بسمه تعالی

آزمون دوم المپیاد فیزیک (تابستان 1401)

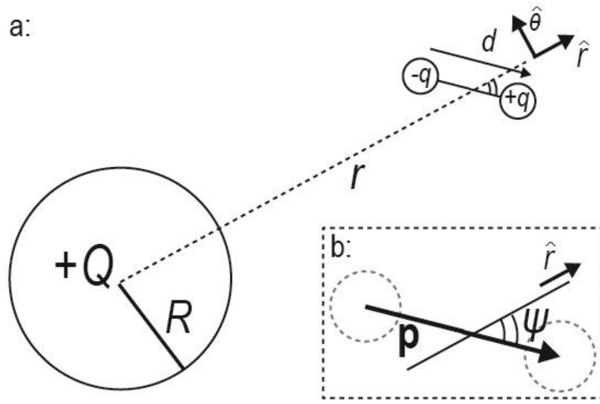
1401/5/28 مدت: 4 ساعت

1) تغییر فشارِ ناشی از دوقطبی ملکولیِ آب در حضور ذراتِ باردار

ریز ذراتِ پلاستیکی، بسیاری از پروتئین‌ها، و ... در داخل محیطِ آبی، بارِ خالصِ الکتریکی به‌دست می‌آورند؛ این یعنی عوامل بارداری (مثلا با بارِ کلِ $-Q$) از سطح آن‌ها جدا می‌شوند، و آنچه باقی می‌ماند، ذره‌ای با بارِ خالصِ $+Q$ خواهد بود. برای سادگی، چنین ذره‌ای را به‌صورت کره‌ای به شعاعِ R، و بارِ خالصِ $+Q$ ، در نظر می‌گیریم، که در داخل آبِ خالص غوطه‌ور است. و برای ساده‌گی بیشتر، از احتمال حضور هرنوع ماده‌ی یونی (مثلا نمکی که در آب حل شده‌باشد، یا برخی ملکول‌های آب که خود به OH^-، و H^+ تجزیه شده باشند) صرف‌نظر می‌کنیم. پس مسئله‌ی ما تنها از یک کره‌ی باردار تشکیل شده که در دریایی بی‌کران از آب غوطه‌ور است؛ یعنی محیطِ آبی از هرسو تا بی‌نهایت گسترش یافته‌است. در چنین حالتی، تنها راه برهم‌کنش کره‌ی باردار، با ملکول‌های آب، از طریق دوقطبی (و در تقریبِ بالاتر، چهارقطبیِ) ملکول‌های آب می‌باشد. ما می‌خواهیم اثر ناشی از برهم‌کنش کره‌ی باردار، با دوقطبیِ ذاتیِ ملکول‌های آب را در چند مرحله محاسبه‌نماییم. چگالیِ ملکولیِ آب (یعنی تعدادِ ملکول بر واحدِ حجم) را ρ_w فرض می‌کنیم.

۱ – فرض کنید یک دوقطبی الکتریکی مطابق شکل، در حضور میدان یک بارِ نقطه‌ای $+Q$ قرار دارد. در این‌صورت نیروی خالصی که از سوی بارِ نقطه‌ای به دوقطبی وارد می‌شود را محاسبه کنید. فرض کنید d، فاصله‌ی میان دو

بارِ مثبت و منفی در دوقطبی، بسیار کوچک‌تر از r، فاصله‌ی دوقطبی تا مرکزِ بار $+Q$ است، و جواب را در دوجهتِ $\hat{r}$، و $\hat{\theta}$ تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر (برحسبِ d/r) به دست آورید. (۴ نمره)



شکلِ ۱) **a:** دوقطبیِ الکتریکی $\vec{p}=q\vec{d}$ که در فاصله‌ی **r** از مرکز کره‌ی باردار قرار گرفته است. دقت کنید که بردارِ دوقطبیِ $\vec{p}$ از سمت بارِ منفی به مثبت می‌باشد. درون شکل **b:** زاویه‌ی میان بردارِ دو قطبیِ $\vec{p}$ با

در ادامه‌ی مسئله، و برای راحتی کار، فرض کنید که در تمام حالت‌ها $\psi = 0$ باشد. در این‌صورت نیرویی که به هرملکولِ آب وارد می‌شود، تنها در جهت بردار شعاعی خواهدبود.

