

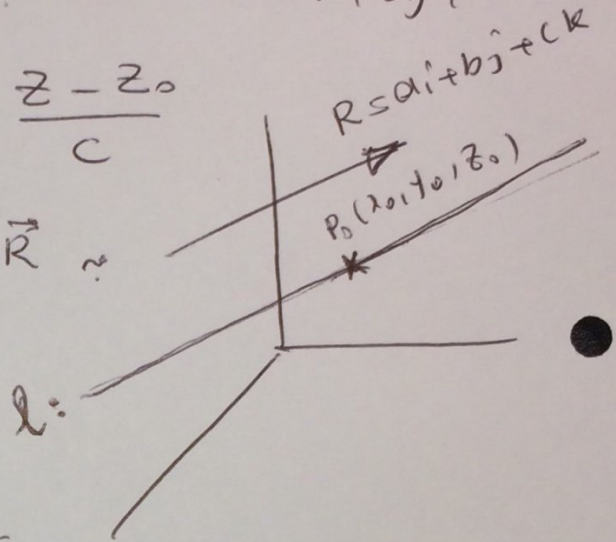
خط و صفحه

معادله متعامد خط گذرنده از نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ موازی بردار

$R = ai + bj + ck$ عبارت از:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

بر بردار هادی خط گفته می شود.



معادله متعامد خط گذرنده از P_0 با هادی $R = bj + ck$ عبارت از:

$$x = x_0, \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

معادله متعامد خط گذرنده از نقطه P_0 با هادی $R = ai + ck$ عبارت از:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}, y = y_0$$

معادله متعامد خط گذرنده از نقطه P_0 با هادی $R = ai + bj$ عبارت از:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, z = z_0$$

معادله پارامتری خط گذرنده از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ با هادی $R = ai + bj + ck$ عبارت از:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} = t \Rightarrow \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

← معادله پارامتری خط

(5x) معادله پاریسی و متساوی خط لایحه از (0, 1, -1) با هاری

حل: $R = zj - k$ را بنویسید:

$$x = 0, \frac{y-1}{2} = \frac{z-(-1)}{-1} \Rightarrow x = 0, \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

(6x) معادله پاریسی، اینها با هم بنویسید:

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{-y+1}{2} = \frac{z-3}{4}$$

$$2 \left(\frac{x + 1/2}{3} \right) = - \frac{(y-1)}{2} = \frac{z-3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{x - (-1/2)}{3/2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{4}$$

حل: خط لایحه از $(-\frac{1}{2}, 1, 3)$ با هاری $\frac{3}{2}i - 2j + 4k$

(5x) معادله متساوی خط لایحه از (1, 0, 1) و موازی بردار (1, 2, 1) را بنویسید:

حل:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$x = t + 1, y = 2t, z = t + 1; t \in \mathbb{R}$$

5x) معادله مستقیم و پارامتری خطی گذرنده از دو نقطه^۱ $(1, 2, -1)$

و $(0, 3, -2)$ ، بنویسید.

حل: فرض کنید

$$A(1, 2, -1)$$

$$B(0, 3, -2)$$

موردتقریباً
 $R = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)$ هم‌راهِ خطاً

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

معادله مستقیم خطی:

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

معادله پارامتری خطی:

معادله صفحه

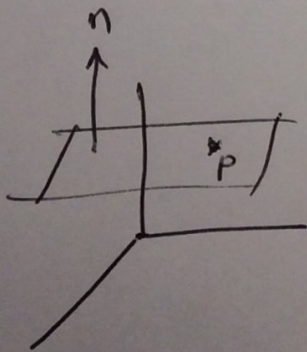
معادله صفحه‌ای که از نقطه^۱ $P(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد بر بردار

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

عمود است عبارتست از

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

به \vec{n} بردار نرمال صفحه گفته می‌شود.



پس از آن که بردار معادله را داریم عددی مثل d

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

$$\rightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{معادله صفحه به ازمانه})$$

کردن

220

۱۴۸. معادله صفحه گذرنده از نقطه $(2, 1, -1)$ و عمود بر بردار $(4, -2, 3)$ را بنویسید.

حل: $4(x-2) - 2(y-1) + 3(z-(-1)) = 0$

$$\Rightarrow 4x - 2y + 3z - 8 + 2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 2y + 3z = 3$$

۱۴۹. معادله $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ را نسبت به x در رسم کنید.

