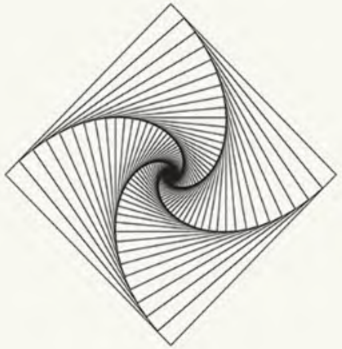
معماهایی برای رازگشایی از عالم



کامران وفا

ترجمهٔ حسام‌الدین ارفعی

معماهایی برای رازگشایی از عالم

کامران وفا

مترجم: حسام‌الدین ارفعی

نشرنو

سرشناسه: وفا، کامران، ۱۳۳۹-

عنوان و نام پدیدآور: معماهایی برای رازگشایی از عالم / کامران وفا؛ ترجمهٔ حسام‌الدین ارفعی.

مشخصات نشر: تهران: فرهنگ نشر نو، ۱۳۹۹.

مشخصات ظاهری: ۲۶۴ ص.

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۹۰-۲۸۶-۱

وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا

موضوع: فیزیک -- فلسفه؛ فیزیک ریاضی؛ ریاضیات -- روش‌شناسی

شناسهٔ افزوده: ارفعی، حسام‌الدین، ۱۳۲۷-، مترجم

رده‌بندی کنگره: QC۶

رده‌بندی دیویی: ۵۶۰/۰۱

شمارهٔ کتاب‌شناسی ملی: ۷۵۰۰۰۰۲

Puzzles to Unravel the Universe
Cumrun Vafa
Independently Published, ۲۰۲۰

تقدیم

به همسر عزیز و یار همیشگی‌ام،

آفرین

و

به پسران دلبندم

فرزان، کیان و نیکان

که الهام‌بخش من برای نوشتن این کتاب بودند

و

به والدین پرمحبتم

سیمین و جواد

که کنجکاویم را پروردند.

کامران وفا

مقدمهٔ مترجم

کتابی که در دست دارید برگردان کتاب Puzzles to Unravel the Universe نوشتهٔ کامران وفا است، برخاسته از آموزش درسی به دانشجویان سال اول دانشگاه هاروارد توسط نویسنده، به منظور آشنا ساختن آنها با قوانین بنیادی فیزیک از طریق معماهای ساده. از این رو مطالب و ساختار آن می‌تواند برای آشنا نمودن دانشجویان مبتدی با جو متلاطم و متغیر و پویایی که بر رازگشایی از جهان فیزیک حاکم بوده و هست استفاده شود تا آن دنیای زیبا و چالش‌برانگیز را برایشان با قلمی درشت از جنس معما تصویر کند و چشم‌اندازی از آنچه از دیرباز تاکنون یافته‌ایم برایشان ترسیم کند. این بینش آنها را برای گام نهادن در راه علم آماده و مهم‌تر از آن واقع‌بین می‌کند. اگر به محتوای آن به صورت یک درس نگاه کنیم باید اذعان کرد که بسیار با کتاب‌های درسی دیگر متفاوت است ــ از معادلات ریاضی در آن خبری نیست و در عوض چیزی را عرضه می‌کند که در درس‌های متعارف دیده نمی‌شوند. شما را به نحوهٔ اندیشیدن در موضوعات فیزیک تقابل‌ها و هم‌سویی‌های اندیشه‌های مختلف و به‌ویژه برهمکنش آنها با ریاضیات آگاه می‌سازد. از این رو کتابی است از جنسی دیگر. برای خواندنش به آموزشی جدی در فیزیک و ریاضیات نیاز نداریم.

ولی کتاب جنبه‌های دیگری هم دارد. معماهای فرح‌بخش‌اش برای هر کسی آموزنده و دلچسب است. از محاسبات و استدلالات پیچیده که معمولاً در یک درس متعارف فیزیک وجود دارد خبری نیست. از این رو به‌خوبی به کار اشاعهٔ علم هم می‌آید، هرچند گاهی کمی از آنها هم پیش کشیده می‌شود. آنان که مسیر حرفه‌ای فیزیک را برنگزیده‌اند هم از آن خواهند آموخت و لذت خواهند برد. شاید هم نگاهی که در آن می‌یابند جایی به کارشان آید.

اما آنچه مرا به این کتاب علاقه‌مند کرد و مرا بر آن داشت که به فارسی برش گردانم، دیدگاه عمیق فلسفی حاکم بر کلیت کتاب است، بسیار متفاوت از آنچه معمولاً به عنوان فلسفهٔ علم می‌خوانیم. شاید در نگاه اول کتاب فیلسوفانه جلوه نکند و ابتدایی به چشم آید. اما اگر حداقل قسمتی از فلسفهٔ حاکم بر هر علم را تحلیل پیش‌فرض‌های صریحاً ناگفته و جو حاکم بر نحوهٔ کشف و تدوین اصول آن علم

بدانیم این کتاب به سادگی و روشنی قسمتی از ریشه‌های گوناگون فیزیک را برای ما آشکار می‌کند، هرچند حال و هوای آن برخلاف متن‌های جدی فیلسوفانه سرخوش و آسان‌گیر به نظر می‌آید. نکتهٔ مهم آن است که نشان می‌دهد ریشه‌های فیزیک چقدر افشان است و لزوماً از طرز فکری مشخص و صلب تحت عناوین پر طمطراق همچون دیالکتیک، رئالیسم، ایدئالیسم، ماتریالیسم و امثالهم سرچشمه نمی‌گیرد. از حدس و ابطال به معنای جزمی، در سنجش مباحث فیزیک هم چندان خبری نیست. پیش‌فرض‌هایش سیال و متغیرند: گهگاه این ریشه‌ها و خاستگاه‌ها ساده‌اند و برخاسته از ملاحظات متعارف همگانی ما و هرچندگاه هم از اموری بسیار نابدیهی. آخر کار هم آن را به صورت ساختمانی با پایه‌های صلب بنا نمی‌نهیم که وقتی در تقابل با واقعیت ببازد ناچار به تخریبش باشیم، بلکه همیشه، هرچند به سختی انعطاف پذیر و آماده دگردیسی است. و با این‌همه از نوعی وحدت و یکپارچگی هم برخوردار است. این متن نمونه ای از نحوه واقعی تحول فیزیک و گذر از گردنه‌های تند را روشن می‌سازد، نه یک تصویر انتزاعی و معمولاً به دور از واقعیت فرایند کشف عالمانه، امری که در آموزش روزمرهٔ ما جایش خالی است.

دیگر نکته‌ای که مرا مشتاق به ترجمهٔ این کتاب کرد یاری به حل مشکلی است که سال‌ها در تدریس با آن مواجه بوده‌ام. دانشجویان انتظار دارند هر رشته از فیزیک را به صورت مجموعه‌ای از قضایای ریاضی که بر اصولی موضوع، محکم و صلب استوارند ببینند و بشنوند. قانع کردن آنان به اینکه فیزیک این‌چنین نیست بلکه بسیار سیال و پویا، امری است اگر نه غیرممکن بسیار مشکل.

مهم‌تر اینکه توفیق فیزیک در همین سیالیتش نهفته است. در غیر این صورت با هر چالش و بحرانی که به طور روزمره گریبانگیر فیزیک (و شاید همهٔ علم) است به تواتر زیاد ناچار به فروریزشش می‌بودیم و دیگر علمی نمی‌بود که توان توصیف جهان را از ۱۰ به توان منهای ۱۸ متر تا ۱۰ به توان ۲۶ متر (حدود ۴۴ مرتبه بزرگی!) را داشته باشد. این کتاب با دادن تصویری واقعی از فرایند کشف فیزیکی و سیالیت آن می‌تواند دیدگاه جزم‌اندیشانهٔ به‌ظاهر اصل موضوعی که بر اکثر دانش‌آموختگان ما چیره گشته را اصلاح کند.

من فیلسوف نیستم و تبحری در فلسفه ندارم ولی نگاهی که به فیزیک و تا حدی ریاضیات در این کتاب یافتم به معنایی که کوتاه در بالا ذکرش رفت، به نظرم بسیار فیلسوفانه آمد. به این معنی که نشان می دهد تفکرات، بُن‌مایه‌ها و رهیافت‌های فیزیک چگونه شکل می‌گیرند. به دفعات تحت تأثیر عوامل مختلف و به ویژه آزمایش‌های نو یا تدقیق در سازگاری سازوکارشان تغییر شکل می‌دهند.

این بود که با خود اندیشیدم که چه خوب است این کتاب در دست مخاطب ایرانی و به ویژه جوان ایرانی قرار گیرد تا تصویری واقعی از فرآیند تحول علمی را ببیند. تصویری که در نظام آموزشی ما، شاید ناخواسته، صلب، پایان‌یافته و خدشه‌ناپذیر جلوه داده شده است. زیبایی و خدشه‌ناپذیری ریاضیات و آرامش و امنیتی که از صحت تردیدناپذیر استدلالاتش در مدرسه ارائه می‌شود آن را به شکلی در ذهن دانش‌آموختگان یکتا و بی‌بدیل می‌کند که غایت زیبایی، اعتماد و صحت را در ساختارهایی آن چنان می‌جویند. و پروای آن دارند که ناامنی و سردرگمیِ دریایِ بی‌انتها و نامحدود و وهم‌آور رازهای ناشناختهٔ طبیعت را تاب آورند غافل از آنکه یافتن و کاویدن این گنج‌های به‌ظاهر امن گذر از طوفان‌های پر جوش و خروش را می‌طلبد. شاید آگاهی بیشتر بر ناشناخته‌ها و زیبایی‌های این دریای بیکران بی‌باکی لازم را برای سیر در آن به ما بدهد.

علاوه بر آن که در فلسفه تبحر ندارم در ترجمه هم ندارم ولی خطر کردم و بدان دست یازیدم. در این راه بسیار آموختم، هم در فیزیک و هم در زبان فارسی. یاری‌های بی‌بدیل دوست دانشمند و همکار عزیزم دکتر شانت باغرام، و یار قدیم دبستانی و فرهیخته‌ام محمدرضا جعفری که ویرایش آن را تقبل کردند و با تعصبات نوشتاری من سر کردند نوشتهٔ مرا شفاف‌تر و روان‌تر نمودند. از این دو دوست صمیمانه سپاسگزارم. از رضا منصوری دوست و همکار قدیم که در انتخاب واژه‌هایی یاری داد بی‌اندازه ممنونم. لازم به گفتن نیست که مسئولیت هر کاستی با من است، که برای با خبر کردنم از آنها، سپاسگزار خواهم بود. همکاری‌ها و کمک‌های بی‌دریغ کامران وفا هم در این کار بسیار دلگرم‌کننده بود مخصوصاً که مدتی قبل از زمان انتشار کتاب آن را در اختیار من گذاشت. از همکاری‌ها و هم‌فکری‌های او نیز بسیار ممنونم. مطمئناً بدون آنها به این زودی کار به فرجام نمی‌رسید.

برای به سامان رسیدن این کتاب همکاری‌های بی‌دریغ نشرنو، به‌ویژه دوست گرامی آقای عبدالرحیم جعفری، و هیأت تحریریهٔ آن همراه با پیشنهادهای سازنده، نقش کلیدی ایفا کرده است. از ایشان شادمانه سپاسگزارم.

امیدوارم این تلاش سهمی در پیشبرد نگاه علمی و زدودن جزم‌اندیشی از علوم به‌ویژه فیزیک را در کشور داشته باشد.

حسام‌الدین ارفعی
تهران، سی و یکم خرداد هزار و چهارصد خورشیدی

پیشگفتار

تمایلی ذاتی داریم که بدانیم چیزها چطور کار می‌کنند. امید داریم که در اطراف خود الگوهایی را مشاهده کنیم که ما را در انتظارمان از آنچه در آینده رخ می‌دهد یاری رسانند. کمّی کردن این الگوها فرایندی است که به‌مرور انسان را به ابداع ریاضیات هدایت کرد. از این رو تعجب‌آور نیست که ریاضیات زبان طبیعی توصیف نحوهٔ کارکرد طبیعت باشد. در واقع ریاضیات ستون فقرات فیزیک است که هدفش توصیف نحوهٔ کارکرد جهان در بنیادی‌ترین لایه‌های آن است. هرچه قوانین طبیعت را عمیق‌تر بفهمیم، همان‌قدر به موضوعات پیشرفته‌تری در ریاضیات احتیاج خواهیم داشت به‌حدی که فیزیک امروزه به‌خاطر پیچیدگی ریاضیاتی‌اش، به غیرقابل فهم بودن توسط غیرمتخصصان شهرت یافته است.

اما چنین درکی، سادگی قوانین فیزیک و زیبایی ریاضیات را در دستیابی به جوهر اصلی واقعیت فیزیکی نادیده می‌گیرد. به‌عنوان فیزیکدانی مشتاقِ ریاضیات، به طور مستقیم شاهد این بوده‌ام که چگونه در عمق همهٔ ساختارهای به‌ظاهر پیچیده و دست‌نیافتنی ریاضیات که در تدوین قوانین فیزیک پدیدار می‌شوند، نکته‌هایی ساده و عمیق از حقایق جای گرفته است. این حقایق آن چیزی است که دانشمندان می‌کوشند آنگاه که غبارها فرو نشسته و قوانین فیزیک کشف شده باشد، شفاف سازند. این نکته‌ها به‌نوعی «چکیده اجرایی»اند که دانشمندان به‌عنوان درس‌هایی که از کشف قوانین طبیعت بر گرفته‌اند، عزیز می‌دارند.

خوشبختانه، غالباً این تفکراتِ محوری را می‌توان با معماهای سادهٔ ریاضی روشن ساخت. به اندازه‌ای ساده که برای پرداختن به آنها و درک معنایشان نیازی به پیش‌زمینهٔ وسیعی در فیزیک یا ریاضیات نیست. کار کردن روی معماهایی ریاضی از این دست نه فقط فرح‌بخش است، بلکه عمیقاً رضایت‌بخش نیز هست، زیرا آنها وراءِ معما بودنشان، معانی عمیق‌تری از واقعیت فیزیکی را در بر دارند. هدف من در این کتاب این است که خواننده را به سفری ببرم تا از طریق معماهای فرح‌بخش پرده از جنبه‌هایی از قوانین جهان بردارم.

نغمهٔ غالب در این کتاب، این نظر است که در زیر واقعیت فیزیکی یک اندیشهٔ فراگیر واحد جای نگرفته است بلکه مجموعه‌ای از آراء تقریباً مخالف است که با هم واقعیت فیزیکی را می‌سازند. هدف اصلی این کتاب درکی است از این که چگونه این مفاهیم متقابل می‌توانند

در هم تنیده شوند و هماهنگ با هم در راه غایتی ارزشمند به‌کار آیند. امیدوارم که با مشاهدهٔ برخی از مهم‌ترین اصول کشف‌شده دربارهٔ طبیعت از پشت منشور معماها، این افکار را نشان دهم.

پس از بازنگاهی مختصر به تاریخ علم و تأثیرات متقابل ریاضیات و فیزیک در طی قرون، یک به یک به موضوعات اصلی می‌پردازم. هر بخش با مطلبی یا اندیشه‌ای دربارهٔ یک موضوع آغاز می‌شود و پس از آن به بحثی در اهمیت اندیشهٔ مخالف آن می‌پردازیم، و سپس، همان کار با جابه‌جا کردن موضوع بین فیزیک و ریاضی تکرار می‌شود. همهٔ اینها، در پس‌زمینهٔ معماهایی فرح‌بخش عرضه می‌شود.

اولین موضوع تقارن است. از سویی، اهمیت حفظ تقارن را هم در ریاضیات و هم در فیزیک خواهیم دید، و از سویی دیگر اهمیت شکست تقارن‌ها را. معمای طراحی کوتاه‌ترین بزرگراه بین چهار شهر در چهارگوشهٔ یک مربع، مثال زیبایی از این پدیده است. در حالی که تقارن‌ها نحوهٔ کارکرد قوانین بقاء مثل قانون بقاء، وجود انرژی را روشن می‌کنند، می‌بینیم که چرا شکست تقارن‌ها برای صِرف وجود ما، از آن هم مهم‌ترند. آن‌طور که بحث خواهیم کرد این موضوع مربوط به ذرّهٔ هیگز است که اخیراً کشف شد. همین‌طور توضیح خواهم داد که چگونه چشمان ما و جایشان در چهرهٔ ما نشانی از شکست تقارن‌ها است. دربارهٔ اهمیت آراء شهودی و همچنین ناشهودی هم در فیزیک و هم در ریاضی نیز بحث می‌کنیم. آراء شهودی (همچون پیوستگی که در جنبه‌های گوناگون قوانین فیزیک نقشی برجسته دارد) و برخی تجریدات ناشهودی، (همچون تصور زمان به‌عنوان بعدی اضافه) برای درک عمیق‌تر واقعیت لازم‌اند. نشان می‌دهیم که مفهوم پیوستگی، با تمام سادگی، به نتایج محکم‌تری می‌انجامد. یکی از مثال‌هایش آن معمایی است که چرایی وجود دو نقطهٔ متقاطر روی استوا با دمای یکسان را آشکار می‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه پیوستگیِ قوانینِ فیزیک می‌تواند توضیح بدهد که چرا نظریهٔ نسبیتِ عامِ آلبرت اینشتین پیش‌بینی می‌کند که همیشه تعدادِ فردی از تصویرهای گرانشیِ ستاره‌ها داریم. سپس به اندیشهٔ طبیعی بودن می‌پردازیم: اینکه چطور با اطلاعاتی بس اندک، تخمین‌هایی تقریبی از نحوهٔ کارکرد طبیعت به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال با تخمینی ساده نشان می‌دهیم که خورشید را چقدر باید فشرده کنیم تا تبدیل به سیاهچاله شود. بعد به اندیشهٔ مقابل آن می‌پردازیم و بحث می‌کنیم که چطور سروکلهٔ اعدادی با بزرگی یا کوچکی غیرطبیعی در قوانین بنیادی طبیعت ظاهر می‌شود که پیش‌بینی‌شان دور از انتظار است. به‌ویژه اینکه چرا نیروی گرانش

بین پروتون‌ها تریلیون تریلیون مرتبه از دافعهٔ الکتریکی بین آنها کوچک‌تر است؟ امکان ظهور اعدادی با بزرگی دور از انتظار را در فیزیک توسط مسألهٔ قدیمی چارپایان ارشمیدس روشن می‌کنیم که پاسخش شامل عددی است با حدود یک میلیون رقم! در آخر دربارهٔ هیجان‌انگیزترین تحولات امروزی فیزیک بنیادی در چارچوب نظریهٔ ریسمان می‌پردازیم. اخیراً نظریهٔ ریسمان به‌عنوان یک نظریهٔ کوانتومی یکسان و در بر گیرندهٔ تمام نیروهای بنیادی مطرح شده است. بر مفهوم دوگانی در نظریه ریسمان تمرکز می‌کنیم که در دو دههٔ گذشته، نظریه‌پردازان ریسمان را مجذوب کرده و در قوام گرفتن آن نقشی کلیدی بازی نموده است. در این باره صحبت می‌کنم که مثلاً چگونه دوگانی به درک بهتری از سیاهچاله و ماهیت فضا ـ زمان انجامیده است. معمایی که دوگانی را روشن می‌کند، مسألهٔ مورچه‌های برخوردکننده روی خط‌کش است که در آن هدف هر مورچه نیفتادن از لبه‌های خط‌کش تا حد امکان است. در نهایت، دوگانیی که در نظریهٔ ریسمان کشف شده است ریزجهان این کتاب است: این اندیشه که چطور اصول متقابل می‌توانند در هماهنگی کامل و به شکلی سازگار و قدرتمند رفتار طبیعت را پیش‌بینی کنند. هیچ چیز مؤثرتر از این نیست که افکار متقابل هماهنگ با هم کار کنند و این دلیلی است که چرا دوگانی بدل به ابزاری بس قدرتمند در آشکار کردن عمیق‌ترین اسرار جهان ما شده است.

امیدوارم خواندن این کتاب و سروکله زدن با معماهای آن برایتان جذاب و آموزنده باشد. خیلی خوشحال خواهم شد اگر درک تازه‌ای پیدا کنید از قوانین بنیادی عالممان و اینکه چطور ریاضیات در آن جای می‌گیرد، و همزمان به ارزش توان معماها برای به چالش کشیدن و آگاه کردن و گهگاه شگفت‌زده کردن‌مان. حتی اگر از کودکی از دوستداران معما ــ آن‌سان که من بودم و هنوز هم هستم ــ نبوده‌اید هیچ وقت برای علاقه به آن دیر نیست!

من این خوشبختی را داشته‌ام که تعدادی از دانشجویان سال اول کالج هاروارد را در این سفر اکتشافی که معماها چگونه اسرار عالم را آشکار می‌سازند، از طریق سمیناری که به این منظور برای آن طراحی کردم، به همراه خود ببرم. این کتاب حاصل این درس است، که به‌وسیلهٔ بازخوردها و پیشنهادهای دانشجویانی که در آن شرکت کردند، غنی شده است. در آغاز این کتاب مبتنی بود بر یادداشت‌های سه دانشجو ــ تونی فنگ (Tony Feng)، کِوِی لی (Kewei Li) و وایمینگ ژائو (Weiming Zhao) که توسط استیو نادیس (Steve Nadis) ویرایش

اساسی شد. برخی از تصویرها را شیائوتیان یین (Xiaotian Yin) به آن افزود. در تکمیل این کتاب از تشجیع تعدادی از همکاران و بالاخص یائوتیان فو (Yaotian Fu) و برایان گرین (Brian Greene) بهره بردم. عمیقاً قدردان همهٔ آنها هستم.

مطمئن هستم این کتاب از بسیاری جهات جای بهتر شدن دارد. اگر خواننده پیشنهادی داشته باشد، خوشحال می‌شوم آن را از طریق وبگاهم <www.cumrunvafa.org>دریافت کنم.

آخر از همه ولی نه کم‌ارج‌تر از همه، این پیشنهاد همسرم آفرین بود که باعث شد به ابداع این درس و نوشتن این کتاب بپردازم. بدون شوق و اشتیاق او به این پروژه، این کتاب وجود نمی‌داشت. عمیقاً سپاسگزار او هستم.

۱. درآمدی بر فیزیک نوین

بسیاری از جنبه‌های بنیادین فیزیک شالوده‌های ریاضیِ ساده‌ای دارند که ممکن است در پیچیدگی صوری‌شان پنهان شده باشند ــ یعنی هم در زبانی ناآشنا و هم در معادلات مرعوب‌کننده‌شان. همین در مورد بسیاری از ایده‌های مجرد ریاضی نیز صادق است که اغلب شامل مفاهیمی ساده‌اند و می‌توانند به خاطر محیطی که در آن ارائه می‌شوند مبهم جلوه کنند. افکار عمیق در فیزیک و ریاضیات غالباً هستهٔ مشترکی دارند، که با توجه به نزدیکی این دو رشته شاید تعجب‌آور نباشد. شگفت‌تر، این واقعیت است که بعضی از همان افکار می‌توانند از دل حل معماهای ریاضی برآیند.

این کتاب دربارهٔ معماها و رابطهٔ آنها با فیزیک و ریاضیات است. در حالی که معماها به خودی خود می‌توانند مسحورکننده و سرگرم‌کننده باشند، خواهیم دید که چگونه قادراند به‌عنوان پلی بین این دو رشته عمل کنند و برخی از پیوندهای مشترک آنها را آشکار سازند. نه نیازی به دانش پیشرفتهٔ ریاضی و فیزیک برای حل معماهایی که در این کتاب ارائه شده است داریم و نه فرض می‌کنیم خواننده پیشینهٔ عمیقی در هریک از این حیطه‌ها دارد. اما با توجه به اینکه در میان مخاطبان مورد نظر، دانشجوی دانشگاه و دانش‌آموز پیشرفته دبیرستان هم هستند، علاقه‌ای جدی و همچنین کمی آموزش در این حیطه‌ها، مطمئناً در درک این کتاب مفید خواهد بود.

هرچند ریاضیات و فیزیک سخت در هم آمیخته‌اند، فرهنگ‌ها و فلسفه‌های متفاوتی دارند. ریاضیات با به کار گرفتن استنتاج‌های منطقی کارِ ساخت را از اصول موضوع بنیادین آغاز می‌کند. قوانین فیزیک به جای آنکه به طور منطقی و در روشی سلسله‌مراتبی استنتاج شده باشند، برای آن وضع شده‌اند که توضیح دهند چگونه بخش‌های مختلف طبیعت کار می‌کنند و چگونه با یکدیگر جفت و جور می‌شوند. فیزیک بر رابطهٔ بین این قوانین تأکید دارد و نه بر وابستگی‌های منطقی بین آنها. البته هنوز، انسجام منطقی این افکار عنصر لازمی از قوانین فیزیکی است. در ریاضیات، مهم این است که در مورد اصول موضوع و فرض‌ها شفاف باشیم. از سویی دیگر چنان که بعداً خواهیم دید، اصول موضوع، یا اصول بنیادی فیزیک ممکن است با بروز شواهد و افکار نظری جدید تغییر کنند.

تاریخ نشان می‌دهد که پیشرفت مهم در این زمینه زمانی رخ می‌دهد که چیزی که در ابتدا نتیجهٔ قانون فیزیکی تلقی می‌شد بعداً مستقلاً به‌عنوان اصلی راهنما تعیین شود. از این رو یک فیزیکدان ماهر، باید همیشه برای بازنگری یا پس و پیش کردن‌هایی از این نوع ذهنی باز داشته باشد زیرا اصل نوشناخته اغلب نسبت به اصولی که در آغاز به نظر می‌رسید از آنها سرچشمه گرفته بنیادی‌تر از آب در خواهد آمد، و حیطهٔ وسیع‌تری از کاربرد خواهد داشت. اصل پایستگی تکانه(۱) مثال خوبی است. هرچند نخست به‌عنوان نتیجه‌ای از قوانین حرکت نیوتن دیده می‌شد اما بعداً ــ بیش از ۲۲۵ سال پس از ارائهٔ قوانین نیوتن در اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی (پرینکیپیا متمتیکا (۲)) معلوم شد که قوانین بقاء بنیادی‌تر از قوانین حرکت‌اند زیرا از تقارن‌های زیربنایی در طبیعت ناشی می‌شوند.

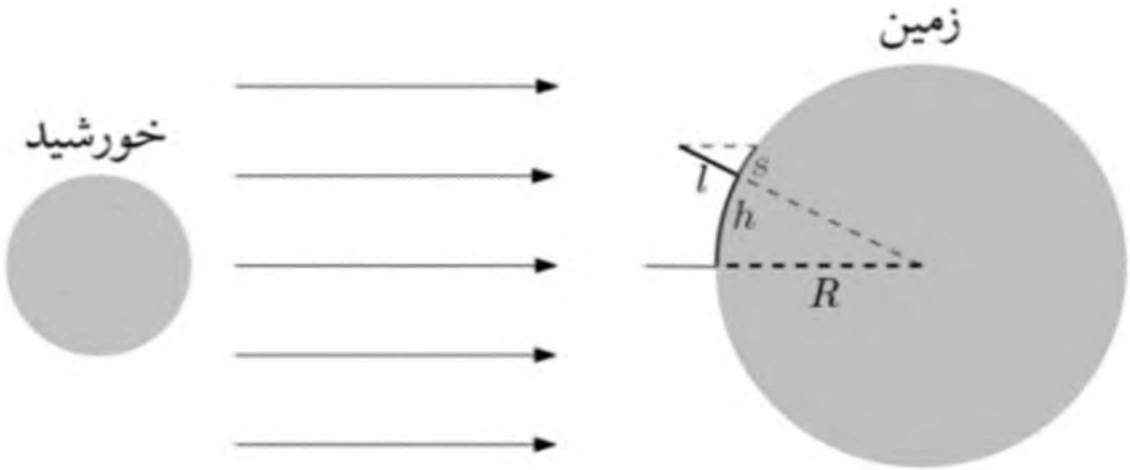
به این دلیل است که فیزیکدانان می‌کوشند نگرش انعطاف‌پذیرتری را در مورد آنچه اصول بنیادی هستند و دائماً تحول می‌یابند، حفظ کنند. به جای قائل شدن ارزشِ زیادی به ذات سلسله‌مراتبی افکار، فیزیکدان‌ها مایلند که هر لحظه ساختار را بازچینی کنند، که در تباین با نحوه‌ای است که غالباً ریاضیدانان به ریاضیات می‌نگرند. یک قضیهٔ ریاضی، اگر درستی آن اثبات شود الی‌الابد صحیح تلقی می‌شود ــ بر خلاف اصول فیزیکی که با پیش آمدن یافته‌های جدید تجربی، در معرض تغییراند.

