‌ای و $v(t)$ اندازهٔ آن است. R شعاع انحنای مسیر برابر است با $\frac{1}{R}=\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right|$ که $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$.

بسمه تعالی

آزمون سوم نظری - دوره تابستان ۱۴۰۳

مدت آزمون : ۴ ساعت

سوال ۱)



در انتهای دو آونگ مشابه به طول l دو گلوله کوچک باردار مشابه به جرم m و بار q آویخته شده‌اند. در یک وضعیت دلخواه زاویه نخها با امتداد قائم به ترتیب θ_1 و θ_2 است که مطابق شکل در دو جهت مخالف سنجیده می‌شوند. نخها در یک صفحه قائم هستند.

آ) مبدا پتانسیل گرانشی را نقطه آویز بگیرید و انرژی پتانسیل دستگاه را بر حسب θ_1 و θ_2 به دست آورید.

ب) در وضعیت تعادل انرژی پتانسیل نسبت به θ_1 و θ_2 کمینه است. با حل معادلات کمینه‌سازی، زوایای θ_{01} و θ_{02} متناظر با این حالت را بر حسب زاویه معین θ_0 که از معادله خاصی تبعیت می‌کند، حساب کنید. معادله مربوط به θ_0 را مشخص کنید.

پ) حال فرض کنید $\theta_1 = \theta_{01} + \xi_1$ و $\theta_2 = \theta_{02} + \xi_2$ که ξ_1 و ξ_2 زوایای انحراف کوچک از وضعیت تعادل هستند. انرژی مکانیکی دستگاه را بر حسب ξ_1 و ξ_2 تا مرتبه دوم به دست آورید.
یادآوری:

$$\sin \xi = \xi + \cdots \qquad \cos \xi = 1 - \xi^2/2 + \cdots$$

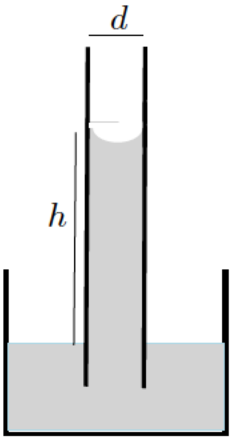
ت) حلی را در نظر بگیرید که در آن $\xi_2 = \xi_1$. با استفاده از عبارت انرژی، بسامد زاویه‌ای نوسان را برای چنین حلی به دست آورید. جواب را بر حسب داده‌های مسئله و θ_0 بیان کنید.

ث) حلی را در نظر بگیرید که در آن $\xi_2 = -\xi_1$. با استفاده از عبارت انرژی، بسامد زاویه‌ای نوسان را برای چنین حلی به دست آورید. جواب را بر حسب داده‌های مسئله و θ_0 بیان کنید.
توجه: لطفا فقط از روش گفته شده دینامیک مسئله را تحلیل کنید.

ج) در یک نوع حرکت ممکن دیگر، دستگاه به صورت آونگ مخروطی با بسامد زاویه‌ای ω حول محور تقارن خود می‌چرخد، به طوری که نخها همواره بر روی دو یال متقابل مخروطی به زاویه راس θ_r و ذرات بر روی دو سر یکی از قطرهای یک دایره باشند. معادله‌ای برای تعیین زاویه θ_r بیابید.

چ) دستگاه فوق قاعدتا باید ۴ مد حرکتی داشته باشد. چهارمین مد حرکتی را **با جملاتی کوتاه و دقیق داخل یک مستطیل توصیف کنید**. توجه داشته باشید که در جابه‌جایی‌های کوچک، مد جدید نباید ترکیبی از مدهای قبلی باشد. چنانچه این مد، حرکتی نوسانی است، بسامد زاویه‌ای آن را به دست آورید.

سوال 2) دو قسمت a) و b) از هم مستقل‌اند.



a) اگر لوله‌ای را داخل مایعی قرار دهیم مایع در لوله بالا می‌رود. میزان بالا رفتن مایع در لوله به قطر لوله، چگالی مایع، شتاب گرانش و کشش سطحی مایع بستگی دارد. این کمیت‌ها را به ترتیب با h، d، ρ، g و σ نشان می‌دهیم.