حل: معادله دایره‌ای است. محل برخورد این صفحه با محورها را

عبارت از

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \\ y = z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0, 0)$$

محل برخورد صفحه با محور x است.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \\ x = z = 0 \end{cases}$$

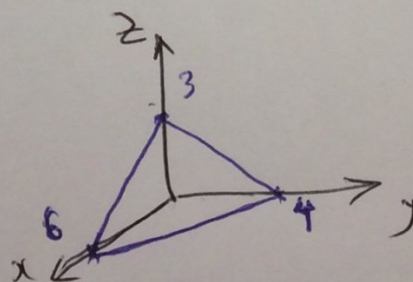
$$\Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4, 0)$$

محل برخورد صفحه با محور y است.

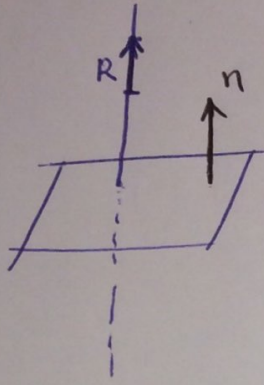
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 4z = 12 \Rightarrow z = 3 \rightarrow (0, 0, 3)$$

محل برخورد صفحه با محور z است.

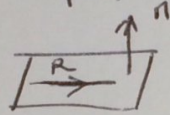
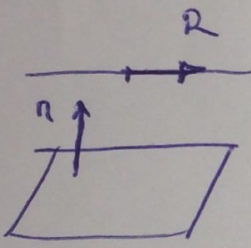


سوال: در صفحه صدی خط و صفحه برهم عمودند؟
 جواب: در صفحه صدی هاری خط زبرنال صفحه با هم موازی!



سوال: در صفحه صدی خط و صفحه با هم موازیند؟

جواب: در صفحه صدی هاری خط زبرنال صفحه برهم عمود باشند و در ضمن خط و صفحه با هم موازی.



(5x) خط $\frac{2x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{3z+1}{2}$ نسبت به صفحه $4x + 4y - 2z = 1$

و وضعیت دارد.

12 عمود بر صفحه

11 در صفحه

14 موازی آن با صفحه $\frac{11}{3}$

13 موازی صفحه ✓

$$\frac{x-1/2}{3/2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1/3}{2/3}$$

حل:

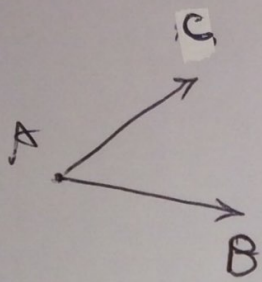
در صفحه $R = \frac{3}{2}i + 2j + \frac{2}{3}k$

در صفحه $n = 4i + 4j - 2k$

$$\bar{R} \cdot \bar{n} = \frac{12}{2} + 8 - \frac{42}{3} = 6 + 8 - 14 = 0$$

ضمناً نقطه $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3})$ از خط در صفحه صدی می‌گذرد. پس خط و صفحه برهم عمودند و موازی هم نیستند.

(5x) معادله صفحه که از سه نقطه A(0,0,1), B(1,2,-1), C(2,1,2) را می‌گذرد.



حل: بردار نرمال صفحه را به نظر برابر می‌گیریم

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

- $\vec{AB} = (1, 2, -2)$

- $\vec{AC} = (2, 1, 1)$

نقطه‌ای در صفحه

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2+2, -4-1, 1-4) = (4, -5, -3)$$

معادله صفحه که از سه نقطه A(0,0,1) می‌گذرد، نرمال \vec{n} عبارت است از

- $4(x-0) - 5(y-0) - 3(z-1) = 0$

$$4x - 5y - 3z = -3$$

(5x) $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$ خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ و $2x+3y+z=11$

مستقیمه‌ها را در هم قرار می‌دهیم تا به یک نقطه پیدا کنیم.

حل: جهت معادله \vec{r} را از \vec{u} و \vec{v} به دست می‌آوریم، سپس t و s را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t-1 \\ z = 3t \end{cases} \xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}} 2(2t+1) + 3(-t-1) + 3t = 11 \Rightarrow$$

25
 $4t - 3t + 3t + 2 - 3 = 11 \implies 4t = 12 \implies t = 3$

$(x = 2t + 1, y = -t - 1, z = 3t) \xrightarrow{t=3} (x = 7, y = -4, z = 9)$

عنی $(7, -4, 9)$ محل برخورد خط با صفحه مورد نظر است.

