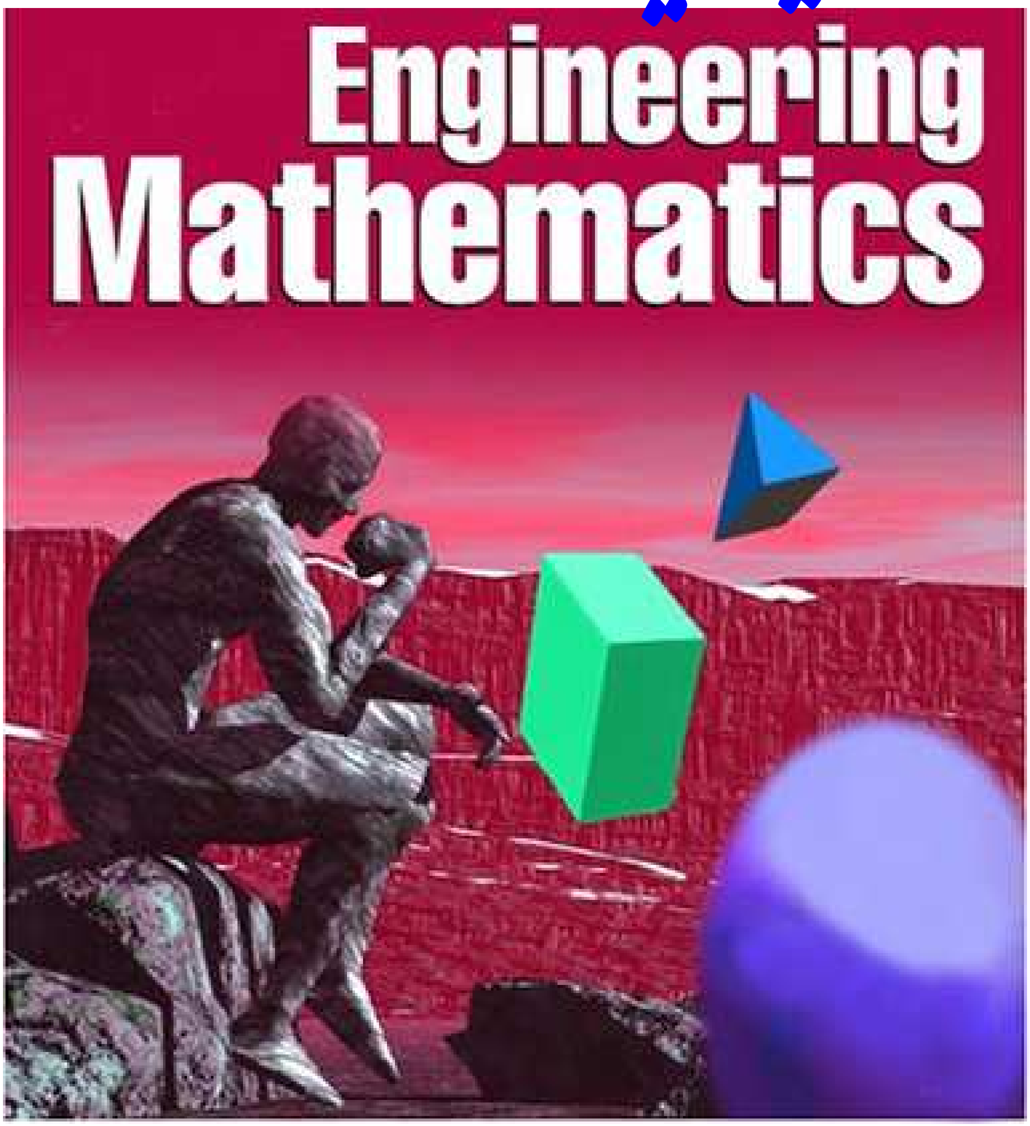
دانشگاه آزاد اسلامی واحد شبستر

آخرین ویرایش ۸۹/۰۴/۰۱

ریاضیات مهندسی



استاد ارجمند : جناب آقای دکتر پور رضا

تایپ : کمال حبیبی
www.boukanuni.com
habibi.kamal@yahoo.com

این جزوه بر روی سایت www.boukanuni.com موجود است.


بسم الله الرحمن الرحيم

فصل اول:

سری‌های فوریه و حل معادلات با مشتقات نسبی

فصل(۱) – سری‌های فوریه – حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی

۱-۱)تعریف : تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را متناوب می‌نامند هرگاه $T>0$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x+T)=f(x)$ و T را دوره تناوب می‌نامند .

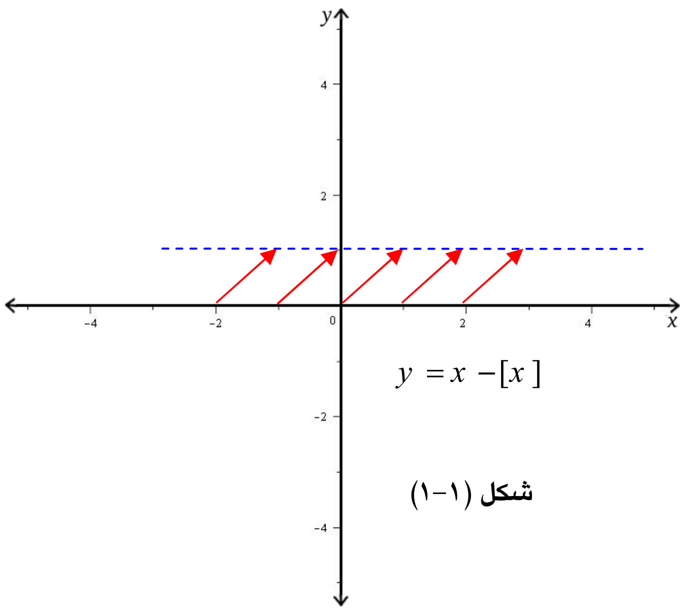
بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود که اگر T دوره تناوب f باشد $2T,....,nT\ ,\ n\in\mathbb{N}$ هم دوره تناوب می‌باشد زیرا می‌توان نوشت: $f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x)$ ، کوچکترین T را دوره تناوب اصلی می‌نامند.

به عنوان مثال $f(x)=\cos x\ ,\ f(x)=\sin x$ توابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T=2\pi$ می‌باشند .

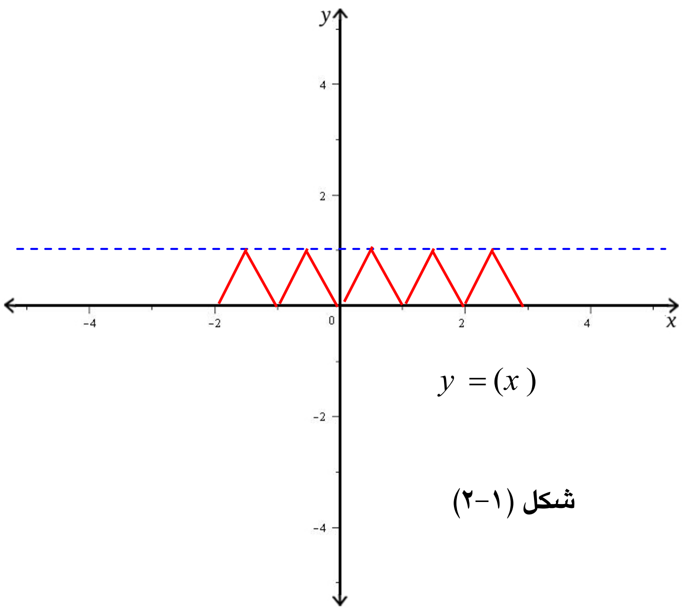
$y=tg\,x$ تابع متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ می‌باشد ، این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ تعریف نشده است ، نقاط $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ نقاط انفصال تابع هستند ولی متناوب می‌باشد .

تابع ثابت $y=c$ یک تابع متناوب است ، دوره تناوب آن هر عدد غیر صفر است ، زیرا اگر $T=a\neq 0$ داریم $y(x+a)=c=y(x)$ این تابع دارای دوره تناوب اصلی نیست .

تابع $y=x-[x]$ که در آن $[x]$ قسمت صحیح x است یک تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $T=1$ می‌باشد ، همچنین تابع (اره‌ای) یا نزدیکتر به عدد صحیح $y=(x)$ هم متناوب با دوره تناوب ۱ می‌باشد نمودار دو تابع آخر به صورت زیر می‌باشد :



شکل (۱-۱)

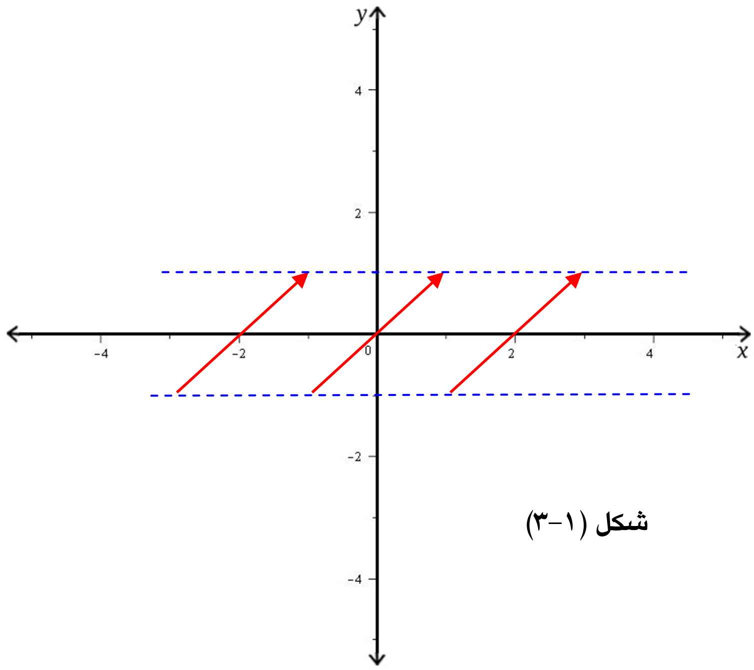


شکل (۱-۲)

از ضابطه توابع بالا مشخص بود که آنها متناوب هستند ، ولی در رشته‌های فنی و فیزیک بعضی وقتها با توابع متناوبی روبرو می‌شویم که ضابطه آنها متناوب بودن را نشان نمی‌دهند ولی تعریف توابع به گونه‌ای است که آنها متناوب هستند .

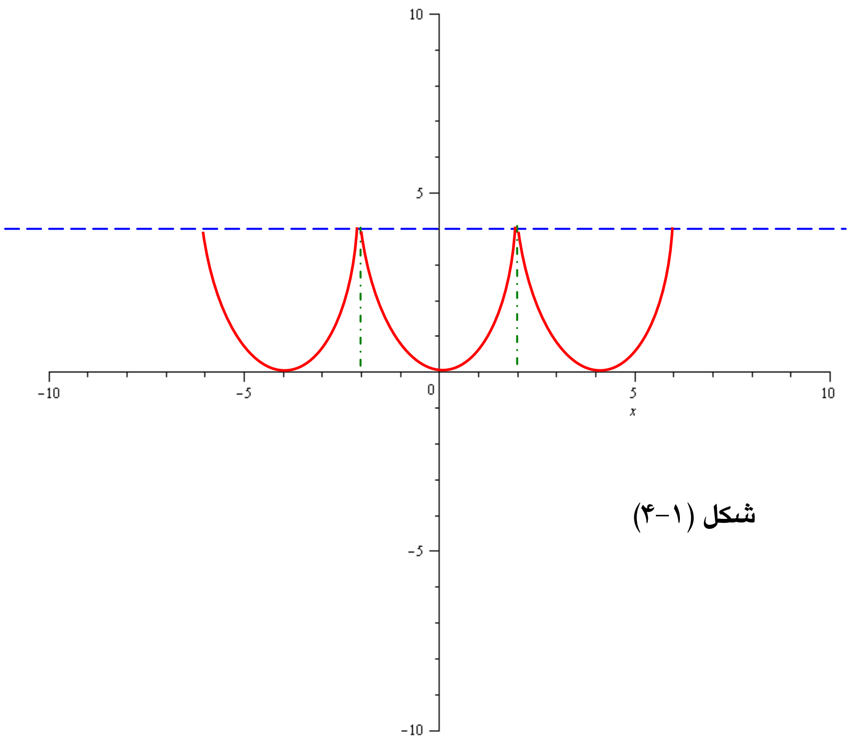
به عنوان مثال توابع زیر را در نظر می‌گیریم :

مثال ۱): $T=۲$ $-۱\leq x<۱$ $y=x$



شکل (۱-۳)

مثال ۱): $T=۴$ $-۲\leq x\leq ۲$ $y=x^{۲}$



شکل (۱-۴)

۱–۲) توجه : اگر T دوره تناوب اصلی $y=f(x)$ باشد آنگاه $y=f(\omega x)$ دارای دوره تناوب اصلی $\frac{T}{\omega}$ می‌باشد در واقع می‌دانیم $f(x+T)=f(x)$ و $f\left(\omega(x+\frac{T}{\omega})\right)=f(\omega x+T)=f(\omega x)$ پس $\frac{T}{\omega}$ دوره تناوب اصلی $y=f(\omega x)$ است .

۱–۳) محاسبه بعضی انتگرالهای توابع مثلثاتی :

ملاحظه می‌شود $f(x)=\cos\frac{nx\pi}{T}$ و $f(x)=\sin\frac{nx\pi}{T}$ توابع متناوب با دوره تناوب اصلی $۲T$ می‌باشند، کافی است آنها را در $n=۰$ و $n=۱$ مطالعه کنیم در $n=۰$ هر دو تابع، تابع ثابت $f(x)=۱$ و $f(x)=۰$ هستند و حکم برقرار است ، در $n=۱$ داریم : $f(x)=Sin\frac{\pi x}{T}$ و $f(x)=Cos\frac{\pi x}{T}$ اما چون دوره تناوب اصلی $Sin\,x$ و $Cos\,x$ برابر ۲π است پس با توجه به (۱–۲) داریم : $\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{T}}$ یعنی $۲T$ دوره تناوب اصلی $f(x)=Sin\frac{\pi x}{T}$ و $f(x)=Cos\frac{\pi x}{T}$ می‌باشد .

اکنون انتگرالهای زیر را محاسبه می‌کنیم:

الف $$\int_{-T}^{+T}\cos\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx=\begin{cases}۰ & m\neq n\\ T & m=n\end{cases}$$

ب $$\int_{-T}^{+T}\sin\frac{n\pi x}{T}\sin\frac{m\pi x}{T}dx=\begin{cases}۰ & m\neq n\\ T & m=n\end{cases}$$

ج $$\int_{-T}^{+T}\sin\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx=۰$$

برای محاسبه انتگرالهای فوق روابط مثلثاتی زیر را در نظر میگیریم:

$$۱)\quad \cos a\ \cos b=\frac{۱}{۲}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)$$

$$۲)\quad \sin a\ \sin b=\frac{۱}{۲}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$

$$۳)\quad \sin a\ \cos b=\frac{۱}{۲}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

بنابراین داریم :

اگر $m \neq n$

الف $$I=\int_{-T}^{+T}\cos\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}=\frac{1}{2}\int_{-T}^{+T}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{T}+\cos\frac{(n+m)\pi x}{T}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{n-m}\right)\sin\frac{(n-m)\pi x}{T}+\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{n+m}\right)\sin\frac{(n+m)\pi x}{T}\right)\Bigg|_{-T}^{+T}=0$$

اگر $m = n$

$$I=\int_{-T}^{+T}\cos^2\frac{n\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}\int_{-T}^{+T}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{T}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\right)\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)\Bigg|_{-T}^{+T}$$

$$=\frac{1}{2}\left(T-\frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\sin 2\pi n\right)+T+\frac{1}{2n}\left(\frac{T}{\pi}\sin(-2\pi n)\right)\right)=T$$

با همان روش داریم :

ب $$\int_{-T}^{+T}\sin\frac{n\pi x}{T}\sin\frac{m\pi x}{T}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ T & m=n\end{cases}$$

ج $$\int_{-T}^{+T}\sin\frac{n\pi x}{T}\cos\frac{m\pi x}{T}dx=0$$

۱–۴ – لم : هرگاه f یک تابع متناوب با دوره تناوب $2T$ و λ عدد دلخواه باشد آنگاه داریم :

$$\int_{-T+\lambda}^{T+\lambda}f(x)dx=\int_{-T}^{T}f(x)dx$$

برهان : داریم

$$\int_{-T+\lambda}^{T+\lambda}f(x)dx=\int_{-T}^{-T+\lambda}f(x)dx-\int_{-T}^{-T+\lambda}f(x)dx+\int_{-T+\lambda}^{T}f(x)dx+\int_{T}^{T+\lambda}f(x)dx$$

$$=\int_{-T}^{+T}f(x)dx-\int_{-T}^{-T+\lambda}f(x)dx+\int_{T}^{T+\lambda}f(x)dx$$

در انتگرال طرف راست تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$dx=du \qquad x=2T+u$$

پس داریم:

$$\int_{T}^{T+\lambda} f(x)dx = \int_{-T}^{-T+\lambda} f(2T+u)du = \int_{-T}^{-T+\lambda} f(u)du$$

با جایگذاری در رابطه بالا نتیجه می‌شود

$$\int_{-T+\lambda}^{T+\lambda} f(x)dx = \int_{-T}^{T} f(x)dx$$

اکنون هدف ما این است که تابع متناوب با دوره اصلی $2T$ را به صورت یک سری مثلثاتی بسط دهیم به عبارت دیگر فرض می‌کنیم $y=f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $2T$ باشد در اینصورت می‌خواهیم ضرایب a_0 و a_n ها و b_n ها به گونه‌ای محاسبه کنیم که داشته باشیم :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}$$

اگر همچون فرمولی موجود باشد برای محاسبه ضرایب سری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

از طرفین $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}$ انتگرال معین در بازه $2T$ و ۰ می‌گیریم :

$$\int_0^{2T} f(x)dx = \int_0^{2T} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{2T} a_n \cos\frac{n\pi x}{T}dx + \int_0^{2T} b_n \sin\frac{n\pi x}{T}dx\right)$$

$$= \frac{a_0}{2}(x)\Big|_0^{2T} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \frac{T}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{T}\Big|_0^{2T} + b_n\left(-\frac{T}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{T}\right)\Big|_0^{2T}$$

$$= a_0 T + 0 + 0 = a_0 T$$

$$\boxed{1)\quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)dx}$$

اکنون طرفین $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}$ را در $\cos\frac{m\pi x}{T}$ ضرب و در بازه $2T$ و ۰ انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{2T} f(x)\cos\frac{m\pi x}{T}dx = \int_0^{2T} a_0 \cos\frac{m\pi x}{T}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2T} a_n \cos\frac{m\pi x}{T}\cos\frac{n\pi x}{T}dx + \int_0^{2T} b_n \cos\frac{m\pi x}{T}\sin\frac{n\pi x}{T}dx$$

با توجه به فرمولهای الف و ب و ج داریم :

$$\int_0^{2T} f(x)\cos\frac{m\pi x}{T}dx = a_m T$$

$$\boxed{2)\ a_n = \frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx}$$

بالاخره طرفین $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}$ را در $\sin\frac{m\pi x}{T}$ ضرب و در بــازه $2T$ و ۰ انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{2T}f(x)\sin\frac{m\pi x}{T}dx=\int_0^{2T}a_0\sin\frac{m\pi x}{T}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2T}a_n\cos\frac{n\pi x}{T}\sin\frac{m\pi x}{T}dx+\int_0^{2T}b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\sin\frac{m\pi x}{T}dx$$

باز هم با توجه به فرمولهای الف و ب و ج داریم :

$$\int_0^{2T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx=b_nT$$

$$\boxed{3)\ b_n=\frac{1}{T}\int_0^{2T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx}$$

* فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ را ضرایب فوریه یا اویلر – فوریه می‌نامند .