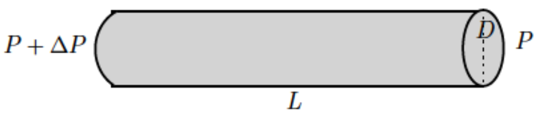
آ) با استفاده از تحلیل ابعادی کلی‌ترین رابطه‌ای که بین این کمیت‌ها می‌تواند برقرار باشد به دست آورید.

h(mm)	d(mm)
30	0.5
15	1.0
10	1.5
6	2.5
5	3.0

در دمای 20° C چگالی و کشش سطحی آب به ترتیب $998.3\,\mathrm{kg/m^3}$ و $0.0736\,\mathrm{N/m}$ است. در یک آزمایش با لوله‌های دارای قطر متفاوت نتایج مقابل به دست آمده است.

ب) با استفاده از مقادیر داده شده در جدول مقابل و استفاده از کاغذ میلی‌متری موجود در پاسخ‌نامه، رابطهٔ h با سایر کمیت‌ها را به دست آورید.

b) در شاره‌های متحرک، اصطکاک بین لایه‌های شاره با یکدیگر یا بین شاره و دیواره‌ای که شاره در مجاورت آن حرکت می‌کند به خاصیتی از شاره مربوط است که به آن گرانروی می‌گویند و در این مسئله آن را با η نشان می‌دهیم. به دلیل این که گرانروی آب خیلی از روغن کمتر است حرکت آب در یک لوله آسان‌تر از روغن می‌باشد. در این قسمت نیز از تحلیل ابعادی برای به دست آوردن جواب استفاده کنید.

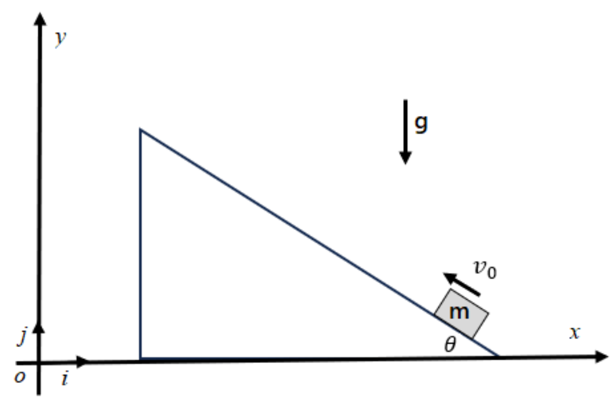


در دمای اتاق گرانروی آب $\eta = 1.0\times 10^{-3}\,\mathrm{N\cdot s/m^2}$ است. در یک آزمایش مشاهده شده است که اگر بین دو سر یک لولهٔ افقی به طول $L = 1.0\,\mathrm{m}$ و قطر $D = 1.0\,\mathrm{cm}$ اختلاف فشار $\Delta P = 150\,\mathrm{Pa}$ ایجاد شود در مدت یک دقیقه $2.2\,\mathrm{L}$ آب از سمت راست لوله بیرون می‌ریزد.

اگر این آزمایش را با لوله‌ای به طول $L = 0.50\,\mathrm{m}$، قطر $D = 2.0\,\mathrm{cm}$ و با گلیسیرین که گرانروی آن $\eta = 1.5\,\mathrm{N\cdot s/m^2}$ است انجام دهیم چه اختلاف فشاری بین دو سر لوله باید ایجاد شود تا در مدت یک دقیقه معادل حجم آب آزمایش اول، گلیسیرین از لوله بیرون ریخته شود؟

سوال 3) حرکت جسم روی سطح شیب‌دار اصطکاک‌دار

مطابق شکل، جسم کوچکی به جرم m از پایین سطح شیب‌داری با زاویه‌ی □ نسبت به افق با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاب می‌شود و سپس به نقطه اولیه برمی‌گردد. ضریب اصطکاک جنبشی این جسم با سطح شیب‌دار □ و شتاب گرانش زمین g است.