سطوح (یا رویه ها)

صورت کلی معادله یک سطح در فضای $F(x, y, z) = 0$

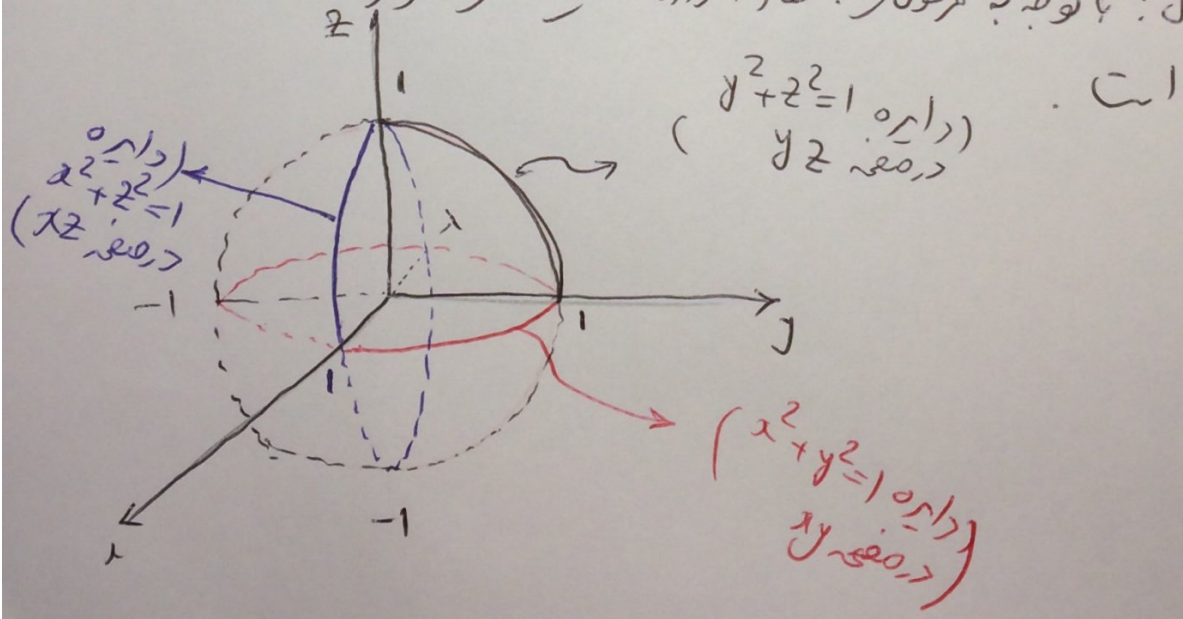
① معادله کره در فضای 3D

② کره: معادله یک کره با مرکز (a, b, c) شعاع $r > 0$ عبارتست از

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Ex) سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را شناسایی و رسم کنید.

حل: با توجه به فرمول کره، معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کره با مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع 1 است.



260

(5x) معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - \frac{1}{2} = 0$ را شناسایی کنید.

$$(x-1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 4$$

یک کره به مرکز $(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ و شعاع 2 است.

(5x) معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z + \frac{7}{2} = 0$ را شناسایی کنید. جواب: $(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

(5x) معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z + \frac{15}{4} = 0$ را شناسایی کنید. جواب: $(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

3 استوانه

فرض کنیم منحنی C، خط l در یک صفحه واقع نباشد. از حرکت دادن منحنی C در امتداد

خط l سطحی پدید می آید که آن استوانه گفته می شود. چون منحنی C هاری استوانه و

به خط l مولد استوانه گفته می شود. در این بین هازگاری بین لایضعات مختلف و مولد

محدود بر صفحه شامل هاری است. یعنی به هر ضلع:

(1) معادله $f(x, y) = 0$ در فضای استوانه ای است که هاری آن منحنی $f(x, y) = 0$ مولد آن محور z ها است.

(2) معادله $f(x, z) = 0$ در فضای استوانه ای است که هاری آن منحنی $f(x, z) = 0$ مولد آن محور y ها است.

(3) معادله $f(y, z) = 0$ در فضای استوانه ای است که هاری آن منحنی $f(y, z) = 0$ مولد آن محور x ها است.

تذکره: $f(x, y) = 0$ در صفحه xy منحنی است اما در فضای استوانه ای به شرح بالا.

$f(x, z) = 0$ در صفحه xz منحنی است اما در فضای استوانه ای به شرح بالا.

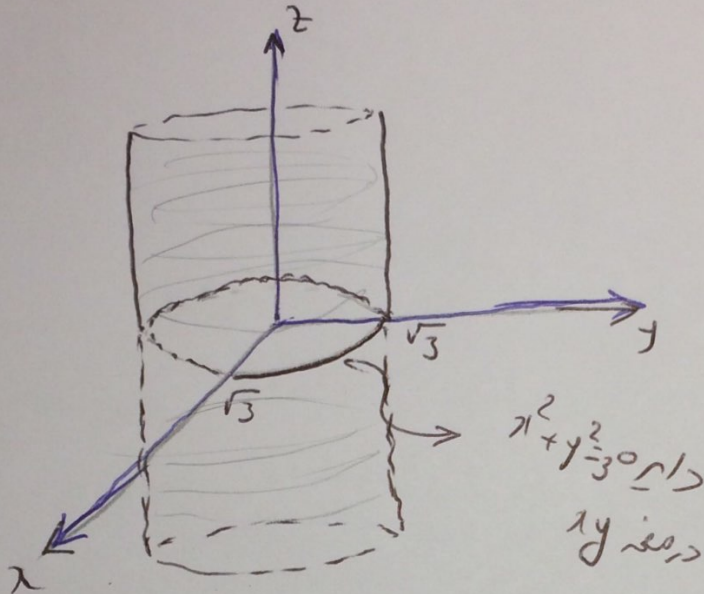
$f(y, z) = 0$ در صفحه yz منحنی است اما در فضای استوانه ای به شرح بالا.