۲ – دیفرانسیلِ حجم $dV = r^2 dr\, sin(\theta) d\theta\, d\varphi$ در کروی را درنظر بگیرید؛ در این‌جا r همان فاصله‌ی از مرکز کره‌ی باردار، θ زاویه‌ی قطبی، و ϕ زاویه‌ی سمتیِ دستگاه کروی می‌باشند. داخلِ این دیفرانسیلِ حجم پر از ملکول‌های آب است، نیرویِ خالص $d\vec{F}$ که از طرفِ کره‌ی باردار به دیفرانسیلِ حجمِ وارد می‌شود، را محاسبه نمایید. فرض کنید تمام ملکول‌های آب دو قطبیِ الکتریکیِ مساوی $\vec{P} = P_0\hat{r}$ را دارا می‌باشند (۱ نمره)

با توجه به نیروی خالصی که به هرالمان حجمِ آب وارد می‌شود، فشار آب در نقاط مختلف فضا متفاوت خواهد بود. اما از آن‌جایی‌که مسئله حولِ‌کره‌ی باردار تقارن کروی دارد، فشارِ آب تنها تابعی از فاصله از مرکز کره‌ی باردار خواهد بود، $\Pi = \Pi(r)$ (از حرف یونانیِ پی برای نشان دادنِ فشار استفاده می‌کنیم، تا با نمادی که برای دوقطبی الکتریکی انتخاب کرده‌ایم، اشتباه نشود).

۳ – با نوشتن تعادل نیروها برای المان حجم در بخشِ قبل، رابطه‌ی بین فشار در نقاط مختلف ($\Pi(r)$، و $\Pi(r+dr)$) با نیروی الکتریکی وارد بر دیفرانسیلِ حجم به‌دست بیاورید. (۲ نمره)

در مرحله‌ی نهایی از این واقعیتِ تجربی استفاده می‌کنیم، که (اصطلاحا) آب یک دی‌الکتریکِ خطی است؛ یعنی بردار دوقطبی در هرنقطه با میدان الکتریکی (که در غیابِ آن وجود می‌داشته‌است) متناسب می‌باشد: $\vec{P}_w = \alpha\vec{E}$. محاسبه‌ی دقیقِ α کار پیچیده‌ای است، که ما واردِ آن نمی‌شویم.

۴ – بُعد α را در دست‌گاه SI مشخص نمایید. (۱ نمره)

از سوی دیگر میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا، نه تنها ناشی از کره‌ی باردار، بلکه ناشی از اثر تک‌تکِ ملکول‌های آب نیز می‌باشد، که حالا هرکدام یک دوقطبی الکتریکی شده‌اند، و میدان مربوط به‌خود را ایجاد می‌کنند. اما می‌توان نشان داد که دست‌آخر تمام این اثرها خود را به صورت یک مقدار موثر برای α نشان می‌دهند، یعنی بعد از در نظر گرفتن تمامِ این اثرها، دوقطبی الکتریکی هر ملکولِ آب در حضور کره‌ی باردار به صورتِ $\vec{P}_w = \alpha'\vec{E}_0$ می‌باشد، که α' یک مقدار موثر است، و $\vec{E}_0$ میدان الکتریکی خالصِ کره‌ی باردار است. با فرض دانسته‌بودنِ α':

۵ – $\Pi(r)$ را به دست بیاورید. (۳ نمره)

راهنمایی: ممکن فرض‌هایی از مسئله صریح گفته نشده باشند، این برعهده‌ی خود شما است، که با دانش‌فیزیکی که آموخته‌اید، در هنگام حل تصویری سازگار و صحیح ارایه نمایید. درعینِ‌حال، درصورتِ نیاز می‌توانید از انتگرال‌های زیر استفاده نمایید:

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{cte},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{ArcTan}(x) + \mathrm{cte},$$

$$\int \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \mathrm{cte}.$$

2) در دورانِ جنگِ جهانیِ دوم وظیفه زیردریاییِ‌هایِ آلمانی حمله به کشتی‌هایِ تجاری بود. زیردریایی‌ها در آن دوران رویِ سطحِ آب مثل کشتی حرکت می‌کردند و وقتی لازم می‌شد کمی به زیرِ سطحِ آب می‌رفتند. البته زیرِ آب سرعتش کم‌تر بود و اگر کسی در سطحِ آب و بسیار نزدیک به زیردریایی بود می‌توانست آن را ببیند. تا مدتی زیردریایی‌ها موفق بودند و کشتی‌هایِ تجاری را غرق می‌کردند و از رسیدنِ آن‌ها به مقصد جلوگیری می‌کردند. وظیفه‌یِ کشتی‌هایِ جنگی‌یِ متفقین محافظت از کشتی‌هایِ تجاری و حمله به این زیردریایی‌ها بود. کشتی‌هایِ جنگی فقط وقتی زیردریایی در نزدیکی‌یِ‌شان بود می‌توانستند آن را مشاهده کنند و اگر به مکانی درست بالایِ زیردریایی می‌رسیدند می‌توانستند با رها کردنِ بمب آن را نابود کنند.