تعریف : هرگاه $y=f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب اصلی $2T$ باشد سری

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$$

را سری فوریه یا بسط تابع $f(x)$ به صورت سری فوریه می‌نامند که در آن a_n ها و b_n ها از روی فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ محاسبه می‌شوند.

قبل از اینکه بررسی کنیم چه نوع توابع دارای بسط به سری فوریه هستند به چند مثال می‌پردازیم :

مثال ۱) : تابع $f(x)$ با ضابطه زیر تعریف شده است بسط آن را به سری فوریه بدست آورید؟

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<5\\ 3 & 5\le x<10\end{cases}\qquad 2T=10$$

حل : با توجه به فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ داریم :

$$2T=10\ \Rightarrow T=5$$

$$a_0=\frac{1}{5}\int_0^{10}f(x)dx=\frac{1}{5}\left(\int_0^{5}f(x)dx+\int_5^{10}f(x)dx\right)=\frac{1}{5}\left(\int_0^{5}0dx+\int_5^{10}3dx\right)$$

$$=\frac{1}{5}(0+3x\Big|_5^{10}=\frac{1}{5}(3(10-5))=\frac{1}{5}(15)=3\ \Rightarrow a_0=3$$

$$n\neq 0$$

$$a_n=\frac{1}{5}\int_0^{10}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{1}{5}\left(\int_0^{5}0\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\int_5^{10}3\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(0+3(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_5^{10}\right)=\frac{15}{5n\pi}(\sin 2\pi n-\sin n\pi)=0$$

$$b_n = \frac{۱}{۵}\int_{۰}^{۱۰} f(x)\sin\frac{n\pi x}{۵}dx = \frac{۱}{۵}\left(\int_{۰}^{۵} ۰\sin\frac{n\pi x}{۵}dx + \int_{۵}^{۱۰} ۳\sin\frac{n\pi x}{۵}dx\right)$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۰ + \frac{-۳\times ۵}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{۵}\Big|_{۵}^{۱۰}\right) = \frac{-۳}{n\pi}(\cos ۲n\pi - \cos n\pi) = \frac{-۳}{n\pi}(۱-\cos n\pi)$$

پس داریم

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{۵} + b_n \sin\frac{n\pi x}{۵} = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۱-\cos n\pi)}{n}\sin\frac{n\pi x}{۵}$$

اما داریم

$$۱-\cos n\pi = \begin{cases} ۲ & n = ۲k+۱ \\ ۰ & n = ۲k \end{cases}$$

پس

$$\boxed{f(x) = \frac{۳}{۲} - \frac{۶}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{۵} + \frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi x}{۵} + \frac{۱}{۵}\sin\frac{۵\pi x}{۵} + \cdots\right)}$$

مثال۲): بسط فوریه تابع $f(x)$ را که با ضابطه زیر داده شده است را بدست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ۰ < x \le \pi \\ ۰ & \pi \le x < ۲\pi \end{cases}$$

حل: داریم

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(x)dx$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{۰}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{۲\pi} f(x)dx\right)$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\left(\int_{۰}^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{۲\pi} ۰dx\right)$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}(-\cos x]_{۰}^{\pi} = \frac{۱}{\pi}(۱+۱) = \frac{۲}{\pi}$$

$n \neq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \ \cos nx \ \ dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(+\frac{1}{1+n}\cos(1+n)\pi + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)\pi + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n+1} + \frac{\cos n\pi}{-n+1} + \frac{2}{1-n^2}\right)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{1-n^2}\right)} \Rightarrow a_n \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{1-4k^2} & n = 2k \qquad n \neq 1 \end{cases}$$

برای $n = 1$ داریم

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \ \ \cos t \ \ dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi} = 0}$$

بالاخره داریم

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \ \ \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n}\sin(1-n)x - \frac{1}{1+n}\sin(1+n)x\right]_0^{\pi} \qquad n \neq 1 \qquad b_n = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \ \ \sin x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right) = \frac{1}{2}$$

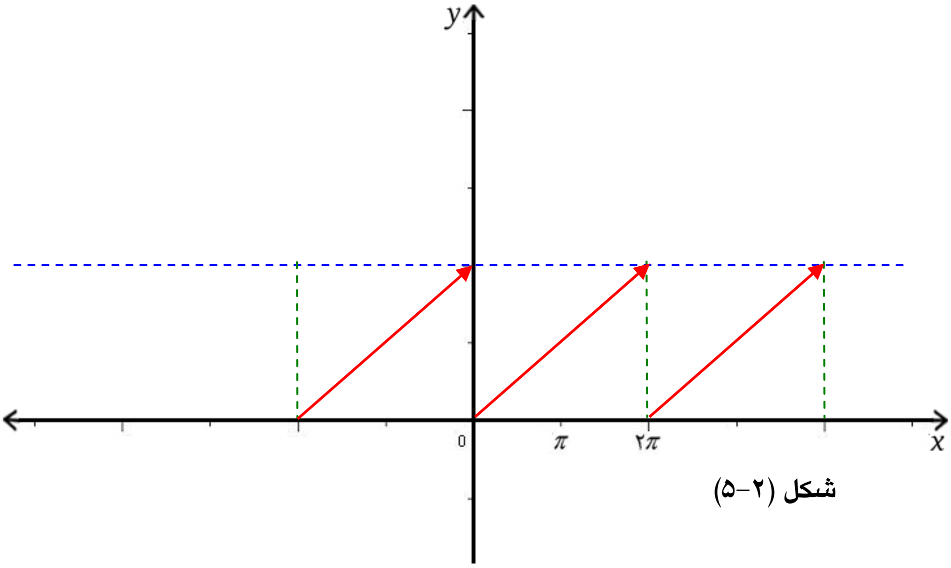
پس داریم

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\sin t}$$

مثال ۳) : بسط تابع زیر را بر حسب سری فوریه بدست آورید ؟

$$f(x) = x \qquad 0 \le x < 2\pi$$

$$2T = 2\pi$$



شکل (۲-۵)

حل : طبق معمول داریم :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}\right) = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx \qquad \begin{cases} x = u & \Rightarrow dx = du \\ \cos nx\,dx = dv & \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

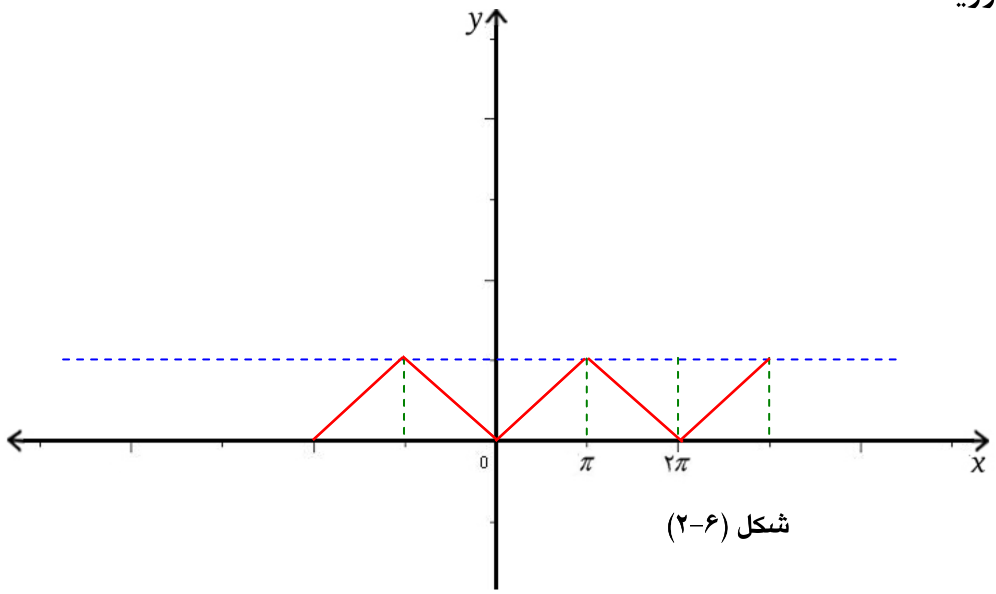
$$\pi a_n = x\,\frac{1}{n}\sin x\,\bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx = 0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\,\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2}(\cos 2\pi n - \cos 0) \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx \qquad \begin{cases} x = u & \Rightarrow dx = du \\ \sin nx\,dx = dv & \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$\pi b_n = -x\,\frac{1}{n}\cos nx\,\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx = -\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi + 0 + \frac{1}{n^2}\sin nx\,\bigg|_0^{2\pi} \quad \boxed{\Rightarrow b_n = -\frac{2\pi}{n}}$$

$$\boxed{f(x) = \pi + 2\sum_{n=2\pi}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}$$

مثال ۴): بسط به سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x\le 0\\ x & 0<x\le\pi\end{cases}$ را با دوره تناوب 2π بدست آورید ؟



شکل (۶-۲)

حل :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-xdx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}+0\right)\Rightarrow\boxed{a_0=\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{1}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+x\frac{1}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{+2}{\pi n^2}(\cos nx-1)\qquad a_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2} & n=2k+1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{-\pi}x\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)$$

اما داریم :

$$\int_{0}^{-\pi}x\sin nx\,dx=-\int_{0}^{+\pi}x\sin nx\,dx$$

کافی است تغییر متغیر $x=-u$ را انتخاب کنیم

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx\right)=0$$

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}}$$

مثال ۵): بسط فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & 0\le x\le 2\\ 1 & 2<x\le 4\end{cases}$ **را بست آورید ؟** $(2T=4)$

حل:داریم:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 -1dx+\int_2^4 dx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(-x\Big|_0^2+x\Big|_2^4\right)=\left((-2)+(4-2)\right)=0$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2-\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4\right)=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}-0\right)+\frac{2}{n\pi}\left(\sin 2n\pi-\sin n\pi\right)\right]=0$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2-\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2\right)+\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_2^4\right)\right]$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\cos n\pi-\frac{2}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos 2n\pi+\frac{2}{n\pi}\cos n\pi\right)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi-\frac{4}{n\pi}\right)=\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$b_n=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{4}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

بنابراین داریم :

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)2}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x/2}{1}+\frac{\sin 3x/2}{3}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x/2}{2k+1}+\cdots\right)}$$

اکنون به قضیه زیر می‌پردازیم که شرایطی را اعلام می‌کند که چه نوع تابع دارای بسط به سری فوریه می‌باشند .

۱–۵) قضیه دیریکله : هرگاه تابع f در بازه $(-T,+T)$ تعریف و کران دار باشد و در این بازه فقط در تعداد نقاط متناهی ناپیوستهٔ جهشی داشته باشد و متناوب با دورهٔ اصلی $2T$ باشد در اینصورت سری $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}$ که در آن a_0 و a_n و b_nها از روی فرمولهای ۱ و ۲ و ۳ محاسبه می‌شوند، در نقاط پیوسته f به $f(x)$ میل می‌کند و درنقاط ناپیوسته جهشی به عبارت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ که در آن $f(x^+)$ و $f(x^-)$ به ترتیب حد راست و چپ f در نقطه ناپیوسته جهشی می‌باشد .

ما این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم .

۱–۶) اتحاد پارسوال : هرگاه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

که در آن a_n و b_nها با ضرایب بسط f به صورت سری فوریه می‌باشند.

اثبات : در واقع با توجه به بسط سری فوریه داریم :

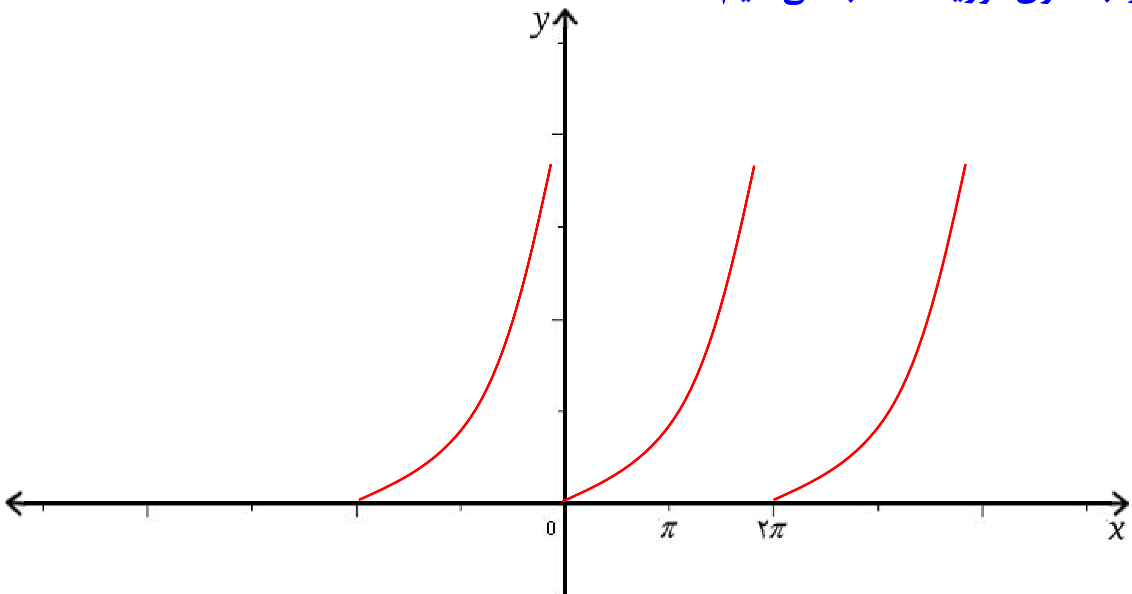
$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}f^2(x)dx=\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}\frac{a_0}{2}f(x)dx+\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-T}^{+T}a_nf(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx+\int_{-T}^{+T}b_nf(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx+b_n\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx\right)$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

مثال۶: ثابت کنید : $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

حل: تابع متناوب $f(x)=x^2$ ، $0\le x\le 2\pi$ با دوره تناوب 2π را در نظر می‌گیریم و بسط آن را به سری فوریه محاسبه می‌کنیم : $2T=2\pi\Rightarrow T=\pi$



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{x}\frac{8\pi^3}{3}=\frac{8\pi^3}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}-2x\,(\frac{-\cos nx}{n^2})+2(\frac{-\sin nx}{n^3})\right)\bigg|_0^{2\pi}\Rightarrow a_n=\frac{4}{n^2}\quad n\neq 0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x^2(\frac{-\sin nx}{n})-2x\,(\frac{-\sin nx}{n^2})+2(\frac{-\cos nx}{n^3})\right)\bigg|_0^{2\pi}\Rightarrow b_n=\frac{-4\pi}{n}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

با توجه به قضیه دیریکله سری فوق در $0\le x\le 2\pi$ به x^2 میل می‌کند و در نقاط 0 و 2π سری به $2\pi^2$ میل می‌کند در واقع $\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2$

پس در نقطه $x=0$ داریم : $2\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$

و از اینجا داریم:

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\pi^2-\frac{4\pi^2}{2}=\frac{6\pi^2-4\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

مثال ۷): با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید : $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{n^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{90}$

حل : برای محاسبه سری فوق اول تابع $f(x)$ را با دوره تناوب اصلی ۴ با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 2 \\ 4-x & 2\le x\le 4 \end{cases}$$

با توجه به تعریف داریم : $2T=4\Rightarrow T=2$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 x\,dx+\int_2^4(4-x)dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+(4x-\frac{x^2}{2})\Big|_2^4\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2}(2+16-8-8+2)=2$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4(4-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right)+\left(\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4\right)$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}+\frac{-4}{n^2\pi^2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right)$$

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\ \Rightarrow\ a_n=\begin{cases} 0 & n=2k \\ \dfrac{-8}{\pi^2(2k+1)^2} & n=2k+1 \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4(4-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right)+\left(\frac{-8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^4\right)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi-\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{n\pi}\cos n\pi-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)=0$$

پس:

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$$

$$\int_0^4 f(x)^2dx=2+\frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$$

از طرف دیگر داریم

$$\int_0^4 f(x)^2dx=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(4-x)^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\frac{-(4-x)^3}{3}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

بنابراین

$$\frac{8}{3}=2+\frac{64}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\left(\frac{8}{3}-2\right)\times\frac{\pi^4}{64}=\frac{2\pi^4}{3\times 64}=\frac{\pi^4}{96}$$

حال قرار می‌دهیم :

$$s=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

$$s=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)$$

$$s=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right) \Rightarrow s=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}s \Rightarrow s-\frac{1}{16}s=\frac{\pi^4}{96} \Rightarrow \frac{15s}{16}=\frac{\pi^4}{96} \Rightarrow s=\frac{16\pi^4}{15\times 96}=\frac{\pi^4}{90}$$

<u>۱–۷) تعریف :</u> تابع $y=f(x)$ را یک تابع زوج می‌نامند هر گاه داشته باشیم $f(-x)=(x)$ یعنی نسبت به محور yها متقارن باشد تابع $y=f(x)$ را فرد می‌نامند هر گاه داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$ یعنی نسبت به مبدأ متقارن باشد به عنوان مثال $y=x^2$ تابع زوج و $y=\sin x$ تابع فرد می‌باشد.

<u>۱–۸) قضیه</u> – الف): هر گاه $y=f(x)$ یک تابع <u>زوج</u> و متناوب با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم :

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=2\int_{0}^{T} f(x)dx$$

ب) : هر گاه $y=f(x)$ یک تابع <u>فرد</u> و متناوب با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=0$$

<u>برهان</u> – الف): چون f تابع <u>زوج</u> است پس $f(x)=f(-x)$ و داریم:

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=\int_{-T}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+T} f(x)dx$$

در انتگرال اول تغییر متغییر $x=-u \Rightarrow dx=-du$ را اعمال می‌کنیم :

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=\int_{-T}^{0} f(-u)(-du)+\int_{0}^{+T} f(x)dx=\int_{0}^{+T} f(u)du+\int_{0}^{T} f(x)dx=2\int_{0}^{+T} f(x)dx$$

ب): چون f تابع <u>فرد</u> است پس $f(-x)=-f(x)$ و داریم:

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=\int_{-T}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+T} f(x)dx$$

نظیر حالت بالا تغییر متغییر $x=-u \Rightarrow dx=-du$ را اعمال می‌کنیم :

$$\int_{-T}^{+T} f(x)dx=\int_{-T}^{0} f(-u)(-du)+\int_{0}^{+T} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+T} f(-u)du=\int_{0}^{T} f(x)dx=-\int_{0}^{+T} f(u)du+\int_{0}^{+T} f(x)dx=0$$

۱–۹) نتیجه: هر گاه f یک تابع متناوب با دوره $2T$ و تابع زوج باشد آنگاه $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{T}$ هم تابع زوج است بنابراین در بسط سری فوریه آن ضرایب a_n و b_n از فرمولهای زیر محاسبه می‌شوند :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{T}dx \\ b_n = 0 \end{cases}$$

۱–۱۰) نتیجه: هر گاه f یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $2T$ باشد آنگاه ضرایب سری فوریه آن از رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{T}dx \end{cases}$$

مثال ۸): بسط سری فوریه f با ضابطه زیر را بدست آورید ؟

$$f(x) = x^2 \qquad -\pi \le x \le \pi \qquad , T = 2\pi$$

حل :

ملاحظه می‌شود $f(x) = x^2$ یک تابع زوج است پس داریم :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^T x^2 \cos nx\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n} + 2x\frac{\cos nx}{n^2} - 2\frac{\sin nx}{n^3}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi\cos n\pi}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^T x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$b_n = 0$$

پس:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^n \cos x}{n^2}\cdots\right)$$

مثال ۹): بسط سری فوریه f با ضابطه زیر را بدست آورید ؟

$$f(x)\begin{cases}-1 & -\pi \le x \le 0\\ +1 & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

حل : ملاحظه می‌شود که این تابع یک تابع فرد است پس داریم :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^T f(x)\sin nx\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^T f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases}0 & n = 2k\\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)} & n = 2k+1\end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

توجه : بعضی وقتها نیاز می‌شود که بسط یک تابع را در بازه مثلاً $(0,T)$ تعریف شده است و متناوب نیست به سری فوریه بدانیم در اینصورت اگر در بسط فقط جمله‌های کسینوسی نیاز باشد ما آنرا به یک تابع متناوب زوج به صورت زیر توسیع می‌دهیم و سپس بسط سری آنرا پیدا می‌کنیم . فرض می‌کنیم f در بازه $[0,T]$ تعریف شده باشد در اینصورت قرار می‌دهیم

$$\varphi(x) = f(x) \qquad 0 \le x \le T$$
$$\varphi(-x) = \varphi(x) \quad , \quad \varphi(x+2T) = \varphi(x)$$

واضح است که φ یک تابع متناوب و زوج است و تحدید φ به بازه $[0,T]$ همان $f(x)$ است.
و اگر نیاز به بسط f به صورت جملات سینوسی باشد کافی است $\varphi(x)$ را بــه صــورت زیــر تعریف کنیم :

$$\varphi(x) = \begin{cases}-f(x) & -T \le x < 0\\ f(x) & 0 \le x < T\end{cases} \qquad \varphi(x+2T) = f(x)$$

واضح است که φ یک تابع فرد و متناوب با دوره تناوب $2T$ است و تبدیل f به $[0,T)$ برابر f می‌باشد .