تفاوت‌های دیگری هم هست. مثلاً، توصیف پدیده‌های پیچیده در فیزیک غالباً مستلزم انواعی از تقریب است که امکان دارد ریاضیدانان از انجام آن منزجر باشند. مثلاً این پرسش که آیا فضایی «پیوسته» است و شامل هیچ گسستگی نیست، یا اینکه از نقاط منفصلِ نزدیک به هم ساخته شده است برای فیزیکدانی که بر نتیجهٔ آزمایش‌هایی در مورد فواصل به مراتب بزرگ‌تر تمرکز دارد ممکن است هیچ اهمیتی نداشته باشد. از سوی دیگر، برای ریاضیدانان هموار بودن یا نبودن فضایی مفروض یک ویژگی کلیدی است، نه یک دلمشغولی بی‌اهمیت.

هدف این بخش، فراهم آوردن منظری فراگیر از چشم‌انداز فیزیک است. این مروری سریع است با ارائه‌ای سبک؛ در اینجا هدف جامع بودن نیست، که آن هم اصولاً در طی یک بخش غیرممکن است. در عوض قصد داریم به چند مثال از تاریخ فیزیک اشاره کنیم که درکی از جایگاه امروزمان در تلاش درازمدت خود برای فهم قوانین بنیادی طبیعت به دست می‌دهد.

اندیشه‌های باستانی

یونانی‌ها در کوششان برای توضیح آنچه در دنیای اطرافشان می‌گذشت افکار جالبی دربارهٔ فیزیک داشتند. آنها شیفتهٔ ریاضیات زیبا بودند، و بعضی از دانشمندان، از جمله افلاطون، معتقد بودند که حقیقت این جهان در هندسه نهفته است. آنها زیبایی را در هندسهٔ اقلیدسی و اجسام افلاطونی(۳) می‌دیدند، که گمان می‌کردند می‌شود برای توصیف طبیعت به‌عنوان یک کل یکپارچه به کار گرفت. در حالی که در مورد ریاضیات سال‌ها از زمان جلوتر بودند، فیزیکشان در همان سطح نبود. به‌عنوان مثال، ارسطو اعتقاد داشت که سنگ‌ها سقوط می‌کنند چون دوست دارند روی زمین باشند. او تصریح می‌کرد که در میان تمام حالت‌های ممکن، بودن روی زمین آن حالتی است که سنگ بیش از حالات دیگر خوش می‌داشت. او این‌طور ادامه می‌داد که در نتیجه سنگ‌ها وقتی به زمین نزدیک‌تر شوند سریع‌تر می‌افتند زیرا از اینکه به مکان طبیعی و نقطهٔ مرجّح آرامششان نزدیک‌تراند، شادان‌تر هستند.(۴)



شکل ۱. محیط زمین توسط اراتوستنِس کورنه‌ای(۵) در حدود ۲۳۰ پیش از میلاد اندازه‌گیری شد.

علیرغم توصیفات نارسای یونانی‌ها از پدیده‌های فیزیکی، شوق اساسی آنها برای توصیف جهان با ریاضیات زیبا هنوز هم برای علم حیاتی است. بعضی از افکارشان، مانند مفهوم تشکیل مادّه از اتم‌های منفرد (که از جمله توسط لئوکیپوس(۶) و ذیمقراطیس (دموکریت) ارائه شده بود) تا امروز دقیق باقی مانده است. نه تنها معتقد بودند که زمین کروی است، بلکه زمانی حوالی ۲۳۰ پیش از میلاد محیط آن را هم اندازه گرفتند، به‌ویژه اراتوستنس تفکرات سادهٔ مثلثات را، همراه با مشاهدهٔ تغییرات طول سایه نسبت به فاصله از استوا را برای اندازه‌گیری شعاع زمین به کار گرفت. جوابی که به دست آورد چندان دور از واقع نبود ــ در حدود ۱۵% طول واقعی شعاع زمین که امروز اندازه‌گیری شده است. او این فکر اساسی را به کار گرفت که وقتی به اندازهٔ h از استوا بالا برویم طول سایهٔ میله‌ای به اندازهٔ در هنگام ظهر از (صفر) به می‌رسد (بنگرید به شکل ۱). آنگاه با استفاده از مثلثات ساده می‌توان نتیجه گرفت که شعاع زمین عبارت است از

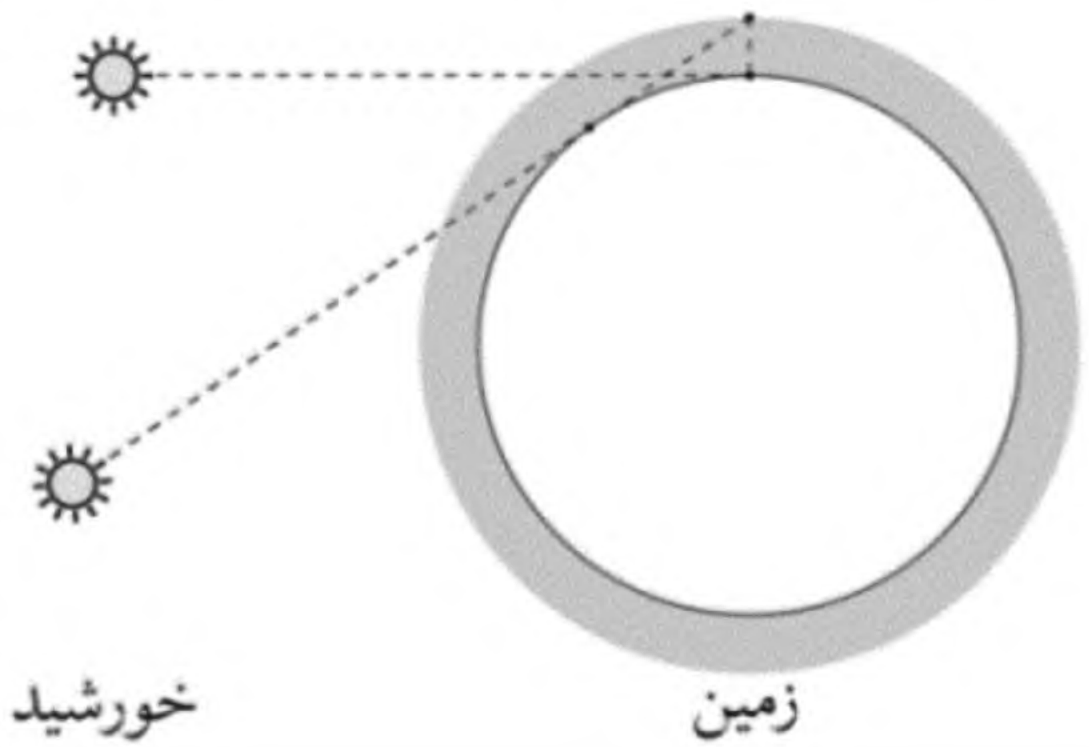
$$R \sim h \times l/s$$

فکر کاربرد مفاهیم هندسهٔ محض برای استنتاج واقعیت‌های جالب دربارهٔ طبیعت گذشته‌ای طولانی از دوران ریاضیدانان یونانی تا به امروز را طی کرده است. در حدود سال ۱۰۰۰ پس از میلاد ابن معاذ (ابو عبدالله محمد ابن معاذ الجیانی؛ ۳۷۸-۴۷۱ ق.) و ابن هیثم (ابوعلی محمد بن هیثم بصری؛ ۳۵۴-۴۳۰ ق.) ارتفاع اتمسفر را ۸۴ کیلومتر (۵۲ میل) یعنی در محدودهٔ ۲۰% مقدار پذیرفته‌شدهٔ امروزی به

دست آوردند. (۷) معاذ و برخی دیگر دانشمندان مسلمان از زاویهٔ نشیب خورشید به هنگام گرگ و میش و توابع ساده مثلثاتی برای این محاسبه بهره جستند. رویکردشان نسبتاً آسان بود: او چنین استدلال کرد که علت اینکه آسمان بلافاصله پس از غروب تار نمی‌شود باید این باشد که قسمت‌های بالایی آتمسفر مدتی حتی پس از غروب نور خورشید را دریافت می‌کنند (بنگرید به شکل ۲). با اندازه‌گیری طول زمانی(t) که نور خورشید محو می‌شود، در حدود ۲ ساعت، به‌عنوان کسری از طول شبانه‌روز معاذ ارتفاع آتمسفر، h را به‌صورت کسری از شعاع زمین

$$\frac{1}{2}(\frac{2\pi t}{24})^2 \sim \frac{h}{R})$$

به دست آورد.



شکل ۲. کل ارتفاع آتمسفر توسط ابن‌معاذ و ابن‌هیثم در قرن‌های ۱۱ و ۱۲ پس از میلاد اندازه‌گیری شد.

اما کاربرد عمیق ریاضیات در فیزیک باید منتظر زمان‌های متأخرتر، و کار سر اسحاق نیوتن(۸) در میانه تا اواخر سال‌های ۱۶۰۰ می‌ماند که نقطهٔ آغاز واقعی در این ارتباط است.

مکانیک نیوتنی

بلاشک نیوتن یکی از پیشگامان بزرگ فیزیک نوین است. قانون دوم حرکت او، در یکی از مشهورترین معادلات فیزیک، که رابطهٔ دیفرانسیلی بین مکان و نیرو است فشرده شده است.

$$a := \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

در حالی که f و m کمیت‌های فیزیک هستند شتاب a بیشتر کمیتی است ریاضی، که به‌عنوان مشتق دوم مکان نسبت به زمان تعریف شده است. به‌مرور که فیزیک بیشتر کمّی شد، ریاضیات بیشتر و بیشتر با فیزیک درتنید. در واقع نیوتن ناچار شد تمامی رشته‌ای از ریاضیات، یعنی حسابان را اختراع کند تا قانون دومش را به زبان دقیق ریاضی تدوین نماید. این تنها یک مثال از موارد متعددی است که نیاز به بیان قوانین فیزیک منجر به حلول شاخهٔ جدیدی از ریاضیات شده است. در مقابل، ریاضیات نیز به بینش‌های نویی در فیزیک رهنمون شده است. در این کتاب، بسیار بیشتر از این داد و گرفت بین دو رشته را خواهیم دید.

مکانیک لاگرانژی و همیلتونی

تفحص مستمر در پایه‌های ریاضی مکانیک نیوتنی، در حیطه‌های مختلف فیزیکی، به بازنویسی آن همراه با ریاضیاتی نوین منجر شد. مثلاً در اواخر سال‌های ۱۷۰۰، ژوزف لویی لاگرانژ (۹) راهی جدید و به اصطلاح «لاگرانژی»(۱۰) برای به چارچوب در آوردن مکانیک نیوتنی پیشنهاد کرد که همان نتایج فیزیکیِ مکانیک نیوتنی، را به دست می‌داد اما مبتنی بود بر اصل «کمترین کنش»(۱۱) به جای نیرو. کنش انتگرالی است که برای هر مسیر ممکنی که ذرّه‌ای می‌تواند بین دو نقطه «آغاز و پایان طی کند، و با معادلهٔ

$$S=\int (K - V)dt$$

تعریف می‌شود که در آن انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل ذرّه در طول مسیر است (شکل ۳).

اصل کمترین کنش چنین بیان می‌کند که مسیری که ذرّه در واقعیت می‌پیماید آن است که کنش را کمینه(۱۲) کند. اگر جواب‌های چندگانه داشته باشیم هر حلی یک جواب بهینه(۱۳) می‌دهد، کمینه یا بیشینهٔ(۱۴) کنش.

شکل ۳. فرمول‌بندی لاگرانژی مکانیک همهٔ مسیرهای ممکن از نقطهٔ آغاز تا پایان را در نظر می‌گیرد. مسیر فیزیکی ــ یا مسیری که به گونهٔ طبیعی پیموده می‌شود ــ مسیری است که کمیتی را که کنش خوانده می‌شود کمینه کند.

این نحوهٔ نگرش نو مطالعهٔ مکانیک را تحت قیود(۱۵) ی مانند توپی که به پایین تپه‌ای با توپوگرافی مفروضی می‌غلتد یا فرفرهٔ چرخانی بر روی سطوح مختلف، برای فیزیکدان آسان‌تر کرد.

برای تدوین مکانیک لاگرانژی، اویلر(۱۶) و لاگرانژ یک رشتهٔ کامل ریاضی به نام حساب وردش‌ها(۱۷) را ابداع کردند که موضوعش بیشینه کردن انتگرال‌ها در امتداد یک مسیر است و پاسخش در معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ صدق می‌کند. باید توجه داشته باشید که این کار پیچیده‌تر از یافتن کمینهٔ تابعی از متغیرهایی به تعداد متناهی است، زیرا بی‌نهایت مسیر وجود دارد که دو نقطه از فضا را به هم وصل کند. پس به معنایی این کار معادل است با یافتن کمینهٔ تابعی (کنش) از تعدادی نامتناهی متغیر (که تشکیل‌دهندهٔ فضای تمام مسیرها است). در عوض، فیزیکدان‌ها بلد بودند از حساب وردش برای یافتن مسیری با طول کمینه استفاده کنند. بازپردازی مکانیک کلاسیک که با افکار لاگرانژ و اویلر امکان‌پذیر شده بود، صحنه را به ویژه برای پیوندهای آتی با فیزیک قرن بیستم ــ به‌ویژه مکانیک کوانتومی ــ آراست، چیزی که از طریق معادلاتی که توسط نیوتن وضع شد اصلاً امکان‌پذیر نبود.

بعد، در بازپردازش دیگری از مکانیک کلاسیک، همیلتون(۱۸) با استفاده از تعداد دو برابر متغیر، مشتقات مرتبهٔ دوم نسبت به زمان را به مشتقات مرتبهٔ یک تبدیل کرد. همیلتون به جای آنکه طبق سنّت $x(t)$ به تنهایی را مد نظر قرار دهد، به هر دو تابع مکان و تکانه، $x(t)$ و $p(t) = mv(t)$ به‌عنوان متغیرهای اساسی نگاه کرد تا $x(t)$ به تنهایی، آنچه سنّتاً شده بود. مکانیک همیلتونی، نامی که به تدوین جدید اطلاق شد، آغاز اندیشهٔ امروزی فضای مضاعف یا فضای فاز را که با مکان و تکانه تعریف می‌شود، رقم زد. آن‌طور که در زیر به آن می‌پردازیم مکانیک همیلتونی برای مکانیک کوانتومی مفید از کار درمی‌آید. امروزه فرمول‌بندی‌های لاگرانژی و همیلتونی مکانیک را جامع‌تر و بنیادی‌تر از قوانین نیوتن می‌بینیم و از این رو حیطهٔ کاربرد وسیع‌تری دارند. این نمایشی از این واقعیت است که نه اصول موضوعِ فیزیک جهش‌ناپذیرند، نه چارچوب زیربنایی‌اش. هر دو می‌توانند، و به واقع هم در طول زمان تغییر می‌کنند.

الکترومغناطیس ماکسول(۱۹)

زمانی که ماکسول ابداع نظریهٔ الکترومغناطیس‌اش را آغاز کرد، بسیاری از جوانب آن را مایکل فارادی(۲۰) و دیگران به صورت مجزا دریافته بودند. در تلاش برای وحدت‌بخشی به قوانین مختلف، ماکسول پرده از یک ناسازگاری ریاضی بین معادلات مختلف برداشت، که خود با افزودن یک جملهٔ ریاضی (که اکنون جملهٔ ماکسول خوانده می‌شود) به معادلاتش برطرف ساخت. اندازه‌گیری این جمله در آزمایشگاه سخت بود، اما او متوجه شد که دلالت بر وجود موجی دارد متشکل از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و بنا بر پیش‌بینی معادلاتش با سرعتی نزدیک به آنچه در آن زمان تخمین سرعت نور بود، حرکت می‌کند. این موضوع ماکسول را برانگیخت که فرض کند نور چیزی نیست مگر یک موج الکترومغناطیسی!(۲۱) این باز هم مثالی بود از توان منطق ریاضی برای پیش‌بینی پدیده‌های جدید فیزیکی: تصحیح ماکسول، به جای ملاحظات فیزیکی از ملاحظات ریاضی برمی‌خاست. کشف یک ناسازگاری ریاضی ساده، او را به این نتیجه رساند که نور از اختلالات الکتریکی و مغناطیسی که در فضا حرکت می‌کنند، ساخته شده است ــ توفیقی برای تفکر بشری! این نمونه‌ای از بیشمار مثالی است که نشان می‌دهد اصول ریاضی می‌توانند برای انگیختن قوانین جدید فیزیکی کافی باشند.

معادلات ماکسول در فضای خالی به معادلاتی به شکل زیر منجر شد،

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{F}$$

که

$$\vec{F}$$

می‌تواند میدان مغناطیسی

$$\vec{B}$$

یا میدان الکتریکی

$$\vec{E}$$

باشد. جواب‌های این معادله امواجی الکترومغناطیسی به بار می‌آورد که با سرعت، سرعت نور حرکت می‌کند.

این پایان داستان نبود، چون تازه پرسش‌های بیشتری مطرح شدند. اگر این معادله را به کار ببندید می‌بینید که موج واقعاً با سرعت حرکت می‌کند. اما دقیقاً سرعت نور چگونه اندازه‌گیری می‌شود؟ آیا صحبت از سرعت نسبت به زمین می‌کنیم؟ یا خورشید؟ و این معادلات مربوط به چگونه ناظری است ــ فقط ناظران ساکن، یا برای ناظران متحرک هم صادق است؟ مخصوصاً اگر با سرعت ثابت نسبت به یک دستگاه لَخت(۲۲) حرکت کنیم، قوانین نیوتن هنوز صادق‌اند، اما سرعتی که چنین ناظران متحرکی اندازه بگیرند طبیعتاً برای موج الکترومغناطیسی متفاوت خواهد بود. در آن زمان باور بر این بود که نمی‌تواند برای همهٔ چارچوب‌های لخت یکی باشد، زیرا قانون جمع سرعت‌ها در مکانیک نیوتنی را نقض می‌کند. به عبارت دیگر، معادلات ماکسول فاقد تقارن‌های مکانیک نیوتنی (تقارن‌های گالیله‌ای(۲۳)) است که می‌گوید وقتی چارچوب لخت را عوض می‌کنید بسته به سرعت نسبی چارچوب‌ها، سرعت‌ها عوض می‌شوند. پس در نگاه اول بینش بزرگ ماکسول به تضاد منجر می‌شود.

هندریک لورنتس(۲۴) با ارائهٔ راهی ریاضی برای کشف تقارن‌های معادلات ماکسول، متفاوت از آنچه بر اساس مکانیک نیوتنی انتظار می‌رفت، قدم پیش گذاشت. تبدیلات لورنتس به ما می‌آموزد که چگونه وقتی از یک چارچوب به چارچوب دیگری می‌رویم، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، همچون مکان و زمان تغییر می‌کنند. این به نوبهٔ خود امکانی را پیش می‌آورد که معادلات در همهٔ چارچوب‌های لَخت یکسان جلوه کنند. به عبارت دیگر، این به تبدیل لورنتس(۲۵) انجامید در مقابل تبدیل‌های گالیله که در مکانیک نیوتنی به کار می‌رود. اما این فرمول‌بندی عواقب عجیبی داشت، مثل انقباض لورنتسی(۲۶) ، پدیده‌ای که طول از یک چارچوب به چارچوب دیگر کوتاه می‌شود. لورنتس مشخصاً متوجه شد که برای صدق معادلات ماکسول، مستقل از سرعت ناظر نسبت به یک چارچوب لخت مرجع، باید فرض می‌کرد که طول‌ها کوتاه می‌شوند. برای لورنتس مشکل بود که از این یافته معنایی بیابد، و بی‌نتیجه تلاش کرد آن را با نیروهای الکتریکی و تصوراتی دیگر توضیح دهد. هرچند نظریهٔ ریاضی او به زیبایی کار می‌کرد، او قادر نبود تا توجیه فیزیکی منسجمی فراهم کند و فکر می‌کرد سازوکار او فقط به کار نظریهٔ الکترومغناطیس می‌آید. تفسیر درستِ آنچه او یافته بود باید به انتظار آلبرت اینشتین می‌ماند تا آن را برای ابداع نسبیت خاصش به کار برد.

نظریهٔ نسبیت(۲۷)

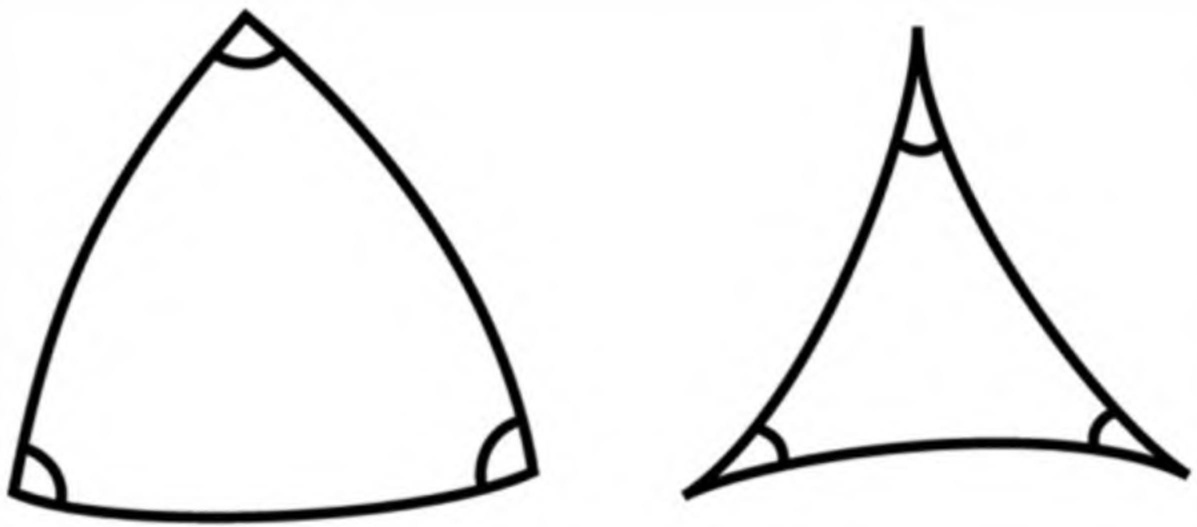
اینشتین با این پیشنهاد سررسید که آنچه توسط لورنتس و دیگران آشکار شده است مختص الکترومغناطیس نیست بلکه در عوض به گونه‌ای وسیع‌تر بر همهٔ فیزیک به کار بسته می‌شود. از جمله پیامدهای این ایده‌ها این بود که اینشتین فرمولی مجمل را کشف کرد مبنی بر برابری جرم و انرژی که در میان مشهورترین فرمول‌ها در تاریخ علم جای گرفت.

E= mc

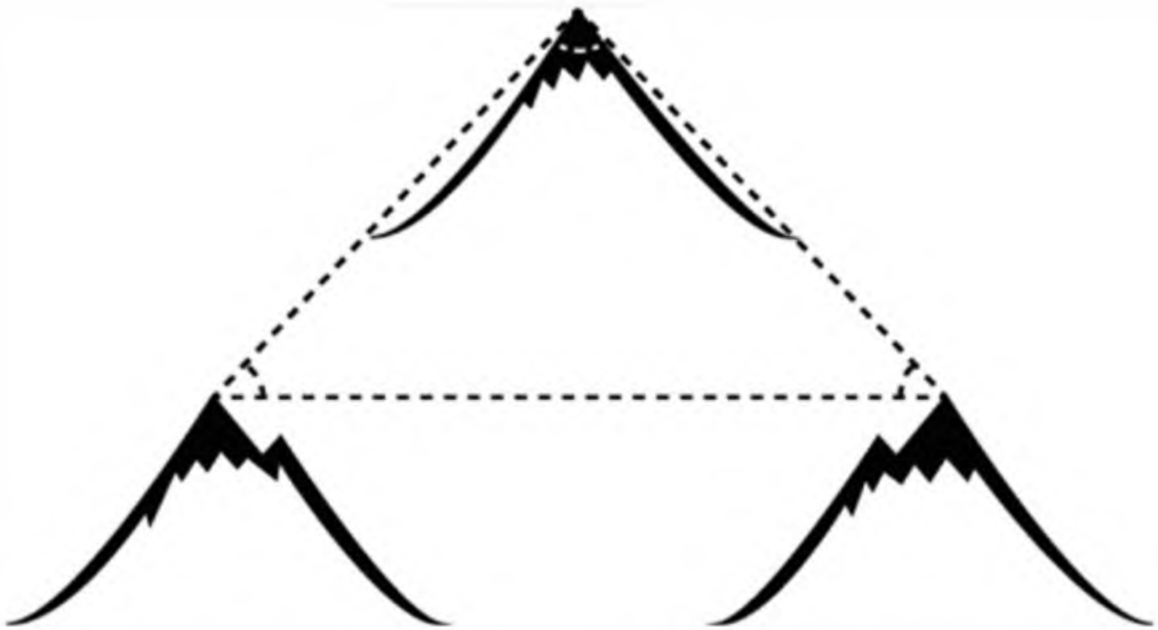
نظریهٔ او به ما می‌گوید که تصورات ما از فضا و به‌ویژه زمان، که همیشه مطلق انگاشته می‌شدند، واقعاً به سرعت ناظر وابسته‌اند. به‌علاوه اینشتین کشف کرد که تبدیلات لورنتس یک تبدیل فیزیکی زمان و مکان است و صرفاً یک شگرد ریاضی برای سازگار نگه‌داشتن معادلات ماکسول نیست. این گزاره در آغاز با مقاومت‌هایی از سوی جامعهٔ فیزیک مواجه شد، اما از آن موقع تا حالا سجایای آن بی‌بروبرگرد تأیید شده است. در نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین، زمانی که از یک چارچوب مرجع لَخت به چارچوب دیگری می‌رویم تبدیلات خطی‌اند. به این ترتیب نسبیت خاص از نظر ریاضی نسبتاً ساده و شاید هم برای برخی سلیقه‌ها، تا آنجا که به پیچیدگی ریاضی مربوط می‌شود، چون فقط از جبر خطی ابتدایی استفاده می‌کند، کسل‌کننده بود. این امر به توضیح این واقعیت کمک می‌کند که افکار عمیق فیزیکی لزوماً از ریاضیات عمیق یا پیچیده نشأت نمی‌گیرند؛ کافی است ریشه در ریاضیاتی خود سازگار داشته باشند.

اینشتین سپس از آن فراتر رفت و به بازآزمایی نظریهٔ گرانش نیوتن پرداخت. گئورگ فریدریش ریمان(۲۸) چند دهه قبل از آن نوعی جدید از هندسه را که اکنون به نام اوست، پیش کشیده بود. هندسهٔ ریمانی، نامی که به این رویکرد اطلاق شد، اصل پنجم اقلیدس(۲۹) را مسلّم نمی‌گیرد و لذا پدیده‌هایی مثل مثلث‌هایی را که مجموع زوایایشان ۱۸۰ درجه نیست، وقتی که در فضای خمیده جای گیرند (نگاه کنید به شکل ۴) مجاز می‌داند. یوهان کارل فریدریش گاوس(۳۰) که استاد ریمان بود، قبل از او پنداشته بود که این پدیده ممکن است در عالم واقع رخ دهد و قابل اندازه‌گیری باشد. شایان ذکر است که می‌گویند گاوس مطرح کرد که جهان ما خمیده(۳۱) است. معلوم نیست که این

افسانه است یا واقعیتی دقیق، اما بر اساس یک روایت او کوشید که خم فضا را با اندازه‌گیری سه زاویهٔ یک مثلث که رأس‌هایش قلل چند کوه بودند اندازه بگیرد (بنگرید به شکل ۵)، تا ببیند آیا، با فرض اینکه پرتو نور خط راست است، جمعشان ۱۸۰ درجه می‌شود یا نه. اندازه‌گیری‌های او نشان داد که در محدودهٔ خطای آزمایشگاهی جمع سه زاویه ۱۸۰ درجه می‌شود، و این نشان می‌دهد که حتی اگر عالم ما خمیده باشد، خمشش برای قدرت تمیز ما بسیار کوچک است.