در یکی از روزهایِ جنگِ جهانی‌یِ دوم یک کشتی‌یِ جنگی از متفقین و یک زیردریایی‌یِ آلمانی که از دو جبهه‌یِ متخاصم بودند، هم‌زمان رویِ سطحِ آب و در فاصله‌ای بودند که می‌توانستند هم‌دیگر را ببینند. دستورالعملِ کاپیتانِ زیردریایی این بود که به زیرِ سطحِ آب برود و با بیش‌ترین سرعتِ ممکن در یک جهتِ تصادفی و در خطی مستقیم از منطقه دور شود. متفقین از دستورالعملِ کاپیتانِ زیردریایی‌یِ آلمانی و بیش‌ترین سرعتِ زیردریایی آگاه شده بودند ولی نمی‌دانستند که زیردریایی در چه جهتی حرکت می‌کند.

بیش‌ترین سرعتِ زیردریایی زیرِ آب را u و سرعتِ کشتی‌یِ جنگی را $v\ (v > u)$ و فاصله‌یِ اولیه‌یِ آن‌ها در سطحِ آب را ℓ بگیرید. هنگامی که زیردریایی زیرِ آب می‌رفت نمی‌توانست به عمقِ آب برود و هم‌واره در نزدیکی‌یِ سطحِ آب می‌ماند.

دستورالعملی به کاپیتانِ کشتی داده شد که چه‌گونه در مسیری حرکت کند که حتما زمانی در آینده درست بالایِ سرِ زیردریایی باشد.

می‌خواهیم ببینیم آن دستورالعمل چه بود؟ محلِ اولیه‌یِ زیردریایی را نقطه‌یِ O مبداِ مختصات

و محلِ اولیه‌یِ کشتی‌یِ جنگی را نقطه‌یِ A با فاصله‌یِ ℓ از آن و رویِ محورِ x بگیرید. زیردریایی به زیرِ سطحِ آب می‌رود در یک جهتِ تصادفی و شعاعی از نقطه‌یِ O با سرعتِ u دور می‌شود.

الفـ فرض کنید وقتی زیردریایی به زیرِ سطحِ آب رفت، کاپیتانِ زیردریایی در انتخابِ مسیرِ تصادفی بدترین تصمیمِ ممکن را بگیرد و مستقیم به طرفِ کشتی‌یِ جنگی بیاید. در این‌صورت کشتی‌یِ جنگی چه مدت باید صبر کند تا زیردریایی به زیرِ کشتی برسد؟

بـ اما قاعدتاً کاپیتانِ زیردریایی بدترین تصمیمِ ممکن را نمی‌گیرد و وقتی زیردریایی به زیرِ سطحِ آب رفت مستقیم در یک‌جهتِ تصادفی حرکت می‌کند. فرض کنید کاپیتانِ کشتی‌یِ جنگی این را می‌داند. در این‌صورت فکر می‌کنید کاپیتانِ کشتی‌یِ جنگی چه باید بکند تا بتواند پس از مدتی حتماً بالایِ سرِ زیردریایی باشد تا بتواند آن را غرق کند؟ دو بندِ زیر را در نظر بگیرید؟

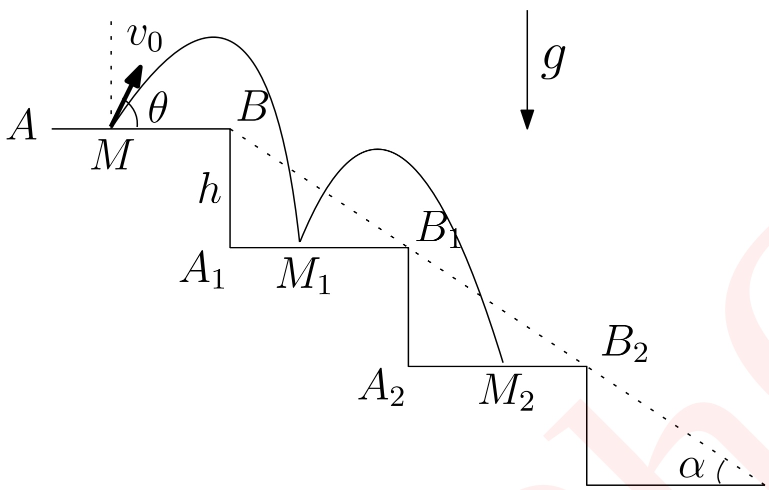
بـ۱ـ مسیرِ کشتی چه باید باشد؟

بـ۲ـ بردارِ سرعتِ کشتی بر حسبِ زمان چه باید باشد؟

راه‌نمایی: بخشی از دستورالعمل این بوده که کشتی مدتی سرِ جایِ خودش بایستد و سپس در مسیری خاص حرکت کند. اگر از دستگاهِ قطبی استفاده کنید مسئله ساده‌تر می‌شود.