مثال ۱۰): بسط تابع f با ضابطه زیر را بر حسب سری فوریه که جمله‌های آن فقط شامل کسینوس باشد، بنویسید ؟

$$f(x)=x \qquad 0\le x\le 2$$

حل : چون مسأله از ما خواسته است که بسط فقط جمله‌های کسینوسی را داشته باشد پس تابع φ توسیع f را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که φ تابع زوج باشد ، بنابراین داریم :

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x & -2\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 2\end{cases} \qquad \varphi(x+4)=\varphi(x)$$

در این صورت داریم :

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$x=u \quad\Rightarrow du=dx$$

$$\cos\frac{n\pi x}{2}dx=dv \quad\Rightarrow v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$a_n=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2$$

$$b_n=0$$

$$\boxed{\varphi(x)=1-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\pi x}{2}}{(2k+1)^2}}$$

مثال ۱۱): در مثال ۱۰ بسط را به گونه‌ای بنویسید که فقط جمله‌های سینوسی شرکت داشته باشد ؟

حل : در اینصورت باید φ را به گونه‌ای تعریف کنیم که φ تابع فرد باشد پس داریم :

$$\varphi(x)=x \qquad -2\le x\le 4 \qquad \varphi(x+4)=\varphi(x)$$

$$2T=4 \quad\Rightarrow\quad T=2$$

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$x=u \quad\Rightarrow\quad du=dx$$

$$\sin\frac{n\pi x}{2}dx=dv \quad\Rightarrow\quad v=\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$b_n=\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$b_n=\frac{4}{n\pi}\cos n\pi-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}}$$

مثال ۱۲): مثال ۱۰ را در حالت کلی حل کنید ؟

حل : چون در اینجا محدودیتی برای توسیع f نداریم پس φ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & -2\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 2\end{cases}\qquad \varphi(x+4)=\varphi(x)$$

در اینصورت داریم :

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\Rightarrow\begin{cases}a_{2k}=0\\ a_{2k+1}=\dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\varphi(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=1$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)=\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}}{(2k+1)^2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}}$$

تمرینها

۱) : نمودار توابع زیر را رسم کنید سپس بسط به سری فوریه آنها را محاسبه کنید ؟

الف) $f(x)=\begin{cases}4 & 0\le x<2\\ -4 & 2<x\le 4\end{cases} \qquad 2T=4$

ب) $f(x)=\begin{cases}-x & -4\le x\le 0\\ x & 0\le x\le 4\end{cases} \qquad 2T=8$

ج) $f(x)=4x \qquad 0\le x\le 10 \qquad 2T=10$

د) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 3\\ 0 & -3<x\le 0\end{cases} \qquad 2T=6$

۲) : تابع $f(x)=\cos x$ وقتی که $0\le x\le \pi$ آنرا بر حسب سری فوریه با جمله‌های سینوسی بسط دهید ؟

۳) : تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<4\\ 8-x & 4<x<8\end{cases}$ آنرا: **الف)** برحسب سری فوریه با جمله‌های سینوسی و **ب)** بر حسب سری فوریه با جمله‌های کسینوسی بسط دهید

۴): نشان دهید برای $0\le x\le \pi$ داریم :

الف) $$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$$

ب) $$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}+\cdots\right)$$

۵): با استفاده از سوال ۴ نشان دهید :

الف) $$\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

ب) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

ج) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

د) $$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{13^3}-\cdots=?$$

۶): با استفاده از اتحاد پارسوال نشان دهید ؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

راهنمایی : از مسأله ۴ استفاده کنید

۷): نشان دهید:

$$\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

راهنمایی: (اول $f(x) = \sin x \ , \ 0 \le x \le \pi$ را برحسب سری فوریه با جمله‌های کسینوسی بسط دهید)

۲– انتگرال‌های فوریه

۲–۱): فرض می‌کنیم شرایط زیر برای $f(x)$ برقرار باشد :

۱) f در شرایط قضیه دیریکله که در بخش ۱ بیان شده است صادق باشد

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ همگرا باشد

در اینصورت قضیه انتگرال فوریه بیان می‌کند که :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\{A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha \qquad (1)$$

که در آن :

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx$$

فرمول ۱ درصورتیکه x یک نقطه پیوسته f باشد برقرار است . اما اگر x یک نقطه ناپیوسته باشد آنگاه نظیر سری فوریه داریم :

$$f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

توجه کنیم که شرایط بالا لازم است ولی کافی نیست .

بعضی وقتها انتگرالهای طرف راست ۱ را بسط انتگرال تابع f می‌نامند .

۲–۲): شکلهای معادل قضیه انتگرال فوریه

همچنین می‌توان ۱ را به صورتهای زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{+\infty}\int_{u=-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\,d\alpha \qquad (3)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{+i\alpha u}du \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha}du\,d\alpha \qquad (4)$$

باز هم توجه شود که اگر x یک نقطه ناپیوسته باشد در طرف چپ $f(x)$ باید با $f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{۲}$ جایگزین شود .

★ برای اثبات فرمول ۴ به مرجع (۶) صفحه ۲۰۸ مراجعه کنید .

نتایج اخیر زمانیکه $f(x)$ یک تابع زوج یا فرد باشد بوسیله فرمولهای زیر جایگزین می‌شود .

(۳) اگر f زوج باشد

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\cos\alpha x\, d\alpha\int_{۰}^{+\infty}f(u)\cos\alpha u\, du$$

(۴) اگر f فرد باشد

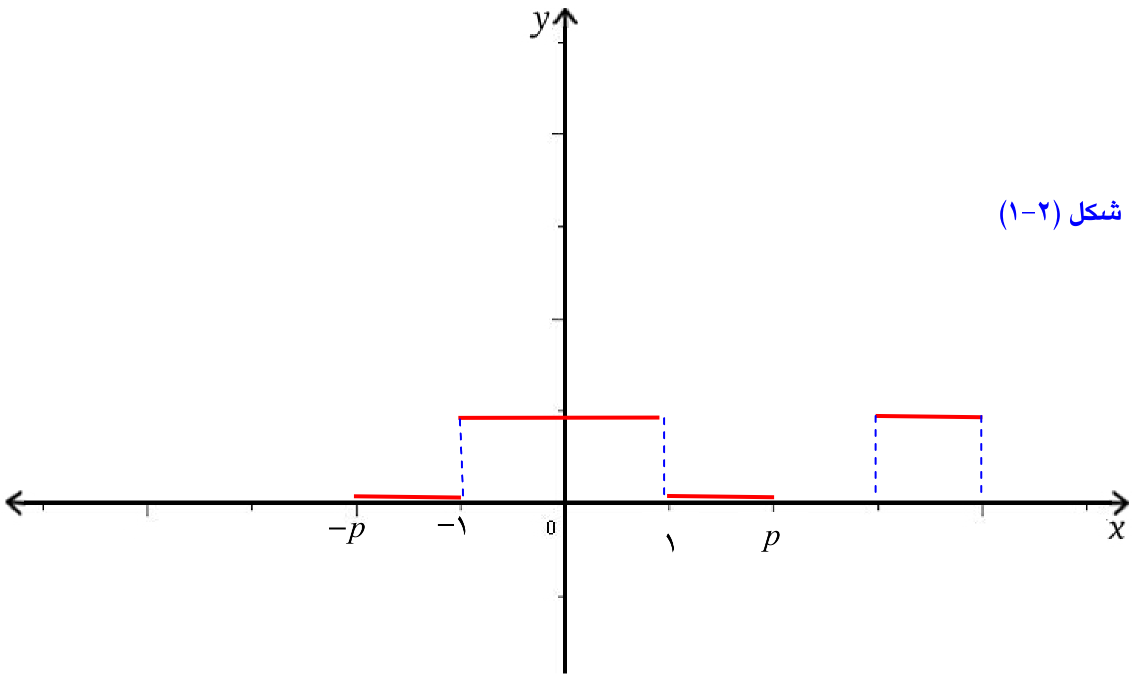
$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\sin\alpha x\, d\alpha\int_{۰}^{+\infty}f(u)\sin\alpha u\, du$$

برای اینکه فرمولهای بالا را درک کنیم به مثال زیر توجه می‌کنیم :

مثال ۱): فرض می‌کنیم f_p یک تابع متناوب با دوره $۲p$ با ضابطه زیر باشد.

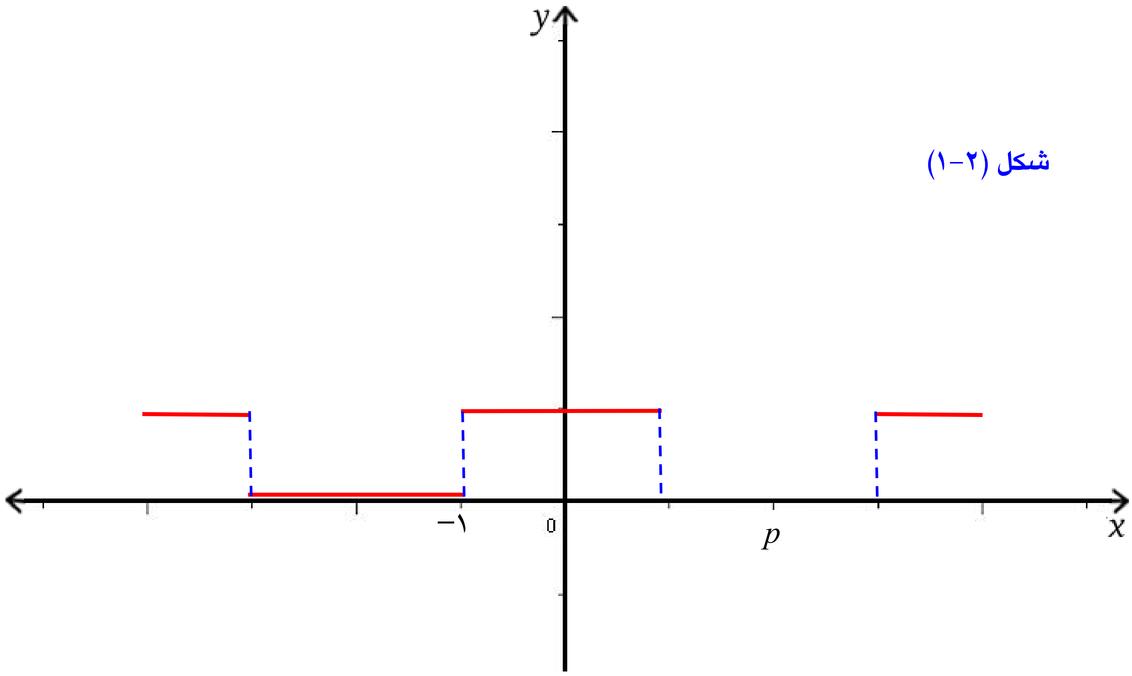
$$f_p=\begin{cases}۰ & -p\le x\le -۱\\ ۱ & -۱\le x\le +۱\\ ۰ & +۱\le x\le p\end{cases}\qquad f_p(x+۲p)=f(x)$$

حل : نمودار این تابع به صورت زیر است:



شکل (۲-۱)

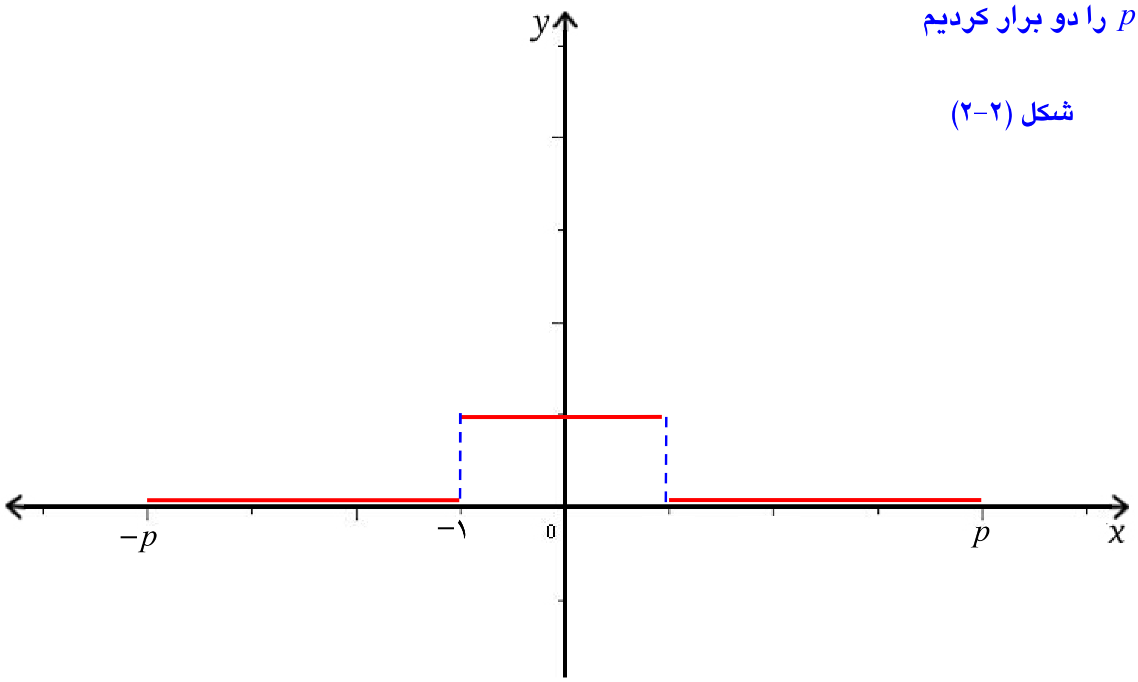
با توجه به تعریف تابع زوج می‌دانیم که f_p یک تابع زوج است اکنون p را به ∞ میل می‌دهیم در اینصورت نمودار آن بشکل زیر در می‌آید



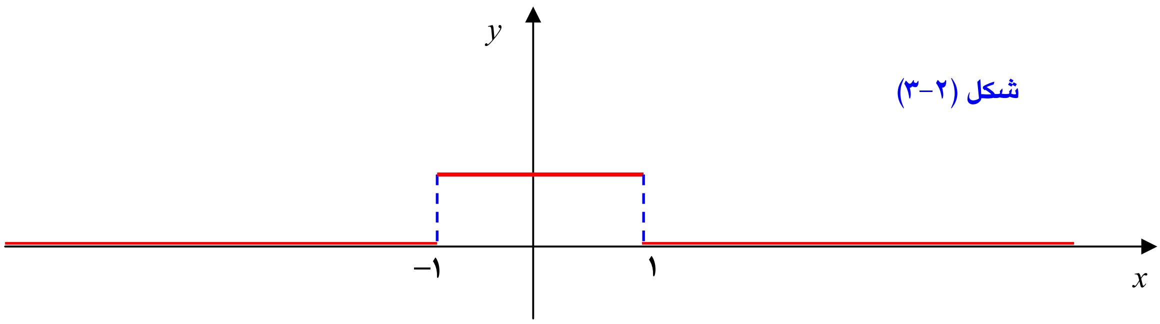
شکل (۲-۱)

p را دو برار کردیم

شکل (۲-۲)



چون f_p یک تابع زوج است پس در بسط آن به سری فوریه فقط جمله‌ای کسینوسی ظاهر می‌شوند و داریم :



شکل (۲-۳)

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{p}dx=\frac{2}{p}\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{p}}{\frac{n\pi}{p}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{p}\frac{\sin\frac{\pi p}{p}}{\frac{n\pi}{p}}$$

قرار می‌دهیم $\omega_n=\frac{n\pi}{p}$ پس داریم :

$$a_n=\frac{2}{p}\frac{\sin\omega_n}{\omega_n}$$

و

$$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{(n+1)\pi}{p}-\frac{n\pi}{p}=\frac{\pi}{p}$$

واضح است که وقتی $p\to\infty$ آنگاه $\Delta\omega\to 0$

اکنون بسط به سری فوریه تابع $f_p(x)$ را می‌نویسیم

$$f_p(x)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{+p}f_p(x)dx+\frac{1}{p}\sum_{1}^{\infty}\left(\int_{-p}^{+p}\left(f_p(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\right)\cos\frac{n\pi x}{p}+\int_{-p}^{+p}\left(f_p(x)\sin\frac{n\pi x}{p}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

و یا :

$$f_p(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-p}^{+p}f_p(x)dx+\sum_{1}^{\infty}\left(\int_{-p}^{+p}\left(f_p(x)\cos\omega_n x dx\right)\cos\omega_n x+\int_{-p}^{+p}\left(f_p(x)\sin\omega_n x dx\right)\sin\omega_n x\right)\right]\Delta\omega_n$$

اکنون وقتی $p\to\infty$ خواهیم داشت :

$$f(x)=\lim_{p\to\infty}f_p(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)\cos\omega x\right)dx\,\cos\omega x+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)\sin\omega x\right)dx\,\sin\omega x\right]d\omega$$

با قرار دادن

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\;xdx\qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\;xdx$$

خواهیم داشت :

$$f(x)=\left(\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

مثال ۲) : انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ **را بدست آورید ؟**

حل :

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\omega u\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\cos\omega u\,du=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega u\Big|_{-1}^{1}\quad\Rightarrow\quad A(\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\omega u\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sin\omega u\,du=-\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega u\Big|_{-1}^{1}\quad\Rightarrow\quad B(\omega)=0$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

بنابراین داریم :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & -1<x<1\\ \frac{\pi}{4} & x=\pm 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که اگر $x=0$ آنگاه داریم :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}du=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۳) : انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & \text{بقیه حالات}\end{cases}$ **را بدست آورید ؟**

حل:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u\,du$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin u\cos\alpha u\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin(1+\alpha)u+\sin(1-\alpha)u]du$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+\alpha)u}{1+\alpha}-\frac{\cos(1-\alpha)u}{1-\alpha}\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$A(\alpha)=\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}+\frac{\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$A(\alpha)=\frac{+1}{2\pi}\left(\frac{\cos\alpha\pi}{1+\alpha}+\frac{\cos\alpha\pi}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

$$\boxed{\cos(\pi\pm x)=-\cos x}$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}\right)$$

$$B(\alpha)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx$$

$$B(\alpha)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \sin u \ \ \sin\alpha u\ \ du \ =\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\left(\cos(۱-\alpha)u-\cos(۱+\alpha)u\right) du$$

$$B(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{\sin(۱-\alpha)u}{۱-\alpha}-\frac{\sin(۱+\alpha)u}{۱+\alpha}\right]\Bigg|_{۰}^{\pi}$$

$$B(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\left[\frac{\sin(۱-\alpha)\pi}{۱-\alpha}-\frac{\sin(۱+\alpha)\pi}{۱+\alpha}\right] \ \Rightarrow\ B(\alpha)=\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{۱-\alpha}+\frac{\sin\alpha\pi}{۱+\alpha}\right)$$

$$B(\alpha)=\frac{۱}{\pi}\frac{\sin\alpha\pi}{\left(۱-\alpha^{۲}\right)}$$

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\left(\frac{(۱+\cos\alpha\pi)\cos\alpha x \ +\sin\alpha x\ \sin\alpha x}{۱-\alpha^{۲}}\right)d\alpha$$