شکل ۴. هندسه‌های نااقلیدسی(۳۲): فرض توازی اقلیدس مسلّم گرفته نشده است، از این رو مجموع زوایای یک مثلث لزوماً ۱۸۰ نمی‌شود.



شکل ۵. بر اساس افسانه‌ای (که صحتش مورد مناقشه است) گاوس سعی کرد خم فضا را با اندازه‌گیری زوایای داخلی مثلثی که رئوسش سه قلهٔ کوه بودند اندازه بگیرد. فکری جالب هرچند که هیچ انحنای نامتعارفی در این تمرین دیده نشد.

شاید تعجب‌آور نباشد که ریمان هم فکر می‌کرد که هندسهٔ ریمانی باید کاربردی فیزیکی داشته باشد، و حتی گمان می‌کرد که ممکن است به کار وحدت نظریه‌های الکتریسیته و مغناطیس یا نظریهٔ گرانش بیاید. اما کاربرد هندسهٔ ریمانی در فیزیک باید منتظر بازپردازش اینشتین از گرانش نیوتنی و کشف معادله‌ای شبیه معادلات ماکسول برای گرانش می‌ماند، یعنی همان نظریهٔ نسبیت عام(۳۳). در نسبیت عام، یک نظریهٔ کاملاً هندسی برای گرانش، مسیرهای سقوط آزاد صرفاً خطوط راست (یا ژئودزیک‌ها(۳۴)) در هندسهٔ خمیده، فضا ـ زمان بودند. (این مسیرها) «خمیده» می‌نمایند (انگار شتابان‌اند) چون فضا خود خمیده است، درست همانند کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه روی سطح یک پرتقال، که مشابه خط راست ولی خمیده است.

امروزه می‌دانیم، که بر اساس نظریهٔ نیک آزمودهٔ اینشتین، عالم واقعاً خمیده است. همچنین می‌دانیم که گاوس در مسیر درست قرار داشت، اما او می‌کوشید خمی را اندازه بگیرد که برای او بسیار کوچک‌تر از آنی بود که بتواند پیدا کند. ریمان و گاوس ریاضیدان بودند، اما قسمتی از ریاضیات جالبی که کشف کردند بعدها راه خود را از طریق نظریهٔ نسبیت عام اینشتین به فیزیک باز کرد. اینجا باز مثال دیگری از یاری متقابلی که فیزیک و ریاضیات به یکدیگر رسانده‌اند و هر دو رشته را پیش برده است مشاهده می‌کنیم. بر خلاف نسبیت خاص، که ریاضیات مطروحه‌اش تقریباً پیش پا افتاده است ریاضیات نسبیت عام بسیار پیچیده وعمیق است. هرچند که این افکار بسیار متفاوت از معمول بودند، پیدایش تقریباً همزمان مکانیک کوانتومی برای دانشمندان معمایی‌تر و شگفت‌انگیزتر هم بود، حتی برای اینشتین که خود پیشگام آغازش بود، کاملاً راحت نبود.

مکانیک کوانتومی

مکانیک کوانتومی تصور غریب زمین‌گیر کردن فیزیک در احتمال را پیش کشید. برای بسیاری از فیزیکدان‌ها، این گامی به پس بود زیرا معنایش این بود که دیگر نمی‌توانستیم رفتار جهان را با اطمینان پیش‌بینی کنیم. دستگاه‌های فیزیکی تابع افت و خیزهای تصادفی بودند، بدین معنا که دیگر به جای اطمینان، بخت و اقبال قانون روز بود. به همین دلیل بود که اینشتین صدای اعتراض مکرر خود را به مکانیک کوانتومی بلند می‌کرد: «خدا با عالم طاس‌بازی نمی‌کند». مکانیک کوانتومی همین‌طور شدیداً پادشهودی است، حتی برای فیزیکدان‌های امروزی و حتی برای برخی از پیشگامان حرفه‌ای‌اش. همان‌طور که فاینمن(۳۵) به خوبی اعلام کرد، «هر کس که می‌گوید مکانیک کوانتومی را فهمیده است دروغ می‌گوید!» اما، جامعهٔ فیزیک مدت‌ها است که مکانیک کوانتومی را به دلیل سادهٔ سازگاری اعجاب آورش با آزمایش‌ها پذیرفته است.

برخورد بین مکانیک کوانتومی و اصول تثبیت‌شدهٔ فیزیک به معضلات جالبی انجامید. در سال‌های ۱۹۲۰، فیزیکدان‌ها متوجه شدند که الکترون‌ها دارای «درجهٔ آزادی» اضافه‌ای هستند ـــ خاصیتی تعیین‌کننده و مستقل که نامش را اسپین نهادند. اسپین هرچند شبیه معنای متعارف این نام بود، تفاوت‌های بسیار چشمگیری هم با آن داشت.

اروین شرودینگر(۳۶) در همان زمان هم معادله‌ای داشت که مکانیک کوانتومی را برای سرعت‌هایی بسیار کمتر از سرعت نور توصیف می‌کرد (معادلهٔ شرودینگر)، اما دیراک(۳۷) می‌خواست مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص را با هم ترکیب کند تا سرعت‌های نزدیک به سرعت نور را هم در بر گیرد. در این راه، دیراک دریافت که به یک درجه آزادی اضافی نیازمند است، تا منشأ این نوع جدید از اسپین را توضیح دهد. باز ریاضیات پا پیش گذاشت تا دو حیطهٔ مختلف فیزیک را با یکدیگر آشتی دهد، که به نوبهٔ خود، آن‌سان که الآن نشان خواهم داد، راه‌های نوینی را در فیزیک گشود.

برای درک بهتر از وضعیت بیایید اول نگاهی به معادلهٔ غیرنسبیتی شرودینگر بیندازیم:(۳۸)

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$$

اما دیراک معادله‌ای می‌خواست که سازگار و هم‌شکل با معادلهٔ مشهور اینشتین در نسبیت خاص باشد:

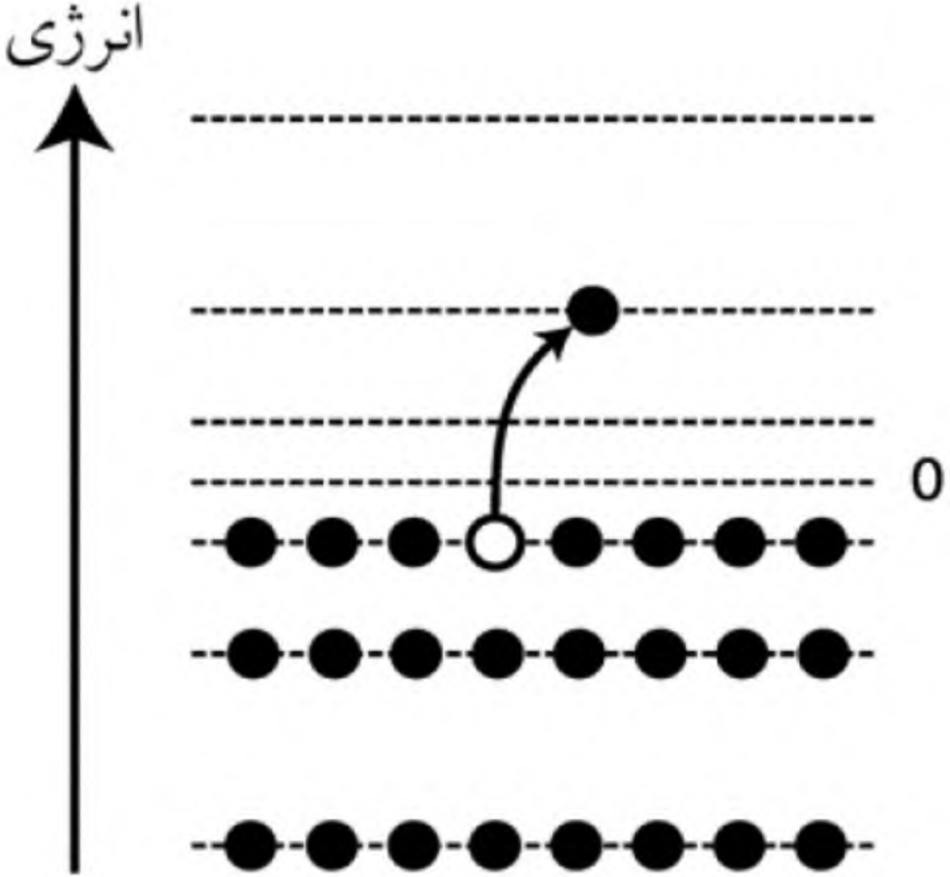
$$\hat{E}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

برای یافتن معادله‌ای شبیه معادلهٔ شرودینگر دیراک می‌خواست توان را در معادلهٔ بالا ازE به E تغییر دهد بدون آنکه واقعاً از آن جذر بگیرد. او تشخیص داد که ماتریس‌های برای تعریف معادله‌اش لازم‌اند، و چهار ماتریس و را معرفی کرد به قسمی که

$$\hat{E} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_\kappa p_\kappa c + \beta mc^2$$

با انتخاب مناسب این ماتریس‌ها معلوم شد که مربع این رابطه به رابطهٔ اینشتین منجر می‌شود. به‌علاوه درجات آزادی اسپین الکترون از همین ماتریس‌ها سرچشمه می‌گرفت. بدین ترتیب یک ایدهٔ ریاضی دیراک را به توضیح موفقیت‌آمیز منشأ اسپین الکترون رهنمون ساخت و بار دیگر نشان داد که چطور ریاضیات محض می‌تواند فیزیک را توضیح دهد. معادلهٔ دیراک یکی از مشهورترین گزاره‌ها، نه تنها در فیزیک بلکه در ریاضیات هم هست و از آن موقع توسط محققین هر دو رشته مطالعه شده است.

اما چندی بعد ولفگانگ پاولی(۳۹) به دیراک نشان داد که معادله‌اش حالت‌های با انرژی به‌دلخواه منفی را مجاز می‌دارد ــ دیراک پذیرفت که این مسأله‌ای جدی است که باید حل شود.(۴۰) او با استفاده از اصل طرد پاولی(۴۱) که می‌گوید هیچ دو الکترونی نمی‌توانند در یک مدار قرار گیرند. سعی کرد این مشکل را حل کند و پیشنهاد کرد که مدارهای مربوط به حالت‌های انرژی منفی پیشاپیش اشغال شده است (نگاه کنید به شکل ۶). دسته ذرّات با انرژی منفی را «دریای دیراک»(۴۲) می‌خوانند. از این رو هیچ الکترون دیگری را نمی‌توان در مدارهای انرژی منفی قرار داد، و به این ترتیب مسأله را حل کرد!


انرژی
0

شکل ۶. معادلهٔ دیراک جواب‌هایی داشت با انرژی‌های هم مثبت و هم منفی. دیراک کوشید این را رفع کند با این استدلال که حالت‌های انرژی منفی با یک «دریای دیراک» از الکترون‌ها پر شده‌اند. وقتی یکی از الکترون‌های «دریا» به حالت انرژی مثبت می‌پرد، سوراخی باقی می‌گذارد ـــ ذرّه‌ای با بار مثبت که از هر نظر دیگر همانند الکترون است.

اما فیزیکدان‌ها متوجه شدند که این فکر این امکان عجیب را مطرح می‌کند که ذرّات می‌توانند از دریا به حالت انرژی بیشتری پرتاب شوند و لذا سوراخی با بار مثبت با همان مقدار بار الکترون باقی بگذارد، که مثل ذرّهٔ تازه‌ای با بار معکوس بار الکترون رفتار می‌کند. دیراک اول سعی کرد مسأله را رد کند، با این ادعا که ذرّهٔ جدید با بار مثبت چیزی نیست مگر پروتون. ولی فیزیکدان‌های دیگر متوجه شدند که بر اساس معادلهٔ دیراک ذرّهٔ با بار مثبت باید جرمی به اندازهٔ الکترون داشته باشد، اما پروتون در حدود ۲۰۰۰ برابر سنگین‌تر از الکترون است. بالاخره دیراک مجبور شد این واقعیت را بپذیرد که معادله‌اش مستلزم وجود ذرّه‌ای است با بار مثبت و با جرم الکترون که بعداً پاد ذرّه(۴۳) نظیر الکترون خوانده شد. از آنجا که معلوم نبود که چنین ذرّه‌ای وجود داشته باشد، نظریهٔ او مورد تردیدهای جدی قرار گرفت. حتی دیراک هم دیگر کمتر دربارهٔ این جنبهٔ معادله‌اش سخن می‌گفت تا اینکه کمی بعد، کارل اندرسن(۴۴) از بررسی پرتوهای کیهانی(۴۵) در اتاقک ذرّه‌اش، شاهدی تجربی برای این ذرّه یافت که پوزیترون(۴۶) نام گرفت. دقیقاً پوزیترون به جز بار معکوسش تمام خواص الکترون را داشت. باری دیگر وجاهت ریاضی به پیش‌بینی فیزیک جدیدی رهنمون گردید، که باورش نخست سخت بود اما بالاخره نشان داده شد که حقیقت دارد.

مکانیک کوانتومی در آغاز حوزهٔ کاربرد محدودی داشت و برای آنکه در نظریهٔ میدان‌های نیروهای الکتریکی و مغناطیسی ماکسول قابل اعمال باشد باید مجدداً فرمول‌بندی می‌شد. این فرمول‌بندی مجدد توسط ریچارد فاینمن و سایرین انجام شد که به‌غایت وام‌دار رویکرد

اویلر و لاگرانژ در فرمول‌بندی‌های مجددشان از مکانیک نیوتنی بودند و اکنون به آن می‌پردازیم.

نظریهٔ میدان‌های کوانتومی(۴۷)

همان‌طور که بحث کردیم، دیدگاه کلاسیک چنین می‌انگارد که ذرّات مسیری را بر می‌گزینند که کنش را کمینه کند. نظریهٔ میدان‌های کوانتومی نگاه پیچیده‌تری را پیش‌می‌کشد که در آن ذرّه فقط یک مسیر را انتخاب نمی‌کند؛ تمام مسیرهای ممکن را برمی‌گزیند و یک فاز(۴۸) (عدد مختلطی با طول واحد) برای هر مسیر تعیین می‌شود. احتمال رفتن یک ذرّه از هر نقطهٔ آغازین به هر نقطهٔ پایانی متناسب با جمع این فازها است. حال این را به زبان فنی‌تری بیان می‌کنیم. (که بعضی از خوانندگان ممکن است بخواهند از آن بگذرند).

بازپردازش مکانیک کوانتومی به روش انتگرال مسیر(۴۹) فاینمن، آن‌طور که بر ذرّه اعمال می‌شود، فرض را بر این می‌گذارد که ذرّه بین دو نقطه از زمان و مکان،(t، x) و (t، x) همهٔ مسیرها را با وزنی که تابعی نمایی از کنش است، طی می‌کند. دامنه احتمال کل که جمع تمام آنها است به شکل زیر داده می‌شود.

$$\int \mathcal{D}(X(t))e^{(\frac{i}{\hbar}\int (K-V)dt)}$$

که در آن h ثابت پلانک و انتگرال روی فضای تمام مسیرهای بین نقاط(t، x) و (t، x) است. این انتگرال یک عدد مختلط است که مربع اندازه‌اش احتمال رفتن ذرّه‌ای را از x در زمانt به x در زمان t به دست می‌دهد. مسیرهای کلاسیک متناظر با وضعیتی است که h→0. در این حد، روش فاز ایستا (۵۰) برای محاسبهٔ انتگرال، با تقریب بسیار خوبی مسیرهایی را که نسبت به وردش مسیر بهینه‌اند به

دست می‌دهد. به‌ویژه آنکه این مسیرها با مسیرهای منحنی کلاسیک متناظرند. بازپردازش فاینمن از مکانیک کوانتومیِ شرودینگر نظریه‌ای را ایجاد کرد که شبیه بازپردازش اویلر ـ لاگرانژ از مکانیک نیوتنی به صورت یک اصل کنش بود. فرمول‌بندی اویلر ـ لاگرانژ از مکانیک نیوتنی به‌سادگی قابل انتقال به مکانیک کوانتومی است (بر خلاف فرمول‌بندی اصلی قوانین نیوتن) که نشان می‌دهد چرا امروزه ما آن را بنیادی‌تر می‌دانیم.

توجه کنید که بازپردازش ریاضی مکانیک کوانتومی بر حسب انتگرال‌های مسیر شامل انتگرال‌هایی بی‌نهایت‌بعدی است، زیرا فضای تمام مسیرهای ممکن فضایی بی‌نهایت‌بعدی است. با وجود این، این به صورت ریاضی تدقیق شده است. اما فاینمن این رویکرد انتگرال مسیر را برای نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول با انتگرال‌گیری روی کلیهٔ میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هم به کار برد که شامل انتگرال‌گیری روی فضای بی‌نهایت‌بعدی توابع روی R است. پیچیدگی ریاضی این به‌مراتب بیش از انتگرال‌گیری روی فضای بی‌نهایت‌بعدی مسیرها است.
این نقطهٔ تمرکز اصلی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی است، که شالودهٔ ریاضی‌اش هنوز پس از ۷۰ سال گذشت از معرفی اولیه‌اش در حال توسعه است! علی‌رغم نداشتن یک فرمول‌بندی دقیق ریاضی از نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، فیزیکدان‌ها مجموعه‌ای از ابزارهای محاسباتی شامل روش‌های تقریب فراهم آورده‌اند که نتایجش با دقت شگفت‌انگیزی با نتایج آزمایشگاهی می‌خواند.

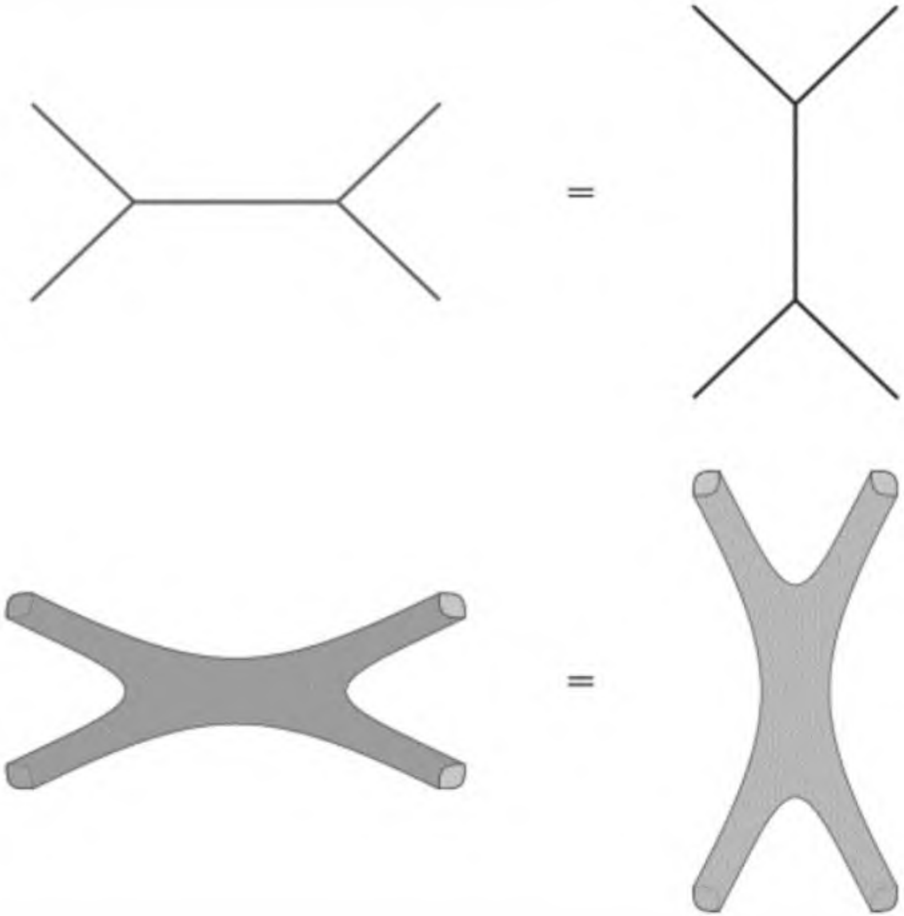
گرانش کوانتومی[۵۱]

فیزیکدان‌ها در تلاش‌های اولیه‌شان برای مبنا قرار دادن نظریهٔ فاینمن نتوانستند نظریهٔ نسبیت عام را با نظریهٔ میدان‌های کوانتومی در یک نظریهٔ واحد گرانش کوانتومی آشتی دهند که گرانش را در سطح ذرّات منفرد توصیف کند. هنگام استفاده از روش‌های محاسباتی که برای نظریهٔ میدان‌های کوانتومی ابداع شده‌اند، آشکار می‌شود که احتمال دامنه‌های فیزیکی شامل جنبه‌هایی از گرانش می‌تواند به اعداد بی‌نهایت بزرگ منجر شود ـــ مانند دامنهٔ پراکندگی دو کوانتوم موج گرانشی (یا دو گراویتون[۵۲]) که به یکدیگر برخورد می‌کنند. این مسأله‌ای جدی است، زیرا احتمال بیش از یک ـــ چه برسد به بی‌نهایت بزرگ ـــ مفهومی بی‌معنا است.

همین‌سان باید خاطرنشان ساخت که حتی اگر یک نظریهٔ سازگار گرانش کوانتومی می‌داشتیم، تأیید چنین نظریه‌ای به‌طور جدی وراءِ توانایی امکانات تجربی امروزی ما می‌بود، چون مستلزم آزمودن انرژی‌هایی با قدر بسیار بسیار بالاتر از آن چیزی است که حتی بتوان تصورش را کرد که در چینشی آزمایشگاهی تولید شود. با توجه به نامحتمل بودن تأیید تجربی، و این واقعیت که به نظر می‌رسید درهم آمیختن مکانیک کوانتومی و نسبیت عام به نتایج بی‌معنایی منتج می‌شود، برخی از فیزیکدانان در کار روی گرانش کوانتومی مردد بودند. اما با توجه به نمونه‌های ماکسول و دیراک و دیگران، فیزیکدانان بسیاری می‌دانند که یک تناقض ظاهری می‌تواند موهبتی باشد، فرصتی برای یک دستاورد ـــ و نه یک دردسر ـــ که رفعش اغلب فیزیک را پیش برده است. به همین دلیل است که فیزیکدان‌ها به کوششان برای حل این ناسازگاری ادامه داده‌اند به امید آنکه یک نظریهٔ واحد عملی بنا کنند.

یک راه‌حل ممکن از گوشه‌ای نامنتظر بر آمده است. در اواخر سال‌های ۱۹۶۰ فیزیکدان‌ها از نتایج آزمایشگاهی پراکندگی ذرّات زیر اتمی[۵۳] به نام هادرون[۵۴] در حیرت بودند. آنها به دو گونه فرایند نگاه می‌کردند. در گونهٔ اول هر ذرّه چیزی را ساطع می‌کرد که ذرّه‌ای دیگر می‌ربود. در گونهٔ دوم، دو ذرّه درهم می‌آمیختند که یک ذرّه را تشکیل دهند قبل از آنکه ذرّهٔ دوم خود دیگربار به دو ذرّه تقسیم شود (نگاه کنید به شکل ۷). هرچند این دو فرایند کاملاً متفاوت به نظر می‌رسیدند، به نتایج یکسانی منتهی می‌شدند. فیزیکدان‌ها نمی‌دانستند که علت چیست، هرچند می‌انگاشتند که مستلزم نوعی جدید از تقارن باشد.

به دنبال آن محققین پی بردند که این تقارن را می‌توان محقَق ساخت و دو فرایند فیزیکیِ به‌ظاهر متفاوت را واحد و همسان دید اگر ذرّات نقطه‌ای در مدل اولیه‌شان با موجوداتی کشیده‌شدهٔ مرتعش که ریسمان خوانده می‌شد جایگزین گردد. ریسمان‌ها در ابتدا به‌عنوان اشیاء ریاضی ساخته و پرداخته شدند و توجیه فیزیکی نداشتند، اما از آن زمان این تفکر بر پا مانده و روشن شده که بسیار پرثمرند. در واقع این پیدایش نظریهٔ ریسمان(۵۵) بود — نظریه‌ای که در آن ذرّات (هادرون‌ها) با ریسمان‌ها به‌عنوان خشت‌های سازندهٔ طبیعت جایگزین شدند. بدین طریق، تقارن فوق تعبیری هندسی یافت: ریسمان‌ها در حین حرکت لوله‌هایی را می‌سازند و چون این لوله‌ها با یکدیگر درآمیزند یا از هم بگسلند رویه‌هایی را می‌آفرینند. دو کانال پراکندگی(۵۶) با همان دیاگرام واحد ریسمان‌ها متناظرند، که بدین ترتیب این تقارن را توضیح می‌دهد (نگاه کنید به شکل ۷).



شکل ۷. دیاگرام‌های پراکندگی ریسمان برای دوفرایند پراکندگی نامعادل ذرّات توپولوژی واحدی دارند.

بعداً معلوم شد که ریسمان‌ها توصیف خوبی برای هادرون‌ها نیستند، اما توصیف خوبی برای جنبه‌های کوانتومی گرانش‌اند. حالت پایین‌ترین انرژی ریسمان خواصی داشت (ذرّه‌ای بدون جرم با اسپین ۲) که با خواص گراویتون برانگیختگی کوانتومی گرانش، همخوان بود. (درست همانند فوتون که برانگیختگی کوانتومی الکترومغناطیس است) و همین نظریهٔ ریسمان را مهم‌ترین نامزد برای یک نظریهٔ کوانتومی گرانش تبدیل کرد. اگر به گراویتون به صورت ریسمانی ظریف به‌جای ذرّهٔ نقطه‌ای فکر کنیم، بسیاری از بی‌نهایت‌ها که نظریه‌های قبلی را بیمار کرده بودند ناپدید می‌شوند.

نظریهٔ ریسمان حجم زیادی از ریاضیات امروزی در خود دارد. این حیطه قویاً تحت تأثیر ریاضیات بوده و به‌راستی با آن شکل گرفته است، و در مقابل، فیزیک در قالب نظریهٔ ریسمان تأثیر مهمی بر ریاضیات محض داشته است. در حال حاضر نظریهٔ ریسمان به‌عنوان نامزد اصلی توصیف نظریهٔ کوانتومی گرانش تلقی می‌شود. به‌علاوه، به‌عنوان یک محصول جنبی، به نظر می‌رسد تمام نیروهای دیگر را در یک چارچوب وحدت می‌بخشد، که در آن تمام نیروها تجلی ریسمان‌ها و وصل و فصل آنها است. این جایی است که در حال حاضر فیزیک بنیادی در آن قرار دارد: نظریه‌ای داریم که به لحاظ ریاضی (آن‌سان که بعداً بحث خواهیم کرد) بسیار غنی است اما هنوز از نظر تجربی تأیید نشده است ــ و محتملاً به خاطر اندازهٔ بسیار کوچک ریسمان، در آیندهٔ نزدیک نیز نخواهد شد.

۲. تقارن و قوانین بقاء

تقارن چشم‌ربا است و شاید اطمینان‌بخشِ حواس ما، چنان‌که گویی تصورِ وجود زیربنا و نظم در جهان ما را قوت می‌بخشد. دیربازی است که ظرافت شکل شش‌ضلعی دانه‌های برف ــ که اغلب به‌عنوان نمونه‌ای از زیبایی طبیعت هم یاد شده است ــ مردم را حیرت‌زده کرده است. به همین‌سان، صورت‌های انسانی که متقارن جلوه می‌کنند عموماً جذاب‌تر به شمار می‌آیند. تقارن تأثیری عمیق و نسبتاً واضح بر معماری نیز داشته است که به گونه‌ای چشمگیر می‌توان نمونه‌های آن را دید. به طور مثال از نگاهی مستقیم تاج‌محل یکی از عجایب هفتگانهٔ جهان امروزی است.