آ) مسافت و زمان تا نقطه برگشت در بالای سطح شیب‌دار (حالت رفت) را حساب کنید. زمان رفت را t_u درنظر بگیرید.

ب) کل مدت زمان رفت و برگشت جسم روی سطح شیب‌دار را حساب کنید. زمان برگشت را t_d درنظر بگیرید.

پ) اگر جسم m به مدت t حرکت کرده باشد بردار جابه‌جایی جسم m را نسبت به مبداء o از $t = 0$ تا t در دو بازه زمانی $0 < t < t_u$ و $t_u < t < t_u + t_d$ برحسب بردارهای یکه‌ی $\hat{\imath}$ و $\hat{\jmath}$ و کمیت‌های θ ، g ، μ ، v_0 و t به دست آورید.

ت) در کل مدت رفت یعنی t_u، چقدر گرما به واسطه اصطکاک تولید می‌شود؟

ث) در این بخش فرض کنید سطح شیب‌دار دارای جرم M است و با سطح افقی اصطکاک ندارد. پاسخ بخش‌های قبل را در این حالت به دست آورید.

سوال 4)

این مسئله دو بعدی است. دو جسم نقطه‌ای داریم که با یک میله نازک به طول ثابت L به هم وصل شده‌اند. طریقه حرکت این دو جسم به گونه‌ای است که اندازه‌ی سرعت جسم اول برابر مقدار v_1 و اندازه‌ی سرعت جسم دوم برابر v_2 است و جهت سرعت آنها عمود بر جهت میله و در یک جهت است. یعنی در حرکت، میله سمت چپ جسم اول و در سمت راست جسم دوم قرار می‌گیرد. ما این مجموعه را «**شیء**» می‌نامیم و مکان آن را با مرکز میله مشخص می‌کنیم. واضح است که اگر $v_1 = v_2$ باشد، **شیء** در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

الف) اگر دو اندازه سرعت v_1 و v_2 متفاوت باشند، **شیء** در مسیر دایره‌ای حرکت خواهد کرد. شعاع این دایره (فاصله از مرکز **شیء** تا مرکز دایره) چقدر است؟

حال فرض کنید، اندازه سرعت جسم اول و دوم، با مکانی که هر کدام از این اجسام در آن قرار گرفته‌اند تعیین می‌شود. زاویه‌ی جهت حرکت شیء با محور x را θ می‌نامیم. یعنی جهت حرکت **شیء** در جهت بردار $\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$ است که $\hat{x}$ و $\hat{y}$ بردارهای یکه در جهت x و y هستند.

ب) فضا به دو قسمت تقسیم شده است. اجسام در ناحیه‌ی $y < 0$ (ناحیه‌ی a) دارای اندازه سرعت v_a و در ناحیه‌ی $y > 0$ (ناحیه‌ی b) دارای اندازه سرعت v_b هستند. زاویه‌ی جهت حرکت **شیء** در فاصله دور از مرز و در ناحیه‌ی a برابر θ_a است و به سمت مرز حرکت می‌کند. بعد از عبور کامل **شیء** از مرز (در ناحیه‌ی b) زاویه‌ی جهت حرکت آن θ_b می‌شود. مقدار θ_b را به دست آورید.

حال فرض کنید که این اندازه سرعت وابسته به مکان، تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر از مکان است ($v = v\left(x,y\right)$). همچنین فرض کنید که طول **شیء** بسیار ناچیز است($L \to 0$).

پ) مقدار مشتق زمانی زاویه‌ی جهت حرکت **شیء**، $\dot{\theta}$، را به صورت تابعی از θ و مکان **شیء** به دست آورید. (2 نمره) (دقت کنید که تابع $v\left(x,y\right)$ و مشتقات آن، تابع مکان هستند و وجود آنها در جواب، به معنی تابعیت مکان است.)

در ادامه هدف حل معادله بالا و به دست آوردن θ در شرایط خاص است.