* همینه در معادله استوانه جای یک متغیر خالی است و آن متغیر غایب همان مولد استوانه است * مرکز 27

(5x) معادله $x^2 + y^2 = 3$ را در فضا شناسایی در رسم کنید.

حل: با توجه به مطالب صفحه قبل $x^2 + y^2 = 3$ در فضای یک استوانه است که هدر آن

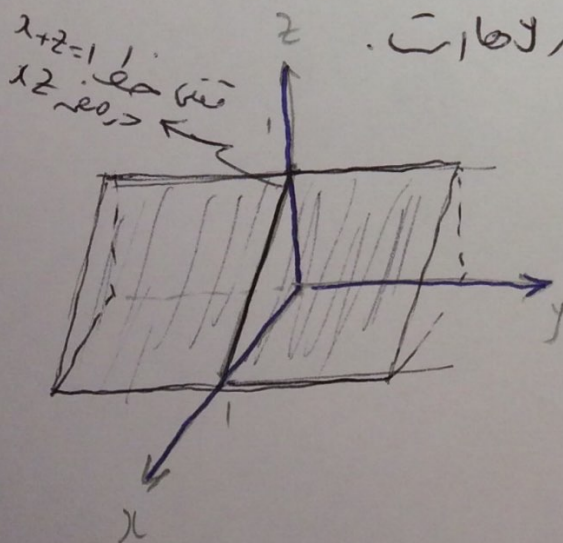
آن دایره $x^2 + y^2 = 3$ در صفحه xy است و مولد آن محور z ها است، شکل آن



(5x) معادله $x + z = 1$ را در فضا شناسایی در رسم کنید

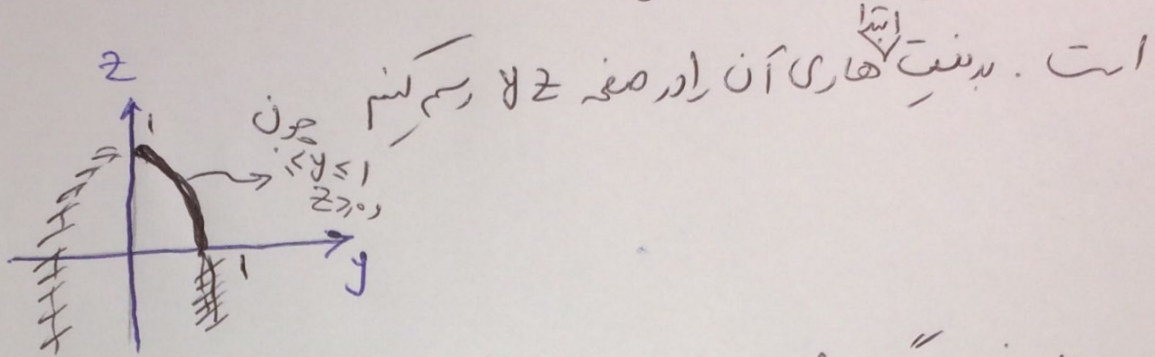
حل: جای x در معادله خالی است، پس معادله دایره است استوانه است که هدر آن

خط $x + z = 1$ در صفحه xz است، هدر آن هدر xy است.

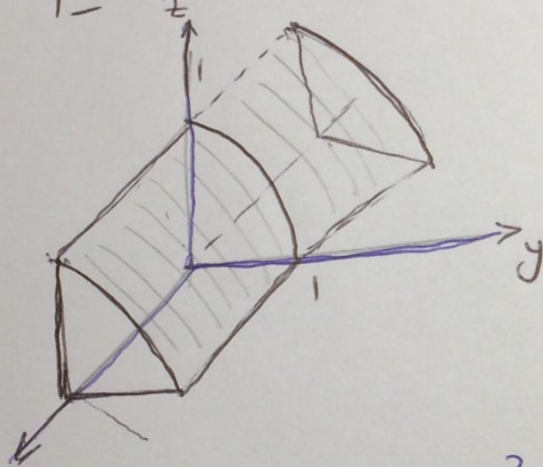


280
 معادله (4) معادله $z = 1 - y^2$ برای $z \in [0, 1]$ در فضای سه بعدی رسم کنید.