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos\alpha x \ +\cos\alpha(\pi-x)}{۱-\alpha^{۲}}d\alpha$$

۲–۲) : تبدیل فوریه یا شکل مختلط انتگرال فوریه

می‌دانیم:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right)d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha u\,du\right)\cos\alpha x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha u\,du\right)\sin\alpha x\right]d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(u-x)du\;d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(u-x)du\;d\alpha$$

تابع زیر علامت انتگرال نسبت به α زوج است ، همچنین تابع $f(u)\sin\alpha(u-x)$ نسبت به α فرد است پس :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha(u-x)\,d\alpha=0$$

در نتیجه می‌توان نوشت :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(u-x)du\;d\alpha-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha(u-x)du\;d\alpha$$

و یا

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\left(\cos\alpha(u-x)-i\sin\alpha(u-x)\right)du\;d\alpha$$

و یا

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha(u-x)}du\;d\alpha\;=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha u}f(u)du\right)d\alpha$$

قرار می‌دهیم : $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha u}f(u)du$

در اینصورت داریم : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}F(\alpha)d\alpha$

$F(\alpha)$ را تبدیل فوریه $f(x)$ می‌نامیم و با نماد $\mathcal{F}(f(x))=F(\alpha)$ نشان می‌دهیم

پس : $$\mathcal{F}(f(x))=F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha u}f(u)du$$

و $$\mathcal{F}^{-1}(F(\alpha))=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}F(\alpha)d\alpha$$

را وارون تبدیل فوریه می‌نامیم

اگر f تابع زوج یا تابع فرد باشد تبدیل فوریه به شکل ساده زیر در می‌آید :

$$\underset{C}{\mathcal{F}}(f(x)) = F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx$$ زوج

$$\underset{O}{\mathcal{F}}(f(x)) = F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx$$ فرد

مثال۴): معادله انتگرال زیر را حل کنید ؟

$$\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx = \begin{cases} 1-\alpha & 0 \le \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

حل : با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی داریم :

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx$$

پس :

$$F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\alpha) & 0 \le \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی داریم :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha$$

با استفاده از روش جز به جز نتیجه می‌شود :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

حال با قرار دادن $f(x)$ در معادله اول بدست می‌آوریم :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\cos\alpha x\, dx = \begin{cases} (1-\alpha) & 0 \le \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ در این رابطه یک انتگرال جالب محاسبه می‌شود :

$$\alpha = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

با تغییر متغییر $x = 2u \Leftarrow dx = 2du$ محاسبه می‌شود

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du = \frac{\pi}{2}$$

۳ – معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی عبارت است از معادله‌ای که شامل یک تابع دو یا چند متغیره و مشتقات نسبی آن باشد .
مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی بزرگترین درجه مشتقات نسبی موجود در معادله است

مثال۱): $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2x - y$ **یک معادله دیفرانسیل با مشتق نسبی از مرتبه دو یا از درجه دو می‌باشد .**

۳–۱ تعریف : جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی تابعی است که خود و مشتقات نسبی آن در معادله صدق کند .
جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی عبارت است از جوابی که شامل توابع دلخواه به تعداد مرتبه معادله باشد .
یک جواب خصوصی معادله عبارت است از جوابی که با انتخاب تابع خاصی از توابع دلخواه بدست آید .

مثال ۲): به آسانی دیده می‌شود که $u(x,y)=x^{2}y-\frac{1}{2}xy^{2}+F(x)+G(y)$ جواب عمومی مثال ۱ می‌باشد زیرا شامل دو تابع دلخواه $F(x)$، $G(y)$ می‌باشد.
حال اگر $F(x)=2\sin x\ ,\ G(y)=3y^{4}-5$ آنگاه ما یک جواب خصوصی به صورت $u(x,y)=x^{2}y-\frac{1}{2}xy^{2}+2\sin x+3y^{4}-5$ بدست می‌آید .

جواب استثنایی جوابی است که در معادله صدق کند ولی از روی جواب عمومی با انتخاب تابع دلخواه بدست نیاید .
اگر برای بدست آوردن جواب خصوصی شرایطی را اعمال کنیم که این شرایط از مقادیر جواب در مرزها بدست آید آنگاه مسأله را مقادیر مرزی جواب می‌نامند .
نظیر حالت معادله دیفرانسیل معمولی معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی از اهمیت خاصی برخوردارند .

۳-۲ معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی :

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی خطی از مرتبه دوم برای یک تابع دو متغیره u به صورت زیر می‌باشد :

$$A\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+B\frac{\partial^{2}u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

که در آن A,B,C,D,E,F,G توابعی از x,y هستند . نظیر این معادله را می‌توان برای خطی مرتبه nام و تابع چند متغییره نوشت .
اگر $G=0$ باشد معادله را متجانس یا بدون طرف ثانی می‌نامند .
اگر $G\neq 0$ معادله را نامتجانس یا با طرف ثانی می‌نامند .

طبقه بندی معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی (۱) :

الف) اگر $B^{2}-4AC<0$ معادله دیفرانسیل را **بیضوی** می‌نامند .

ب) اگر $B^{2}-4AC>0$ معادله دیفرانسیل را **هذلولوی** می‌نامند .

ج) اگر $B^{2}-4AC=0$ معادله دیفرانسیل را **سهمی گون** می‌نامند .

در صورتیکه معادله همگن باشد بر حسب اینکه در چه رده‌ای باشد با تغییر متغیر مناسب معادله دیفرانسیل را به شکل ساده در می‌آوریم . در این مورد بعداً بحث خواهیم کرد.

چند معادله دیفرانسیل مهم :

۱) معادله دیفرانسیل توزیع حرارت $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\nabla^2 u$

که در آن t متغییر زمان $u=u(x,y,z)$ موقعیت جسم در لحظه t و $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ لاپلاس u می‌باشد .

۲) معادله ارتعاش یک تار $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

که در آن t متغییر زمان $y=y(x,t)$ موقعیت تار در لحظه می‌باشد .

۳) معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$

۴) معادلات تلفن

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial e}{\partial t}+RGe$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+RGi$$

که در آن :

$x =$ فاصله از انتهای ارسال‌گر کابل

$e(x,t) =$ پتانسیل در هر نقطه کابل در هر زمان

$i(x,t) =$ جریان در هر نقطه کابل در هر زمان

$R =$ مقاومت کابل در واحد زمان

$L =$ القاگری کابل در واحد طول

$G =$ رسانایی نسبت به زمین در واحد طول کابل

$C =$ ظرفیت نسبت به زمین در واحد طول کابل

اگر $G=L=0$ آنگاه معادلات بالا به صورت زیر در می‌آیند :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = RC\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t}$$

این معادلات هم به معادلات تلگراف موسوم‌اند .

۳-۳): روش‌های حل معادلات با مشتقات نسبی :

معادلاتی که به صورت $p(x,y,z)=\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ باشند توسط قضیه زیر که آن را بدون اثبات می‌پذیریم حل می‌شوند .

۳-۴) قضیه : هرگاه $u(x,y,z)=a$ ، $v(x,y,z)=b$ دو جواب مستقل برای دستگاه $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ باشد آنگاه $\varphi(u,v)=0$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\neq 0$ یا $u=\Psi(v)$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ می‌باشد .

مثال۱): معادله دیفرانسیل $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$ را حل کنید ؟

حل : با توجه به قضیه بالا داریم :

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$$

و از اینجا :

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dx-dy}{y+z-x-z}=\frac{dx-dz}{y+z-x-y}=\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}$$

و یا

$$\frac{dx-dy}{-(x-y)}=\frac{dx-dz}{-(x-z)}$$

با انتخاب $x-y=u$ و $x-z=v$ داریم:

$$\frac{du}{-u}=\frac{dv}{-v}\qquad \ln u=\ln v\qquad \frac{u}{v}=a\qquad \frac{x-y}{x-z}=a$$

از معادله اول و سوم نتیجه می‌شود :

$$\frac{du}{-u}=\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}\Rightarrow -\ln u=\frac{1}{2}\ln(x+y+z)+\ln b\Rightarrow u^2(x+y+z)=b$$

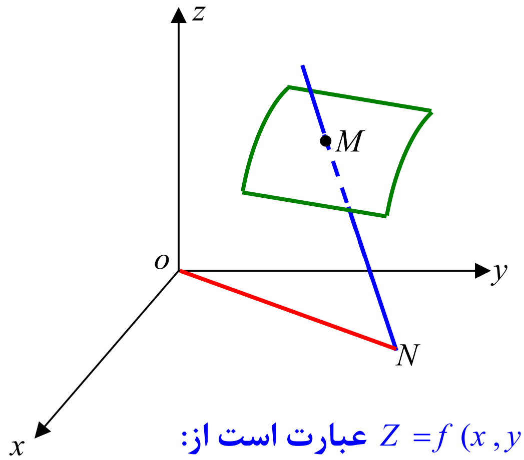
یا

$$(x-y)^2(x+y+z)=b$$

بنابراین جواب معادله عبارت است از

$$(x-y)^2(x+y+z)=\varphi\left(\frac{x-y}{x-z}\right)$$

مثال۲): معادله رویه S را چنان تعیین کنید که اگر N نقطه تلاقی خط قائم بر رویـه S در نقطه M با صفحه xoy باشد؟ طول $\overline{ON}=\overline{MN}$



حل : معادله خط قائم در نقطه $M=(x,y,z)$ به رویه $Z=f(x,y)$ عبارت است از:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-۱}=t$$

$$\begin{cases} X=x+t\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ Y=y+t\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ Z=z-t \end{cases}$$

با ضابطه $Z=۰$ قطع میدهیم :

$$۰=z-t \Rightarrow t=z$$

$$N\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ y+z\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ ۰\right)$$

$$\overline{MN}^{۲}=z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}+z^{۲}$$

$$\overline{ON}^{۲}=\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(y+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}$$

$$z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}+z^{۲}=\left(x+z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(y+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}$$

$$=x^{۲}+z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+۲xz\frac{\partial z}{\partial x}+y^{۲}+z^{۲}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}+۲xyz\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+۲xz\frac{\partial x}{\partial x}+۲yz\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yx\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2$$

$$\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}dx \Rightarrow \frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x=\ln y+\ln a \Rightarrow \frac{x}{y}=a$$

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{2y}=\frac{zdz}{z^2-x^2-y^2}$$

$$\frac{xdx}{2x^2}=\frac{ydy}{2y^2}=\frac{zdz}{z^2-x^2-y^2}=\frac{xdx+ydy+zdz}{2x^2+2y^2+z^2-x^2-y^2}=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2} \qquad \ln x=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)+\ln b$$

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=b \qquad\qquad \frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

با انتخاب $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=\lambda^{-1}$ که یک عدد ثابت است رویه حاصل $z^2-x^2-y^2=\lambda x$ می‌شود

۳–۵): معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی اویلر :

معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ را که در آن c ,b ,c اعـداد ثابتی هستند معادلات اویلر نامیده می‌شوند .

در حالت خاص وقتی که دوتا از این ضرایب صفر باشند با انتگرال گیری معادله فوراً حل مـی-شود زیرا :

الف): اگر $b=c=0$ آنگاه داریم : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

و از اینجا $\frac{\partial z}{\partial x}=c_1(y)$ $\Leftarrow$ $z=xc_1(y)+c_2(y)$ **که در آن** $c_1(y)$, $c_2(y)$ **توابع دلخـواهی از y هستند .**

ب): اگر $a=b=0$ آنگاه داریم : $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \Rightarrow z=yc_1(x)+c_2(x)$

ج): اگر $a=c=0$ آنگاه داریم : $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$

و یا $\frac{\partial z}{\partial y}=c_1(y) \Rightarrow z=\int c_1(y)dy+\varphi(x)$

و یا $z=\psi(y)+\varphi(x)$ که در آن ψ,φ به ترتیب توابع دلخواهی از y ,x هستند .

حال وقتی که حداقل دو تا از ضرایب مخالف باشند روش حل این معادلات به صورت زیر است

با تغییر متغییر $\begin{cases} u = y + mx \\ v = y + nx \end{cases}$ که در آن $n, m \in \mathbb{R}$ معادله دیفرانسیل اویلر به صورت زیر در می‌آید :

$$\left(am^{2} + bm + c\right)\frac{\partial^{2} z}{\partial u^{2}} + \left(2c + b(m+n) + 2amn\right)\frac{\partial^{2} z}{\partial u \partial v} + \left(an^{2} + bn + c\right)\frac{\partial^{2} z}{\partial v^{2}} = 0$$

اکنون معادله درجه دوم $ar^{2} + br + c = 0$ را در نظر می‌گیریم و حالتهای مختلف را به صورت زیر مطالعه می‌کنیم :

الف) $\Delta = b^{2} - 4ac > 0$ در این صورت دارای دو جواب متمایز n, m هستند و ضرایب $\frac{\partial^{2} z}{\partial u^{2}}, \frac{\partial^{2} z}{\partial v^{2}}$ برابر صفر می‌شوند و معادله اویلر به صورت $\frac{\partial^{2} z}{\partial u \partial v} = 0$ تبدیل و به آسانی حل می‌شود.

مثال۱): معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید ؟

$$5\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}} - 6\frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}} = 0$$

حل : معادله شاخص به صورت زیر است :

$$am^{2} + bm + c = 0$$

$$5m^{2} - 6m + 1 = 0 \qquad m = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{5} = 1 , \frac{1}{5}$$

$$\boxed{z = f(y + x) = g\left(y + \frac{1}{5}x\right)}$$

ب) $\Delta = 0$ پس معادله مفسر دارای ریشه مضاعف $m = \frac{b}{2a}$ است ، نظیر حالت معادلات دیفرانسیل معمولی داریم:

$$z = uf(u) + g(u)$$

مثال۲): معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}} + 10\frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y} + 25\frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}} = 0$ را حل کنید ؟

حل : معادله مفسر عبارت است از $r^{2} + 10r + 25 = 0$ و $r = -5$ ریشه مضاعف معادله است :

پس $u = y - 5x$ بنابراین جواب معادله بشرح زیر است :

$$z = (y - 5x)f(y - 5x) + g(y - 5x)$$

که در آن g, f توابع دلخواه هستند .

ج) معادله مفسر دارای ریشه حقیقی نیست یعنی $\Delta < 0$ در این صورت $r = \propto \pm i\beta$ و جواب معادله عبارت است از:

$$z = (y + (\propto + i\beta)x) + g(y + (\propto - i\beta)x)$$

مثال۳): معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ را حل کنید؟

حل: داریم $r \pm i$ $\Rightarrow$ $r^2 + 1 = 0$ پس $u = y + ix \quad , \quad v = y - ix$

پس جواب معادله عبارت است از: $z = f(y + ix) + g(y - ix)$

که در آن f, g توابع دلخواهی هستند.

همانطور که قبلاً اشاره کردیم در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم اگر ضرایب ثابت باشند برحسب اینکه معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی هذلولوی، بیضوی یا سهموی می‌باشند می‌توان آن را با تغییر متغییر $u = y + mx$, $v = y + nx$ به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که فقط در آن $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ موجود است تبدیل نمود.

۳–۶): پیدا کردن جواب‌های معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی به صورت متغییرهای جدا از هم:

در این روش $Z = X(x)Y(y)$ را در نظر می‌گیریم و مشتقات z را نسبت به x, y محاسبه و در معادله قرار می‌دهیم. در این روش شرایط اولیه یا شرایط مرزی را می‌دهند و روش مناسبی برای حل معادله می‌باشد.

مثال۱): معادله دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial y}$ را با شرایط $u(0,y) = 8e^{-3y}$ را حل کنید؟

حل: قرار می‌دهیم:

$$u = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'(y)$$

پس:

$$X'(x)Y(y) = 4X(x)Y'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = 4\frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

چون طرف اول فقط تابعی از x و طرف دوم تابعی از y است پس این نسبت باید مقدار ثابت باشد.

پس: $\frac{X'(x)}{X(x)} = 4\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$

و از اینجا
$$\frac{X'(x)}{X(x)}=\lambda \quad , \quad ۴\frac{Y'(y)}{Y(y)}=\lambda$$

و یا
$$\ln\left(X(x)\right)=\lambda x+c_۱$$
$$X(x)=ke^{\lambda x}$$
$$۴\ln\left(Y(y)\right)=\lambda y+c_۲$$
$$Y(y)=k'e^{\frac{۱}{۴}\lambda y}$$

پس:
$$u(x,y)=Ae^{\lambda x}e^{\frac{۱}{۴}x\lambda}$$
$$u(۰,y)=Ae^{\frac{۱}{۴}x\lambda}=۸e^{-۳y}$$

و از اینجا نتیجه می‌شود $A=۸$ ، $\frac{۱}{۴}\lambda=-۳ \Leftarrow \lambda=-۱۲$

پس:
$$\boxed{u(x,y)=۸e^{-۱۲x}e^{-۳y}=۸e^{-۱۲x-۳y}}$$

مثال۲): معادله دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial t}=۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ وقتی که $۰\le x\le ۳$ و $t\ge ۰$ با شرایط مرزی $u(۰,t)=u(۳,t)=۰$ و $|u(x,t)|<\pi$ $u(x,۰)=۵\sin ۴\pi x-۳\sin ۸\pi x+۲\sin ۱۰\pi x$ حل کنید؟

حل : فرض کنیم $u=X(x)T(t)$ پس :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)T(t)$$

بنابراین داریم :
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=X''(x)T(t)$$

و یا :
$$X(x)T'(t)=۲X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{۲T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{T'(t)}{T(t)}=۲\lambda \quad\Rightarrow\quad \ln T(t)=۲\lambda t+c_۱ \qquad T(t)=Ae^{۲\lambda t}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \qquad X''(x)=\lambda X(x)$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم : $\lambda \geq 0 , \quad \lambda < 0$

ملاحظه می‌شود که در حالت $\lambda \geq 0$ جواب معادله بر حسب x یک تابع نمایی و یا یک چند جمله‌ای از درجه اول است که با شرایط مرزی هم خوانی ندارد پس $\lambda < 0$ را مطالعه می‌کنیم بنابراین داریم :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad \Rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x$$

و $$T(t) = A_2 e^{-2\lambda^2 t}$$

پس $$u(x,t) = A_2 e^{-2\lambda^2 t}(A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x) = e^{-2\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

حال با استفاده از شرایط مرزی B, A را محاسبه می‌کنیم :

پس $$u(0,t) = e^{-2\lambda^2 t}(A + 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$u(x,t) = e^{-2\lambda^2 t} B \sin \lambda x \quad \Rightarrow u(3,t) = 0 = e^{-2\lambda^2 t} B \sin 3\lambda$$

اگر $B = 0 \Leftarrow u(x,t) = 0$ در شرایط مرزی صادق نیست .