تقارن به طور حیرت‌انگیزی نقشی قدرتمند در قوانین و سازوکارهای فیزیکی دارد، نقشی به مراتب فراتر از جذابیت‌های زیباشناختی. برای فیزیکدان، تقارن فقط خاصیت یک جسم مانند شش‌ضلعی یا هشت‌ضلعی منتظم نیست که ساختمان و ساختار درونیِ کاملاً متعادلی را منعکس می‌سازد. تقارن اغلب به معنای عملی است که بر یک جسم یا دستگاه اعمال می‌شود و آن را کاملاً بلاتغییر می‌گذارد. اعمالی از این دست شامل دوران مثلث متساوی‌الاضلاع بر گرد مرکزش به اندازهٔ ۱۲۰ درجه یا دوران مربع به اندازهٔ ۹۰ درجه است. دوران دایره یا کره حول مرکزشان مثال‌هایی از تقارن‌های پیوسته‌اند که برای هر مقداری معتبر است. از سویی دیگر، یک پنج‌ضلعی منتظم تقارن گسسته دارد: دوران‌هایی به اندازهٔ ۷۲ درجه یا مضاربش، آن را تغییر نکرده باقی می‌گذارد.

اما حیطهٔ تقارن از این هم فراتر می‌رود، و این واقعیت بیش از یک قرن پیش با اثبات قضیه‌ای توسط امی نوتر(۵۷)، ریاضیدان آلمانی روشن شد. نوتر نشان داد که برای هر تقارن پیوستهٔ طبیعت یک قانون بقاءِ متناظر وجود دارد. با استفاده از این قضیه می‌توان اصول مهم فیزیکی ــ مانند بقاءِ انرژی، تکانهٔ خطی، و تکانهٔ زاویه‌ای ــ را با استفاده از استدلال‌های صرفاً ریاضی ناشی از تقارن استخراج کرد، همان‌طور که بعداً در این فصل به آن خواهیم پرداخت.

معماهای انگیزشی

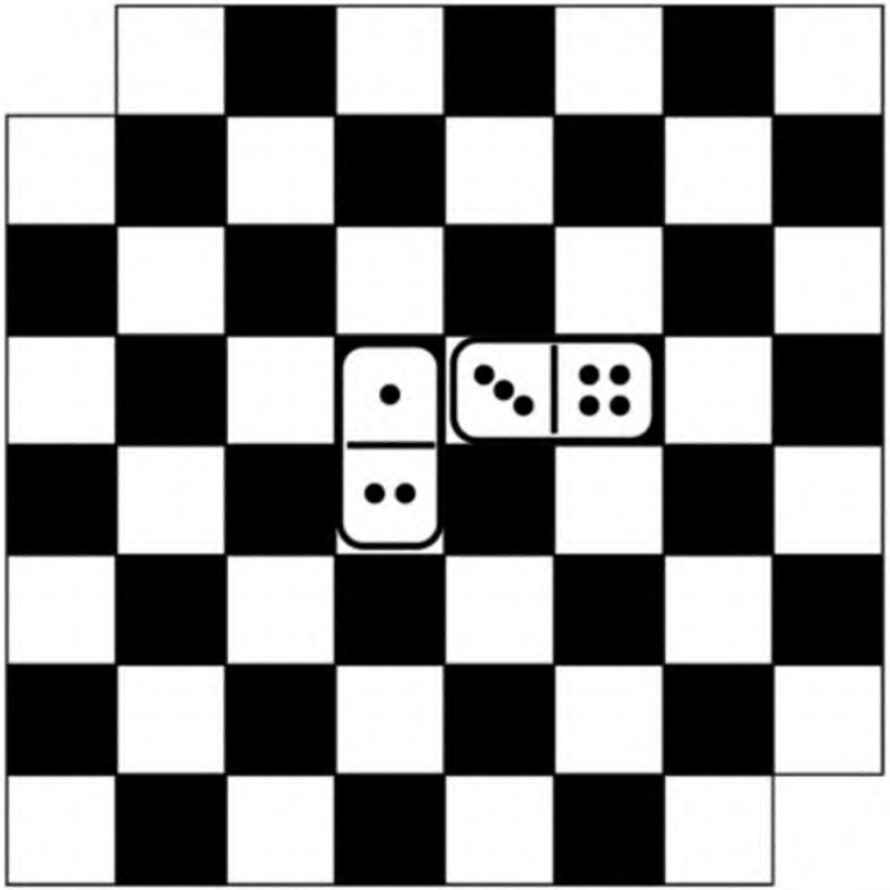
همان‌طور که قبلاً گفته‌ایم معماها می‌توانند ابزار مؤثری برای آشکار نمودن داد و ستدی ظریف مابین فیزیک و ریاضیات باشند. و به‌ویژه می‌توانند در نشان دادن ارتباط بین تقارن و قوانین بقاء مفید باشند، که امیدوارم مثال‌های زیر آن را روشن کنند.

معما

تکلیف ما، اگر انجامش را بپذیریم، پوشاندن صفحهٔ متعارف شطرنج (با ۶۴ خانه) با قطعات دومینو است. هر قطعهٔ دومینو شامل دو مربع کنار هم است اما مسأله اینجا است که فقط ۳۱ قطعه داریم که دو مربع را نپوشیده می‌گذارد (شکل ۸). آیا می‌توانیم ۳۱ قطعه دومینو را چنان بچینیم که تمام مربع‌ها را به‌جز دو گوشهٔ قطری متقابل صفحه بپوشاند؟

حل

وقتی یک دومینو را روی صفحهٔ شطرنج می‌گذاریم، یک مربع سیاه و یک مربع سفید را می‌پوشاند. چون گوشه‌های متقابل یک رنگ دارند، این مسأله قابل حل نیست. این مثالی از قانون بقاء است. فرض کنید N تعداد مربع‌های سیاه و N تعداد مربع‌های سفید باشد که پوشیده نشده است. وقتی دومینوها را روی صفحه قرار می‌دهیم تعداد N و N تغییر می‌کنند، اما $\Delta = N - N$ تغییر نمی‌کند، چون هر دومینو دقیقاً یک مربع سیاه و یک مربع سفید را می‌پوشاند. به عبارت دیگر، یک کمیت پایستار است، ثابت می‌ماند و لایتغیر در زمان.

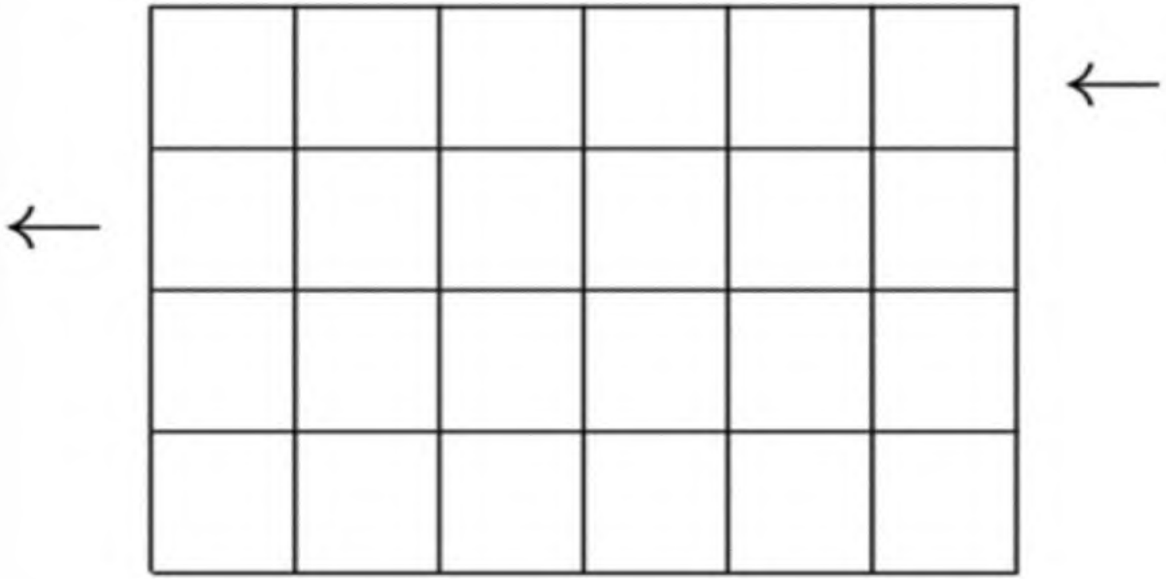


شکل ۸. پوشاندن صفحهٔ شطرنج با ۳۱ دومینو به طوری که همه به جز دو گوشهٔ قطری پوشانده شود.

فرض کنید در انجام تکلیف آن‌چنان که خواسته شده است موفق باشیم. در آخر کار خواهیم داشت: $\Delta=2$. اما قبل از گذاشتن دومینوها با $\Delta=32-32=0$ آغاز کردیم، و این عدد که کمیتی پایستار است، نمی‌توانست تغییر کند، که به تناقض می‌انجامد. به عبارت دیگر، حلی برای مسأله آن‌طور که مطرح شده بود وجود ندارد.

معما

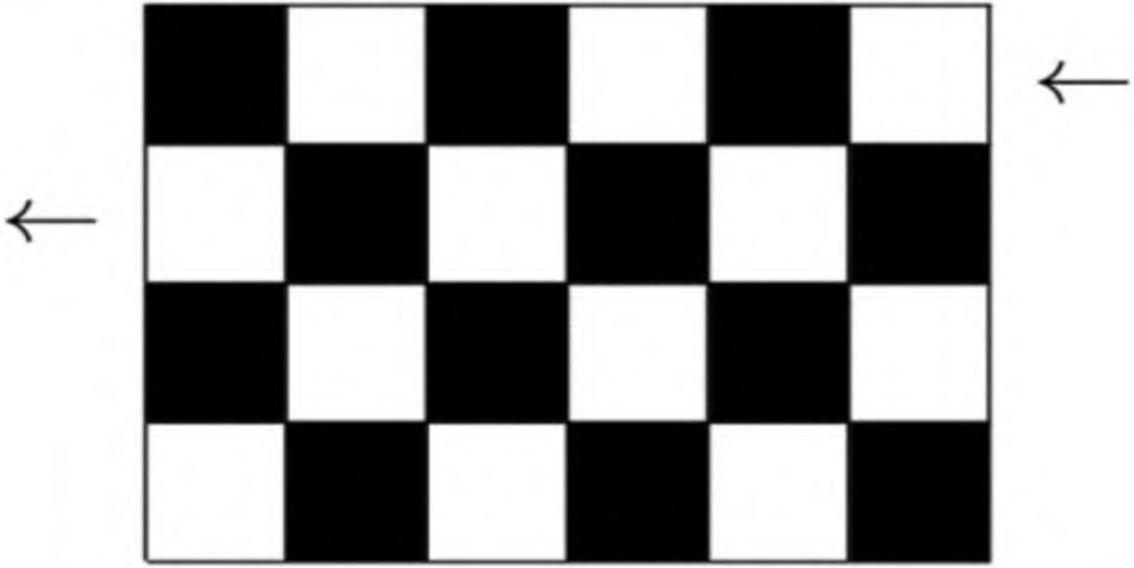
فرض کنید۶×۴ شبکه‌ای داریم با یک ورودی در گوشهٔ سمت راست بالا و یک خروجی در آخرین مربع سمت چپ در ردیف دوم.



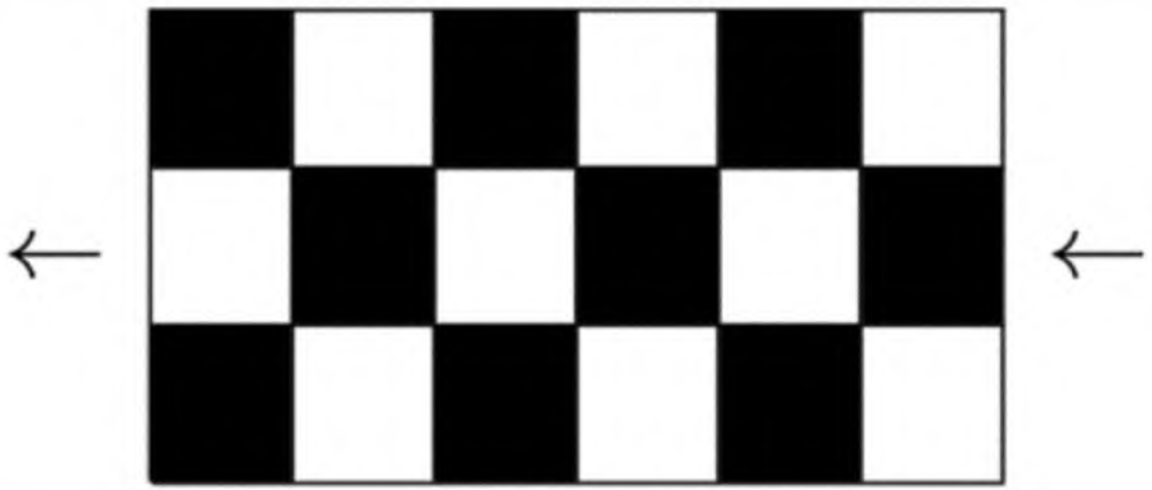
آیا امکان دارد این شبکه را فقط با حرکات افقی و عمودی پیمود، و هر مربع را فقط یک بار پوشاند؟

حل

متأسفانه، برای آنان که به‌دنبال جواب مثبت‌اند باید گفت که نه، امکان ندارد. بیایید مربع‌ها را یک در میان با سیاه و سفید، رنگ کنیم به طوری که هیچ دو مربع مجاور یک رنگ نباشند. در نتیجه مربع‌های ورودی و خروجی همرنگ خواهند بود. اما با هر گام از مربعی به مربعی با رنگی دیگر می‌رود. در نتیجه گام آخر که شماره‌اش زوج است باید سیاه بوده باشد. لذا ناممکن است با یک رنگ آغاز نمود و با همان رنگ پایان داد و از هر مربع یک بار گذشت.



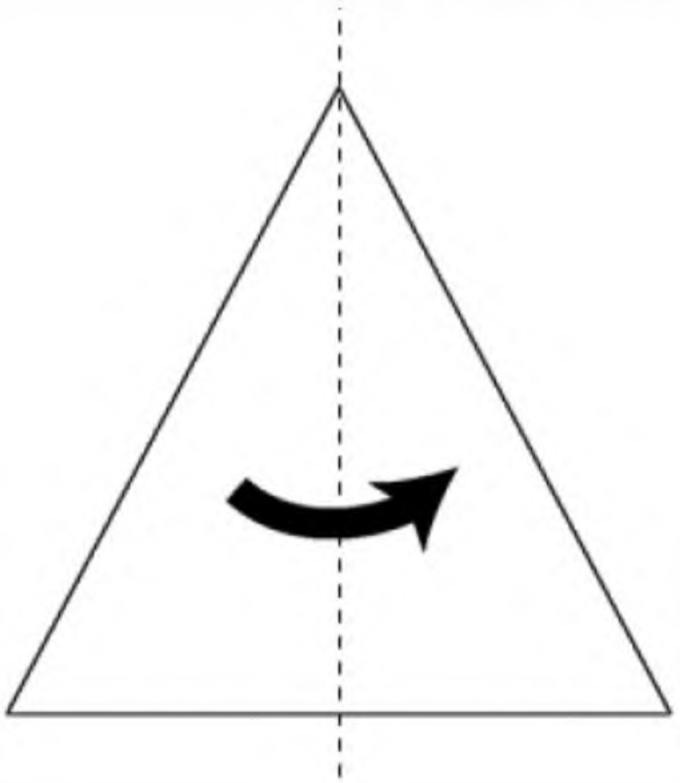
پس می‌بینیم که تقارن در این مورد، یعنی تقارن بین مربع‌ها با رنگ‌های مختلف، ناوردایی شکست‌ناپذیر است. لیکن رنگ‌آمیزی کاملاً امکان عملی بودن را در مورد این شبکه ورود و خروج تحمیل نمی‌کند. مثال زیر را در نظر بگیرید، که ورودی و خروجی مربع‌های دست راست و دست چپ ردیف دوم باشد.



نمی‌توانیم با استفاده از استدلال‌های اعداد به هنج ۲)عدد فرد ــ عدد زوج) امکان عملی بودن را رد کنیم اما وقتی اقدام به انجامش کنیم می‌بینیم که به آن دست نمی‌توان یافت.

تقارن

همان‌طور که گفتیم تقارن شامل تبدیلی از یک دستگاه است که آن را همان‌طور که قبلاً بود باقی می‌گذارد. آن‌گونه که در شکل زیر دیده می‌شود (شکل ۹)، مثلث متساوی‌الساقین تقارنی انعکاسی(۵۸) حول یکی از ارتفاعاتش دارد.



شکل ۹. مثلث متساوی‌الساقین دارای تقارن انعکاسی حول یکی از ارتفاعاتش است.

تقارن‌ها ارتباط نزدیکی با مفهوم ناوردایی(۵۹) دارند. این اصطلاح، که می‌شود آن را تقریباً مترادف تقارن به کار برد، به عملی ارجاع دارد که شیء یا پیکربندی(۶۰) اصلی را دست‌نخورده یا ناوردا باقی می‌گذارد.

تقارن یکی از اصول فراگیر در فیزیک است، و می‌توانیم فکر کنیم که تقارن باید به قسمی خودکار در قوانین طبیعت به‌عنوان ویژگی ذاتی و مخدوش‌نشدنی جاسازی شده باشد. اما چند مورد جای احتیاط دارد. مثلاً می‌توان تصور کرد که تحت تقارن‌هایی همچون انعکاس‌ها؛ قوانین فیزیک ناوردا هستند. به‌ویژه، اگر امری به شکلی اتفاق می‌افتد می‌توانیم فرض کنیم که تصویر آینه‌ای آن هم از نظر فیزیکی امکان‌پذیر است. با آنکه در برخی موارد این صادق است، در برخی دیگر می‌توان کذب آن را نشان داد. مثلاً، در مورد ذرّاتی که دست‌سانی(۶۱) دارند، (بدین‌معنی که اسپین و جهت حرکتش از قانون دست راست پیروی می‌کند). اما تصویر آینه‌ای این ذرّه، دست‌سانی برعکس دارد، ولی ذرّهٔ با دست‌سانی معکوس یا وجود ندارد یا ویژگی‌های متفاوتی دارد. به‌عنوان مثال، الکترون‌ها، دارای دست‌سانی‌اند به این معنا که الکترون‌های با اسپین ساعت‌گرد در راستای حرکتشان، نسبت به آنها که پادساعت‌گردند بر همکنش متفاوتی با سایر ذرّات دارند. از این رو فیزیک تحت انعکاس ناوردا نیست. به تقارن انعکاسی غالباً با نام «پاریته» ارجاع می‌شود.

معما

ورق‌های دل را در یک دسته ورق در نظر بگیرید. چگونه می‌توان آنها را چنان چید که اگر یک درمیان ورق بالایی را برگردانیم و آن را روی میز بگذاریم، سپس ورق بعدی را زیر دسته ورق بگذاریم (در آغاز اولین ورق را زیر بگذاریم) کارت‌ها دقیقاً به ترتیب ۱، ۲، ۳، ...

سرباز، بی‌بی، و شاه به دست بیایند.

حل

راه‌حل‌های زیادی داریم، اما یک رویکرد بسیار آسان به قرار زیر است: ورق‌های ۱، ۲، ۳، ... سرباز، بی‌بی، و شاه را بچینید و فقط گام‌های عمل را معکوس کنید انگار که فیلمی را برعکس نشان می‌دهید (یک درمیان بین برداشتن ورق از زمین و قرار دادن آن روی دسته ورق و برداشتن ورق زیرین و گذاشتن آن بر روی دسته) تا اینکه دستهٔ ورق بازسازی شود.

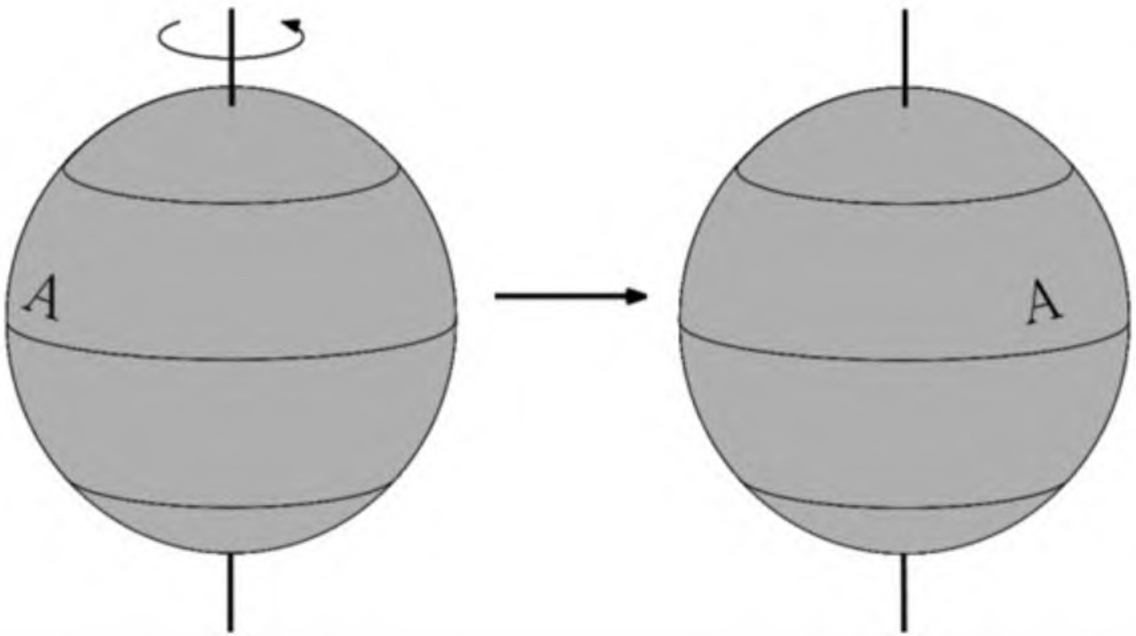
این معما چه ربطی به تقارن دارد؟ این مثالی از عمل انعکاس زمانی(۶۲) است که گونهٔ زمانی تقارن انعکاسی در فضا است که قبلاً از آن سخن گفتیم. انعکاس زمانی تقارنی است در برخی دستگاه‌های فیزیکی. در وضعیت فعلی، حتی اگر جهت زمان را برگردانیم، و اتفاقات معکوس رخ دهند، دسته ورق طوری مرتب خواهد شد که وقتی زمان را به جلو می‌بریم، به شکلی که می‌خواهیم رو می‌شود.

تقارن دیگری که به‌اختصار در فصل پیشین دربارهٔ آن بحث کردیم، تقارن بین مادّه و پادمادّه است، (مانند الکترون و پوزیترون) که تنها فرقشان علامت بارشان است. به این تقارن تحت نام هم‌یوغیِ بار(۶۳) ارجاع می‌شود. از قضا، انعکاس زمان، پاریته و هم‌یوغیِ بار تک تک و به تنهایی تقارن واقعی فیزیکیِ طبیعت نیستند. اما واقعیت عمیق آن است که ترکیب نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین و مکانیک کوانتومی به این گزاره می‌رسد که این سه جنبه وقتی با هم مثل یک موجود واحد، در نظر گرفته شوند، یک تقارن فیزیکی را عرضه می‌کنند. به عبارت دیگر، اگر با دستگاهی فیزیکی آغاز کنیم و تصویر آینهٔ آن را در نظر بگیریم و جهت زمان را معکوس کنیم و بگذاریم برعکس حرکت کند و هر ذرّه را با پاد ذرّه‌اش جایگزین کنیم، یک دستگاه امکان‌پذیر فیزیکی خواهیم داشت.(۶۴)

فیزیک تقارن‌های قدرتمند پیوستهٔ بیشتری دارد. مثلاً انتقال‌ها(۶۵) را داریم. خط مستقیمی را در نظر بگیرید. دارای تقارن انتقالی است (شکل ۱۰).

شکل ۱۰. حرکت دادن خط در راستای خودش به همان خط منتهی می‌شود.

اگر خط را در راستای خودش حرکت دهیم باز هم به خودش بازمی‌گردد. به عبارت دیگر ناوردا است. البته برای اینکه این تقارن یک سیستم فیزیکی واقعی باشد، لازم است همه چیز روی خط را با آن حرکت دهیم تا فیزیک هم همان سان جلوه کند. انتقال در زمان تقارن دیگری است. اگر آزمایشی را امروز و همان را فردا هم (با فرض اینکه همه چیز در عالم همانند امروز است) انجام دهیم، آنگاه آزمایش‌ها و حاصلشان یکی است.
دستهٔ دیگر تقارن‌های پیوسته توسط دوران تأمین می‌شود. کره، که تحت دوران حول هریک از محورهایش ناوردا است به بهترین شکل این را نشان می‌دهد، (شکل ۱۱).



شکل ۱۱. دوران کره بر حول محورش یک تقارن است.

اگرچه خیلی‌ها با مفهوم تقارن دورانی(۶۶) در فضا آشنا هستند، برخی از این تقارن‌ها می‌توانند نسبتاً ظریف باشند. به‌عنوان مثال،

تبدیلات لورنتس دوران‌هایی در مکان ـ زمان چهاربعدی هستند که در معنای واقعی مستلزم آمیختن فضا و زمان است: مکان در راستای زمان می‌چرخد، در حالی که زمان در راستای مکان... دوران مختصات زمانی و مکانی به یکدیگر به تقارنی عمومی‌تر منجر می‌شود که به‌ویژه از الزامات نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین است.(۶۷)

قضیهٔ نوتر

رابطهٔ عمیقی بین تقارن‌ها و قوانین بقاء وجود دارد. منظورمان از بقاء کمیتی است که ثابت می‌ماند و در طی زمان تغییر نمی‌کند. مثلاًاگر ده توپ خردنشدنی داشته باشیم که واقعاً تحت هر شرایطی سالم بمانند، تعداد توپ‌ها در گذر زمان عوض نمی‌شود. چنین است که هر تقارن در فیزیک نشان از وجود کمیتی دارد که در طبیعت محفوظ می‌ماند. این گزاره نتیجهٔ قضیهٔ نوتر است که در سال ۱۹۱۸ منتشر شد و می‌گوید که برای هر تقارن پیوسته باید قانون بقاءِ نظیری وجود داشته باشد. به غیر از زیبا بودن، تقارن‌ها آن‌چنان که قبلاً هم در این فصل بحث کردیم نقشی انکارناپذیر در فیزیک دارند.

مثلاً، تقارن انتقالی در فضا این فکر را در خود دارد که اگر همهٔ چیزها یکسان بمانند، آزمایش‌هایی که در جاهای مختلف انجام شود باید به نتایج یکسان منجر گردد. ولی همان تقارن نتایج وسیع‌تری دارد: حتماً به پایستگی تکانه(۶۸) (جرم ضرب‌در سرعت) منتج می‌شود. این خود بالنسبه شگفت‌آور است چرا که بقاء تکانه گزاره‌ای بسیار پیچیده‌تر از این واقعیت مسلّم است که حاصل آزمایش‌های فیزیکی بستگی به جایی که آن را انجام می‌دهیم ندارد.

این گزاره‌ها، در عوض می‌توانند برای بازپردازش مکانیک نیوتنی به کار بروند. بیایید برای مثال بقاء تکانه را برای دو ذرّهٔ ۱ و ۲ در نظر بگیریم،

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

این معادلهٔ دیفرانسیل نشان می‌دهد که تغییر تکانه برای دو ذرّه صفر است، بدین معنی که تکانهٔ کل پایسته است ــ که باید بر اساس قوانین فیزیک اینچنین باشد. آنگاه می‌توانیم نیروی وارد بر ذرّهٔ i را تعریف کنیم:

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt}\vec{p}_i$$

به این ترتیب نه فقط قانون دوم نیوتن

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

بلکه قانون سومش را هم به دست آورده‌ایم: از معادلهٔ بالا می‌توان دید که جمع نیروها بر ذرّات ۱ و ۲ صفر است، و این راه دیگری است برای بیان اینکه این دو نیرو مساوی و معکوس هم‌اند.