حل: جای متغیر z است، از این در معادله داریم: $z = 1 - y^2$ استوانه است. $z \geq 0$
 محور z ها و هاری آن منحنی $z = 1 - y^2$ برای $0 \leq y \leq 1$ را در صفحه yz یاد

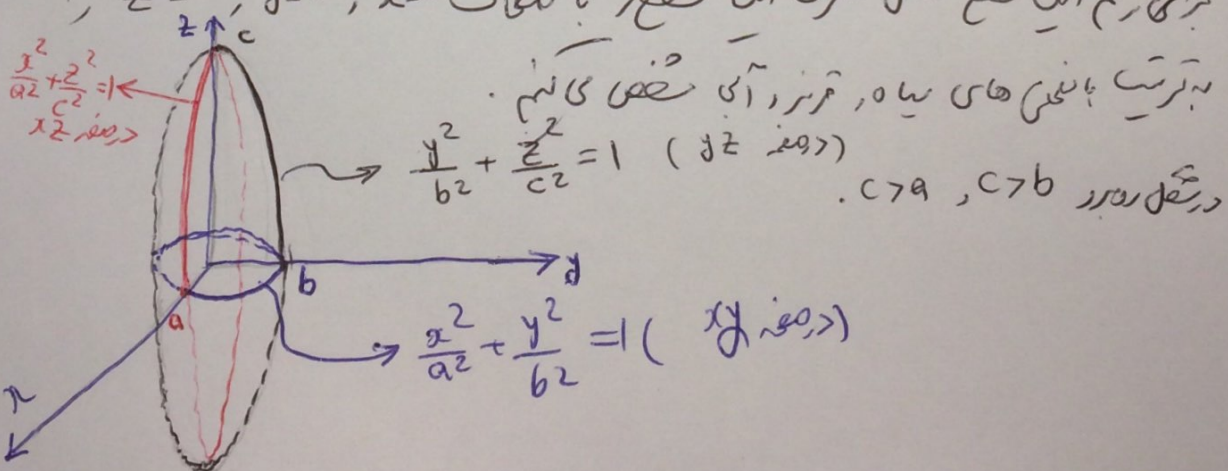


حال منحنی برزنت شده در صفحه yz را در استوار محور z ها حرکت می دهیم و سطح زیرین بدینوسیله



(4) بیضی گویان $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$)

برای رسم این سطح فضل سترک این سطح را با صفحات $x=0$, $y=0$, $z=0$

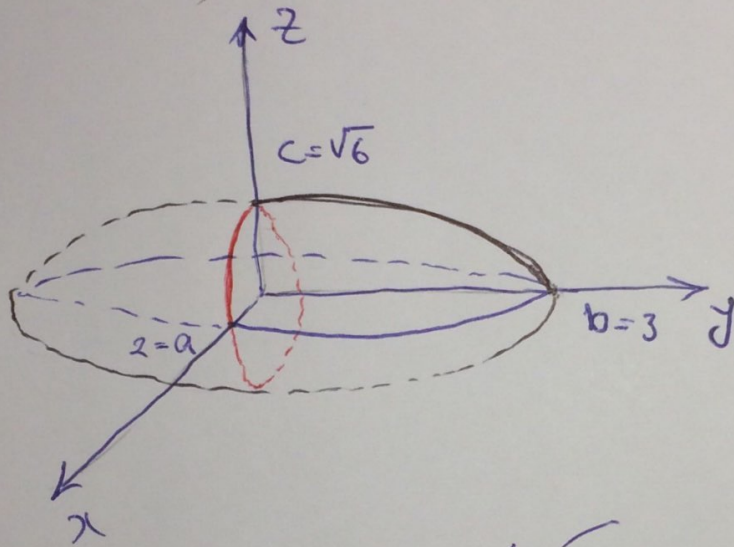


5X) معادله $9x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 36$ را شناسایی و رسم کنید

ح: فرض معادله را بر 36 تقسیم می کنیم و داریم

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6} = 1$$

که مطابق فرمول بیضگون است که $c = \sqrt{6}$, $b = 3$, $a = 2$ ($b > a, c$)



تبرین: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$ ، را شناسایی و رسم کنید.