پس باید $\sin 3\lambda = 0 \Leftarrow 3\lambda = k\pi$ و یا $\lambda = \frac{k\pi}{3}$ با $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

پس داریم :

$$u(x,t) = Be^{-2\left(\frac{k\pi}{3}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{3} x$$

$$u(x,t) = e^{\frac{-2m_1^2\pi^2}{9}t} B_1 \sin \frac{m_1 \pi x}{3} + e^{\frac{-2m_2^2\pi^2}{9}t} B_2 \sin \frac{m_2 \pi x}{3} + e^{\frac{-2m_3^2\pi^2}{9}t} B_3 \sin \frac{m_3 \pi x}{3}$$

$$u(x,t) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi + 2 \sin 10\pi x \quad \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 5 , B_2 = -3 , \ B_3 = 2 \\ m_1 = 12 , m_2 = 24 , \ m_3 = 30 \end{cases}$$ **بقیه m ها صفرند**

پس $$\boxed{u(x,t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x + 2e^{-200\pi^2 t} \sin 10\pi x}$$

۳–۷): حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی با به کار بردن سری فوریه :

مثال۴): مسأله قبل را که توزیع حرارت بود با شرط مرزی $u(x,\circ)=25^\circ$ حل کنید ؟

حل: در اینجا باید مسأله قبل را تکرار کنیم و فقط جمله‌های $u(x,t)$ که در مثال بالا سه جمله بود باید بینهایت جمله را در نظر بگیریم یعنی:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{\frac{-m^2\pi^2 t}{9}} \sin\frac{m\pi x}{3}$$

با بکار بردن شرط اولیه داریم:

$$u(\circ,t)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{3} \qquad \circ<x<3$$

$$25=\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{3}$$

برای بدست آوردن B_mها و mها باید بسط تابع $f=25$ را بر حسب سری فوریه با دوره تناوب $2T=6$ را پیدا کنیم :

$$B_m=\frac{2}{L}\int_\circ^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_\circ^3 25\sin\frac{m\pi x}{3}dx=\frac{50}{3}\left(\frac{-3}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{3}\right)\Big|_\circ^3 \quad =\frac{50}{m\pi}(1-\cos m\pi)$$

بنابراین :
$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{50(1-\cos m\pi)}{m\pi}\right)e^{\frac{-m^2\pi^2}{9}t}\sin\frac{m\pi x}{3}$$

$$=\frac{100}{\pi}\left(e^{\frac{-\pi^2}{9}t}\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{3}e^{-\pi^2 t}\sin\pi x+\cdots\right)$$

مثال۵): معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با شرایط مرزی $u(x,\circ)=25 \quad , \quad u(3,t)=40 \quad , \quad u(\circ,t)=10 \quad , \quad |u(x,t)|<M$ حل کنید ؟

حل : این مسأله شبیه مسأله قبل است و فقط فرق این با آنها در ابتدا و انتهای میله است که به ترتیب ۱۰ و ۴۰ هستند ، برای حل این مسأله اول تغییر متغییر زیر را انجام می‌دهیم :

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(x)$$

که در آن ψ را باید برای شرایط مناسب تعریف کنیم ، با این تغییر متغییر معادله به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\psi'(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\psi''(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\psi''(x) \quad , \quad u(0,t)=v(0,t)+\psi(0)=10$$

$$u(3,t)=v(3,t)+\psi(3)=40 \qquad |v(x,t)|<M$$

با انتخاب $\psi''(x)=0$ و $\psi(0)=10$, $\psi(3)=40$ نتیجه می‌شود :

$$\psi(x)=10x+10$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ , \ v(0,t)=0 \ , \ v(3,t)=0 \ , \ v(x,0)=15-10x$$

حال قرار می‌دهیم $v(x,t)=T(t)X(x)$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=T'(t)X(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}=T(t)X'(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=T(t)X''(x)$$

پس:

$$T'(t)X(x)=2T(t)X''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

دوباره با توجه به شرایط اولیه باید $\lambda=-\omega^2$ را در نظر بگیریم پس :

$$\frac{T'(t)}{2T}=-\omega^2 \qquad \ln\left(T(t)\right)=-2\omega^2 t+c$$

$$T(t)=Ae^{-2\omega^2 t} \ , \qquad \frac{X''}{X}=-\omega^2 \ \Rightarrow X''+\omega^2 X=0 \ \Rightarrow X=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$$

پس:

$$v(x,t)=A_1e^{-2\omega^2 t}\left(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x\right)=e^{-2\omega^2 t}\left(A\cos\omega x+B\sin\omega x\right)$$

$$v(0,x)=0=A \ \Rightarrow \ A=0 \qquad , \qquad v(3,x)=0 \qquad e^{-2\omega^2 t}\left(B\sin 3\omega\right)=0$$

$B=0 \Leftarrow v=0$ **پس:** $B\neq 0$ **پس باید :** $\sin 3\omega=0$

$$\omega=\frac{k\pi}{3} \ \Leftarrow \ 3\omega=k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k e^{\frac{-2k^2\pi^2}{9}t}\sin\frac{k\pi}{3}x \qquad , \qquad v(x,0)=15-10x=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\sin\frac{k\pi}{3}x$$

پس باید تابع $f(x)=15-10x$ را به سری فوریه سینوسی با دوره تناوب ۶ بدست آوریم :

$$B_k=\frac{2}{3}\int_0^3(15-10x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx$$

$$B_k=\frac{30}{k\pi}(\cos k\pi-1)$$

چون $u(x,t)=v(x,t)+\psi(x)$ پس:

$$u(x,t)=10x+10+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{30}{k\pi}\left(\cos k\pi-1\right)\sin\frac{k\pi x}{3}e^{\frac{-k^2\pi^2 t}{9}}$$

مثال۶): معادله ارتعاشی عبارت است از $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$　　$t>0 \quad 0<x<L$

حل: چون ابتدا و انتهای تار ثابت است پس : $y(x,0)=f(x)$,　$y(0,t)=y(l,t)=0 \quad t>0$

چون سرعت تار در لحظه $t=0$ برابر صفر است پس : $y'_t(x,0)=0 \quad 0<x<t$

پس با شرایط بالا مسأله را حل می‌کنیم :

$$y=X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X(x)T''(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=X''(x)T(t)$$

پس داریم : $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$

و یا : $\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$

$$T''+a^2\lambda^2T=0 \quad \Rightarrow \quad T=A_1\sin\lambda at+B_1\cos\lambda at$$

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad X''+\lambda^2X=0 \quad X=A_2\sin\lambda x+B_2\cos\lambda x$$

پس : $y(x,t)=\left(A_1\sin\lambda at+B_1\cos\lambda at\right)\left(A_2\sin\lambda x+B_2\cos\lambda x\right)$

از $y(0,t)=0 \quad \Rightarrow \quad B_2=0$ و

$$y(x,t)=\left(A_1\sin\lambda at+B_1\cos\lambda at\right)A_2\sin\lambda x$$
$$=\sin\lambda x\left(A\sin\lambda at+B\cos\lambda at\right)$$

از $y(L,t)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=A_2\sin\lambda L\left(A\sin\lambda at+B\cos\lambda at\right)=0$

$$A_2\sin\lambda L=0 \Rightarrow \quad \lambda L=k\pi \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{k\pi}{L} \quad , \quad k=0\pm1,\pm2,\ldots$$

اکنون
$$y_t(x,t)=A_2\sin\lambda x\,(A\lambda a\cos\lambda t-B\lambda a\sin\lambda t)$$

$$y_t(x,0)=0=\sin\lambda x\,(A\lambda a)=0\qquad\Rightarrow A=0$$

بنابراین
$$y(x,t)=B\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi at}{L}$$

برای اینکه معادله در شرط $y(x,0)=f(x)$ صدق کند ما باید داشته باشیم :

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi a x}{L}$$

در این صورت خواهیم داشت
$$y(x,0)=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\frac{k\pi x}{L}$$

با توجه به بسط سری فوریه f داریم :

$$B_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx\right)\cos\frac{k\pi t}{L}\sin\frac{k\pi t}{L}$$

با دادن ضابطه $f(x)$ انتگرال را می‌توان حساب کرد

۳–۸): تعیین جوابهاب معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی با استفاده از تبدیل لاپلاس :

مثال۷): معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با شرایط زیر حل کنید ؟

$$u(0,t)=u(3,t)=0\quad,\quad u(x,0)=10\sin 2\pi x-6\sin 4\pi x$$

حل : با به کار بردن تبدیل لاپلاس بر حسب t از دو طرف معادله نتیجه می‌شود :

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\left(\frac{\partial u}{ut}\right)dt=\int_0^{\infty}e^{-s\,nt}\left(4\frac{\partial^2 u}{ux^2}\right)dt$$

$$sU-u(x,0)=4\frac{d^2}{dx^2}\int_0^{\infty}e^{-\sin t}u(x,t)dt=4\frac{d^2}{dx^2}(U)$$

که در آن :
$$U=U(x,s)=L\left(u(x,t)\right)=\int_0^{\infty}e^{-st}u(x,t)dt$$

با به کار بردن شرایط اولیه نتیجه می‌شود $\left(u(x,0) = 10\sin 2\pi x - 6\sin 4\pi x \right)$:

$$4\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 6\sin 4\pi x - 10\sin 2\pi x$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس از شرایط $u(0,t) = 0 \quad , \quad u(3,t) = 0$ نتیجه می‌شود :

$$U(0,s) = 0 \quad , \quad U(3,s) = 0$$

اکنون معادله (۱) را با شرایط داده شده حل می‌کنیم :

$$4\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0 \qquad 4r^2 - s = 0 \qquad r \pm \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$U(x,s) = c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{2}x}$$

برای یافتن جواب خصوصی قرار می‌دهیم :

$$U_p = A\sin 4\pi x + B\sin 2\pi x$$

با دو بار مشتق‌گیری و قرار دادن آن در معادله نتیجه می‌شود :

$$B = \frac{10}{s + 16\pi^2} \quad , \quad A = \frac{-6}{s + 64\pi^2}$$

پس:

$$U(x,s) = c_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{2}x} + \frac{10}{s + 16\pi^2}\sin 2\pi x - \frac{6}{s + 64\pi^2}\sin 4\pi x$$

$$U(0,s) = c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

$$U(3,s) = c_1 e^{3\frac{\sqrt{s}}{2}x} + c_2 e^{-3\frac{\sqrt{s}}{2}x} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\left(e^{3\frac{\sqrt{s}}{2}x} - e^{-3\frac{\sqrt{s}}{2}x}\right) = 0 \qquad c_1 = c_2 = 0$$

پس:

$$U(x,s) = \frac{10\sin 2\pi x}{s + 16\pi^2} - \frac{6\sin 4\pi x}{s + 64\pi^2}$$

حال از طرفین تبدیل وارون می‌گیریم و نتیجه می‌شود :

$$u(x,t) = 10\sin 2\pi x \ L^{-1}\left(\frac{1}{s + 16\pi^2}\right) - 6\sin 4\pi x \ L^{-1}\left(\frac{1}{s + 64\pi^2}\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = 10e^{-16\pi^2 t}\sin 2\pi x - 6e^{-64\pi^2 t}\sin 4\pi x}$$

تمـــــــــرینات

۱– معادلات با مشتقات نسبی زیر را رده بندی کنید ؟

الف) $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$　　**ب)** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4$

ج) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 3y$

د) $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

۲– نشان دهید $z(x,y) = 4e^{-3x}\cos 3y$ **یک جواب خصوصی معادله زیر با شرایط مرزی داده شده است ؟**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad z(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad z(x,0) = e^{-3x}$$

۳– نشان دهید $v(x,y) = xF(2x,y)$ **جواب عمومی معادله** $x\dfrac{\partial v}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial v}{\partial y} = v$ **است سپس جوابی از آن پیدا کنید به قسمی که** $v(1,y) = y^2$

۴– معادلات زیر را حل کنید ؟

الف) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$　　**ب)** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

ج) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$　　**د)** $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u$

هـ) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

۵– با استفاده از سری فوریه معادله زیر را با شرایط مرزی حل کنید ؟

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} u(0,t) = u(4,t) = 0 & 0 \le x < 4 \\ u(x,0) = 25x & t > 0 \end{cases}$$

۶– نشان دهید جواب معادله زیر با شرایط مرزی داده شده به صورت زیر است ؟

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 & 0\le x<\pi \\ u(x,0)=f(x) & t>0 \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 t}\cos mx\int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

۷– معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید ؟

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t)=u(3,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=2x$$

۸– معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید ؟

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t)=T \quad , \quad u(L,0)=Q \quad , \quad u(x,0)=0$$

فصل دوم:

توابع مختلط

۲–۱) اعداد مختلط :

مجموعه $C=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ را در نظر می‌گیریم . اعضای C را اعداد مختلط می‌نامیم

اعمال زیر را در مجموعه C تعریف می‌کنیم :

الف) عمل جمع : دو عدد مختلط (x_1,y_1) , (x_2,y_2) را در نظر می‌گیریم :

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$$

ب) ضرب عدد مختلط در یک عدد :

$$\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1\ ,\ \lambda y_1)$$

ج) ضرب دو عدد مختلط :

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2\ ,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

هـ) تساوی دو عدد مختلط :

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\ \Leftrightarrow\ x_1=x_2\quad ,\quad y_1=y_2$$

ما اعداد $x=(x,0)$ یکی می‌گیریم ، و با این کار مجموعه اعداد حقیقی زیر مجموعه C می‌شود .

عدد مختلط $(0,1)$ را با نماد i نشان می‌دهیم ، با توجه به تعریف ضرب دیده می‌شود :

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

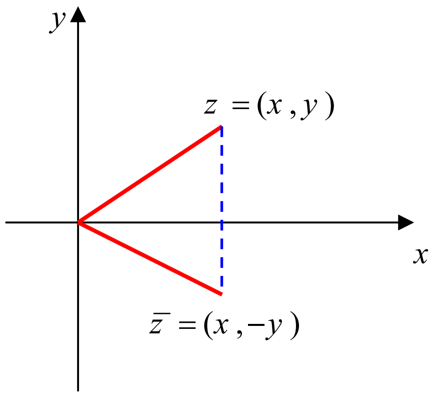
با توجه به عمل جمع می‌توان نوشت :

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)$$
$$(x,y)=x+iy$$

از این پس ما هر عدد مختلط را به صورت $z=x+iy$ نشان خواهیم داد و ضرب اعداد مختلط را می‌توان به صورت ضرب چند جمله‌ای‌ها در نظر گرفت و بجای $i^2=-1$ قرار داد .

با اعمال فوق مجموعه C را مجموعه اعداد مختلط می‌نامند . در عدد مختلط $z=x+iy$ ، x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می‌نامند و بعضی وقتها آنها را با نمادهای $x=R_e(z)$, $y=I_m(z)$ نشان می‌دهند .

عدد مختلط $z=x+iy$ را در نظر می‌گیریم ، عدد $\bar{z}=(x-iy)$ را مزدوج z می‌نامند . از نظر هندسی هر عدد مختلط z نمایش یک نقطه در $\mathbb{R}^2$ است ، بدین ترتیب یک تناظر یک به یک بین اعداد مختلط و نقاط صفحه $\mathbb{R}^2$ موجود است . مزدوج هر عدد z قرینه نقطه‌ای که z آن را نشان می‌دهد نسبت به محور xها می‌باشد .



مزدوج اعداد مختلط دارای خواص زیر است :

الف) اگر $z=x+iy$ آنگاه داریم $z\bar{z}=x^2+y^2$ که یک عدد حقیقی است

ب) $\overline{(\bar{z})}=z$

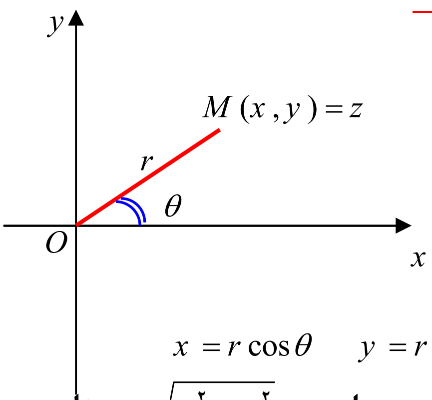
۲–۲) تقسیم دو عدد مختلط :

دو عدد مختلط $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ را در نظر می‌گیریم :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}(z_1.\bar{z}_2)=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)$$

$$=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\left((x_1x_2+y_1y_2)+i\,(y_1x_2-x_1y_2)\right)$$

۲–۳) نمایش مثلثاتی یا نمایش قطبی اعداد مختلط :



عدد مختلط $z=x+iy$ را در نظر می‌گیریم :

واضح است که z نمایش نقطه $M=(x,y)$ می‌باشد

اگر فاصله مبدأ را تا نقطه M با r و زاویه OM را با جهت محور xها θ بنامیم آنگاه داریم :

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta \qquad z=r\cos\theta+i\,r\sin\theta=r(\cos\theta+i\,\sin\theta)$$

r را قدر مطلق z می‌نامند و با نماد $|z|$ نشان می‌دهیم و داریم : $r=\sqrt{x^2+y^2}$ زاویه θ را آرگومان عدد z می‌نامند و $\theta=Arc\,tg\,\dfrac{y}{x}$

۲–۴) ضرب و تقسیم دو عدد مختلط با نمایش قطبی :

دو عدد مختلط $z_1 = r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ را در نظر مـــی‌گیـــریم ، در اینصورت داریم :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi + i\sin\theta\cos\varphi + i^2\sin\theta\sin\varphi\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\left(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\right) + i\left(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\right)\right]$$
$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right)$$

به همین ترتیب :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)\right)$$

نتیجه : اگر $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ باشد آنگاه :

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

و اگر $r = 1$ باشد آنگاه داریم :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

که این فرمول را فرمول مواور می‌نامند و با به کاربردن دو جمله‌ای نیوتن می‌توان خطوط مثلثاتی $n\theta$ رابر حسب θ بدست آورد .

مثال۱): محاسبه خطوط مثلثاتی 2θ بر حسب θ

حل :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

پس $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

۲–۵) محاسبه ریشه‌های یک عدد مختلط :

عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را در نظر می‌گیریم برای محاسبه ریشه nام Z قرار می-دهیم

$$\sqrt[n]{Z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

یا

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad \cos\theta = \cos n\varphi \quad , \quad \sin\theta = \sin n\varphi$$

و از اینجا:

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

مثال): ریشه‌های سوم $z = 1 + i$ را بدست آورید ؟

حل : اول z را به صورت مثلثاتی می‌نویسیم : $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\theta = Arc\,tg\,\frac{y}{x} = Arc\,tg\,1$ یعنی $\theta = \frac{\pi}{4}$

پس :

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \qquad \Leftarrow k=0$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right) \qquad \Leftarrow k=1$$

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \qquad \Leftarrow k=2$$

بنابراین سه ریشه متمایز z را بدست آوردیم .

واضح است که ریشه‌های nام عدد $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ رئوس یک n ضلعی منتظم را که در دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع $a=\sqrt[n]{n}$ قرار دارند، تشکیل می‌دهند .

۲–۶) توابع مختلط :

تعریف : تابع f از مجموعه $\mathbb{C}$ به مجموعه C را یک تابع مختلط می‌نامند . در اینجا ممکن است برای f یک مقدار و یا چند مقدار بدست آید . معمولاً ما ضابطه آن را با $w=f(z)$ نشان می‌دهیم .

در حالت کلی w را به صورت $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ که در آن u , v توابع دو متغیره حقیقی از x, y هستند نشان می‌دهیم .

به عنوان مثال تابع $f(z)=z^2$ را به صورت $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$ در می‌آید ، در اینجا $u(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad v(x,y)=2xy$

۲–۷) تعریف : حد تابع $f(z)$ وقتی که z به z_0 میل می‌کند L است هر گاه به ازای هر عدد مثبت ε عدد مثبت δ وجود داشته باشد به قسمی که وقتی $|z-z_0|<\delta$ آنگاه $|f(z)-L|<\varepsilon$ این عبارت را به زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسند :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \quad , \quad |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$$

۲–۸) تعریف : تابع f را در نقطه $z_{\circ}$ پیوسته می‌نامند ، هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{z \to z_{\circ}} f(z) = f(z_{\circ})$$

ملاحظه می‌شود که این تعریف‌ها مشابه تعریف‌های حد و پیوستگی در توابع حقیقی هستند و به آسانی ثابت می‌شود که کلیه قضایای حد و پیوستگی در توابع حقیقی در مورد توابع مختلط هم برقرارند .

۲–۹) تعریف مشتق: هر گاه f یک تابع یک مقداری در ناحیه‌ای از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد آنگاه f در نقطه $z_{\circ}$ ($z_{\circ}$ در مجموعه تعریف f قرار دارد) دارای مشتق است هر گاه حد زیر موجود باشد :

$$\lim_{\Delta z \to \circ} \frac{f(z_{\circ} \pm \Delta z) - f(z_{\circ})}{\Delta z}$$

در صورت وجود حد آن را با نماد $f'(z_{\circ})$ یا $\frac{df}{dz}(z_{\circ})$ نشان می‌دهیم .

f را در ناحیه D مشتق پذیر می‌نامند هر گاه f در تمام نقاط D دارای مشتق باشد .