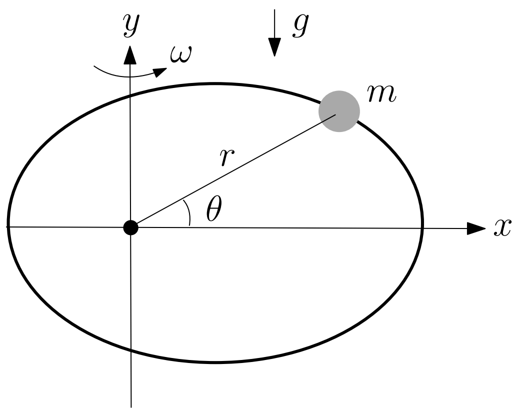
جـ حالا فرض کنید که کاپیتان زیردریایی هم از دستورالعملِ کاپیتان کشتی‌یِ جنگی مطلع می‌شد. در آن‌صورت چه گونه می‌توانست با آن مقابله کند؟

3) در شکل مقابل پلکانی با زاویه شیب کلی α نسبت به افق نشان داده شده است. شتاب گرانش g و ارتفاع هر پله h است. توپی را با سرعت اولیه v_0 و زاویه پرتاب θ نسبت به افق از نقطه M واقع بر پله AB، که آن را پله صفرم می‌گیریم، پرتاب می‌کنیم. فاصله نقطه پرتاب M از لبه B را l بگیرید. این توپ روی پله بعدی، پله A'B'، در نقطه M' فرود می‌آید. فرض می‌کنیم برخورد توپ با سطح طوری است که مولفه افقی سرعت قبل و بعد از برخورد یکسان است، اما نسبت اندازه مولفه قائم سرعت بعد از برخورد به اندازه مولفه قائم سرعت قبل از برخورد عدد e است که عددی کوچکتر از واحد موسوم به ضریب جهندگی است. این توپ در پله بعدی در نقطه M" فرود می‌آید و به همین ترتیب همه پله‌ها را یکی یکی طی می‌کند.



الف) مقادیر v_0 و θ را چنان تعیین کنید که ... =AM=A'M'=A"M'، یعنی حرکت در همه پله‌ها با مشخصات یکسانی تکرار شود. چه شرطی روی l باشد تا در ابتدای کار توپ روی همان پله صفرم فرود نیاید. (در صورت لزوم می‌توانید عبارت‌های بزرگ و تکراری را نام دهید و در جواب آخر مقدار آن‌ها را جاگذاری کنید.)

ب) فرض کنید زاویه پرتاب بخش الف را تغییر ندهیم، اما سرعت اولیه v_0 را به مقدار کوچک Δv_0 افزایش دهیم به طوری که $\Delta v_0/v_0 = \epsilon \ll 1$. فرض کنید توپ تا پله $(n-1)$ام به همه پله‌ها برخورد کند، اما پله nام را رد کند و با آن برخورد نکند. n را تعیین کنید. به ازای $e = 0.75$، $l = 0.8$AB و $\epsilon = 0.06$، n را حساب کنید.



4) مفتولی بدون اصطکاک به شکل بیضی در صفحه قائم xy قرار دارد. مبدا مختصات یکی از کانون‌های بیضی است. به این ترتیب معادله بیضی در مختصات قطبی به صورت $r = \dfrac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$ است که r_0 بعد طول دارد و ϵ عددی کوچکتر از یک موسوم به خروج از مرکز است. شتاب گرانش در جهت y- و اندازه آن g است. مهره‌ای به جرم m می‌تواند آزادانه روی مفتول جابه‌جا شود. دستگاه مفتول و مهره حول محور y با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد.

الف) فرض کنید در حالت تعادل، یعنی حالتی که مهره در امتداد قائم حرکت ندارد، مهره در زاویه قطبی ثابت θ_0 قرار دارد. سرعت زاویه‌ای ω را بر حسب θ_0 و سایر داده‌ها به دست آورید.

ب) نیروی مفتول روی مهره را بر حسب θ_0 و سایر داده‌ها به دست آورید.

ج) اگر در یک لحظه معین مهره در زاویه دلخواه θ، که با θ_0 متفاوت است، قرار داشته باشد و همراه مفتول با سرعت زاویه‌ای معلوم ω بچرخد، شتاب قائم مهره را بر حسب ω، θ و سایر داده‌ها به دست آورید.