5) هذلولی گون یکپاره $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$)

مانند مثال قبل عمل می کنیم یعنی ممحنی های حاصل از برش در سطح بالا و صفحات $z=0$ ،

$z=0$ ، $y=0$ ، $x=0$ را برش با ممحنی های بیضگون سیاه ترترتر را می بینیم یعنی بیضی

در صفحات موازی صفحه xy یعنی در صفحات $z = kc$

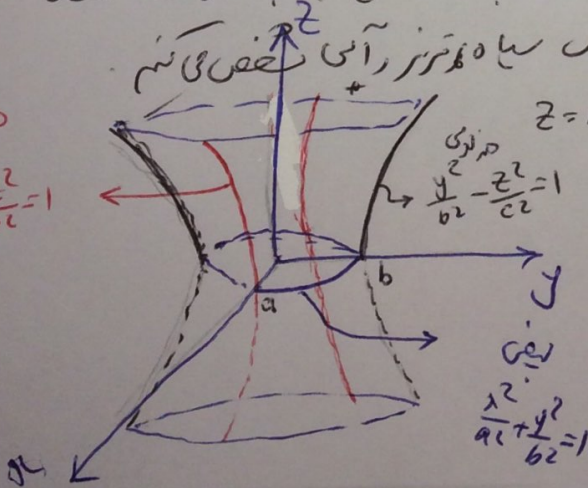
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

که برای هر k یک بیضی است که با دور شدن از

مبدأ این بیضی ها جاق تری شوند.

هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



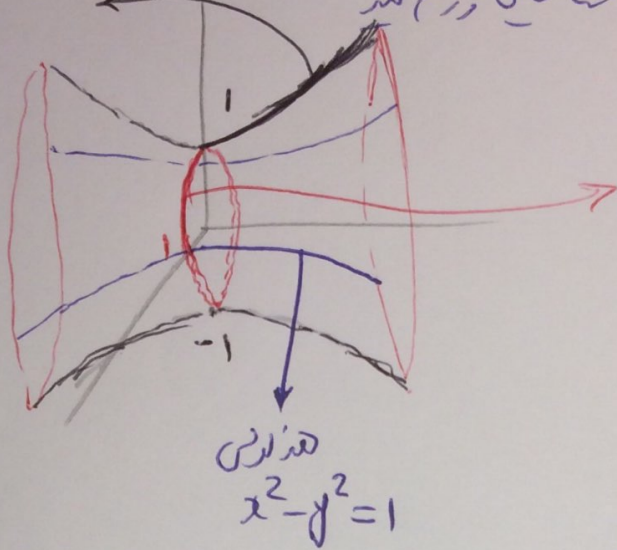
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

30

هذلولوی $-y^2 + z^2 = 1$

سطح $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ ، استایه در یک کتبه

(5A)



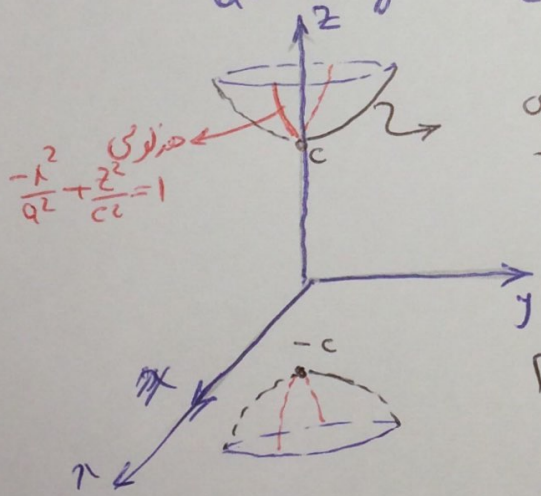
فایده $x^2 + z^2 = 1$

هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$

• تمرین : $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$ استایه در یک کتبه -

(a, b, c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(6) هذلولوی کتون دویا در سه



هذلولوی $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

هذلولوی $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

شکل قبل عمل می کنیم

• ایام کتبی های آبی رنگ چیستند؟

سطح دایره سه را با صفا $z = k$ تلاقی می دهیم و داریم

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$

اگر $\frac{k^2}{c^2} - 1 > 0$ فصل سترک سطح با $z = k$ یک بیضی است

عکس اگر $\frac{k^2}{c^2} > 1$ ، بیضی $c^2 > k^2$ یا $c > k$ یا $c < -k$ فصل سترک بیضی است

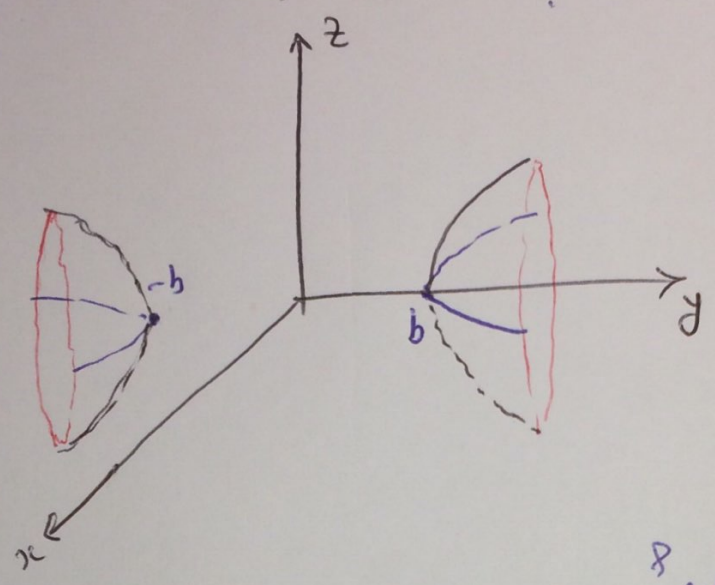
صفا بیضی های آبی رنگ که با دایره سه را با صفا جاق می شوند