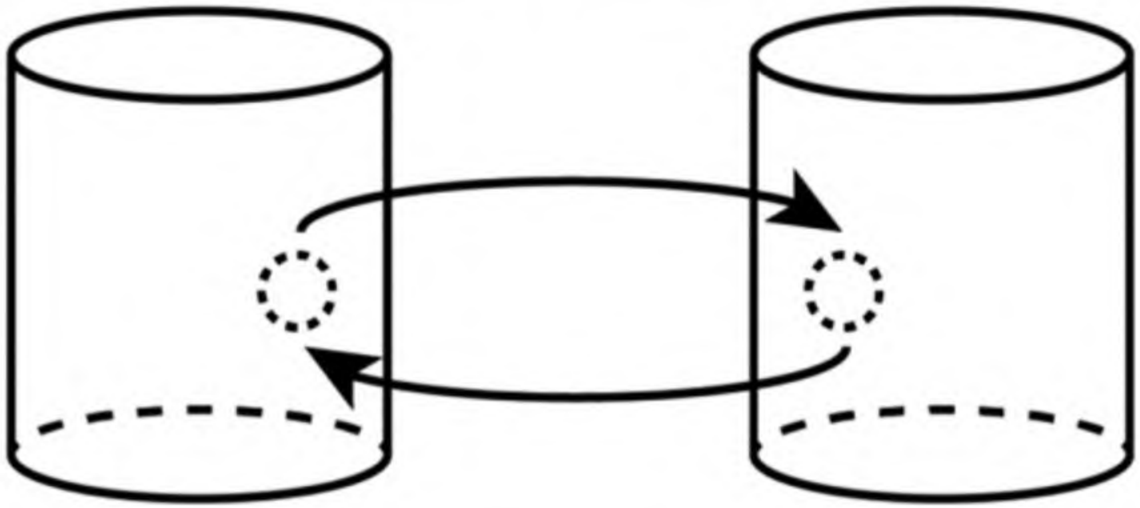
آیا به یاد دارید که زمانی از این صحبت می‌کردیم که همواره واضح نیست که کدام‌یک از قوانین فیزیک بنیادی‌تر است؟ دیدگاه امروزی فیزیک بر این عقیده است که بقاءِ تکانه از قوانین حرکت نیوتن بنیادی‌تر است زیرا بقاء تکانه و نه قوانین حرکت نیوتن، نتیجهٔ مستقیم اصول تقارن است و حیطهٔ کاربرد وسیع‌تری دارد.

اکنون کم‌کم رابطهٔ نزدیک تقارن و ناوردایی، یا بقاء را داریم می‌بینیم. سه تقارن پیوسته که تاکنون صحبتشان را کردیم به قوانین بقاء زیر می‌انجامد:

- تقارن تحت انتقال در مکان به پایستگی تکانۀ خطی منجر می‌شود.
- تقارن تحت انتقال در زمان به پایستگی انرژی می‌انجامد.
- تقارن تحت دَوَران پایستگی تکانۀ زاویه‌ای را می‌دهد.

معما

دو ظرف داریم، یکی حاوی رنگ سبز و دیگری رنگ سفید. فرض کنید که ظرف‌ها یک اندازه‌اند و دقیقاً به یک اندازه هم رنگ دارند. فرض کنید مقدار کمی، یک فنجان، از رنگ سبز را برمی‌داریم و در ظرف رنگ سفید می‌ریزیم. بعد به همان اندازه از ظرف مخلوط برمی‌داریم و در ظرف رنگ سبز می‌ریزیم (شکل ۱۲). کدام بیشتر است، غلظت رنگ سبز در سفید یا غلظت رنگ سفید در ظرف سبز؟



شکل ۱۲. ظرف‌های رنگ سبز و سفید: مقدار کمی از رنگ سبز را بر می‌داریم و آن را در ظرف رنگ سفید می‌ریزیم، و همان مقدار مخلوط را به ظرف رنگ سبز برمی‌گردانیم.

حل

غلظت‌ها در نهایت یک اندازه‌اند! چون حجم‌ها در آغاز یک مقدار بوده‌اند در نهایت مقداری مساوی از حجم در هر ظرف خواهیم داشت. بدین ترتیب در پایان فرایند، هر حجمی از رنگ سبز که جابه‌جا شده باشد، فقط می‌تواند با مقدار مساوی از رنگ سفید جایگزین شود، که از بقاء حجم رنگ‌ها ناشی می‌شود. از این رو مقدار رنگ سبزی که از ظرف رنگ سبز کم شده مساوی مقدار رنگ سفیدی است که از ظرف رنگ سفید کم شده. لذا در مورد مخلوط در هر دو ظرف به غلظتی یکسان می‌رسیم. این نمایشی آسان ولی زیبا از مفید بودن قوانین بقاء است.

فکر پشت این معما را می‌توان با دسته‌ای ورق هم نشان داد. ۱۰ ورق قرمز بردارید و ۱۰ ورق سیاه. سه ورق قرمز را از گروه اول جدا کنید و با ورق‌های سیاه مخلوط کنید. سپس ورق‌های سیاه را بر بزنید (که حالا سه ورق قرمز اضافه دارند) و سه ورق از دستهٔ مخلوط بردارید و به دستهٔ قرمز بازگردانید. با استفاده از تصور کلی در مورد بقاء ورق‌های قرمز و سیاه (مثل مورد حجم‌ها در مثال قبلی) خود را قانع کنید که تعداد ورق‌های سیاه در دسته‌ای که در ابتدا قرمز بود به همان تعدادی است که ورق‌های قرمز در دسته سیاه اولیه بود و باید باشد.

معما

یک ورق شماره‌دار را از یک دسته ورق برمی‌داریم. چطور سریعاً می‌توانید بگویید شماره‌اش چیست؟

حل

جمع مرتبهٔ یکان‌های شماره‌های روی ورق‌های شماره‌دار ۰ (صفر) است، چون جمع همهٔ آنها در دستهٔ ورق ۲۲۰ است. راه مؤثری که بتوانیم شمارهٔ ورق مورد نظر را پیدا کنیم این است که شماره‌های باقی‌مانده را با هم جمع و هنجاریدهٔ(۶۹) ۱۰ کنیم (یعنی فقط یکانش را نگه داریم). مثلاً اگر جمع ۳ شد، بلافاصله خواهید دانست که شماره ۷ کم است، و اگر ۹ بود شمارهٔ ۱ مفقود است. یک نگاه سریع دیگر وضع ورق برداشته شده را آشکار خواهد کرد. باز هم اصل کلیدی مؤثر که باید به حساب بیاید قانون بقاء است، که در این مورد مربوط به جمع مرتبهٔ یکان‌های ورق‌ها است.

این تقریباً یادآور یکی از معروف‌ترین موارد اصل بقاءِ انرژی در مسألهٔ حادّی از فیزیک است ـــ یعنی کشف ذرّهٔ بنیادی نوترینو(۷۰) توسط پائولی. فیزیکدان‌ها یافته بودند که به نظر می‌رسد در حاصل بعضی واپاشی‌های ذرّه‌ای انرژی پایسته نیست. جمع انرژهای ذرّات حاصل از واپاشی، برابر انرژی ذرّهٔ اصلی نمی‌شود. از این رو در ۱۹۳۰، پائولی حدس زد که باید ذرّهٔ ریز کوچک جدیدی، که او نامش را نوترینو گذاشت وجود داشته باشد که از آشکارسازی می‌گریزد و بی‌آنکه مشهود باشد انرژی اضافی را با خود می‌برد. پاولی شرط بست که نوترینو هرگز آشکار نخواهد شد چون با مادّه برهم کنشی ضعیف دارد، اما او این شرط را در ۱۹۵۶، سالی که نوترینو کشف شد، باخت.

معما

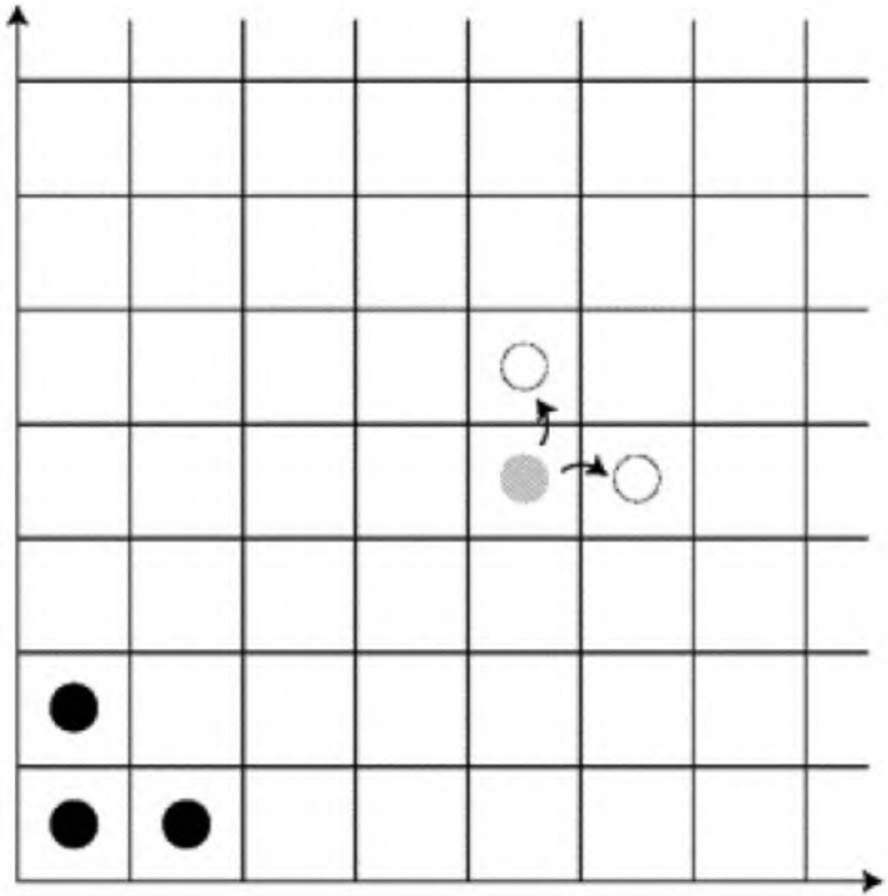
۱۰ جعبه دارید هریک با ۱۰ وزنه. نه جعبه وزنه‌های یک کیلوگرمی دارند ولی یکی از آنها ناقص است و وزنه‌های ۰.۹ کیلوگرمی دارد. ترازویی دیجیتالی دارید که وزن کل هر زیرمجموعه‌ای از وزنه‌ها را که انتخاب کنید نشان می‌دهد. چگونه می‌توانید با یک بار توزین جعبهٔ ناقص را مشخص کنید؟

حل

جعبه‌ها را از ۱ تا ۱۰ برچسپ بزنید وn وزنه از جعبهٔ nام بردارید. از اختلاف بین وزن واقعی و وزنی که باید اندازه‌گیری می‌شد اگر هیچ یک از جعبه‌ها معیوب نبود، که برابر ۵۵= ۱۰+...+۳+۲+۱ است، می‌توانید تعیین کنید که کدام جعبه معیوب است.

معما

شبکه‌ای نامتناهی از مربع‌ها را در ربع اول یا گوشهٔ بالای دست راست صفحهٔ استاندارد مختصات دکارتی در نظر بگیرید (شکل ۱۳).
مهره‌هایی را در برخی از مربع‌ها قرار می‌دهیم و طبق ضابطه‌ای اجازه می‌دهیم تغییر کنند: هر مهره می‌تواند به دو مهره تبدیل شود، یکی در مربعی که درست در بالایش، و یکی در مربعی که بلافاصله در سمت راستش قرار دارد، به شرطی که هیچ یک از این دو مربع اشغال نشده باشد. فرض کنید همچنان که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، با سه مهره در سه مربع گوشهٔ پایین سمت چپ شبکه آغاز کنیم. کار شما استفاده از عمل فوق است تا آنجا که مطمئن شویم هیچ مهره‌ای در این سه مربع باقی نمانده است. آیا امکان‌پذیر است؟



شکل ۱۳. یک شبکهٔ بی‌نهایت مربعی با مهره‌هایی در مربع‌ها، که هر مهره را می‌توان به دو مهره تبدیل کرد ــ یکی مستقیماً در بالایش و دیگری در سمت راستش به شرطی که هر دو مربع خالی باشند.

حل

نه، امکان‌پذیر نیست. برای اینکه ببینیم چرا، بیایید برای هر مربع در این شبکه عددی در نظر بگیریم به قسمی که ارزش عددی هر مربع برابر جمع شماره‌های دو مربع درست در بالا و در سمت راستش باشد. برای مشخص‌تر بودن می‌توانیم عدد ۱ را برای اولین مربع در گوشهٔ پایین در نظر بگیریم و عدد ½ را برای مربع‌های بلافاصله بالا و سمت راستش.

این دو مربع چیزی را که قطر اول می‌نامیمش تشکیل می‌دهند. قطر بعدی از سه مربع تشکیل شده است که برای هریک عدد ۱/۴ در نظر گرفته می‌شود. قطر بعدی از ۴ مربع ساخته شده است که برای هریکشان عدد ۱/۸ را در نظر می‌گیریم و قس علیهذا.

هر بار که مهره‌ای را به قطر بعدی می‌رانیم عدد تخصیص داده شده نصف می‌شود.

اکنون مقادیر مربع‌هایی را که توسط یک مهره پوشش داده شده‌اند با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید که عمل تبدیل مهره‌ها به دو مهره، یکی افقی رانده شده به راست و دیگری عمودی به بالا، کل مقدار را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر، قانون بقاءِ جمع کل مربع‌های اشغال شده را داریم.

مقداری که با آن شروع می‌کنیم عبارت است از:

۱+½ +½ = ۲

توجه کنید که اگر تمام صفحه اشغال شده بود، جمع حاصل را به صورت زیر به دست می‌آوردیم، ابتدا جمع روی تمام ستون‌های عمودی را در

نظر می‌گیریم:

$$[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots] \times [1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots] = 2 \times 2 = 4$$

از آنجایی که جمع مقادیر سه مربع اول ۲ است، بدین معنی است که برای توفیق در حرکت دادن مهره‌ها از سه مربع اول، جمع مقادیری که اشغال می‌کنند باز هم باید ۲ شود. اما، این فقط در صورتی امکان‌پذیر است که تمام مربع‌های دیگر در شبکه پر شود زیرا جمع مقادیر تمام مربع‌ها (شامل سه تای اول) ۴ است. از این رو تکلیف پیش رو، در گام‌های متناهی یا در زمانی متناهی امکان‌پذیر نیست.

معما

فرض کنید تعداد فردی از سربازان در میدان نبرد هستند، همه در فاصلهٔ معینی از یکدیگر. تمام سربازها دستور دارند که مواظب نزدیک‌ترین سرباز به خود باشند. ثابت کنید که حداقل یک سرباز محافظت نمی‌شود.

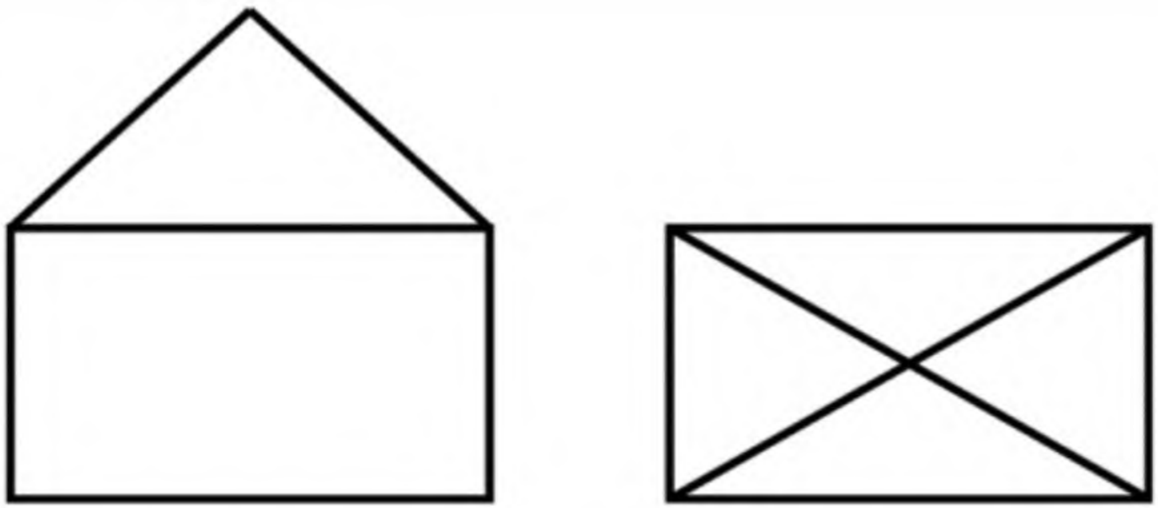
حل

دو سربازی را که از همه به هم نزدیک‌تر هستند در نظر بگیرید. آنها هیچ انتخابی ندارند مگر اینکه مراقب یکدیگر باشند. سپس زوج بعدی که به یکدیگر نزدیک‌ترند را پیدا کنید. با تعداد فردی از سربازها در نهایت و به‌ناچار ما می‌مانیم با یک سرباز که مواظبت نشده است.

اما تأمل کنید! آیا نکتهٔ نادرستی در این استدلال هست؟ چه می‌شود اگر سربازی نزدیک‌ترین به دیگری باشد که قبلاً جفت شده است. فرض کنید زمانی که برای بار اول چنین می‌شود سرباز جفت‌نشده داریم. بنابراین یکی از این سربازان هیچ‌یک از این سرباز را نمی‌پاید چون در حال پایش کسانی است که قبلاً جفت شده‌اند. در این صورت در نهایت سرباز داریم که سرباز را می‌پاید. به عبارت دیگر، حداقل یک سرباز نپاییده باقی می‌ماند.

معما

آیا می‌توانید اشکال زیر (شکل ۱۴) را بدون برداشتن قلم، یا تکرار یک ضلع رسم کنید؟



شکل ۱۴. اشکال بالا را بکشید بدون برداشتن قلم و باز کشیدن هریک از اضلاع.

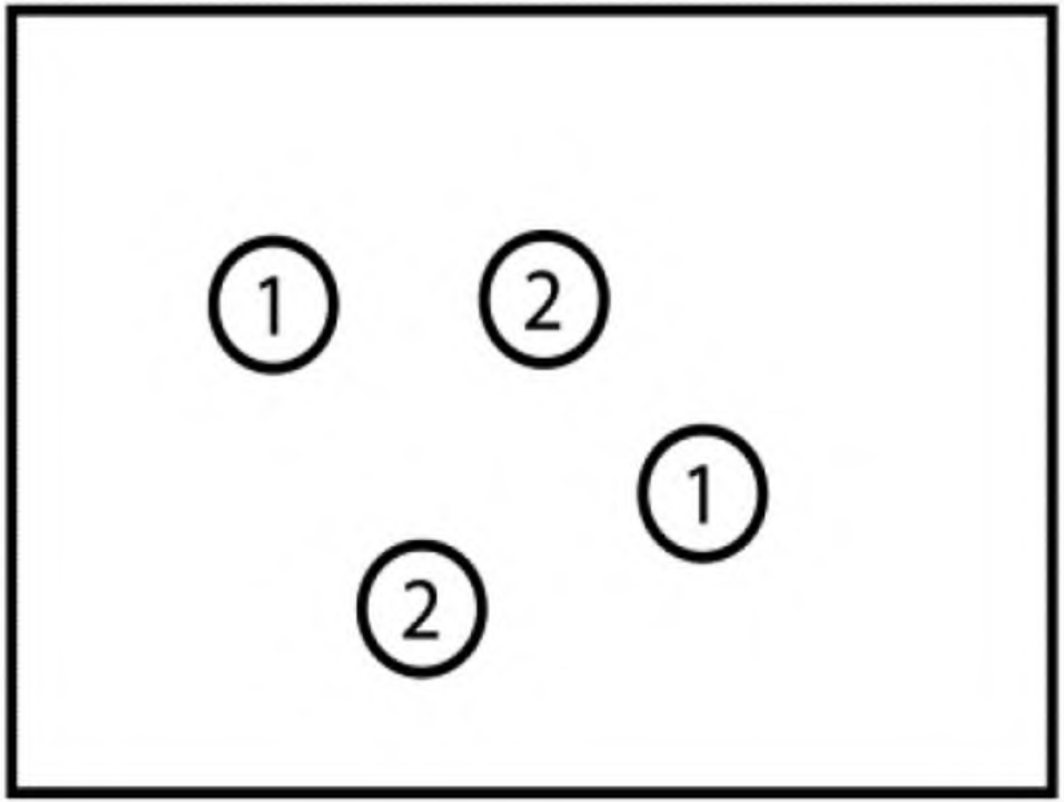
حل

برای شکل اول می‌توانیم، ولی نه برای شکل دوم. برای اینکه گرافی را بدون برداشتن قلم بکشیم، به هر رأس گراف باید تعداد زوجی پاره‌خط متصل باشد (به جز محتملاً برای رئوس اول و آخر، اگر متفاوت باشند). دلیلش این است که تعداد دفعات ورود به یک رأس میانه

و خروج از آن باید یکی باشد. تعداد فرد دفعات، مشخص‌کنندهٔ این است که رأس نقطهٔ آغازی یا پایانی است، نه نقطهٔ میانی که گذرگاه است. به بیانی دیگر، هرچند تا حدی انتزاعی‌تر، تعداد اضلاع هنجاریده ۲ منتهی بر تمام رئوس میانی باید صفر باشد. به‌علاوه، حداکثر دو رأس می‌توانند تعداد فردی ضلع متصل داشته باشند و این رئوس فقط می‌توانند در آغاز و پایان باشند. دیاگرام دوم ۴ رأس با ۳ ضلع متصل به هریک دارد، پس بر اساس آنچه اکنون گفتیم امکان ندارد آن شکل را بدون برداشتن قلم رسم کنیم.

معما

تختهٔ مستطیلی داریم (شکل ۱۵) که می‌توان بر روی آن، تحت شرایط زیر، سکه نهاد.



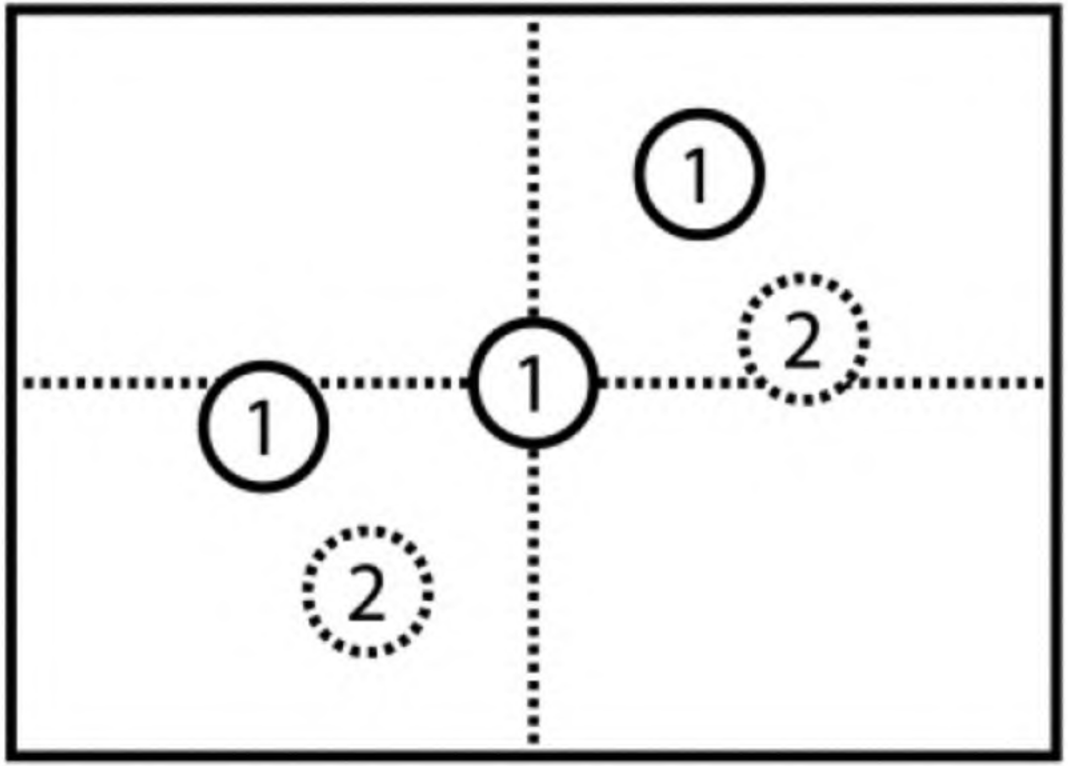
شکل ۱۵. یک بازی که دو بازیکن به نوبت سکه‌هایی ناهمپوشان را روی میز قرار می‌دهند.

۱) مرکز هرسکه باید کاملاً در محدودهٔ مرزهای میز قرار داشته باشد و
۲) سکه ها نباید هم‌پوشانی داشته باشند.

دو بازیکن به‌نوبت سکه‌ها را روی میز قرار می‌دهند. فرض کنید مخزنی لایتناهی از سکه داریم! آخرین فردی که مطابق این قوانین سکه قرار دهد، برنده می‌شود. شما بازی را آغاز می‌کنید. چگونه می‌توانید برنده شوید؟

حل

حرکت برنده این است که سکهٔ اول در مرکز تخته قرار گیرد (شکل ۱۶). توجه کنید که تخته دارای تقارن انعکاسی حول مرکزش است، بدین معنی که به ازای هر نقطه روی میز قرینه‌اش نسبت به مرکز هم نقطه‌ای روی میز است. یعنی هر نقطه‌ای که طرف مقابل سکه‌اش را قرار می‌دهد، شما همیشه می‌توانید در جواب یک سکه روی میز قرار دهید، در نقطهٔ متقابل قرینه‌اش. به علت تقارن تخته، اگر حرکت طرف مقابل قانونی باشد حرکت شما هم هست.



شکل ۱۶. راهبرد برنده.

معما

قرار است با دو استاد بزرگ شطرنج همزمان بازی کنید! مسأله این است که شطرنج‌باز خوبی نیستید. با وجود این می‌خواهید حداقل یک دور بازی را برنده شوید، یا هردو را مساوی کنید! در صفحهٔ اول استاد بزرگ سفید است. در صفحهٔ دوم شما سفید هستید. راهبرد شما چه باید باشد؟

حل

راهبرد شما این باید باشد که بازی صفحهٔ دیگر را انعکاس دهید. هرچه استاد بزرگ با مهرهٔ سفید در صفحهٔ اول بازی می‌کند، شما در صفحهٔ دوم بازی کنید و هرچه استاد بزرگ دوم با مهره‌های سیاه به حرکت شما پاسخ می‌دهد، واکنش شما در صفحهٔ اول با مهره سیاه خواهد بود. با این روش، به‌واسطهٔ تقارن، دو بازی یکسان‌اند و بنابراین نتایج آنها یکی خواهد بود. ولی در دو بازی در دو طرف متقابل هستید. پس اگر در یک طرف ببازید، در طرف دیگر برنده خواهید بود. همین‌طور اگر در یک طرف مساوی کنید در دیگری هم مساوی می‌کنید.

ابرتقارن(۷۱)

تقارن‌های انتزاعی دیگری در فیزیک داریم و یک مثال بارز آن ابرتقارن نام دارد. یک نتیجهٔ این تقارن، با فرض رخ دادنش در طبیعت، این است که هر ذرّه دارای ذرّه‌ای سایه‌ای است که آن را اَ بَریار می‌نامیم. ابریار خواصی یکسان با ذرّهٔ اصلی دارد، به جز اینکه اسپینی متفاوت خواهد داشت. به‌عنوان مثال سِلکترون(۷۲) ابریار نتیجه‌شده از الکترون است. همان جرم و بار، را دارد اما الکترون بر خلاف الکترون، اسپین ندارد.

