* **لاپلاس انتگرال:** فرض کنید $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$، در این صورت

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \stackrel{\text{یا}}{=} \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$$

یا

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Ex: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید

① $f(t)=\int_0^t e^x \cos 2x\,dx.$

حل: می‌دانیم

$$\mathcal{L}\{e^t\cos 2t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2+4}\ ,$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \stackrel{\text{لاپلاس انتگرال}}{=} \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^x\cos 2x\,dx\right\} = \frac{\mathcal{L}\{e^t\cos 2t\}}{s} = \frac{s-1}{s\left((s-1)^2+4\right)}$$

② $f(t)=\int_0^t x\cos x\,dx$

حل: می‌دانیم

$$\mathcal{L}\{t\cos t\} \stackrel{\text{مشتق لاپلاس}}{=} -\left(\mathcal{L}\{\cos t\}\right)' = -\left(\frac{s}{1+s^2}\right)' = -\frac{1+s^2-2s^2}{(1+s^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\ ,\quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t x\cos x\,dx\right\} = \frac{\mathcal{L}\{t\cos t\}}{s} = \frac{s^2-1}{s(s^2+1)^2}$$

P: A75

۱۵*) تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید.

① $F(s) = \dfrac{1}{s^3+s}$

حل: می دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

$$\frac{1}{s^3+s} = \frac{1}{s(s^2+1)} \quad , \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+1}}{s}\right\}$$

$$= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\Big|_{t=x} dx$$

$$= \int_0^t \sin x \, dx$$

$$= -\cos x\Big|_0^t$$

$$= -\cos t + \cos 0$$

$$= 1 - \cos t$$

راه دوم از تجزیه کسرها

$$\frac{1}{s^3+s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$1 = A(s^2+1) + Bs^2 + Cs \Rightarrow 1 = (A+B)s^2 + Cs + A$$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 0 = C \\ 0 = A+B \rightarrow B = -1 \end{cases} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$= 1 - \cos t$$

② $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+4)} = f(t)$ ؟

حل: می دانیم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2+4}}{s}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2x \, dx = \frac{-1}{4}\cos 2x\Big|_0^t$$

صفحه بعد →

$$= \frac{-1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s^2+4)}}{s}\right\} = \int_0^t \left(\frac{-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x\Big|_0^t = \frac{-1}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2(s^2+4)}}{s}\right\} = \int_0^t \left(\frac{-1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x\right)dx$$

$$= \frac{+1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x^2\Big|_0^t = \frac{1}{16}\sin 2t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16} = f(t)$$

---

* انتگرال لاپلاس: اگر $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ ، $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(v)\,dv$$

Ex

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\overbrace{1-e^{-t}}^{f(t)}}{t}\right\} \overset{\text{انتگرال لاپلاس}}{=} \int_s^\infty \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv.$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_s^b \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv = \lim_{b\to\infty} \ln v - \ln(v+1)\Big|_s^b$$

صفحه بعد

p:۴۷۷

$$= \lim_{b\to\infty} \operatorname{Ln} \frac{v}{v+1}\Big|_s^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{Ln} \frac{b}{b+1} - \operatorname{Ln}\frac{s}{s+1}$$

$$= \operatorname{Ln} 1 - \operatorname{Ln}\frac{s}{s+1}$$

$$= \operatorname{Ln}\frac{s+1}{s} = \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{s}\right).$$

نتیجه مهم از قضیه انتگرال لاپلاس :

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds.$$

برهان : بنابه قضیه قبل داریم

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(v)\,dv$$

و بنابه تعریف تبدیل لاپلاس

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty F(v)\,dv$$

کافیست در طرفین تساوی بالا قرار دهیم $s=0$ ، خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(v)\,dv$$

یا

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds.$$

P: A78

(EX) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

① $I=\int_0^\infty \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt \qquad (a,b>0)$

حل:

$$I \overset{\text{نتیجه}}{=} \int_0^\infty \mathcal{L}\{e^{-at}-e^{-bt}\}\,ds=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\lim_{u\to\infty}\int_0^u\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds=\lim_{u\to\infty} \operatorname{Ln}(s+a)-\operatorname{Ln}(s+b)\Big|_0^u$$

$$=\lim_{u\to\infty}\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}\Big|_0^u=\operatorname{Ln}1-\operatorname{Ln}\frac{a}{b}=\operatorname{Ln}\frac{b}{a}.$$

② $I=\int_0^\infty \dfrac{e^{-t}(1-\cos t)}{t}\,dt$

حل: $$I=\int_0^\infty \mathcal{L}\{e^{-t}-e^{-t}\cos t\}\,ds=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)ds$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)ds=\lim_{b\to\infty}\operatorname{Ln}(s+1)-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}((s+1)^2+1)\Big|_0^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\operatorname{Ln}\frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+1}}\Big|_0^b=\operatorname{Ln}1-\operatorname{Ln}\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{Ln}\sqrt{2}.$$

p: A 79

می دانیم

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

و در نتیجه

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t)\, dt \quad (a \in \mathbb{R})$$

انتگرال های زیر را محاسبه کنید (با استفاده از تبدیل لاپلاس)

① $I = \int_0^{\infty} e^{-2t} \sin t \, dt$

حل: می دانیم

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

و

$$I = F(2) = \frac{1}{5}$$

---

② $I = \int_0^{\infty} t^4 e^{-3t}\, dt$

حل: می دانیم

$$\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{4!}{s^5}$$

و

$$I = F(+3) = \frac{4!}{3^5} = \frac{4 \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{3} \times 3^4} = \frac{8}{81}$$

Scanned with CamScanner

P: A 80

③ $I = \int_0^\infty t\,e^{-t} \sin 2t \, dt = \int_0^\infty e^{-t} (t \sin 2t)\, dt$

حل :

شتق لابلاس

$$F(s) = \mathcal{L}\{t \sin 2t\} \overset{*}{=} -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)' = -\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$$

$$I = F(1) = \frac{+4}{5^2} = \frac{4}{25}.$$