اگر $\frac{k^2}{c^2} - 1 < 0$ عکس اگر $-c < k < c$ فصل سترک بیضی است

اگر $k^2 = c^2$ عکس اگر $k = \pm c$ فصل سترک دایره سه $(0,0,c)$ ، $(0,0,-c)$ است

می‌توانید حدس بزنید $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ چه شکلی دارد؟

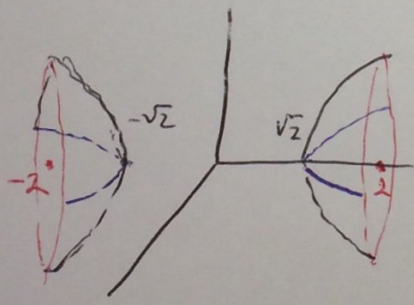
حل: همان شکل قبل است با این تفاوت که جای محورها عوض شود. یا مثل شکل زیر



پس معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ چه شکلی دارد؟

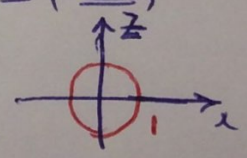
حل: در وقت نوشتن شکل صفحه 30 است. $-x^2 + y^2 - z^2 = -1$ را شباهتی داریم.

(5x) $-x^2 + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$ را شباهتی داریم.



مثلاً در صفحه $y=2, y=-2$ (معاوضه) زنگ را دیدیم آوردیم

$-x^2 + \frac{4}{2} - z^2 = 1$
 $x^2 + z^2 = 1$



یعنی دایره $x^2 + z^2 = 1$ (در مرکز (0,0)) شعاع 1 که در صفحات $y=2, y=-2$ دیده می‌شود

320

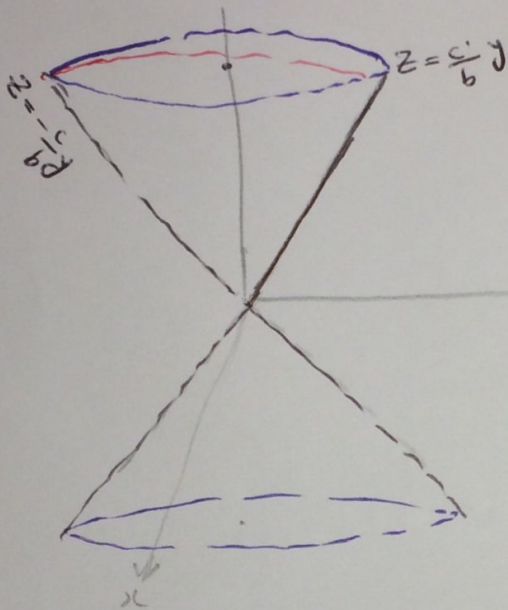
⑦ مخروط بیضوی

(a, b, c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}$

$\Rightarrow z = \pm \frac{c}{b} y$ (خطوط در صفحه yz)



$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$

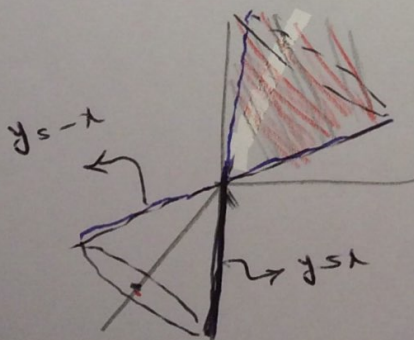
برای هر $k \neq 0$ بیضی است که با مرکز
از مبدأ حلقه‌های تری شوند. (بیضی‌های آبی)

سوال: مخروط بیضی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ و بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

⑤ $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ استای در ربع است

حل: $x = \sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow -x^2 + y^2 + z^2 = 0$

(این مخروط مطابق با سوال مطرح شده)



$\begin{cases} z = 0 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = \pm x$

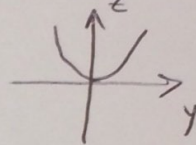
این وقت است که در $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ مقدار $x \geq 0$