در بیانی فنی‌تر، در نظریه‌های دارای ابرتقارن می‌توانیم ابعاد فضا را با افزودن مختصات اضافی گسترش دهیم، فضای جدید ابرفضا(۷۳) خوانده می‌شود. مثلاً می‌توان ابرفضای (x,y,z,t,θ) را داشت. اما مختصات اضافی تفاوت‌هایی با دیگر مختصات آشناتر دارند: مثلاً θ نمونه‌ای از مختصات گراسمنی(۷۴) (یا فرمیونی) است. بر خلاف مختصات متعارف، که در آن داریم $xy= yx$، زوجی از مختصات گراسمنی ناجابه‌جایی‌اند(۷۵). به عبارتی دیگر. $\theta a = - \theta a$ اگر فرض کنیم، $\theta=a$ می‌بینیم که $\theta = 0$. مختصات گراسمنی متناظر با جهت‌های اضافهٔ فضا هستند و پدیدهٔ ابرتقارن مربوط است به ناوردایی انتقال در این راستاها. شرایط زیر را برقرار می‌سازیم:

$$\theta.\theta = 0 \tag{۱.۲}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = 0 \tag{۲.۲}$$

$$\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\theta \tag{۳.۲}$$

ابرتقارن به نوع دیگری از تقارن منجر می‌شود که جذر انتقال در فضا است. مثلاً، اگر f(x) یک تابع باشد، وقتی را به اندازهٔ تغییر دهیم، مقدار تابع متناسب با مشتقش تغییر می‌کند:

$$f(x+\epsilon) \approx f(x) + \epsilon f'(x)$$

عملگر

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

مولد تقارن است، به معنایی که در اینجا دقیقاً روشن نمی‌کنیم. بنابراین جذر این مولد انتقال تقارن عملگر D خواهد بود به قسمی که.

$$D_\theta^2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

تصور این امر مشکل است، اما ابرتقارن دقیقاً راه را برای آن باز می‌کند. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$D_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\,\frac{\partial}{\partial x}$$

آنگاه

$$D_\theta^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \theta^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\,\theta\right)$$

اگر قوانین ناجابه‌جایی متغیرها را به یاد داشته باشیم، تقریباً تمام جمله‌ها حذف می‌شوند D و

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

به ساده می‌شود. دقت کنید که تابعی در این فضا یک سریِ توانی در θ به شکل،

$$f(x,\theta) = f(x) + \theta g(x)$$

خواهد داشت. جملاتی با درجات بالاترθ وجود نخواهد داشت چون0=θ ! پس تابعی در این ابرفضا را به صورت زوج توابعf وg می‌توان دید. این شبیه مضاعف کردن ذرّات است که، برای هر ذرّه یک ابریار قائل شدیم.

هرچند در نگاه اول تصور ابرتقارن عجیب به نظر می‌آید، اما عنصری اساسی در نظریهٔ ریسمان و برخی نظریه‌های کوانتومی میدان است. ابرتقارن، با رام کردن افت و خیزهای کوانتومی(۷۶) باعث می‌شود مکانیک کوانتومی بیشتر کلاسیک جلوه کند. اما در حال حاضر هیچ گواه تجربی بر وجود سلکترون (یار ابرمتقارن الکترون) یا ابرتقارن به صورت عام وجود ندارد. محققین امید دارند به‌زودی شواهدی از آن در آزمایش‌های برخورددهنده به‌دست آید.

شبه‌بلورها(۷۷) و تقارن

حالا به نوعی تقارن نامتعارف، تقارن شبه‌بلورها، می‌پردازیم.
برای آغاز بحث، محتملاً انواع کاشیکاری صفحهٔ دارای تقارن تحت گروه‌های گسسته را دیده‌اید:.

$$\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/6$$

)

$$\mathbb{Z}/n$$

به دَوران به اندازهٔ 2π/n ارجاع می‌کند. لذا گروه

$$\mathbb{Z}/2$$

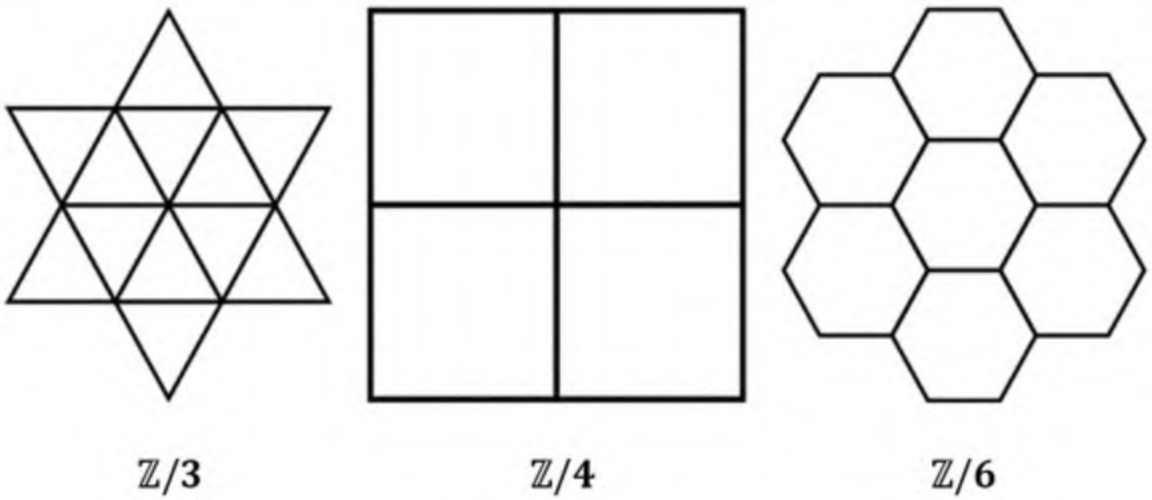
مربوط است به دوران‌های تقارنی به اندازهٔ π رادیان یا ۱۸۰ درجه، به همین‌سان،

$$\mathbb{Z}/3$$

مربوط است به دوران‌های به اندازهٔ ۱۲۰ درجه؛

$$\mathbb{Z}/4$$

مربوط است به دوران‌هایی به اندازهٔ ۹۰ درجه و قس‌علی‌هذا)(۷۸). به شکل ۱۷ بنگرید.



شکل ۱۷. می‌توان الگوهایی متقارن و تناوبی متناظر با تقارن‌های سه‌تایی و چهارتایی و شش‌تایی ساخت.

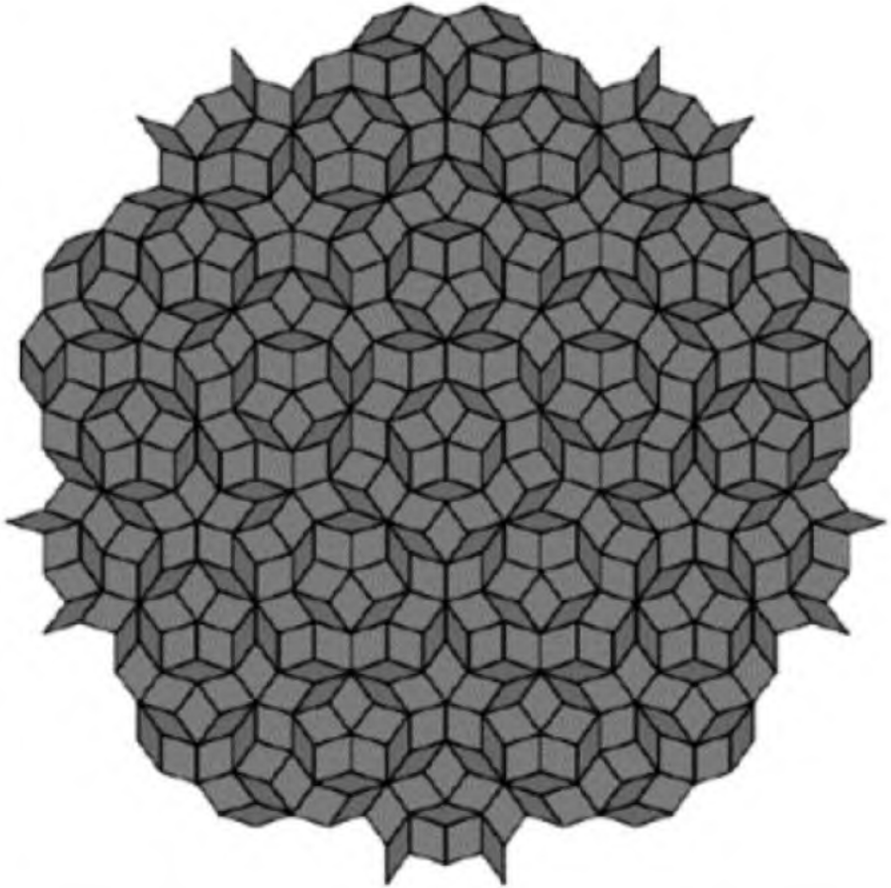
بلورهایی هم هستند که شبه‌تقارن دارند. به آنها شبه‌بلور می‌گویند که با استفاده از کاشیکاری پنرز(۷۹) ایجاد می‌شوند. کاشی‌ها از اشیاء پنج‌ضلعی درست شده‌اند که هر یک به‌تنهایی دارای تقارن

$$\mathbb{Z}/5$$

اند اما بلور به‌تمامی دارای تقارن دورانی نیست. شبه‌بلور است، زیرا دقیقاً تناوبی نیست، ولی تقریباً هست (شکل ۱۸). شبه‌بلورها موجوداتی شبیه بلور هستند که تقریباً، ولی نه کاملاً تقارن دارند. هر عنصر موضعی متقارن می‌نماید، اما هیچ تقارن فراگیری وجود ندارد هرچند که این ساختارها تقریباً متناوب‌اند.

جالب اینجاست که محققی در هاروارد، پیتر لو(۸۰) ، و فیزیکدانی در دانشگاه پرینستون، پل استاینهارت(۸۱) ، یافتند که بسیاری از مسجدها که قرن‌ها پیش ساخته شده‌اند با شبه‌بلور تزیین شده‌اند، که نشان می‌دهد که تفکر کلی کاشیکاری پنرز از حدود سال ۱۲۰۰میلادی وجود داشته است، یعنی مدت‌ها پیش از آنکه در سال ۱۹۷۰ راجر پنرز ــ که این کاشیکاری به نامش است ــ به بررسی آنها بپردازد.(۸۲) پس تمدن‌های قدیمی زیبایی ساختارهای نسبتاً متقارن شبه‌بلورها را درک می‌کردند. اما معمارانِ آنها انگیزه‌ای متفاوت از ما داشته‌اند. آنها سعی نمی‌کردند که از فیزیک الگو بگیرند یا با اصول تقارن دست به آزمایش بزنند، آنها تلاش می‌کردند آثاری پیچیده ولی چشم‌نواز خلق کنند!

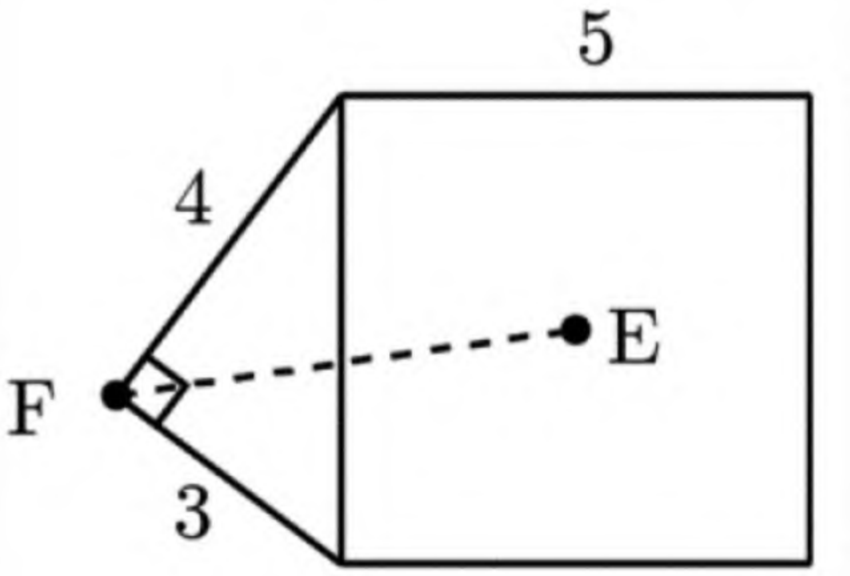
با توجه به آنچه گفتیم بسیاری از جامدات در طبیعت شبکه‌گون هستند با تقارن‌های بلوری. جالب اینجا است که ترکیباتی در طبیعت وجود دارند که در عوض شبه‌بلور هستند و از الگوهای تقارنی ظریفی برخوردارند! جایزهٔ نوبل شیمی در سال ۲۰۱۱ به دن شکتمن(۸۳) برای کشف شبه‌بلورها در جهان طبیعی اعطاء شد.(۸۴)



شکل ۱۸. بلورهایی با تقارن‌های شبه‌بلورین(۸۵)

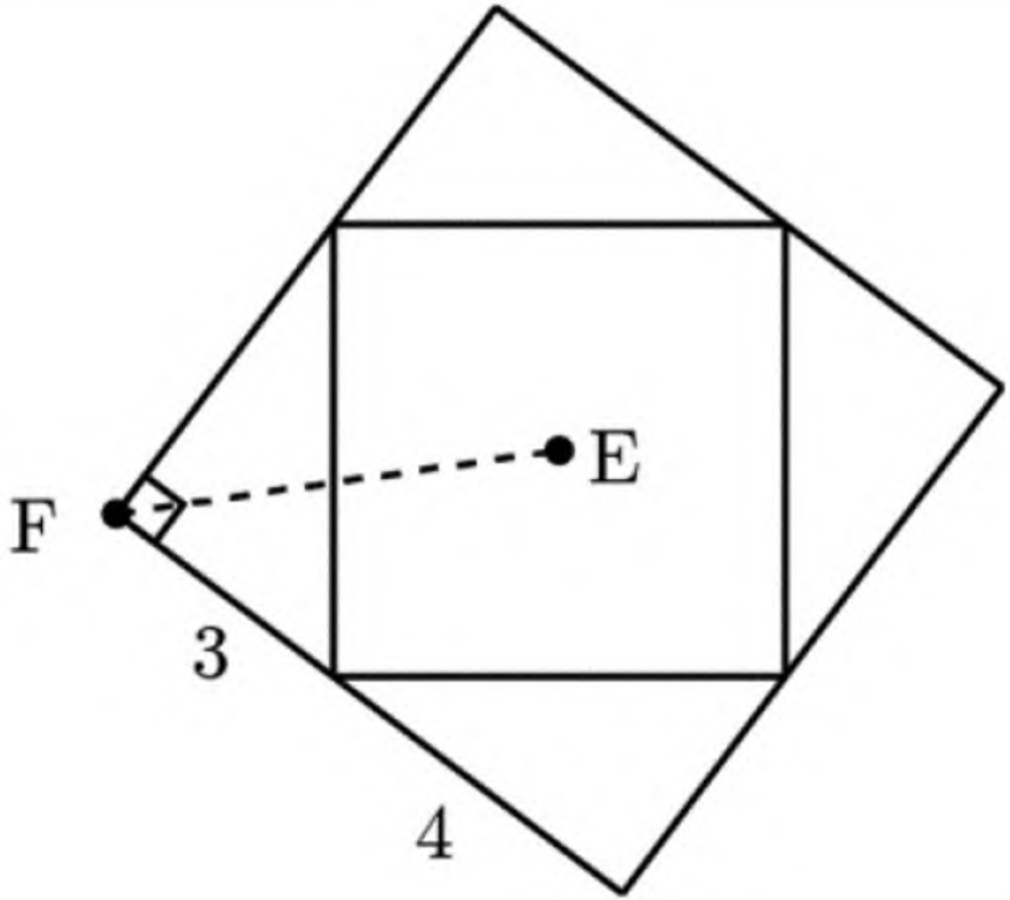
معما

در شکل زیر اندازۀ EFچقدر است (در اینجا E مرکز مربع است)؟



حل

کلید مسأله اتساع تصویر به شکلی متقارن است.


E
F
3
4

اکنون می‌بینیمEF که نصف قطر مربع به ضلع ۷ است. پس

$$EF = 7/\sqrt{2}$$

که از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید. اما می‌شود در جهت دیگر هم پیش برویم، چون متقارن‌سازی بالا یکی از ساده‌ترین راه‌ها برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس، است. اگر طول اضلاع این مثلث‌های قائم‌الزاویه aوb (و وترc) باشد، مساحت مربع بزرگ‌تر (a+b) است که خود از ۴ مثلث هریک به مساحت

$$\frac{ab}{2}$$

و یک مربع به مساحت تشکیل شده است. این نتیجه می‌دهد که

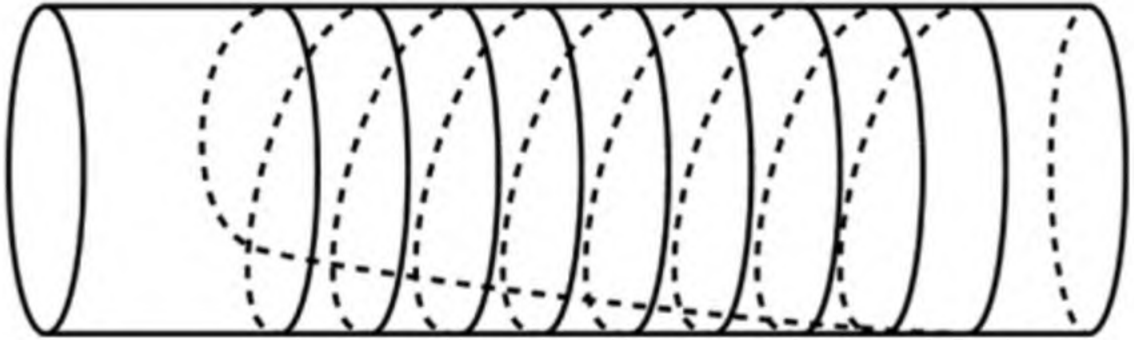
$$(a+b)^2 - 4\left(\frac{ab}{2}\right) = a^2 + b^2 = c^2$$

که مشهورترین و بالمناقشه می‌توان گفت مهم‌ترین قضیه در تاریخ هندسه است.

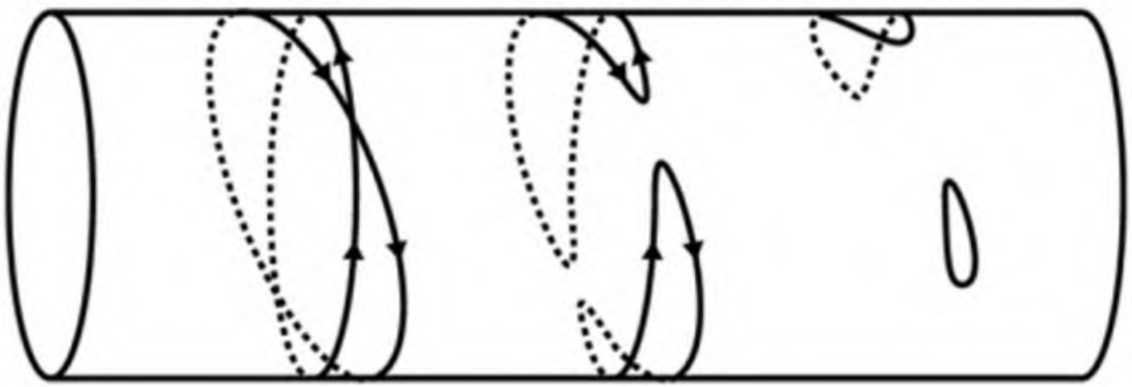
ریسمان‌ها و بقاءِ بار

بار الکترون در واحدی که بار بنیادی الکتریکی شناخته می‌شود،1 -است. در همین واحدها بار پروتون1+ است. بار الکتریکی دو خاصیت اساسی دارد: همهٔ بارهای الکتریکی به صورت مضرب صحیحی از این واحد ظاهر می‌شوند و بار الکتریکی پایسته است. چه توضیحی برای هردو خاصیت ــ گسسته بودن بار الکتریکی در طبیعت، و قانون بقاء آن ــ می‌تواند باشد؟

در نظریهٔ ریسمان، که ذرّات با اشیای گستردهٔ یک‌بعدی به نام ریسمان جایگزین می‌شوند، اغلب وضعیت‌هایی هندسی، مانند وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم: حلقه‌ای (از ریسمان) بر یک استوانهٔ نامتناهی (شکل ۱۹)، که محیط استوانه به‌عنوان بُعدی اضافی دیده می‌شود، پیچیده شده است. (نظریهٔ ریسمان از بیش از سه بعد فضایی برخوردار است و ابعاد اضافه را بسیار کوچک می‌انگاریم، که در مبحث دوگانی‌ها به آن خواهیم پرداخت). چنین حلقه‌ای عدد پیچش(۸۶) مشخصه‌ای دارد، که نمایانگر تعداد دفعاتی است که به‌دور استوانه پیچیده است.



الف. جمع تعدادی از ریسمان‌ها: ۹=۱+ ۱ +۱+ ۱+ ۱ +۱+۱ +۱ +۱



ب. نابودی دو ریسمان:۰= (۱-)+۱

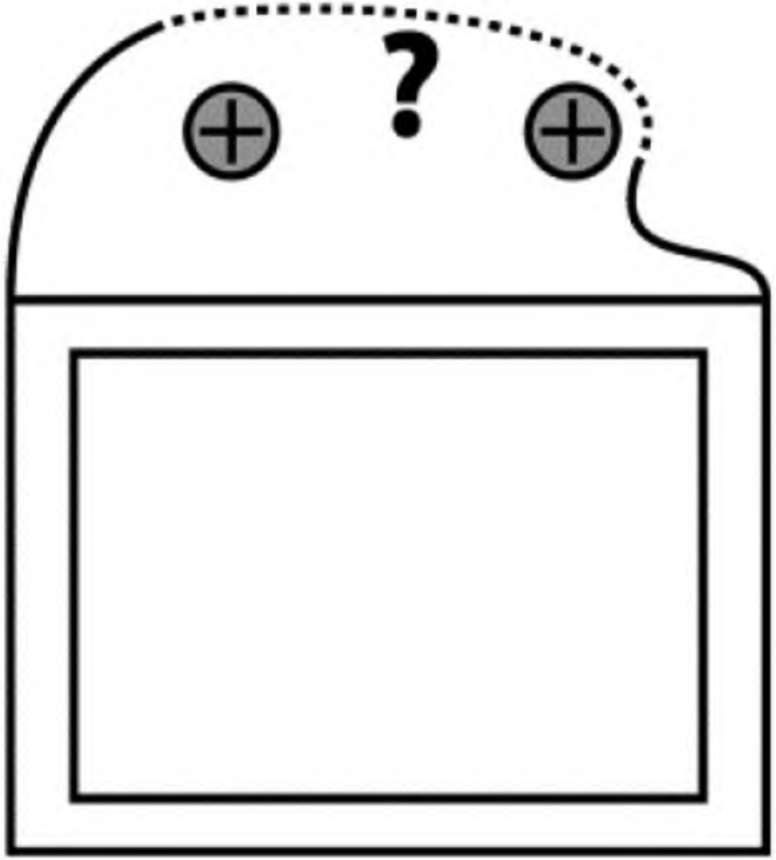
شکل ۱۹. ذرّات باردار به‌عنوان ریسمان‌های پیچشی

این توضیحی ممکن برای گسستگی بار الکتریکی عرضه می‌کند. اگر بار به‌عنوان عدد پیچش ریسمان به دور یک دایره (یا استوانه) تعبیر شود، آنگاه باید به صورت مضارب گسستۀ یک یکای بنیادی(۸۷) جلوه کند. ولی بقاءِ بار چه می‌شود؟ برهمکنش دو ریسمان از طریق پیوستن

تسلسلی(۸۸) است، بدین معنی که زمانی که دو ریسمان جدا از هم یکدیگر را لمس می‌کنند، دوباره به یکدیگر متصل خواهند شد. جمع بارها که با تسلسل پیچش ریسمان‌ها نشان داده می‌شود می‌تواند در برخی وضعیت‌ها ظریف‌تر باشد، که موضوع معمای بعدی است.

معما

تصور کنید قاب عکسی دارید که با یک ریسمان آویزان است. به دیوار دو میخ زده شده‌اند. چگونه نخ را دور میخ‌ها بپیچید (شکل ۲۰) که عکس نیفتد ولی به‌محض اینکه هر یک از میخ‌ها را در بیاورید عکس بیفتد؟ (به‌عنوان یک تعمیم، حالتی را در نظر بگیریم که که قاب N=۱۰۰ با میخ آویزان باشد، ولی باز به‌محض برداشتن هر یک از میخ‌ها، قاب بیفتد؟)



شکل ۲۰. قاب آویزان از یک سیم با دو میخ بر دیوار

حل

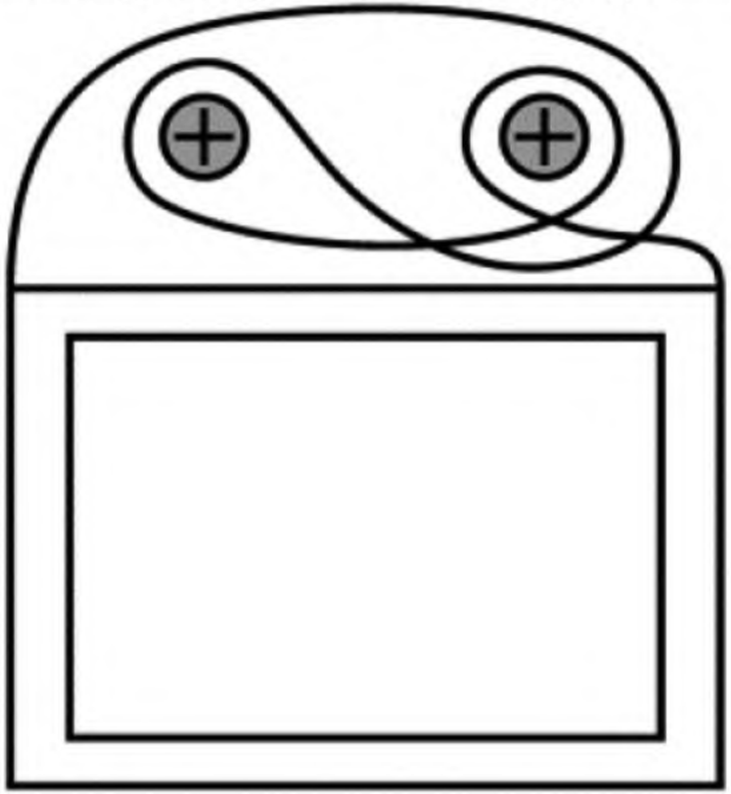
در مثال قبلی‌مان، شامل پیچش یک ریسمان، قانون بقائی داشتیم که شامل یک عمل جمع بود. این عمل، مانند خودِ جمع، جابه‌جایی است و چیزی را به نام «گروه آبلی»(۸۹) تشکیل می‌دهد. اما در مورد ریسمان‌ها، ریسمان‌هایی که گرد دو میخ یا دو مرکز مختلف، می‌پیچند ترتیب مهم است. به بیانی دیگر، پیچش ریسمان‌ها به دور مرکزهای مختلف به گروهی «نا آبلی»(۹۰) (یعنی ناجابه‌جایی$hg\neq gh$) منتج می‌گردد. ولی مفهوم قانون بقاء هنوز پای برجاست، هرچند از تجمیع صرف اعداد پیچش جداگانه بغرنج‌تر است... برای حل این معما از این ویژگی ناآبلی بهره می‌بریم.

ایدهٔ اصلی این است: اگر میخی داریم و ریسمانی را ساعتگرد به‌دور آن می‌پیچیم، آن را می‌خوانیم، واگر آن را پاد ساعتگرد بپیچیم آن را نام می‌دهیم.

حاصلضرب αوα برابر ۱ است، که به معنای نبود پیچش خالص گرد میخ است اگر متوالیاً ریسمان را ساعتگردβ و پادساعتگردβ بپیچیم. پس ریسمان نپیچیده است. همین کار را برای میخ دوم انجام می‌دهیم و پیچش ساعتگرد را و پادساعتگرد را می‌خوانیم. اکنون ناجابه‌جایی وارد صحنه می‌شود اگر، مثلاً، ریسمان را دور میخ اول و سپس میخ دوم بپیچید و بعد از دور میخ اول و پس از آن از دور میخ دوم باز کنید (شکل ۲۱). بر خلاف مورد پیش، حالا دیگر عکس نمی‌افتد زیرا ترتیب عملیات نقش دارد.(۹۱) برخی از همین ایده‌ها را می‌توان به زبان ریاضی بیان کرد: عملی را که الآن بحث کردیم به شکل زیر می‌شود نوشت،

$$[\alpha,\beta]=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

این، عنصری نابدیهی به حساب می‌آید، زیرا گروه ناآبلی است. نابدیهی بودن به این معنا است که اگر ریسمان را بر طبق این نسخه بپیچیم، نخواهد افتاد. برداشتن هر یک از دو میخ معادل این است کهα یاβرا برابر ۱ قرار دهیم، که در این صورت حاصلضرب بدیهی می‌گردد و قاب می‌افتد.