ت) فرض کنید که اندازه سرعت، فقط تابعی از x است و به y وابسته نیست. با حل معادله قسمت (پ) θ را (به صورت تابعی از مکان) به دست آورید. (مانند تمام معادلات دیفرانسیل مرتبه یک، جواب دارای یک ثابت نامعین است.)

ث) فرض کنید که اندازه سرعت، فقط تابعی از فاصله از مبدا مختصات، r، است و به زاویه‌ی $\hat{r}$ با محور x، φ، وابسته نیست. زاویه‌ی بین جهت حرکت **شیء** و $\hat{r}$ را ψ می‌نامیم. در این حالت، ψ را (به صورت تابعی از مکان) بیابید.

توضیحات ریاضی لازم:

$$\int \frac{dx}{x} = ln(x) + c$$

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = ln(\sin\theta) + c$$

$$\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta = -ln(\cos\theta) + c$$

سوال 5) پراکندگی ذرات پرانرژی از پتانسیل دو قطبی

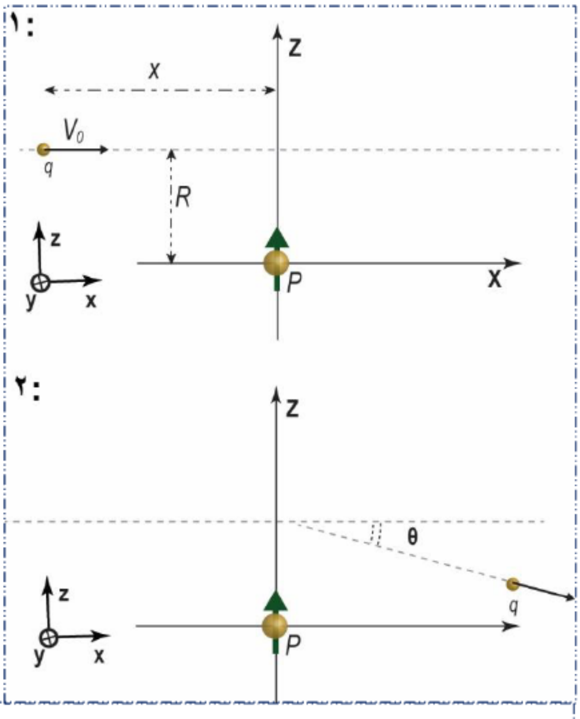
برای شناختن ذرات مجهولی که ساختار داخلی آن‌ها را نمی‌شناسیم، در بسیاری از موارد، شاری از ذراتِ شناخته‌شده را به ذره‌ی مجهول می‌تابانیم؛ آن‌گاه الگویِ پراکندگی این ذرات را از ذره‌ی مجهول بررسی می‌کنیم. بررسی الگوی پراکندگی، ابتدا پتانسیل برهم‌کنش میان هریک از ذرات پراکنده‌شده با ذره‌ی مجهول را به‌دست می‌دهد، و سپس این پتانسیل ابزاری برای مشخص‌کردن ساختار داخلیِ ذره‌ی مجهول می‌باشد. یکی از موارد پرکاربرد در چنین آزمایش‌هایی، برخورد با زاویه‌ی پراکندگی کوچک است. در این شرایط ذرات پراکنده، که آن‌ها را ذرات آزمون خواهیم نامید، سرعت و انرژی جنبشی بالایی دارند. هم‌زمان فرض می‌شود که ذره‌ی مجهول نیز جرمی بسیار بیش‌تری از ذرات پراکنده دارد. یعنی در طول آزمایش ذره‌ی مجهول در مکان خود ثابت است، و ذرات آزمون نیز مسیری نزدیک به یک خط راست را طی می‌کنند. درنتیجه، اثر پراکندگی تنها به صورت یک انحراف کوچک از مسیر اولیه می‌باشد؛ یعنی آزمایش‌گر مشاهده می‌کند که در فواصل دور، ذرات آزمون با زاویه‌ی انحراف θ نسبت به مسیر اولیه‌ی خود حرکت می‌کنند. در این‌جا ما به پراکندگی از یک پتانسیل دوقطبی می‌پردازیم؛ و در چندحالت ساده، اثر وجود دوقطبی را برمسیر یک تک ذره‌ی آزمون بررسی می‌کنیم.