به z و y یعنی قابل قبول است

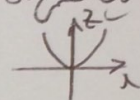
رسم کن، $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ (Ex)

⑧ سهمی کون بیضی (a, b > 0)
 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

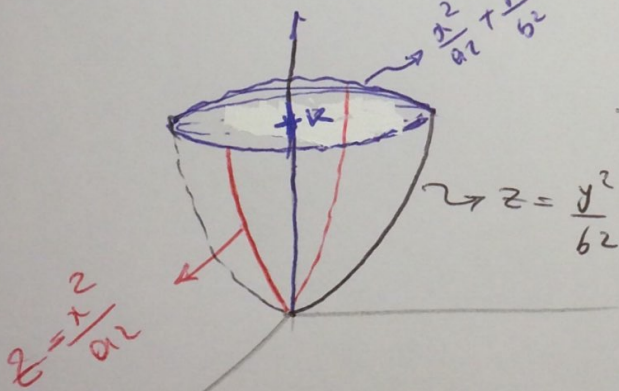
$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow z = \frac{y^2}{b^2}$ رسم کن سهمی در صفحه z-y



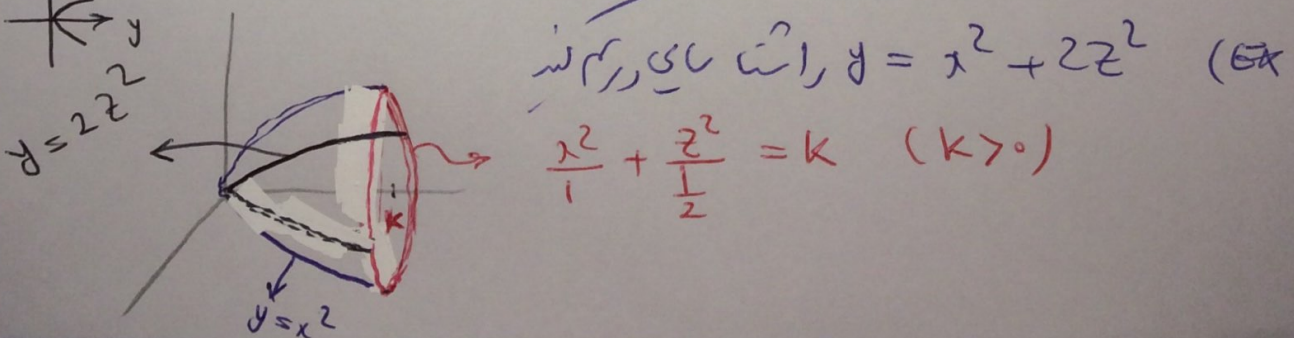
$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2}$ رسم کن سهمی در صفحه z-x



$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = k \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$
 برای $k > 0$ بیضی است
 برای $k < 0$ بیضی است
 برای $k = 0$ نقطه $(0, 0, 0)$

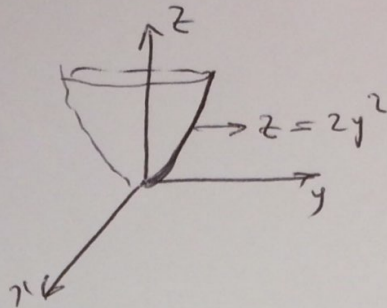


یا (d) $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$

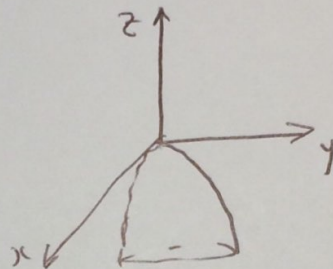


• ارسم لك $z = 1 - x^2 - 2y^2$ (5K)

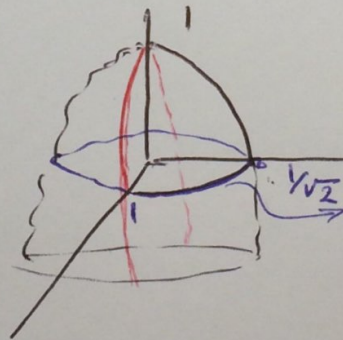
حل: $z = x^2 + 2y^2$ مع مراعاة $z = 1$



• ارسم لك $z = -(x^2 + 2y^2)$,



• ارسم لك $z = 1 - (x^2 + 2y^2)$,



$$x^2 + 2y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

• ارسم لك $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{9} = 1$ مع مراعاة $\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4}$ مع مراعاة (5K)

(4, 3, -2), (6, 3, 4) (2)

(-2, 6, 2), (4, 3, -2) -1 ✓

(4, 1, 1), (2, -6, -2) (4)

(-2, 6, 2), (-6, 3, 4) (3)