شکل ۲۱. راه‌حل برای آویزان کردن قاب

شکست خودبه‌خود تقارن

تا اینجا دربارهٔ تقارن و کاربردهای مهمش گفتگو کرده‌ایم. موضوع بعدی که به آن می‌پردازیم شکست خودبه‌خود تقارن است. دراین مقوله، کاربرد تقارن به نتایجی به‌غایت نامنتظر می‌انجامد. بیایید از آنجا آغاز کنیم که بگوییم شکست خودبه‌خود تقارن چه نیست. به‌عنوان مثال، می‌توانید فرض کنید که شکست تقارنی بین بالا و پایین وجود دارد. به‌خاطر وجود میدان گرانش زمین، از دید فیزیکی تمام جهت‌ها آن‌طور که در وضعیتی کاملاً متقارن یکسان و غیرقابل تمیز می‌بودند، نیستند. اما باز هم این مثالی از شکست خودبه‌خود تقارن نیست زیرا نتیجهٔ میدان گرانشیِ یادشده است ــ یعنی یک وضعیت ثابت محیطی، و نه یک تغییر ناگهانی طبیعی که همه چیز را عوض می‌کند.

شکست خودبه‌خود تقارن، که در فصل بعد به آن می‌پردازیم امری نسبتاً متفاوت است. به‌علاوه، شکست خودبه‌خود تقارن در فیزیک پدیده‌ای اساسی است، توضیحی است بر اینکه ما چرا هستیم و چرا جرم هست. اگر جرم نمی‌بود، ما با سرعت نور به پیش می‌تاختیم!

۳. شکست تقارن

در بخش پیشین، توان تقارن‌ها را در حل معماها در مطالعهٔ فیزیک و در دنیا و عالم پیرامونمان روشن کردیم. دیدیم که تقارن‌ها در فیزیک معادل قوانین بقاء هستند و همان‌طور که ممکن است توجه کرده باشید قوانین بقاء می‌توانند بسیار مفید باشند. همان‌گونه که در معمای ورق دیدیم یکی از کاربردهای اساسی تقارن آن است که اگر جمع کمیت‌هایی درست از آب در نیاید می‌فهمیم چیزی را از قلم انداخته‌ایم، و با احصای آنچه هست و آنچه نیست اطلاعاتی در مورد شیء گم‌شده به‌دست می‌آوریم. در این بخش مفهومی مخالف را به بحث می‌گذاریم: وضعیت‌هایی که در آن تقارن‌ها شکسته‌اند. و محتملاً شگفت‌زده خواهید شد که دریابید در برخی موارد این تقارن‌های شکسته می‌توانند در طبیعت جالب‌تر و مؤثرتر از تقارن‌های ناشکسته باشند.

یک نمونه از نقض تقارن مثال بین مادّه و پادمادّه است. علی‌الاصول مِهبانگ(۹۲) می‌بایست به یک اندازه از مادّه و پادمادّه درست کرده باشد. اگر آن وضعیت استمرار می‌یافت، ذرّات مادّه و پادمادّه بالاخره به هم می‌رسیدند و یکدیگر را در فوران‌های انرژی خالص نابود می‌کردند. اما، به قسمی، تقارن بین مادّه و پادمادّه به اندازهٔ اندکی، حدود یک در میلیارد مادّه بیش از پادمادّه شکسته شد، و پس از نابودی پسماندی از مادّه به جا گذاشت، که وجود خود را مدیون آن هستیم!

مثال دیگری، که چندان برای حضور ما در کیهان حیاتی نیست، مربوط به مدادی است که در تعادل کامل روی نوکش استوار است. این یک وضعیت ناپایدار است، زیرا بالاخره مداد خواهد افتاد. اما زمانی که مداد قائم است، در وضعیت متقارن قرار دارد. زیرا می‌تواند به هر سویی بیفتد و هیچ جهتی مرجّح یا از پیش تعیین‌شده نیست. وقتی بالاخره مداد می‌افتد، تقارن ــ که تا زمانی که دوام آورد زیباست ــ خودبه‌خود می‌شکند. در حالی که لحظه‌ای پیش از سقوط در هر جهتی از صفر تا ۳۶۰ درجه می‌توانست سقوط کند، حالا فقط یک جهت را از بقیه جدا کرده است.

و اکنون مثالی ریاضی‌تر: فرض کنید تابعی حقیقی و هموار از یک متغیرx داریم ((f(x)و به‌علاوه فرض کنید که تابعی زوج ب

اشد. به کلامی دیگر، تابع از تقارن انعکاسی بهره‌مند است: $f(x) = f(-x)$. تکلیف اول ما یافتن نقاط بحرانی تابع است، یعنی نقاطی که.

$$\frac{df}{dx} = 0$$

با استفاده از تقارن بلافاصله می‌توانیم یکی از جواب‌ها را بیابیم:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x} = \left.\frac{df(-x)}{dx}\right|_{-x} = -\left.\frac{df}{dx}\right|_{-x}$$

پس در $x=0$، داریم.

$$\frac{df}{dx}|_0 = -\frac{df}{dx}|_0$$

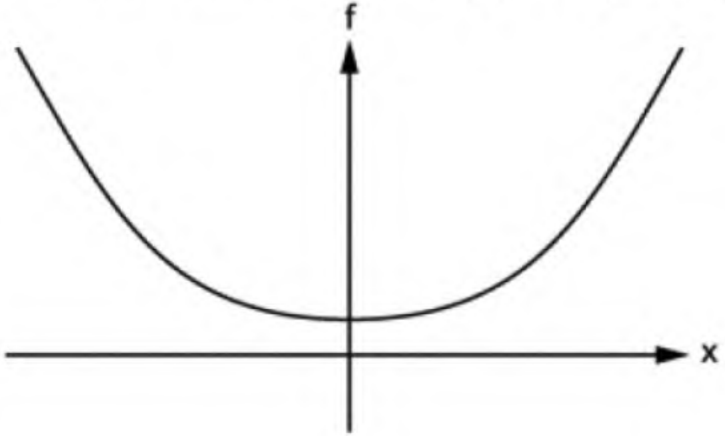
تنها راه برقراری آن این است که.

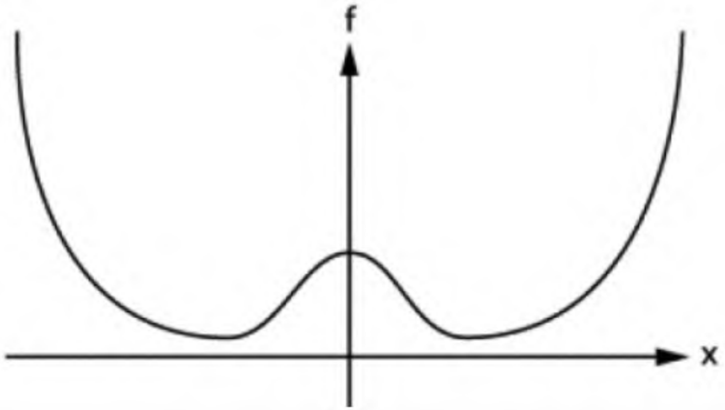
$$\frac{df}{dx}|_0 = 0$$

فرض کنید به جای این سؤال می‌خواستیم کمینه‌ای موضعی از $f(x)$را (با فرض یکتا بودن آن) بیابیم. حدس بی‌درنگ ما بر اساس تقارن $x=0$ است. اما لزوماً این‌چنین نیست: یکی از دو وضعیت که در شکل ۲۲ نشان داده شده است امکان‌پذیر است، و بسته به اینکه کدام باشد کمینهٔ موضعی می‌تواند در $x=0$ باشد یا نباشد.

اگر کمینهٔ موضعی در $x=0$ نباشد، می‌گوییم که «تقارن خودبه‌خود شکسته» شده است. به کلامی دیگر، تقارن ممکن است ما را در

فکرمان در مورد مکان کمینهٔ واقعی منحرف کند. در وضعیتی که تقارن شکسته شده است، حتماً باید حداقل دو کمینه وجود داشته باشد.

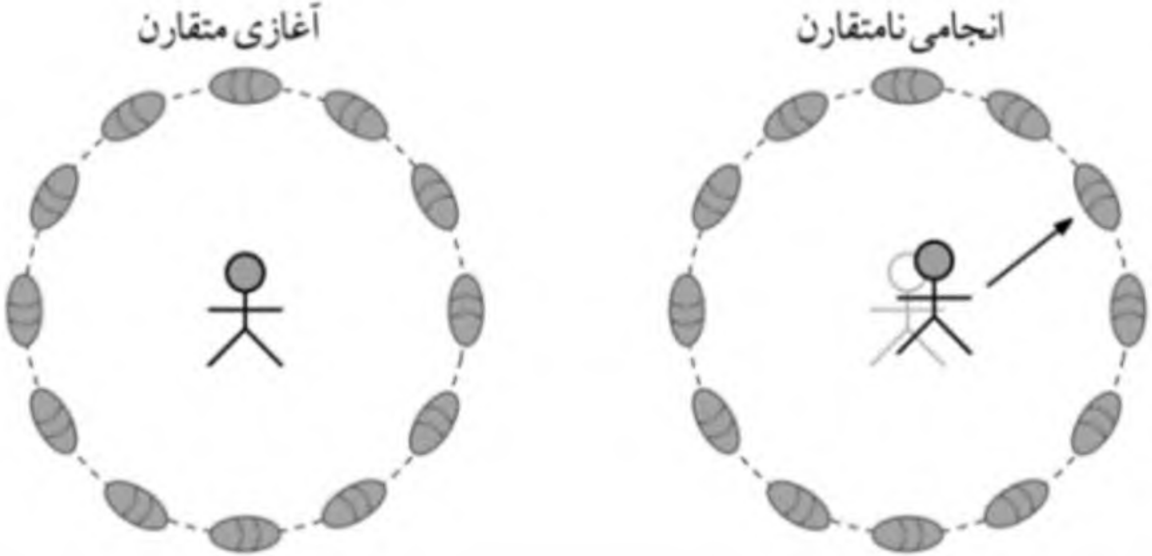




شکل ۲۲. کمینهٔ یک تابع زوج می‌تواند تقارن انعکاسی را حفظ کند (در تصویر بالاتر) یا (مانند تصویر پایینی) بشکند.

حرکت زمین و شکست تقارن

کاربرد مفهوم تقارن برای توضیح پدیده‌های فیزیکی به فیلسوفان یونان باستان، و شاید هم پیشتر از آن، بازمی‌گردد. هم‌چنان که در فصل ۱ گفتیم، یونانیان فهمیده بودند که زمین کره است. به‌علاوه دریافته بودند که به گرد محورش هم می‌چرخد زیرا این‌طور به نظر می‌آید که تمام ستاره‌ها به هنگام شب، به دور ستارۀ شمالی (قطبی، جدی)(۹۳) در گردش‌اند، و فکر می‌کردند این نسبتاً نامحتمل است و در عوض فرض کردند زمین می‌چرخد و ستاره‌ها ثابت‌اند. همچنین (به نادرست) گمان می‌کردند که مرکز زمین ساکن است، زیرا فکر می‌کردند که اگر زمین حرکت می‌کرد مکان ستاره‌ها جابه‌جا می‌شد، بر خلاف آنچه هر شب می‌بینیم. این واقعیت که مرکز زمین به نظر ثابت می‌نمود آنها را می‌آزرد و به‌دنبال توضیحی برای آن بودند. آنها از برخورداری کره‌ها از تقارن دورانی آگاه بودند. دیدگاه آنها از سماوات، براساس ملاحظات تقارنی، زمین را در مرکز عالم جای می‌داد، بر این اساس می‌گفتند که چون زمین در مرکز عالم است، پس هیچ راستای مرجّحی برای حرکت وجود ندارد: استدلالشان این بود که اگر بناست زمین حرکت کند آنگاه تقارن دورانی را می‌شکند. برای حفظ تقارن دورانی، نتیجه می‌گرفتند که بهتر است زمین حرکت نکند. این خط استدلال به تصویری منجر می‌شد که در آن مرکز زمین در مرکز عالم تثبیت شده است.



شکل ۲۳. ارسطو نخستین مثال شکست خودبه‌خود تقارن را به دست داد: شخصی در مرکز یک دایره با قرص‌های نان که به طور یکنواخت در پیرامون آن توزیع شده‌اند.

ارسطو با این استدلال مخالفت کرد. او می‌گفت که اگر کسی (و همچنین حتی یک خر) در مرکز دایره‌ای ایستاده باشد و غذا به طور

یکنواخت در پیرامون آن توزیع شده باشد، شکل ۲۳، آنگاه بالاخره جهتی را برای حرکت انتخاب می‌کند و به دایره می‌رسد، وگرنه از گرسنگی می‌میرد!(۹۴) این حرکت و به‌ویژه انتخاب راستایی برای حرکت، الزاماً تقارن دایره‌ای را که زمانی برقرار بوده است، می‌شکند. اما در زندگی واقعی و در جهان فیزیکی، انتخاب‌هایی در وضعیت‌های متقارن باید انجام شود، که ممکن است به نتایج نامتقارن بینجامد. تقارن واقعاً امری شگفت‌آور است ــ منبعی برای زیبایی عظیم ــ و از بسیاری جهات جادو. اما آیا اصلی است که باید برتر از هر امر دیگری قرار گیرد ــ اصلی که می‌ارزد برایش از گرسنگی بمیریم؟ استدلال درخشان ارسطو این بود که تقارن‌ها به هر قیمتی حفظ نمی‌شوند. انتخاب‌های بهینه لزوماً همیشه متقارن نیستند و می‌توانند خودبه‌خود بشکنند!

شکست خودبه‌خود تقارن

اکنون می‌خواهیم در مفهوم شکست خودبه‌خود تقارن غور کنیم. دلیلی که آن را خودبه‌خود می‌خوانیم این است که نقطهٔ آغاز وضعیتی متقارن است، با وجود این، پاسخ مسأله به‌ناچار ما را به نتیجه‌ای نامتقارن می‌کشاند.

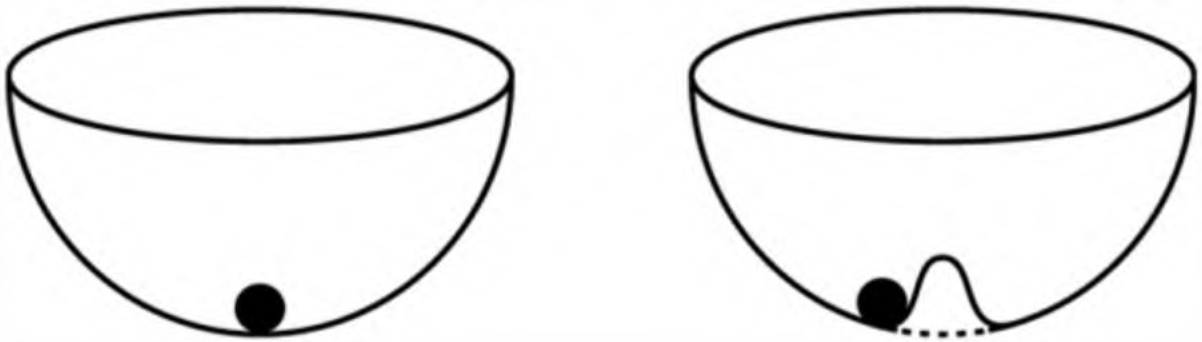
بیایید به مثال بالا بازگردیم، که ما را در مرکز یک دایره با غذایی (مثل قرص‌های نان) که به طور یکنواخت در پیرامون آن توزیع شده است قرار می‌دهد. البته می‌توان به عمد تقارن را با دست شکست، مثلاً با گذاشتن غذای بیشتر در یک سوی دایره نسبت به سوی دیگر. که در آن صورت واضح است که سوی مرجّح حرکت به سمت جایی است که غذا بیشتر جمع شده است. این مثالی از شکست خودبه‌خود تقارن نیست، زیرا نقطهٔ آغاز از اول نامتقارن بود.

در طبیعت مثال‌های زیاد دیگری برای شکست تقارن هست. تکامل ما را شکل داده است، همان‌گونه که محیط ما تکامل را شکل داده است. ما در سیاره‌ای زندگی می‌کنیم که بالا و پایین به‌خاطر گرانش، که متوجه به سویی مشخص، یعنی پایین است، متفاوت‌اند. «تقارن تبادلی بالا/ پایین» نداریم، به بیانی دیگر اینجا روی زمین چیزها پایین می‌افتند، بالا نمی‌افتند! با داشتن بی‌تقارنی بین بالا و پایین، اینکه پای ما اصلاً به سر ما شبیه نیست معنادار می‌شود.

از طرف دیگر اگر روی پای خود بر زمین مسطح ایستاده‌ایم، هر چیزی در صفحه تقارن دورانی دارد، با وجود این وقتی آناتومی انسان مطرح می‌شود، تکامل تقارن دورانی را شکسته است: بدن ما از تقارن دورانی افقی برخوردار نیست. مثلاً چشمانمان به جای اینکه در همه جهات باشد، در سمت خاصی است. طبیعت به نوعی پی برده است که اگر چشم‌ها در یک سمت بدن ما، آنچه «جلو» می‌نامیم باشند، کاراتر و با اتلاف کمتر انرژی و سایر منابع خواهد بود. در چارچوب مثال ارسطو، چشمان ما در جلو هستند تا بتوانیم به‌سوی غذا برویم! هرچند چشمان ما تقارن راست ـ چپ دارند، این در مورد همهٔ بدن ما صادق نیست. مثلاً، قلب انسان به دلیلی نامعلوم متمایل به سمت چپ قفسه صدری جای گرفته است. معده بیشتر به سمت چپ متمایل است، در حالی که کبد عمدتاً در سمت راست قرار دارد.

به نظر می‌آید که حتی در طبیعت، تقارن همیشه بهترین راه‌حل نیست. علاوه بر آن، در فیزیک امروزی در زمینه‌های مختلف شکست

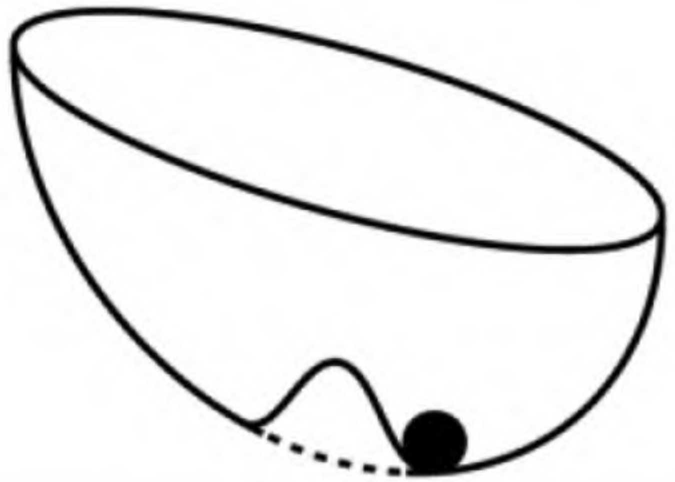
خودبه‌خود تقارن را می‌بینیم و در این بخش بیشتر به نقش مهمی که ایفا می‌کند پی می‌بریم.



شکل ۲۴. برای کاسه‌ای متقارن با قعری در مرکز، توپ در مرکز می‌آرمد. اگر قعر کاسه در مرکز نباشد دیگر این‌طور نیست.

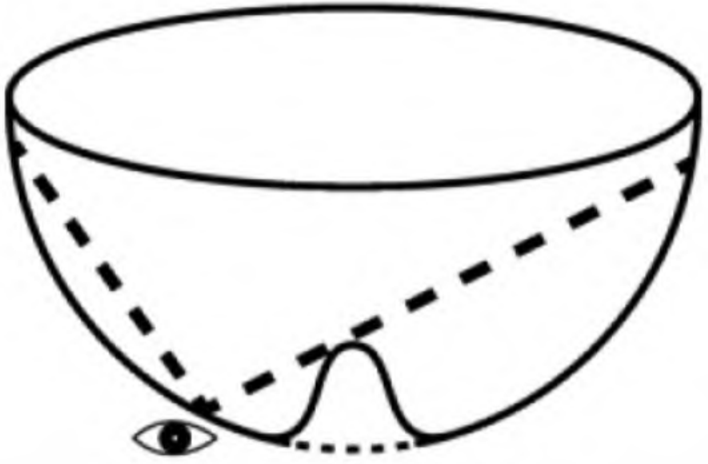
تصور کنید مانند شکل ۲۴ توپی در کاسهٔ متقارنی (همچون نیمهٔ پایین یک کره) داریم. این توپ در کجا می‌آرامد؟ می‌توان دید که باید در ته، در مرکز کاسه قرار بگیرد. وسوسه می‌شویم بگوییم که این به‌خاطر ملاحظات تقارنی است. اما فرض کنید که کاسه برآمدگی کوچکی در قعر خود دارد، ولی برآمدگی در مرکز قرار دارد به‌نحوی که کاسه هنوز متقارن است. پس حالا خانواده‌ای از مکان‌هایی داریم که توپ می‌تواند به طور طبیعی در آنها بیارامد و هیچ‌یک‌شان در مرکز نیستند. در واقع تقارن ملزم می‌دارد که حلقه‌ای از امکانات داشته

باشیم. این واقعیتی را نشان می‌دهد که به‌طور عام، شکست تقارن پاسخ‌های بسیاری می‌دهد که قبلاً امکان داشت یکتا می‌بود. توجه کنید که تغییر کوچکی در شرایط، شکل ۲۵ (مانند کمی خم کردن کاسه) تقارن را از بین می‌برد و پاسخ را به میزان قابل توجهی جابه‌جا می‌کند. همچنین دقت کنید که جواب‌های نامتقارن تثبیت نشده‌اند، بدین معنا که «لرزش» کوچکی آنها را جابه‌جا می‌کند. به بیانی دیگر، اگر با کمی خم کردن کاسه تقارن را می‌شکستیم، توپ جایش را شدیداً عوض می‌کرد. پس این وضعیتی ناپایدار است، که معمولاً هنگام شکست تقارن رخ می‌دهد.



شکل ۲۵. اگر تقارن عمداً با خم کردن جزئی کاسه شکسته شود، نقطهٔ مرجّحی در قعر برمی‌آید که توپ در آن می‌آرمد.

تشخیص وجود تقارن به دیدگاه شما بستگی دارد. خری در کنارهٔ یک دایره، نزدیک به جایی که غذا هست، ممکن است شکل متقارن را تشخیص ندهد، بر خلاف خری در مرکز دایره. برای نقطهٔ منظر یک توپ در ته یک کاسه با برآمدگی متقارن (شکل ۲۶) همین صادق است. اگر در نقطه‌ای نامتقارن قرار گرفته باشیم، ممکن است فکرمان منحرف شود و گمان کنیم تقارنی وجود ندارد.

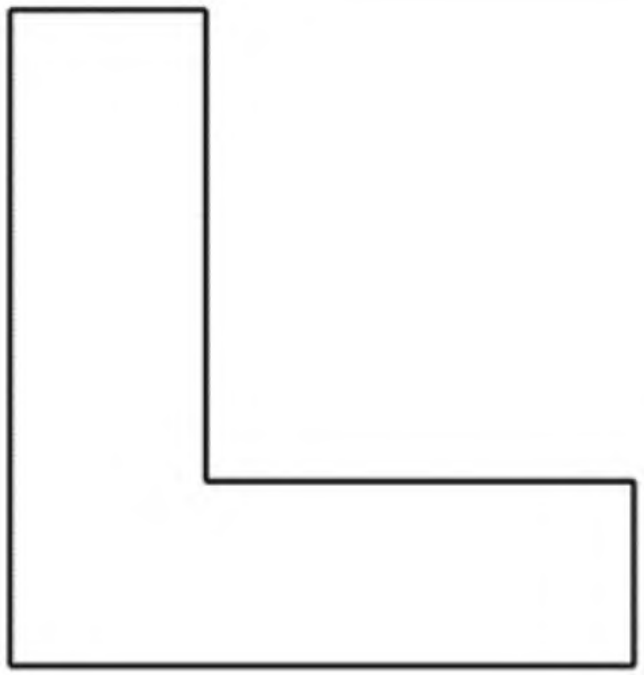


شکل ۲۶. از یک نقطهٔ منظر کمینه در نقطه‌ای نامتقارن درک وجود تقارن دورانی کاسه دشوار است.

برعکس آن هم می‌تواند صادق باشد: بعضی وقت‌ها می‌توانیم تعمداً تقارن را با دست بشکنیم، اما تقارن می‌تواند آن‌قدر قوی باشد که ما را به سوی پاسخ هدایت کند. مثلاً فرض کنید می‌خواهید مرکز جرم یک مستطیل را پیدا کنید. می‌توانید از حسابان برای یافتن آن استفاده کنید، اما با توسل به تقارن می‌توان استدلال کرد که مرکز جرم در مرکز مستطیل است. بعد می‌توانید بازگردید و این را با دقت ثابت کنید. در مسائل فیزیکی اغلب مفید است که به سراغ مختصات مرکز جرم بروید، زیرا تقارن ذاتی ویژه‌ای دارند. اما چه می‌شود اگر شکل متقارن نباشد؟ آیا هنوز می‌توان به‌نحوی از تقارن برای پاسخ به آن سؤال بهره برد؟

معما

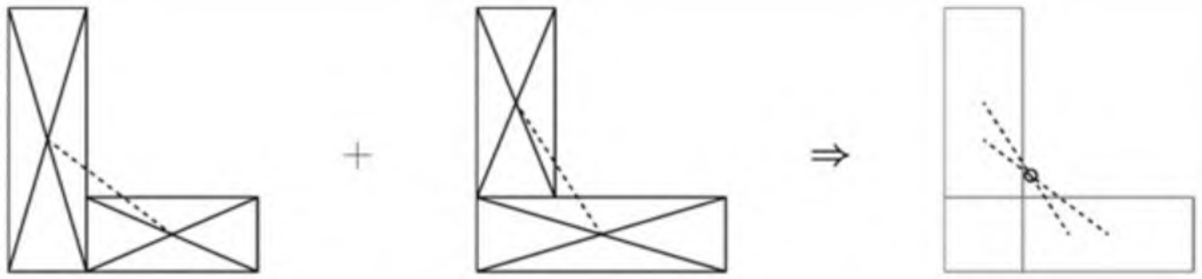
مرکز جرم شکل ۲۷ (در حالی که برای شیء با شکل L هیچ تقارنی مفروض نیست) کجاست؟



شکل ۲۷. آیا می‌توانید مرکز جرم این شیء نامتقارن به شکل L را بیابید؟

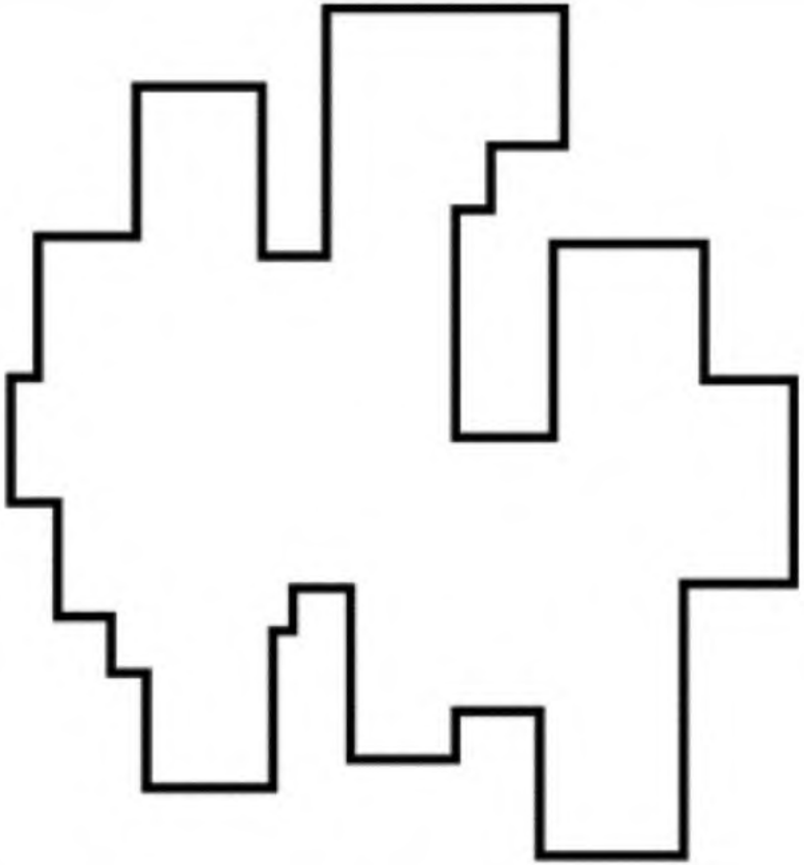
حل

مرکز جرم مانند شکل ۲۸ روی هریک از خط‌های نقطه‌چین است (خط‌هایی که مراکز جرم مستطیل‌های حاصل از تقسیم شکل به دو صورت مختلف را به یکدیگر وصل می‌کنند). لذا باید در محل تقاطعشان باشد. درسی که در اینجا می‌آموزیم این است که اصل تقارن هنوز قدرتمند است، حتی اگر وضعیت اصلاً متقارن به نظر نیاید.