مثال): مشتق تابع $f(z) = z^{۲}$ را در $z = i$ محاسبه کنید ؟

حل :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{(i + \Delta z)^{۲} - i^{۲}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{i^{۲} + ۲i\Delta z + \Delta z^{۲} - i^{۲}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{۲i\Delta z + \Delta z^{۲}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to \circ} (۲i + \Delta z) = ۲i$$

۲–۱۰) معادلات کشی – ریمن :

شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه D مشتق پـذیر باشد این است که داشته باشیم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

این معادلات را معادلات کشی – ریمن می‌نامند

برهان : فرض می‌کنیم f مشتق پذیر باشد در این صورت حد زیر موجود می‌باشد

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to \circ}\frac{f(z_\circ \pm \Delta z)-f(z_\circ)}{\Delta z}$$

و یا :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to \circ}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta z=(\Delta x+i\Delta y)}$$

چون حد موجود است پس مستقل از مسیر می‌باشد حال در دو مسیر موازی محور xها و محور yها به z نزدیک میشویم پس داریم :

$$f'(z)=\lim_{x\to \circ}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} i \lim_{\Delta z\to \circ}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

و یا :

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

به همین ترتیب :

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to \circ}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to \circ}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to \circ}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}$$

پس :

$$f'(z)=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y}$$

از اینجا نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

به آسانی نشان داده می‌شود که این شرایط کافی هم هستند

مثال۲): نشان دهید اگر $f(z)=z^n$ آنگاه $f'(z)=nz^{n-1}$

برهان :

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^n+nz^{n-1}\Delta z+\ldots+\Delta z^n-z^n}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z+\ldots+\Delta z^{n-1}\right)=nz^{n-1}$$

مثال۳): مشتق تابع $f(z)=\frac{1+z}{1+z^2}$ را محاسبه کنید با توجه به مثال بالا می‌توان نوشت :

$$f'(z)=\frac{1(1+z^2)-2z(1+z)}{(1+z^2)^2}=\frac{1+z^2-2z-2z^2}{(1+z^2)^2}=\frac{1-2z-z^2}{(1+z^2)^2}$$

۲–۱۱) تعریف : f را در نقطه $z=z_0$ تحلیلی می‌نامند هر گاه f در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر باشد یعنی شرایط کشی – ریمن در $z=z_0$ برقرار باشد ، f را در ناحیه D تحلیلی می‌نامند اگر در هر نقطه D ، f تحلیلی باشد .

هر گاه در تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مشتقات مرتبه دوم u, v موجود باشد ، به آسانی ثابت می‌شود اگر f تحلیلی باشد آنگاه داریم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

این معادلات را معادلات لاپلاس می‌نامند ، هر گاه u, v دو تابع باشند که برای هر دو معادله لاپلاس صادق باشد در اینصورت u, v را مزدوج همساز می‌نامند و با توجه به شرایط کشی – ریمن و معادلات لاپلاس با معلوم بودن یکی از توابع u یا v می‌توان دیگری را محاسبه کرد .

مثال۴): هر گاه $u=x^2+4xy-y^2+2y$ مزدوج همساز آن یعنی v را بدست آورید ؟

حل : از $u=x^2+4x-y^2+2y$ **نتیجه می‌شود :**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+4y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=4x-2y+2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

پس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ **یعنی** u **در معادله لاپلاس صادق است .**

از معادلات کشی – ریمن داریم : $\frac{\partial u}{\partial x}=+\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

از اولی نتیجه می‌شود : $\frac{\partial v}{\partial y}=2x+4y$ ❶

و از دومی نتیجه می‌شود : $\frac{\partial v}{\partial x}=-4x+2y-2$ ❷

بنابراین از معادله ❶ داریم :

$$v(x,y)=2xy+2y^2+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=2y-2$$

و از اینجا : $\varphi'(x)=-2$ و یا : $\varphi(x)=-2x+c$ پس :

$v=2xy+2y^2-2x+C$ که در آن c یک عدد ثابت است

نتیجه : هر گاه $w=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی باشد آنگاه خم‌های $u(x,y)=c \quad , \quad v(x,y)=k$ خم‌های متعامد هستند .

برهان : در واقع می‌دانیم هر گاه $u(x,y)=c$ آنگاه $y'=\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$

و به همین ترتیب اگر $v(x,y)=k$ آنگاه $y'=\frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$

با توجه به شرایط کشی – ریمن داریم :

$$\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\times\frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}=-1$$

یعنی دو خم فوق بر هم عموداند .

۲–۱۲) توابع مقدماتی بر حسب z :

تابع نمائی e^z از اهمیت خاصی برخوردار است زیرا اغلب توابع مقدماتی را می‌توان از روی آن حساب کرد . ما سعی می‌کنیم آن را به گونه‌ای تعریف کنیم که اغلب خواص تابع حقیقی e^x را داشته باشد .

تعریف : هر گاه $z=x+iy$ تعریف می‌کنیم :

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$

با این تعریف ملاحظه می‌شود e^z یک تابع تحلیلی است زیرا داریم :

$$u(x,y)=e^x\cos y \quad , \quad v(x,y)=e^x\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=+e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{de^z}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^z$$

اکنون خطوط مثلثاتی را در اعداد مختلط توسط تابع نمایی e^z تعریف می‌کنیم :

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$$

به آسانی دیده می‌شود

$$\cos^۲ z+\sin^۲ z=۱$$

$$\cos(z_۱\pm z_۲)=\cos z_۱\cos z_۲\mp\sin z_۱\sin z_۲$$

$$\sin(z_۱\pm z_۲)=\sin z_۱\cos z_۲\pm\cos z_۱\sin z_۲$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z)=-\sin z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z$$

ملاحظه می‌شود کلیه خواص خطوط مثلثاتی اعداد مختلط همان خواص خطوط مثلثاتی اعداد حقیقی هستند ، فقط باید دقت کرد که در توابع مثلثاتی اعداد حقیقی $-۱\le\cos x\le ۱$, $-۱\le\sin x\le ۱$ قرار دارند ولی $\sin z$, $\cos z$ تمام مقادیر را انتخاب می‌کنند .

مثلاً هر گاه $\sin z=2+i$ آنگاه داریم :

$$\cos^2 z=1-(2+i)^2$$
$$=1-(4-1+4i)=-3-4i \qquad \cos z=\sqrt{-3-4i}$$

و کافی است ریشه‌های دوم عدد $-3-4i$ را حساب کنیم

۲–۱۳) توابع هذلولی z :

توابع هذلولوی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad , \quad \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \quad , \quad \cos^2 hz-\sin^2 hz=1$$

۲–۱۴) اکنون تابع $w=\ln z$ را تعریف می‌کنیم در واقع این تابع را می‌توان وارون $z=e^w$ بیان کرد . بنابراین اگر $w=u+iv$, $z=re^{i\theta}$ آنگاه داریم : $e^{u+iv}=re^{i\theta}$ و یا $e^u.e^{iv}=re^{i\theta}$ و از اینجا $v=\theta$, $e^u=r\Rightarrow u=\ln r$ بنابراین $w=\ln r+i\theta=\ln|z|+i\arg z$ اگر آرگومان اصلی z را θ_1 بنامیم یعنی $-\pi\le\theta_1\le\pi$ آنگاه داریم :

$$\ln z=\ln r+i(\theta_1+2k\pi) \qquad k=\pm1,\pm2,\pm\ldots$$

ملاحظه می‌شود که تابع لگاریتم یک تابع بینهایت مقداری است . برای $k=n$ یک شاخه از تابع لگاریتمی مشخص می‌شود و در اینصورت تابع لگاریتم یک مقداری می‌شود .

برای $k=0$ شاخه لگاریتم را شاخه اصلی می‌نامند .

واضح است که به ازای کلیه kها تابع لگاریتم در $z=0$ ناپیوسته است . همچنین تابع لگاریتمی روی قسمت منفی محور xها هم ناپیوسته است زیرا داریم :

$$\ln z=\ln r+i\arg z$$
$$(2n_0-1)\pi \quad \le\arg z\le(2n_0-1)\pi$$

و اگر p نقطه دلخواهی روی قسمت منفی محور xها باشد ، برحسب اینکه z به p از ناحیه دوم یا سوم به p نزدیک شود آرگومان z به $(2n_0+1)\pi$ و یا $(2n_0-1)\pi$ میل می‌کند .

اما تابع لگاریتم بجز نقاط واقع بر قسمت منفی محور xها در تمام نقاط صفحه پیوسته و تحلیلی است ، در حقیقت برابر تعریف داریم :

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,tg^{-1}\frac{y}{x}$$

به آسانی دیده می‌شود که شرایط کشی – ریمن به استثناء مبدأ برقرار می‌باشد . برابر بحث‌های قبلی واضح است که توابع $u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, $v=tg^{-1}\frac{y}{x}$ در همه جا به استثناء مبدأ و نقاط واقع بر قسمت منفی محور xها پیوسته‌اند و داریم :

$$d\frac{\ln z}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}-i\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{x-iy}{x^{۲}+y^{۲}}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{۱}{z}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که :

$$\ln z_{۱}z_{۲}=\ln z_{۱}+\ln z_{۲} \quad , \quad \ln\frac{z_{۱}}{z_{۲}}=\ln z_{۱}-\ln z_{۲} \quad , \quad \ln z^{n}=n\ln z$$

باید توجه کرد که فرمولهای بالا در حالت کلی برقرارند ، ولی اگر خود را به یک شاخه محدود کنیم ممکن است فرمولها برقرار نباشند .

قضیه زیر موضوع را روشن می‌کند :

۲–۱۵) قضیه : **مقدار اصلی تابع لگاریتم $\ln z$ در روابط زیر صادق است :**

اگر

$$\ln z_{۱}z_{۲}=\begin{cases}\ln z_{۱}+\ln z_{۲}-۲\pi i & \pi<\arg z_{۱}+\arg z_{۲}\le ۲\pi\\ \ln z_{۱}+\ln z_{۲} & -\pi<\arg z_{۱}+\arg z_{۲}\le \pi\\ \ln z_{۱}+\ln z_{۲}+۲\pi i & -۲\pi<\arg z_{۱}+\arg z_{۲}\le -\pi\end{cases}$$

$$\ln\frac{z_{۱}}{z_{۲}}=\begin{cases}\ln z_{۱}-\ln z_{۲}-۲\pi i & \pi<\arg z_{۱}-\arg z_{۲}\le ۲\pi\\ \ln z_{۱}-\ln z_{۲} & -\pi<\arg z_{۱}-\arg z_{۲}\le \pi\\ \ln z_{۱}-\ln z_{۲}+۲\pi i & -۲\pi<\arg z_{۱}-\arg z_{۲}\le -\pi\end{cases}$$

$$\ln z^{m}=m\ln z-۲k\pi i$$

که در آن m یک عدد صحیح و k عدد صحیح منحصر بفردی است که در شرایط زیر صادق است .

$$\left({}^{m}\!/_{۲\pi}\right)\arg z-\frac{۱}{۲}\le k<\left(\frac{m}{۲\pi}\right)\arg z+\frac{۱}{۲}$$

اکنون با استفاده از تابع لگاریتم z^{α} را که α یک عدد مختلط است تعریف می‌کنیم :

۲–۱۶) تعریف :

$$z^{\alpha}=\exp(\alpha\ln z)=e^{\alpha\ln z}=\exp\left(\alpha\left(\ln|z|+i(\theta_{۱}+۲n\pi)\right)\right)$$
$$=\exp(\alpha\ln z)e^{\alpha\theta_{۱}i}e^{۲\alpha n\pi i}$$

آخرین قسمت ضرب دارای بینهایت جواب است مگر α یک عدد گویا مانند $\frac{p}{q}$ باشد کـه در اینصورت دارای q مقدار متمایز است .

مثال۱): مقدار اساسی $(1+i)^{2-i}$ را محاسبه کنید ؟

حل : برابر تعریف داریم :

$$(1+i)^{2-i}=\exp\left((2-i)\ln(1+i)\right)$$
$$=\exp\left((2-i)\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\pi/4+2n\pi\right)\right)\right)$$

مقدار اساسی متناظر با $n=0$ است . پس برای $n=0$ داریم :

$$(1+i)^{2-i}=\exp\left((2-i)\left(\ln\sqrt{2}+i\,{}^{\pi}\!/_{4}\right)\right)=\exp\left(\left(2\ln\sqrt{2}+{}^{\pi}\!/_{4}\right)+i\left({}^{\pi}\!/_{2}-\ln\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=e^{2\ln\sqrt{2}+\pi/4}\left(\cos\left({}^{\pi}\!/_{2}-\ln\sqrt{2}\right)+i\,\sin\left({}^{\pi}\!/_{2}-\ln\sqrt{2}\right)\right)$$

۳– انتگرال گیری در صفحه مختلط :

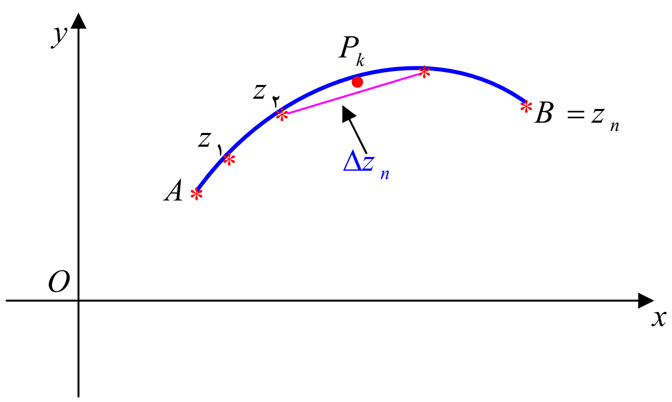
انتگرال گیری روی صفحه مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود :

فرض می‌کنیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ روی منحنی (c) تابعی پیوسته باشد مطابق شکل(۱) کمان c را به n کمان جزء به وسیله نقاط $z_k\ (k=1,2,...,n)$ تقسیم و $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ و روی هر کمان جزء $z_{k-1}-z_k$ نقطه $P_k=x_k+iy_k$ را انتخاب و جمع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_{k=1}^{n}f(P_k)\Delta z_k$$

حال n را به سمت بینهایت میل می‌دهیم اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(P_k)\Delta z_k$ وجود داشته باشد و مقدار آن به تقسیمات اولیه و انتخاب نقطه‌های P_k نداشته باشد آن را انتگرال تابع f در روی منحنی c می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند :

$$\int_{(c)}f(z)dz=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(P_k)\Delta z_k$$



شکل (۱)

اگر c یک خم بسته باشد در اینصورت انتگرال روی c را با نماد $\oint_{(c)} f(z)dz$ نشان مدهیم . به آسانی خواص زیر ثابت می‌شوند :

۱) $\left|\int_{(c)} f(z)dz\right| \le \int |f(z)||dz| = \int_{(c)} \sqrt{u^۲+v^۲}ds$

که در آن : $ds = \sqrt{dx^۲+dy^۲}$

۲) $\int_{(c)} |dz| = L$ L طول قوسی c است

۳) $\int_{(c)} f(z)dz = \int_{(c)} udx - vdy + i\int_{(c)} vdx + udy$

۴) $\int_{(A)}^{(B)} f(z)dz = -\int_{(B)}^{(A)} f(z)dz$

۵) $\int_{(c)} \lambda f(z)dz = \lambda\int_{(c)} f(z)dz$

۶) $\int_{(c)} (f(z) \pm g(z))dz = \int_{(c)} f(z)dz \pm \int_{(c)} g(z)dz$

اگر D یک نقطه روی کمان AB باشد آنگاه داریم :

۷) $\int_{(A)}^{(B)} f(z)dz = \int_{(A)}^{(D)} f(z)dz + \int_{(D)}^{(B)} f(z)dz$

مثال۱): اگر (c) دایره‌ای به مرکز $z_۰$ و به شعاع r باشد و n عدد صحیح مثبت باشد آنگاه $\oint_{(c)} \frac{dz}{(z-z_۰)^{n+۱}}$ را محاسبه کنید ؟

حل : قرار می‌دهیم : $z - z_۰ = re^{i\theta}$, $۰ \le \theta \le ۲\pi$ $dz = ri\,e^{i\theta}d\theta$

$$\oint_{(c)} \frac{dz}{(z-z_۰)^{n+۱}} = \int_۰^{۲\pi} \frac{ri\,e^{i\theta}d\theta}{r^{n+۱}e^{i(n+۱)\theta}} = \int_۰^{۲\pi} r^{-n}ie^{-in\theta}d\theta = r^{-n}i\left(\frac{-۱}{in}e^{-in\theta}\right]_۰^{۲\pi} = ۰ \qquad n \ne ۰$$

و برای $n = ۰$ داریم :

$$\oint_{(c)} \frac{dz}{z-z_۰} = \int_۰^{۲\pi} id\theta = ۲\pi i$$

۳–۱) قضیه : هر گاه تابع f در درون ناحیه R که بوسیله منحنی (C) محدود شده است تحلیلی باشد و $f'(z)$ در درون و روی مرز (C) پیوسته باشد آنگاه $\int_C f(z)dz = 0$

اثبات قضیه با به کار بردن قضیه گرین در مورد انتگرال روی منحنی فوراً نتیجه می‌شود .

در قضیه بالا شرط $f'(z)$ در درون و روی مرز C پیوسته باشد را می‌توان حذف کرد ، این کار اولین بار توسط *گورسا* ریاضیدان فرانسوی اثبات شده است . اگر f در درون و روی مرز ناحیه R که توسط دو منحنی C_1, C_2 محدود شده است ، تحلیلی باشد آنگاه داریم :

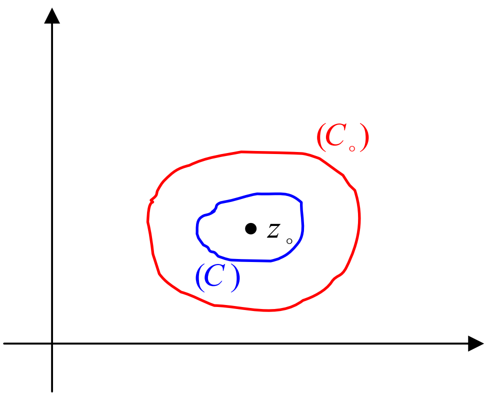
$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

۳–۱) قضیه : اگر f در درون و روی مرز (C) که ناحیه بسته R را تشکیل داده است تحلیلی باشد و خود (C) هموار باشد آنگاه اگر z_0 نقطه‌ای در درون ناحیه R باشد ، داریم :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

اثبات : هر گاه (C_0) دایره ای به مرکز z_0 و به شعاع ε باشد آنگاه $\frac{f(z)}{z - z_0}$ در ناحیه بین دو منحنی $(C_0),(C)$ تحلیلی است پس :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}$$



با قرار دادن $z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ داریم : $dz = \varepsilon i e^{i\theta}d\theta$

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \varepsilon i e^{i\theta}\right)}{\varepsilon i e^{i\theta}} i\,\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \varepsilon i e^{i\theta}\right)d\theta$$

اکنون $\varepsilon \to 0$ نتیجه می‌شود

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f\left(z_0\right)d\theta = 2\pi i\, f(z_0)$$

و از اینجا

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

و اثبات قضیه تمام است .