فرض کنید دوقطبی الکتریکی $\vec{p} = P\hat{z}$، با جرم M در مرکز دست‌گاه مختصات قرارگرفته‌است. هم‌زمان یک ذره‌ی آزمون، با بار q، و جرم m (که $m \ll M$)، و با سرعت اولیه‌ی $\vec{V} = V_0\hat{x}$ از فاصله‌ی دور حرکت‌کرده و به دوقطبی نزدیک می‌شود. مسیر اولیه‌ی بارآزمون چنان است، که اگر هیچ برهم‌کنشی میان آن با دوقطبی وجود نمی‌داشت، با فاصله‌ی ثابت R از کنار دوقطبی عبور می‌کرد. در چهار بخش ابتدایی مسئله فرض می‌کنیم که مسیر اولیه‌ی ذره روی صفحه‌ی xz قرار داشته‌باشد، شکل مقابل.

هم‌چنان می‌دانیم پتانسیل الکتریکی دوقطبی شکل عمومی

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{P}.\hat{r}}{4\pi\varepsilon\, r^2}$$

را دارا می‌باشد. .



مسیر اولیه‌ی ذره آزمون خط راستی است که از فاصله‌ی R از کنار دوقطبی عبور می‌کند، شکل ۱. اما وجود بار آزمون موجب تغییر به مسیری پیچیده می‌شود. در نهایت (و در فواصل دور) مسیر بار آزمون به خطی راست مجانب می‌شود، که با مسیر اولیه‌ی زاویه‌ی θ می‌سازد. سه‌جهت x، y، و z روی شکل مشخص شده‌اند.

الف – با فرض این‌که ذره اساسا از مسیر اولیه‌ی خود منحرف نمی‌شود، یعنی بردار سرعت آن ثابت می‌ماند، Δp_z یعنی کلِ ضربه‌ی عمودی که دوقطبی به آن وارد می‌کند، را محاسبه نمایید. منظور از کلِ ضربه میزان آن از ابتدای مسیر آن تا انتهای آن (هردو در بی‌نهایت دور) می‌باشد. دقت کنید که این تنها نخستین جمله‌ی تقریب از میزان واقعی ضربه‌ای خواهدبود که در جهت عمود بر مسیر اولیه به ذره وارد می‌شود.

ب – حال، با استفاده بقای انرژی، مولفه‌های بردار سرعت ذره‌ی آزمون را در فواصل بسیار دور – بعد از برخورد با دوقطبی – محاسبه نمایید.

پ – زاویه‌ی انحرافِ θ را برای این حالت محاسبه نمایید. مشخص نمایید، فرض $\theta \ll 1$ چه قیدی روی شرایط اولیه‌ی مسئله می‌گذارد؟ این قید را به‌دست بیاورید.

ت – اگر مسیر اولیه‌ی بار آزمون به جای $+R$ بالاتر از مبدا مختصات، به اندازه‌ی R پایین‌تر از مبدا بود (یعنی محور zها را در $-R$ قطع می‌کرد) زاویه‌ی پراکندگی چگونه تغییر می‌کرد؟

دست آخر، فرض می‌کنیم، بدون تغییر در شرایط دوقطبیِ $\vec{p} = P\hat{z}$، یا بردارِ سرعت اولیه‌ی ذره‌ی آزمون، تنها مسیر اولیه‌ی ذره را جابه‌جا می‌کنیم، طوری‌که در ابتدا روی صفحه‌ی xy قرار بگیرد. در چنین حالتی:

ث – زاویه‌ی انحراف را محاسبه نمایید؟ مشخص کنید، که انحراف در کدام جهت (در فضای سه‌بعدی) رخ خواهد داد؟ قید زاویه‌ی کوچک پراکندگی به چه‌صورتی در خواهد آمد؟

راهنمایی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{n/2}} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\theta)^{n-2}\, d\theta = \begin{cases} 2, & n=3 \\ 4/3, & n=5 \\ 16/15, & n=7 \end{cases}$$