اکنون از طرفین رابطه $f(z_\circ)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C)}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz$ نسبت به $z_\circ$ مشتق می‌گیریم و در اینصورت نتیجه می‌شود :

$$f'(z_\circ)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^2}dz \quad , \quad f''(z_\circ)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^3}dz$$

و اگر این کار را n بار تکرار کنیم آنگاه :

$$\boxed{f^{(n)}(z_\circ)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{(C)}\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+1}}dz}$$

۴– سری‌های مختلط :

۴–۱) تعریف سری با جملات مختلط :

سری $f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)+...$ ❶ را یک سری مختلط می‌نامند . با قرار دادن $S_1=f_1(z)$, $S_2=f_1(z)+f_2(z)$ ، ... , $S_n=f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)$ می‌گوئیم سری ❶ همگرا است هر گاه $\lim_{n\to\infty}S_n(z)=S(z)$ هر گاه به ازای کلیه نقاط $z\in R$ که در آن R یک ناحیه در C است ، همگرا باشد ، در این صورت R را حومه همگرائی سری ❶ می‌نامند .

اگر از سری ❶ سری زیر را تعریف کنیم :

❷ $|f_1(z)|+|f_2(z)|+...+|f_n(z)|+...$

آنگاه سری ❷ را سری قدر مطلق می‌نامند .

سری ❶ را به طور مطلق همگرا می‌نامند ، هر گاه سری ❷ همگرا باشد .

نظیر حالت حقیقی هر گاه یک سری به طور مطلق همگرا باشد آنگاه خود سری هم همگرا است .

۴–۲) قضیه : شرط لازم و کافی برای اینکه سری $f_1(z)+f_2(z)+...+f_n(z)+...$ همگرا باشد، این است که سری حاصل از قسمت‌های حقیقی و سری حاصل از قسمت‌های موهومی همگرا باشند ، یعنی : $\sum_{n=1}^{\infty}R_t(f_n(z))$, $\sum_{n=1}^{\infty}I_m(f_n(z))$ همگرا باشند .

اثبات قضیه آسان و به عهده خواننده است .

واضح است که اگر سری قسمت حقیقی به تابع $R(z)$ و قسمت موهومی به $I(z)$ همگرا باشند آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ به تابع $R(z)+iT(z)$ همگرا می‌شود .

از بین کلیه آزمون‌های همگرائی سری‌ها شاید دستور نسبت از همه مهمتر و کارآمدتر می‌باشد .

۴–۳) قضیه : هر گاه برای سری $f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$ داشته باشیم $\lim\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=|r(z)|$ در این صورت $|r(z)|<1$ آنگاه سری همگرا و اگر $|r(z)|>1$ سری واگرا است . در صورتی که $|r(z)|=1$ در نوع سری نمی‌توان اضهار نظر کرد .

مثال۱): ناحیه همگرائی سری زیر را پیدا کنید ؟

حل :

$$1+\frac{1}{2^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^1+\frac{1}{3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2+\frac{1}{4^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\ldots$$

برای حل مسأله دستور نسبت زیر را می‌نویسیم :

$$\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n}{\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}}\right|=\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$$

پس سری در حومه $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|<1$ و یا $|z+1|<|z-1|$ همگرا است .

۴–۴) تعریف : سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ را در ناحیه D همگرای متشابه می‌نامند هر گاه با ازای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبت $N>0$ وجود داشته باشد به قسمی که $|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon \quad \forall n>N$ برقرار باشد .

۴–۵) سری تیلور : اگر $f(z)$ در ناحیه R تحلیلی باشد و مرز R را بـا C نـشان دهـیم و z ,a هر دو در درون ناحیه R باشد آنگاه داریم :

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{(z-a)^{2}}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{n}}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}(t-z)}$$

در واقع بنا به فرمول انتگرال کشی داریم :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{t-a}\times\frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}}$$

اکنون با استفاده از اتحاد داریم :

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^{2}+\ldots+u^{n}+\frac{u^{n+1}}{1-u}$$

نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}}=1+\frac{z-a}{t-a}+\ldots+\frac{(z-a)^{n}}{(t-a)^{n}}+\frac{\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-a}{t-a}}$$

بنابراین :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-a}\left(1+\frac{z-a}{t-a}+\ldots+\frac{(z-a)^{n}}{(t-a)^{n}}+\frac{\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-a}{t-a}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{t-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(t-a)^{2}}dt+\ldots+\frac{(z-a)^{n}}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(t-a)^{n}}dt+\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}(t-z)}$$

اکنون با توجه به رابطه $f^{(k)}(a)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-a)^{k+1}}dt$ نتیجه می‌شود :

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1}$$

که در آن

$$R_{n+1}=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}(t-z)}$$

اگر $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}=0$ آنگاه سری :

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

را بسط به سری تیلور تابع f در نقطه a می‌نامند .

۴–۶) نقاط غیر عادی (نقاط ویژه) :

تعریف : اگر تابع $f(z)$ در یک ناحیه به جز نقطه $z=a$ واقع در آن تحلیلی باشد $z=a$ را نقطه ویژه f می‌نامند .

به عنوان مثال در $f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}$ نقطه $z=3$ نقطه ویژه است .

قطب‌ها : هر گاه $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, $\phi(a)\neq 0$, $\phi(z)$ در درون ناحیه R که شامل a است تحلیلی باشد آنگاه $z=a$ را قطب f از مرتبه n می‌نامند . اگر $n=1$ آنگاه $z=a$ را یک قطب ساده و یا قطب می‌نامند .

مثلاً در $f(z)=\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ نقاط $z=-1$ قطب ساده و $z=3$ قطب از مرتبه ۲ می‌باشند

.

۴–۷) سری لورن :

هر گاه $f(z)$ دارای یک قطب از مرتبه n در $z=a$ داشته باشد و در درون و روی دایره (C) به مرکز a و به شعاع r قطب دیگری نداشته باشد آنگاه تابع $(z-a)^n f(z)$ در درون و روی دایره (C) تحلیلی است و داریم :

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\dots+a_n(z-a)^n+\dots$$

این سری را سری لوران f در $z=a$ می‌نامند .

سری $a_0+a_1(z-a)+\dots+a_n(z-a)^n+\dots$ را سری قسمت تحلیلی f می‌نامند و قسمتی را که شامل توان‌های منفی است قسمت اساسی سری لوران می‌نامند .

به طور کلی سری $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-a)^k$ را سری لوران می‌نامند .

۴–۸) قضیه : هر گاه f بین دو دایره به مرکزهای a و به شعاع‌های r_1, r_2 تحلیلی باشند آنگاه f را می‌توان بر حسب سری لوران بسط داد .

اثبات قضیه در کتاب‌های ریاضی مهندسی و توابع مختلط پیدا می‌شود .

نوع قطب را از روی بسط تابع f به سری لوران می‌توان تشخیص داد .

به عنوان مثال اگر در بسط تابع f به سری لوران در نقطه $x=a$ داشته باشیم :

$a_{-n-1}=a_{-n-2}=\dots=-a_{-n-k}=\dots=0 \quad , \quad a_{-n}\neq 0$ در این صورت قطب f از مرتبه n می‌باشد .

اگر بسط f به سری لوران در یک نقطه دارای کلیه توان‌های منفی باشد آنگاه آن نقطه را نقطه ویژه اساسی می‌نامند .

به عنوان مثال داریم :
$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\frac{1}{z^n}+\dots$$

$z=0$ برای $e^{\frac{1}{z}}$ یک نقطه ویژه اساسی است .

۴–۹) قضیه :

بسط $(S+t)^n = S^n + n\dfrac{S^n t}{2!} + \dfrac{n(n-1)}{3!}S^{n-2}t^2 + \ldots + t^n$ اگر $|S|>|t|$ برای کلیه مقادیر صحیح n برقرار است ولی اگر $|\Delta|\le|t|$ آنگاه بسط فقط برای nهای صحیح مثبت برقرار است .

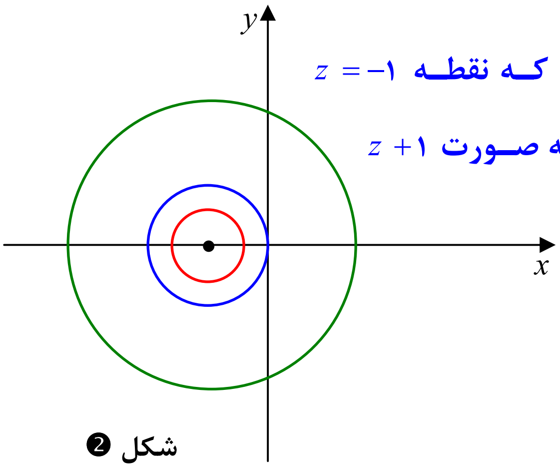
این فرمول به ما کمک می‌کند تا بسط توابع کسری را به سادگی بر حسب سری لوران بنویسیم .

مثال۱): بسط تابع $f(z)=\dfrac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ را در ناحیه $1<|z+1|<3$ بنویسید ؟

حل : با تجزیه کسر به کسرهای مقدماتی داریم:

$\dfrac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}=\dfrac{-3}{z+1}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z-2}$ ملاحظه می‌شود که نقطه $z=-1$ مرکز حلقه فوق می‌باشد . بنابراین کسرهای فوق را به صورت $z+1$ تنظیم می‌کنیم یعنی :

$$\frac{7z-2}{(z+1)z(z-2)}=\frac{-3}{z+1}+\frac{1}{z+1-1}+\frac{2}{z+1-3}$$



شکل ❷

اما می‌دانیم :

$$\frac{1}{z+1-1}=(-1+z+1)^{-1}=-1-(z+1)^{-1}-(z+1)^{-2}+\ldots-(z+1)^{-n}+\ldots$$

$$\frac{1}{(z+1)-3}=-\frac{1}{3}-\frac{z+1}{3^2}-\frac{(z+1)^2}{27}-\ldots-\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}-\ldots$$

این کسر برای $|z+1|<3$ همگرا است بنابراین داریم :

$$\frac{7z-2}{(z+1)z(z-2)}=\ldots-(z+1)^{-n}-\ldots-(z+1)^{-2}-2(z+1)^{-1}-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}(z+1)-\frac{2}{27}(z+1)^2-\frac{2}{81}(z+1)^3$$

$$1<|z+1|<3$$

باید توجه کرد که تابع فوق در $z=-1$ دارای دو بسط دیگر به سری لوران دارد ، یکی از آنها در ناحیه حلقه‌وار بین دو دایره با شعاع خیلی کوچک $z=-1$ و دایره واحد به مرکز $z=-1$ و دیگری در ناحیه بیرون دایره به مرکز $z=-1$ و شعاع ۳ شکل(۲)

هر دو سری به روش بالا نوشته می‌شود پس داریم :

$$f(z)=-3(z+1)^{-1}+\left[-1(z+1)\right]^{-1}+2\left[-3+(z+1)\right]^{-1}$$

$$=-3(z+1)^{-1}+\left[-1-(z+1)-(z+1)^{2}-\dots\right]+2\left[-\frac{1}{3}-\frac{(z+1)}{9}-\frac{(z+1)^{2}}{27}-\dots\right]$$

$$=-3(z+1)^{-1}-\frac{2}{3}-\frac{11}{9}(z+1)-\frac{1}{27}(z+1)^{2}-\frac{83}{81}(z+1)^{3}-\dots$$

$$0<|z+1|<1$$

به همین ترتیب داریم :

$$f(z)=-3(z+1)^{-1}+\left[(z+1)-1\right]^{-1}+2\left[(z+1)-3\right]^{-1}$$

$$=-3(z+1)^{-1}+(z+1)^{-1}+(z+1)^{-2}+(z+1)^{-3}+\dots+2\left[(z+1)^{-1}+3(z+1)^{-2}+9(z+1)^{-3}+\dots\right]$$

$$f(z)=\dots+19(z+1)^{-3}+7(z+1)^{-2}\qquad |z+1|>3$$

۴–۱۰) مانده‌ها :

فرض می‌کنیم تابع f را در نقطه $z=a$ به سری لوران بسط داده‌ایم یعنی $F(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ ، در این صورت عدد a_{-1} (یعنی ضریب $(z-a)^{-1}$) را مانده f در قطب $z=a$ می‌نامند .

هر گاه بخواهیم $z=a$ یک قطب از مرتبه n باشد a_{-1} از فرمول زیر بدست می‌آید :

$$a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]\qquad ❶$$

و اگر $z=a$ یک قطب ساده باشد فرمول بالا به صورت زیر در می‌آید :

$$a_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

در واقع اگر $z=a$ قطب f از مرتبه n باشد داریم :

$$(z-a)^n f(z)=a_{-n}+a_{-n+1}(z-a)+\dots+a_{-1}(z-a)^{n-1}+a_0(z-a)^n+\dots$$

اگر از طرفین $(n-1)$ بار مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]=(n-1)!a_{-1}+n(n-1)\dots\times 2(z-a)+\dots$$

و

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right]=(n-1)!a_{-1}$$

۴–۱۱) قضیه مانده‌ها :

اگر $f(z)$ در درون ناحیه R به جز a که قطب از مرتبه n برای f است تحلیلی باشد و C یک خم بسته در ناحیه R باشد که شامل a است . در این صورت $f(z)$ را به صورت فرمول

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_n(z-a)^n+\ldots$$

نوشت ، با انتگرال گیری از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\, a_{-1}$$

و یا به طور کلی :

۴–۱۲) قضیه :

هر گاه $f(z)$ در درون ناحیه R با مرز C به جز نقاط متناهی $a, b, c, \ldots$ واقع در درون R تحلیلی باشد آنگاه داریم :

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\left(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots\right)$$

که در آن $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$ مانده‌های f در نقاط $a, b, c, \ldots$ می‌باشند .

با استفاده از قضیه مانده‌ها به آسانی می‌توان بعضی از انتگرال‌های حقیقی را هم محاسبه کرد.

مثال۱): مطلوب است محاسبه $\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz$ که در آن C دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۲ می‌باشد ؟

حل : ملاحظه می‌شود که $z=0$ ، $z=1$ قطب‌های ساده $f(z)\frac{4-3z}{z^2-z}$ می‌باشند .

پس داریم :

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz=2\pi i\left(m_1+m_2\right)$$

که در آن m_1 مانده در $z=0$ و m_2 مانده در $z=1$ است و

$$m_1=\lim_{z\to 0}\frac{4-3z}{z^2-z}=\lim_{z\to 0}\frac{4-3z}{z-1}=-4 \quad , \quad m_2=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(4-3z)}{z^2-z}=\lim_{z\to 1}\frac{4-3z}{z}=1$$

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz=2\pi i\left(-4+1\right)=-6\pi i$$

مثال۲): مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_C \frac{dz}{\left(z^3-1\right)^2}$ که در آن C دایره $|z-1|=1$ می‌باشد ؟

حل : داریم :

$$I=\oint_C \frac{dz}{\left(z^3-1\right)^2}=2\pi i\,(m)$$

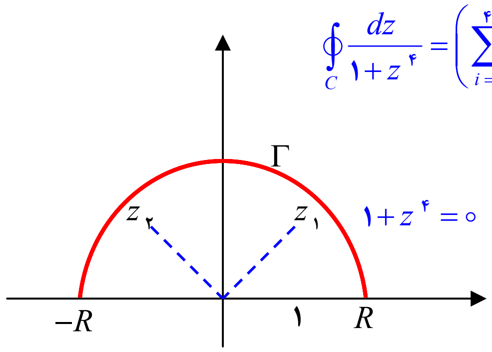
چون $z=1$ قطب از مرتبه ۲ می‌باشد و قطب‌های دیگر در بیرون دایره C هستند

$$m=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\left(z-1\right)^2\frac{1}{\left(z^3-1\right)^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z^2+z-1\right)^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{2\left(-(2z+1)\right)}{\left(z^2+z-1\right)^3}\right)=\frac{-6}{27}=\frac{-2}{9}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{-2}{9}\right)=\frac{-4\pi i}{9}$$

مثال۳): مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

حل : برای محاسبه این انتگرال کافی است انتگرال زیر را در ناحیه D که توسط نیم دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع R است محاسبه کنیم $\oint_C \frac{dz}{1+z^4}=\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)2\pi i$



که در آن m_i مانده‌های $\frac{1}{1+z^4}$ می‌باشند .

$$1+z^4=0 \Rightarrow z_1=e^{i\pi/4}\ ,\ z_2=e^{i3\pi/4}\ ,\ z_3=e^{i5\pi/4}\ ,\ z_4=e^{i7\pi/4}$$

قطب‌های $\frac{1}{1+z^4}$ ساده می‌باشند و تنها دو قطب $e^{i3\pi/4}$, $e^{i\pi/4}$ در درون ناحیه بالا است پس داریم :

$$m_1=\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{\left(z-e^{i\pi/4}\right)}{z^4+1}=\frac{1}{4e^{3i\pi/4}}$$

$$m_2=\lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{\left(z-e^{i3\pi/4}\right)}{z^4+1}=\frac{1}{4e^{9i\pi/4}}$$

بنابراین داریم :

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-3i\pi/4} + \frac{1}{4}e^{-9i\pi/4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

از طرفی داریم :

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{1+z^4} + \int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4}$$

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{1+z^4} + \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4}$$

ثابت می‌کنیم $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4} = 0$ در این صورت خواهیم داشت $\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ اکنون ثابت می‌کنیم هر گاه $|f(z)| \le \frac{M}{R^k}$ با $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$, $k > 1$ آنگاه $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

اثبات :

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz| \le \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{M\pi}{R^{k-1}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

در مورد $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ داریم $|f(z)| < \frac{2}{R^4}$ پس : $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^4} = 0$

مثال۴): محاسبه انتگرال‌هائی که به شکل $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ که در آن G تابع منطق از $\sin\theta, \cos\theta$ می‌باشند ؟

حل : با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ نتیجه می‌شود $\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2}$, $\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$

و $dz = ie^{i\theta}d\theta$ یا $d\theta = \frac{dz}{iz}$ انتگرال‌های فوق به صورت $\int_C f(z)dz$ در می‌آیند که در آن C دایره واحد به مرکز مبدأ مختصات می‌باشد .

مثال۵): مطلوب است محاسبه $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$ ؟

حل : با استفاده از قراردادهای بالا داریم :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_C \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}$$

که در آن C دایره واحد به مرکز مبدأ می‌باشد .

اکنون قطب‌های $\frac{2}{3z^2+10iz-3}$ را محاسبه می‌کنیم :

$$۳z^{۲}+۱۰iz-۳=۰ \Rightarrow z=\frac{-۵\pm\sqrt{-۲۵+۹}}{۳}=\frac{-۵\pm ۴i}{۳} \qquad \Rightarrow z_{۰}=-۳i \quad , \quad z_{۱}=-\frac{۱}{۳}i$$

ملاحظه می‌شود فقط $z_{۱}=-\frac{۱}{۳}i$ در درون دایره (C) است ، پس داریم :

$$m_{۱}=\lim_{z\to\frac{-i}{۳}}\frac{\left(z+{}^{i}\!/_{۳}\right)\times ۲}{۳z^{۲}+۱۰iz-۳}=\lim_{z\to\frac{-i}{۳}}\frac{۲}{۶z+۱۰i}=\frac{۱}{۴i}$$

$$\oint_{C}\frac{۲dz}{۳z^{۲}+۱۰iz-۳}=۲\pi i\left(\frac{۱}{۴i}\right)=\frac{\pi}{۲}$$

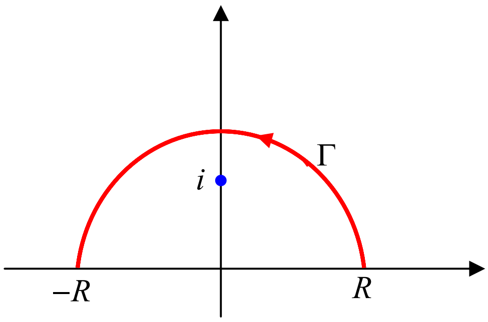
مشابه انتگرال‌های بالا می‌توان انتگرال‌های $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx$ را که در آن $F(x)$ یک تابع منطق است محاسبه کرد .

برای حل این انتگرال‌ها قرار می‌دهیم : $\oint_{C}F(z)e^{imz}dz$

که در آن (C) نیم دایره‌ای به شعاع R و قطر آن که منطبق بر محور xها است .

مثال۶): مطلوب است محاسبه $\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^{۲}+۱}dx$ ؟

حل : اول $\oint_{C}\frac{e^{imz}}{z^{۲}+۱}$ را روی منحنی (C) که در شکل زیر نشان داده شده است محاسبه می‌کنیم :



$$z=\pm i \qquad z^{۲}+۱=۰$$

پس قطب‌های عبارتند از $z_{۱}=i$, $z_{۰}=-i$ که فقط $z_{۱}=i$ در درون ناحیه است پس داریم :

$$m_{۱}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{imz}}{z^{۲}+۱}=\lim_{z\to i}\frac{e^{imz}}{z+i}=\frac{e^{-m}}{۲i}$$

بنابراین :

$$\oint_{C}\frac{e^{imz}}{z^{۲}+۱}dz=۲\pi i\,\frac{e^{-m}}{۲i}=\pi e^{-m}$$

از طرفی دیگر داریم :

$$\oint_{C}\frac{e^{imz}}{z^{۲}+۱}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{imz}}{x^{۲}+۱}dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{z^{۲}+۱}dz=\pi e^{m}$$

و یا :

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx+i\int_{-R}^{R}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\pi e^{-m}$$

$$=2\int_{0}^{R}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx+i\int_{-R}^{R}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\pi e^{-m}$$

به آسانی می‌توان نشان داد :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=0 \quad , \quad \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx=0$$

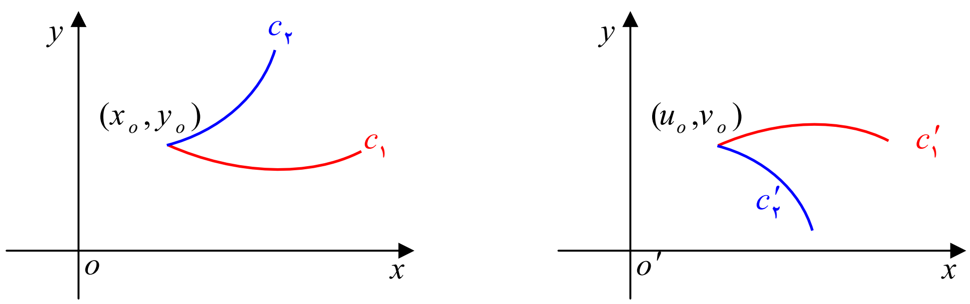
پس :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{\pi e^{-m}}{2}$$

۵) نگاشت‌های همدیس (یا همشکل) :

تابع تحلیلی $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تبدیل $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ بین نقاط صفحه (xoy) , $(uo'v)$ را مشخص می‌کند .

فرض می‌کنیم این تبدیل نقطه (x_o,y_o) از صفحه xoy را به نقطه (u_o,v_o) از صفحه $uo'y$ تصویر کند .



شکل ❶

و دو خم c_1,c_2 در صفحه xoy همدیگر را در نقطه (x_o,y_o) بریده‌اند و توسط تبدیل بالا به دو خم c'_1,c'_2 که در (u_o,v_o) همدیگر را بریده‌اند ، تصویر شود .

هر گاه تبدیل به گونه‌ای باشد که زاویه بین دو منحنی c_1,c_2 در نقطه (x_o,y_o) از نظر اندازه و جهت با زاویه بین دو منحنی c'_1,c'_2 در نقطه (u_o,v_o) با هم برابر باشند آنگاه نگاشت یا تبدیل را یک تبدیل همدیس می‌نامند . اگر تبدیل به گونه‌ای باشد که فقط اندازه را حفظ کند آنگاه آن را تبدیل آیزوگنال[1] می‌نامند .

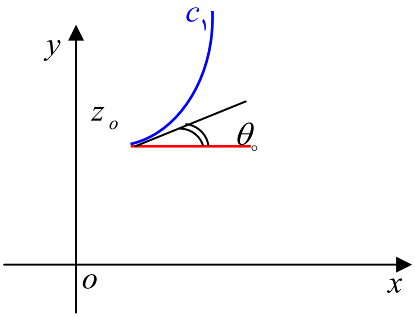
[1] Isognal

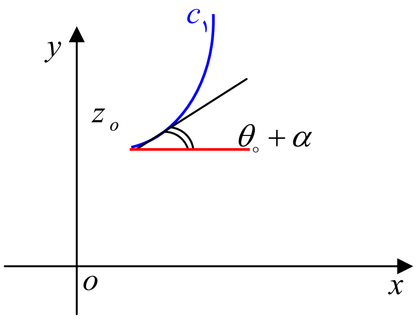
۵–۱) قضیه :

هر گاه f در ناحیه R تحلیلی و $f'(z)\neq 0$ آنگاه f در کلیه نقاط R همدیس می‌باشد .

برهان : فرض می‌کنیم $w=f(z)$ یک تبدل باشد که در آن در نقطه z_o تحلیلی و $f'(z_o)\neq 0$ و c_1 خمی باشد که از z_o گذشته تصویر آن توسط f خم c_1' باشد که از نقطه $w_o=f(z_o)$ گذشته است .

شکل ❷





حال اگر معادلات پارامتری c_1 را با $y(t),x(t)$ نشان دهیم آنگاه داریم :

$$w=f\left(z(t)\right) \qquad , \qquad z(t)=x(t)+iy(t)$$

و از اینجا :

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt} \Rightarrow \left(\frac{dw}{dt}\right)_{w=w_o}=f'(z_o)\frac{dz}{dt}\Big|_{z=z_o}$$

اگر قرار دهیم :

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{w=w_o}=\rho e^{i\varphi_o} \qquad , \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{z=z_o}=r_o e^{i\theta_o} \qquad , \qquad f'(z)=\mathrm{R}e^{i\alpha}$$

آنگاه داریم :

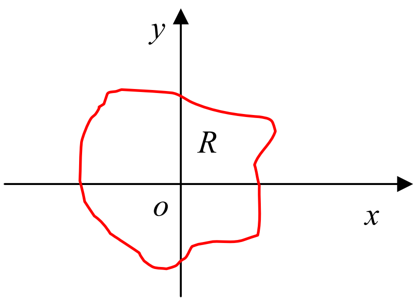
$$\rho e^{i\varphi_o}=\mathrm{R}e^{i\alpha}r_o e^{i(\alpha+\theta_o)}=Rr_o e^{i(\alpha+\theta_o)}$$

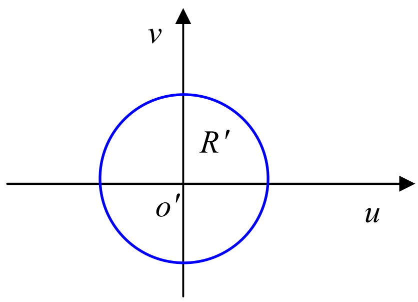
و در نتجه $\varphi_o=\alpha+\theta_o$ یعنی اگر $f'(z_o)\neq 0$ آنگاه f زاویه بین دو منحنی را حفظ می‌کند .

۵–۱) قضیه تصویری ریمن :

فرض می‌کنیم C مرز ناحیه ساده R در صفحه xoy و C' دایره واحد به مرکز مبدأ در صفحه $uo'v$ باشد و R' ناحیه محدود به C' باشد در این صورت یک تابع تحلیلی

$w=f(z)$





وجود دارد به قسمی که هر نقطه R یک نقطه R' و هر نقطه از C به یک نقطه C' تصویر شود ، بعلاوه f یک به یک می‌باشد .
تابع $f(z)$ شامل سه ثابت است و آنها را می‌توان مشخص کرد کافی است نقطه داده شده در R را متناظر با مبدأ در نظر گرفت .
توجه کنید که اثبات قضیه ریمن ضابطه f را در حالت کلی نشان نمی‌دهد .
این قضیه را می‌توان به ناحیه R بین دو منحنی که به ناحیه بین دو دایره متحدالمرکز تصویر می‌شود تعمیم داد .

حال توجه خود را به چند تبدیل مهم جلب می‌کنیم :

در این قسمت β,α اعداد مختلط هستند

۱) انتقال $w=z+\beta$:

در اینجا w نقاط صفحه xoy را در امتداد بردار β جابجا می‌کند ، و چون $w'=1$ پس انتقال یک تبدیل همدیس است .

۲) دوران $w=e^{i\theta_0}z$:

این تبدیل شکل‌ها را در صفحه xoy با اندازه زاویه θ_0 حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم، اگر $\theta>0$ جهت دوران جهت مثلثاتی است و اگر $\theta<0$ جهت دوران جهت عقربه‌های ساعت است .

۳) انبساط و انقباض $a\in C \ , w=aZ$:

این تبدیل اول شکل‌ها را دوران می‌دهد سپس بر حسب اینکه $|a|>1$ یا $(|a|<1)$ شکل را منبسط یا منقبض می‌کند .

۴) انعکاس $w=\frac{1}{z}$:

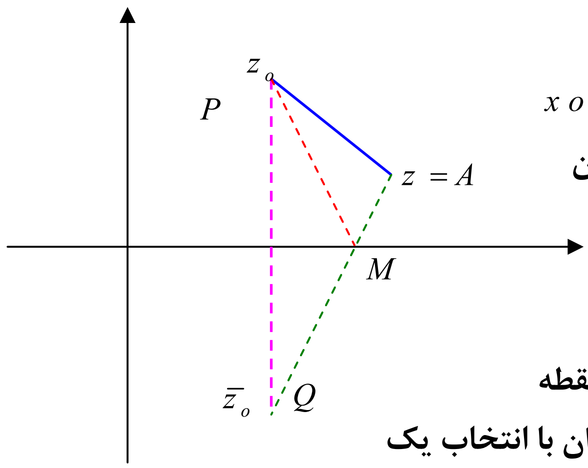
۵) تبدیل خطی $w=\alpha z+\beta$:

این تبدیل ترکیبی از دوران و یک انتقال است .

۶) تبدیل دو خطی کسری (یا تبدیل موبیوس) $(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$ $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$:

ملاحظه می‌شود که این تبدیل ترکیبی از انتقال ، دوران و انعکاس می‌باشد .

۷) تبدیل یک نیم صفحه به یک دایره :



فرض می‌کنیم z_o یک نقطه دلخواه در نیم صفحه xoy باشد (نیم صفحه بالا نقاطی هستند که $y > 0$) اکنون تبدیل $w = e^{i\theta_o}\left(\dfrac{z - z_o}{z - \bar{z}_o}\right)$ را در نظر می‌گیریم .

این تبدیل نیم صفحه فوق را به درون دایره واحد $|w| = 1$ می‌کند . هر نقطه واقع بر محور xها به یک نقطه از دایره واحد تصویر می‌شود مقدار ثابت θ_o را می‌توان با انتخاب یک نقطه دلخواه از محور $x'ox$ و مشخص کردن تصویر آن روی دایره واحد تعیین کرد .

در واقع اگر z یک نقطه دلخواهی در نیم صفحه فوقانی باشد ، قرینه $P = z_o$ را نسبت به محور x ها $Q = \bar{z}_o$ را تعیین می‌کنیم . محل تلاقی $AQ\,(A = z)$ با محور xها نقطه M می‌باشد و داریم $MP = MQ$

پس : $AP = |z - z_o| < |z - \bar{z}_o| = AQ$) در مثلث ΔAPM داریم $(AP < MP + AM)$)

از طرف دیگر داریم :

$$|w| = \left|e^{i\theta_o}\frac{z - z_o}{z - \bar{z}_o}\right| = \frac{|z - z_o|}{|z - \bar{z}_o|} < 1$$

اگر z روی محور xها باشد آنگاه :

$$|w| = 1 \quad , \quad |z - z_o| = |z - \bar{z}_o|$$

۸) تبدیل شواتز – کریستوفل :

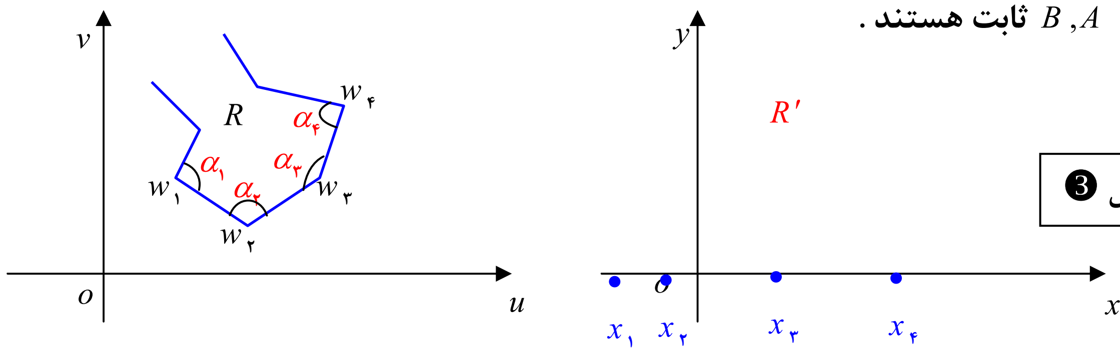
چند ضلعی $w_1 w_2 \dots w_n$ با زاویه‌های داخلی $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را در صفحه uv در نظر می‌گیریم همچنین نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ را روی محور $x'ox$ در صفحه xoy انتخاب می‌کنیم تبدیلی که ناحیه R را به ناحیه R' مطابق شکل (۳) تبدیل می‌کند و نقاط $w_1 w_2 \dots w_n$ را به نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ تبدیل می‌کند به صورت زیر می‌باشد :

$$\frac{dw}{dz} = A\,(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1}\dots(z - x_2)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}$$

و یا :

$$w = A\int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1}\dots(z - x_2)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}dz + B$$

که در آن A, B ثابت هستند .



شکل ❸

در این تبدیل به نکات زیر باید توجه کرد :

۱- سه نقطه از نقاط $x_1,\dots,x_n$ را به دلخواه انتخاب کنید

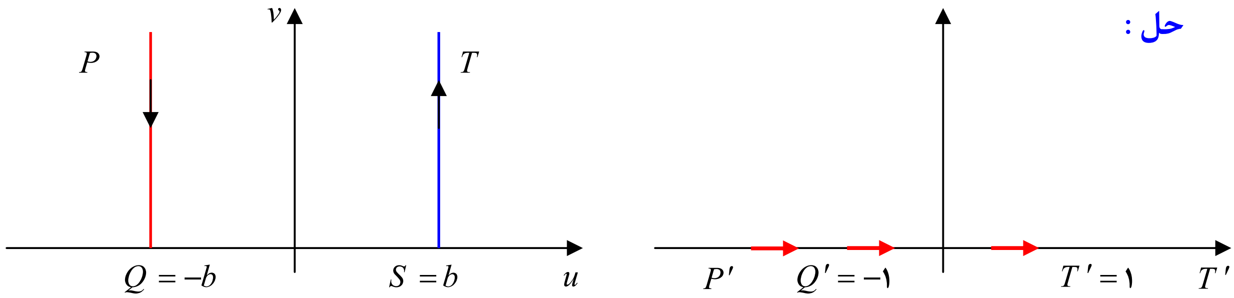
۲- ثابت‌های A, B اندازه ، موقعیت و جهت چند ضلعی را مشخص می‌کند .

۳- به طور قرارداد یکی ار نقاط مانند x_n را به عنوان ∞ انتخاب کنید و آن را در فرمول‌های ❶ یا ❷ اعمال کنید .

۴- چند ضلعی باز را می‌توان حد یک چند ضلعی بسته در نظر گرفت .

مثال) تابع $w=f(z)$ را طوری مشخص کنید که ناحیه زیر را به نیم صفحه بالای xoy تصویر کنید ؟

حل :



با استفاده از تبدیل شوارتز – کریستوفل داریم :

$$\frac{dw}{dz}=A(z-1)^{\frac{\pi}{2\pi}-1}(z+1)^{\frac{\pi}{2\pi}-1}=A(z-1)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{A}{\sqrt{z^2-1}}=\frac{k}{\sqrt{1-z^2}}$$

از اینجا

$$w=kArc\sin z+B$$

اما مطابق شکل داریم :

$$-b=kArc\sin(-1)+B \Rightarrow -b=k\left(-\frac{\pi}{2}\right)+B$$

$$b=kArc\sin(1)+B \Rightarrow b=k\left(\frac{\pi}{2}\right)+B$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

$$k=\frac{2b}{\pi}\ ,\quad B=0$$

و یا :

$$w=\frac{2b}{\pi}Arc\sin z\qquad ,\ \boxed{z=\sin\frac{\pi w}{2b}}$$

تمـــــــــــرینات

۱– مقادیر زیر را محاسبه کنید ؟

الف) $I_m = \dfrac{1}{1+i}$ **ب)** $R_e\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)$ **ج)** $\left|\dfrac{(1+i)^6}{i^3(1+4i)^2}\right|$

۲– اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی نمایش دهید ؟

الف) $(1+i)$ **ب)** $3+i$ **ج)** $-i\sqrt{3}$ **د)** ۲

۳– مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را که با نامساوی‌های زیر مشخص شده است را رسم کنید ؟

الف) $|z|=2$ **ب)** $|z+1-i|>2$ **ج)** $\left|\dfrac{z-i}{z+1}\right|\leq 3$

۴– مقادیر زیر را محاسبه کنید ؟

الف) $(2i)^{\frac{1}{2}}$ **ب)** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ **ج)** $2^{\frac{1}{6}}$

۵– چهار ریشه معادله $z^4+16=0$ را بدست آورید ؟

۶– ریشه‌های پنجم عدد ۱ را بدست آورید ؟

۷– ثابت کنید $u=y^3-3yx^2$ همساز است ، مزدوج همساز آن را بدست آورید ؟

۸– نشان دهید تابع $w=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$ تحلیلی است ؟

۹– نشان دهید توابع زیر همسازند و مزدوج همساز آنها را بدست آورید ؟

الف) $u=y\left(x^2+y^2\right)^{-1}$ **ب)** $u=2x(1-y)$

۱۰– مقادیر اصلی اعداد زیر را پیدا کنید ؟

الف) $(1+i)^{2-i}$ **ب)** $(2i)^{\frac{1}{2}}$ **ج)** 2^{3+2i}

۱۱– معادلات زیر را حل کنید ؟

الف) $\sin z=10$ **ب)** $\cos z=5$ **ج)** $e^{z}=-2+2i$

۱۲– در چه نقطه‌ای تابع $f(z)=x^{2}+2y+i\left(x^{2}+y^{2}\right)$ **دارای مشتق است ؟**

۱۳– ناحیه $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}\ ,\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 2\right\}$ **توسط تابع** $w=(1+i)z+2-i$ **به کدام ناحیه تبدیل می‌شود ؟**

۱۴– تابع $w=az+b$ **را چنان تعیین کنید که نقاط** $2+3i\ ,\ 2-3i$ **به ترتیب به نقاط** $0\ ,\ 1-i$ **تبدیل شوند ؟**

۱۵– نقاط ثابت تبدیل $w=\dfrac{6z-9}{z}$ **را بدست آورید ؟**

۱۶– خط $y=x$ **توسط تبدیل** $w=\dfrac{z+1}{z+i}$ **به چه منحنی تبدیل می‌شود ؟**

منابع:

۱- ریاضیات مهندسی - تألیف: دکتر تومانیان - انتشارات آشنا ۱۳۸۶

۲- ریاضیات مهندسی پیشرفته جلد(۱) تألیف: کلارنس‌ری وایلی-اوئیس برت - ترجمه: سیامک کاظمی
انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف ۱۳۷۷(چاپ دوم)

۳- ریاضیات مهندسی پیشرفته جلد(۲) تألیف کلارنس‌ری وایلی-اوئیس پیرت - ترجمه: سیامک کاظمی
انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف ۱۳۷۷(چاپ دوم)

۴- ریاضیات مهندسی - تألیف: دکتر عبداله شیدفر

۵- مثال‌های پیشرفته حل شده در ریاضیات مهندسی پیشرفته - تألیف: ال-ار-موستدو
ترجمه دکتر فرضعلی ایزدی - انتشارات دانشگاه تربیت معلم تبریز ۱۳۷۰

۶- Advanced Mathematics For Engineers And Scientists . By Murrayr.Spiegep(1971)

پایان