شکل ۲۸. مرکز شیء L مانند را می‌توان با تقسیم آن به دو جفت متفاوت از مستطیل‌ها یافت.

با این روش، می‌توانیم مرکز جرم هر شکل شبه‌مستطیلی، حتی شکل پیچیده‌ای مثل شکل زیر را بدون محاسبهٔ هیچ طولی به‌دست آوریم.

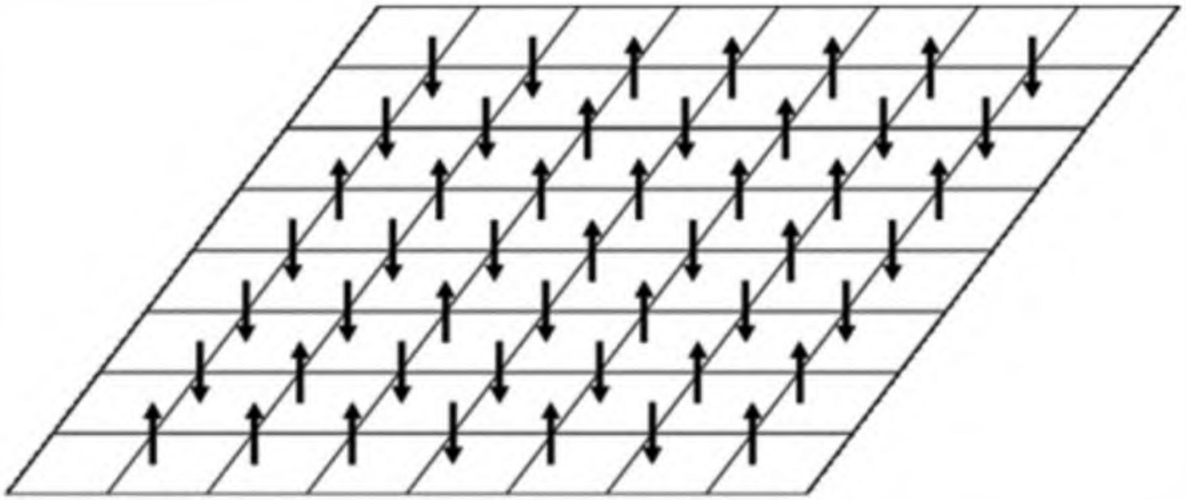


شکست خودبه‌خود تقارن و آهنرباها

تصور کنید دستگاهی از ذرّات داریم که درجه‌ای آزادی‌ای به نام اسپین دارند که می‌تواند بالا یا پایین باشد. اگر با شیمی آشنا باشید، می‌توانید به آن به‌عنوان اسپین الکترون فکر کنید. بحثمان را در فصل یک در مورد اسپین الکترون و توضیح دیراک را راجع به آن به خاطر بیاورید. به‌علاوه فرض کنید که وقتی دو ذرّه به هم نزدیک می‌شوند «تمایل دارند» یک اسپین داشته باشند (هردو بالا یا هردو پایین)، به این معنا که این حالت‌ها روی‌هم‌رفته انرژی کمتری دارند. (به‌عنوان مثال، مواد فرّومغناطیس، زمانی که اسپین الکترون‌هایشان هم‌جهت باشند مانند آهنربا رفتار می‌کنند. اما اگر اسپین الکترون‌ها به شکل کاتوره‌ای جهت‌گیری کرده باشند، که اثرات مغناطیسی خنثی می‌شود، خاصیت آهنربایی خود را از دست می‌دهند). پیکربندی هم‌اسپین الکترون‌ها انرژی

$$E(\upharpoonleft\upharpoonleft) < E(\upharpoonleft\downharpoonleft)$$

دارد که اولی انرژی پیکربندی اسپین‌های همسان و دیگری انرژی پیکربندی ناهمسان اسپین‌ها است. شبکه‌ای پرشده از چنین ذرّات را بر یک صفحه تجسم کنید (شکل ۲۹). مدلی را که دراینجا مورد نظر است مدل ایزینگ(۹۵) می‌نامیم.



شکل ۲۹. مدل ایزینگ از اسپین‌های بالا و پایین تشکیل شده است، که اسپین‌های مجاور ترجیح می‌دهند همسو باشند، تا انرژی کل سیستم را پایین بیاورند.

برای هر جفت همسایه، مقداری انرژی منظور می‌کنیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم تا انرژی کل سیستم را به‌دست بیاوریم. پیکربندی واضحی برای کمینه‌انرژی کل سیستم وجود دارد که در آن همهٔ اسپین‌ها در یک راستا هستند. اگر به حال خود رها شود، و بدون هیچ اثر خارجی، شبکه به حالت کمینه‌انرژی خود، همانند مثال توپ در کاسه، دست می‌یابد. یعنی، تمام اسپین‌ها یا در جهت بالا خواهند بود یا پایین.

اما فرض کنید شبکه در یک منبع گرمایی قرار دارد که ذرّات را در دمای داده‌شده‌ای نگه می‌دارد،که اجازه می‌دهد پیکربندی اسپین‌ها در کمینه‌انرژی نباشد. اگر بخواهیم دقیق باشیم، فرض می‌کنیم که احتمال اینکه سیستم داری E انرژی باشد،p(E) است، که بنا بر قانون بولتزمن(۹۶)

$$p(E) \propto e^{-E/kT}$$

(در اینجا «ثابت بولتزمن» است). پیکربندی با کمترین انرژی، برای هر دمای مثبت، بیشترین احتمال را دارد و هر حالتی با میزانی از احتمال امکان‌پذیر است.

بیایید اسپین‌های بالا را با ۱+ و اسپین‌های پایین را با ۱- بشماریم. فرض کنید متوسط اسپین‌ها را نشان دهد، یعنی جمع تمام اسپین‌ها تقسیم بر تعداد کل ذرّات. s چقدر است؟

باید صفر باشد! در ازای هر پیکربندی اسپین‌ها پیکربندی معکوس آن هم (که از معکوس کردن تمام اسپین‌ها به دست می‌آید) همان انرژی را دارد و لذا همان احتمال وقوع را. این یعنی اینکه معادل است و به هر بیانی برابر صفر است.

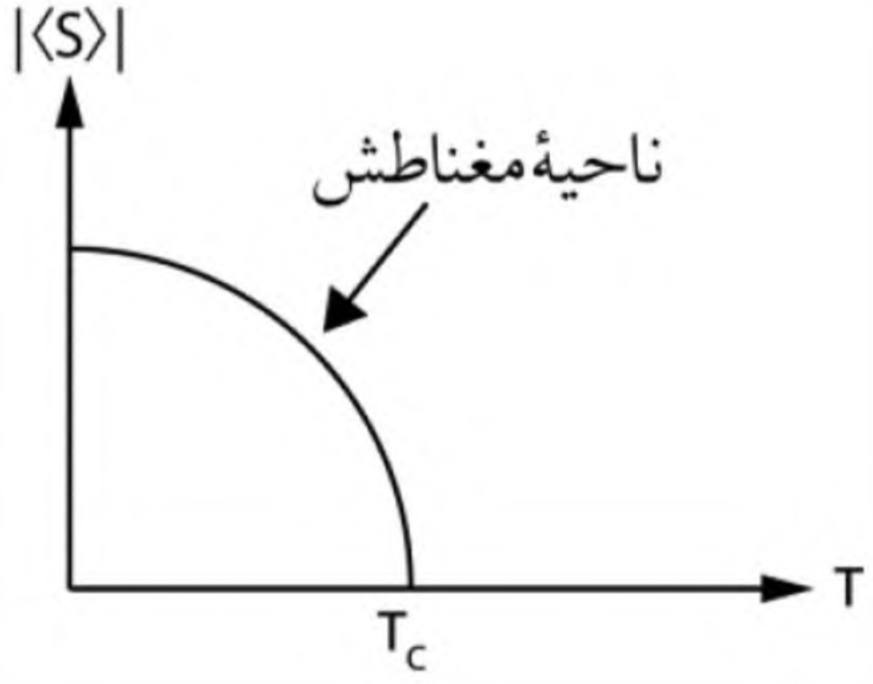
پس می‌بینیم که تقارن

$$\mathbb{Z}/2$$

دستگاه به تسری می‌یابد و وادارش می‌کند که صفر باشد. آیا این با مدل ما از آهنرباها سازگار است؟ همان‌طور که قبلاً گفتیم مغناطش ناشی از هم‌راستا شدن اسپین‌ها است و قدرت آن متناسب با است. اما کمی پیش استدلال کردیم که میانگین اسپین باید صفر باشد. پس چرا آهنربا داریم؟ حالا توضیح می‌دهیم که این چطور رخ می‌دهد.

در دمای به‌شدت پایین $T \to 0$ سیستم در پایین‌ترین انرژی مطلقش می‌آرامد. این زمانی رخ می‌دهد که تمام اسپین‌ها یا به سمت بالا هستند یا به سمت پایین. پس دو حالت پایه داریم. سیستم در کدام‌یک می‌آرامد؟ این بسته به این است که از کجا آغاز کنید. مثلاً اگر میدان مغناطیسی کوچکی اعمال نمایید که اسپین‌ها را در یک راستا قرار دهد آنگاه یکی از این دو پیکربندی با کمترین انرژی را به‌دست می‌آورید. به‌علاوه، حتی بعد از خاموش کردن میدان مغناطیسی در همان حالت باقی خواهید ماند. دلیلش این است که برای رفتن از یکی از این دو حالت به دیگری باید همهٔ اسپین‌ها را معکوس کنید و هرچند که حالت نهایی همان انرژی را خواهد داشت برای رسیدن به آن باید از سد انرژی بزرگی گذر کنید. به این طریق، سرانجام به دمایی به اندازهٔ کافی پایین همراه با فازی می‌رسیم که یک راستای اسپین به طور خودکار برگزیده می‌شود. به بیانی دیگر، تقارن $S \to -S$ مسأله خودبه‌خود شکسته شده است. شکست این تقارن و این واقعیت که اسپین‌ها در راستایی داده شده، قرار می‌گیرند چیزی است که به فرّومغناطیس می‌انجامد. به عبارت دیگر نحوهٔ کار آهنربا بر شکست خودبه‌خود تقارن بنا شده است!

آنچه در عمل مشاهده می‌کنیم این است که در دماهای پایین مغناطشِ خودبه‌خود داریم و در دماهای بالا هیچ مغناطشی نیست، و جایی بین این دو دمای حدی، نقطه‌ای بحرانی وجود دارد که آهنربا در آن دچار تغییر فازی بین دو حالت می‌شود (شکل ۳۰).



شکل ۳۰. اندازهٔ میانگین اسپین در زیر دمای بحرانی ناصفر است.

ممکن است این موضوع مشابه مثال قبلی توپ در کاسه، با برآمدگی در قعر و درست در مرکز آن را به ذهن متبادر کند. پیکربندی متقارنی که توپ در نوک برآمدگی قرار دارد، انرژی بیشتری دارد تا وضعیتی که توپ در ته کاسه، جایی که تقارن شکسته است قرار گرفته باشد. به همین‌سان، فرّومغناطیس در موادِ با دمای پایین‌تر، پس از شکستن تقارن رخ می‌دهد. معجزهٔ آهنربا را مرهون شکست خودبه‌خود تقارن هستیم!

معمای مربع

معما

چهار شهر در چهار گوشهٔ مربعی قرار دارند. فاصلهٔ بین شهرهای مجاور صد کیلومتر است. تکلیف شما یافتن سامانهٔ بزرگراهی است که همهٔ شهرها را با کمترین هزینه به هم متصل کند. هزینهٔ ساخت یک بزرگراه ۱۰۰هزار دلار در کیلومتر است، پس شما واقعاً باید طول کمینهٔ کل بزرگراه را پیدا کنید. دقت کنید که شما ملزم نیستید کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو شهر را داشته باشید. ترتیب اتصال شهرها از طریق سامانهٔ بزرگراهی تا آنجا که کمترین هزینهٔ کل را داشته باشد، نیز کاملاً به عهدهٔ خودتان است. فقط باید مطمئن باشید که می‌توان از هر شهر به شهر دیگر از طریق بزرگراه رفت. آیا چیز عجیبی در مورد پاسخی که می‌یابید وجود دارد؟(۹۷)

حل

۱. بدون مشکل زیادی، می‌توان نشان داد که شبکهٔ کمینه باید گرافی با خطوط راست باشد که شهرها در برخی از رئوس آن جای گرفته‌اند. در واقع از آنجایی که خطوط کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه‌اند، دلیل ندارد که جاده‌هایی را دنبال کنیم که خط راست نیستند.

۲. بعد، نشان می‌دهیم که اگر هر رأسی در گراف سه یال داشته باشد، زاویه‌های بین آنها باید ۱۲۰ درجه باشد. حال مثلثی نزدیک این رأس را در نظر بگیریم، که سه رأس مثلث بر سه یال منتهی به رأس و در فاصلهٔ یک واحد از رأس گراف باشد. در این صورت می‌توان طول بزرگراه را با پیدا کردن شبکهٔ راه حداقلی بین رئوس این مثلث (با جایگزین نمودن این قسمت گراف با این بزرگراه حداقلی)، کمینه کرد.

فرض کنید که گراف اولیه واقعاً کمینهٔ جمع فواصل از رئوس مثلث را می‌دهد. اینکه این رأس جمع طول‌ها را حداقل می‌کند، به چه معنا است؟ بدین معناست که اگر رأس را کمی جابه‌جا کنید، کل طول عوض نمی‌شود. فرض کنید

$$\vec{e_i}$$

نشانهٔ سه بردار یکه باشد که رأس (گراف) را به رئوس مثلث متصل می‌کند (شکل ۳۱). اگر رأس را به اندازهٔ کوچک دلخواهی

$$\vec{\delta}$$

جابه‌جا کنیم، سخت نیست که ببینیم وقتی

$$\vec{\delta} \to 0$$

تغییر کل طول برابر

$$(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})$$

است (تمرینی برای خواننده). این تغییر طول باید برای بزرگراه بهینه صفر باشد. پس جمع سه بردار یکه

$$\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3} = 0$$

زیرا رابطه باید برای هر

$$\vec{\delta}$$

صحیح باشد. این ایجاب می‌کند که زاویهٔ بین بردارهای یکه ۱۲۰ درجه باشد (این را با مربع کردن رابطهٔ

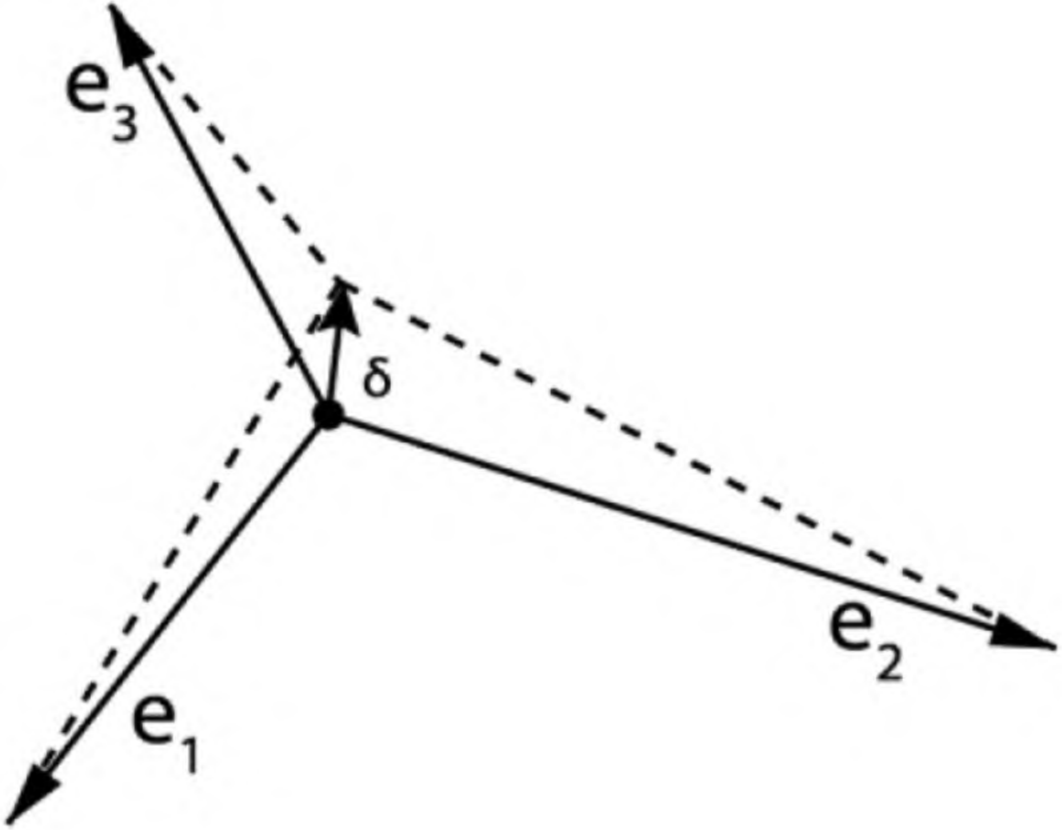
$$\vec{e_1} + \vec{e_2} = -\vec{e_3}$$

می‌توان دید که منجر

$$\vec{e_1} . \vec{e_2} = -\frac{1}{2}$$

به می‌شود).

چه می‌شود اگر یک رأس از درجهٔ ۴ باشد، یعنی ۴ یال به نقطه‌ای واحد ختم شوند؟ دو رأس مجاور و یک رأس مرکزی را انتخاب کنید. این مورد را می‌توان به‌عنوان حالتی خاص از استدلال قبلی تلقی کرد که یک نقطه آن‌قدر جابه‌جا شده که منطبق بر رأس مثلث گشته است. اما آن سان که دیدیم، می‌توان گراف را اگر زوایا ۱۲۰ درجه نباشند اصلاح کرد. اما نمی‌توانید ۴ زاویهٔ ۱۲۰ درجه در یک رأس داشته باشید! و به همین‌سان برای تعداد بیشتر اضلاع نیز امکان‌پذیر نیست.

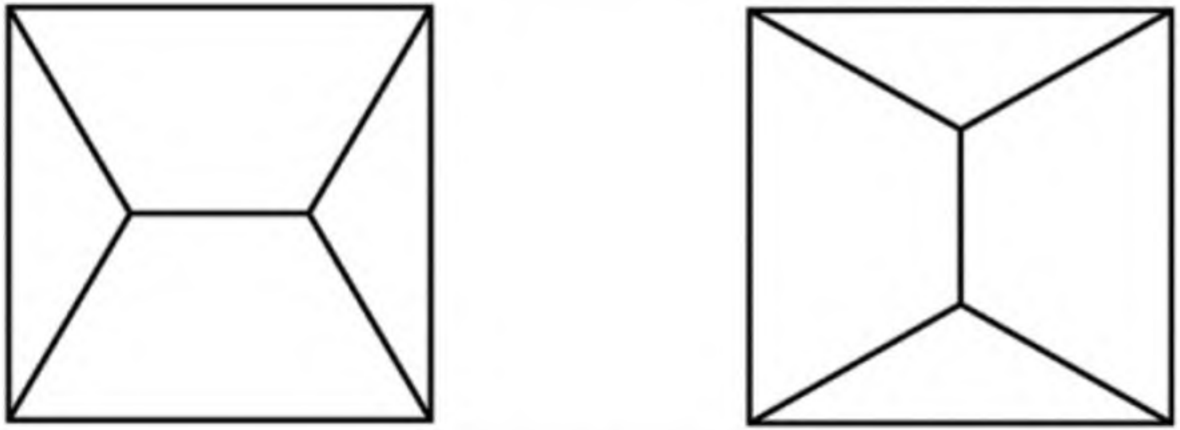

e3
δ
e2
e1

شکل ۳۱. برای بزرگراه بهینه، اگر هر اتصال را به اندازهٔ یک بردار کوچک

$$\vec{\delta}$$

جابه‌جا کنیم باید به هیچ تغییری در کل طول منجر نشود.

با استفاده از این افکار، می‌توان دید که تنها امکانات موجود مواردی است که در زیر رسم شده‌اند (شکل ۳۲).



شکل ۳۲. دو سامانهٔ بزرگراهی بهینه وجود دارد، که هیچ‌یکشان از تقارن کامل مربعی برخوردار نیستند.

دقت کنید که در اینجا شکست خودبه‌خود تقارن داریم، زیرا پاسخ‌هایی را که به‌دست می‌آوریم از تقارن دورانی ۹۰ درجه‌ای برخوردار نیستند (هرچند که از قسمتی از تقارن انعکاسی مربع برخوردارند). چون در اینجا تقارن مربعی به‌طور پاره‌ای شکسته شده است بیش از یک جواب داریم. می‌توانید هر یک از جواب‌ها را که می‌خواهید انتخاب کنید، و با تقارنی که شکسته است، آن را تغییر دهید و جواب جدیدی را به دست آورید.

مشابه فیزیکی این معما وضعیت حباب صابون است که مساحت را کمینه می‌سازد. یک چارچوب صلب را اگر در آب صابون داخل کنیم، حباب‌هایی در ۱۲۰ درجه تشکیل می‌شوند.

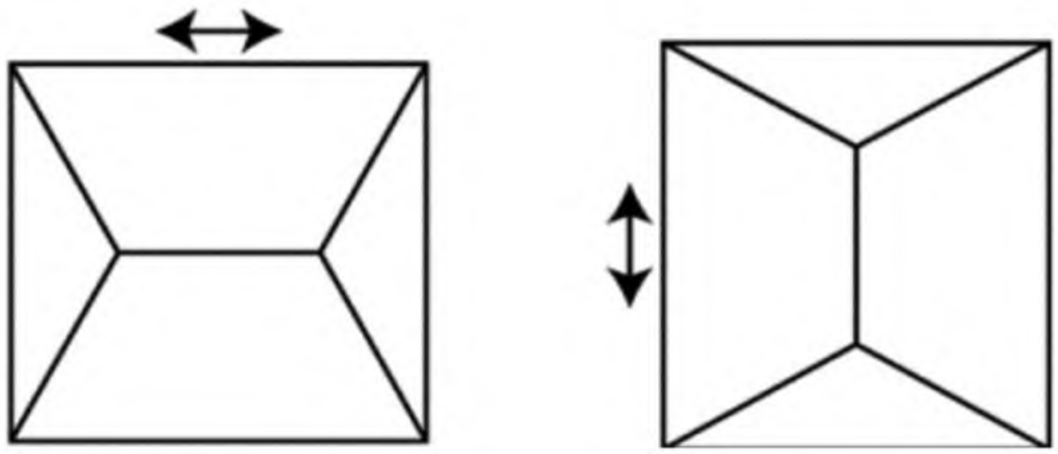
معمای بدیل

همان وضعیت معمای قبل را داریم به‌جز اینکه چهار شهر در چهار گوشهٔ یک مستطیل قرار دارند. پهنای مستطیل برابر با بلندی‌اش نیست. جواب(های) ما چه هستند؟ فرق این معما و معمای قبلی چیست؟

حل

تصور کنید که پهنای مستطیل خیلی از بلندی‌اش بیشتر باشد. حالا جواب خیلی متفاوت می‌نماید ـــ خطی مستقیم از چپ به راست که هر انتهایش دو شاخه می‌شود و به دو شهر وصل می‌شود. وقتی پهنا را تغییر دهیم تا تقریباً برابر بلندی شود، هنوز پاسخی یکتا داریم. در

لحظه‌ای که ابعاد مانند مربع شوند، مانند مسألهٔ قبلی شکست تقارن خواهیم داشت. و زمانی که پهنا را آن‌قدر عوض کنیم که خیلی کوچک‌تر از بلندی شود باز جوابی یکتا خواهیم داشت، اما با جهتی بر عکس.



به‌وضوح می‌بینیم که دو حل معمای قبلی از کجا می‌آیند. این نشان می‌دهد که معمای قبلی کیفیتی ناپایدار دارد و دو جواب وقتی با زیاد کردن اندازهٔ بلندی یا پهنا از شکل مربع به مستطیل می‌رویم جایشان را عوض می‌کنند.

شکست تقارن و بوزون هیگز(۹۸)

ذرّهٔ هیگز(۹۹) چیست و چه ربطی به شکست تقارن دارد؟

بحث خود را با چند معادلهٔ نسبتاً فنی، برای ذهن‌های ریاضی، آغاز می‌کنیم، و دیگران در صورت تمایل می‌توانند از این بخش بگذرند. آنان که در میان شما با لاپلاسی سه‌بعدی(۱۰۰) آشنا هستند، ممکن است این را هم بدانند که عملگر لاپلاسی چهاربعدی هم وجود دارد:

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

که در آن سرعت نور است. جواب‌های چنین معادله‌ای امواج‌اند. بیایید به موردی با یک متغیر مکانی بیندیشیم.

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi = 0$$

می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x})\phi = 0$$

در نتیجه، می‌توانیم بنویسیم

$$\phi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

، جمع یک موج راست‌رو و یک موج چپ‌رو که با سرعت نور حرکت می‌کنند.

این چه ربطی به ذرّهٔ هیگز دارد؟ در لحظات اولیهٔ عالم، در آغاز مهبانگ، همهٔ ذرّه‌ها عملاً بی‌جرم بودند و با سرعت نور حرکت می‌کردند. آنها را می‌توان به شکل امواجی که با سرعت نور حرکت می‌کنند نیز در نظر گرفت، که در معادله لاپلاسی چهاربعدی که در بالا بحث کردیم، صدق می‌کنند. اما، نظریه به ما می‌گوید همین‌طور که عالم در طی اولین کسر کوچکی از ثانیه سرد شد دچار تغییر فازی شد نه چندان متفاوت از تغییر فاز چگالش بخار به آب مایع ــ و چیزی که «میدان هیگز» نام دارد مانند دریایی ناپیدا همهٔ فضا را پر کرد. ذرّات، از راه برهمکنش با این میدان جدید که در این فرایند، از طریق جمله‌ای اضافی،

$$\alpha_i \phi(x,y,z,t)$$

که در آن Φ میدان هیگز است، دارای جرم شدند. تابع‌های موجی این ذرّات که اکنون جرم‌دار شده بودند می‌بایست در معادلهٔ زیر صدق کنند.

$$(\Box + (\alpha_i \phi)^2)\phi = 0$$

که α به ذرّه بستگی دارد، و

$$m_i = \alpha_i \phi$$

جرم ذرّه است.

می‌شود به Φ مثل متوسط اسپین یا وضعیت تیله در کاسهٔ نیمکره، فکر کرد. در آن صورت، متقارن‌ترین نقطه ــ و واقعاً تنها نقطه‌ای که تحت دوران تغییر نمی‌کند ــ

$$\phi = 0$$

است. به عبارت دیگر، تقارن فقط وقتی پابرجاست که.

$$\phi = 0$$

در عوض، این وضعیت فقط زمانی رخ می‌دهد که دما زیاد باشد، که در چنین صورتی میدان هیگز صفر است و ذرّات بی‌جرم‌اند. به بیانی دیگر، در دمای بالا پتانسیل میدان هیگز مانند نیم‌کره‌ای است بدون برآمدگی در قعر آن. اما، هم‌چنانکه عالم پس از مهبانگ سرد شد، از تغییر فازی گذشت: انرژی

$$\langle\phi\rangle$$

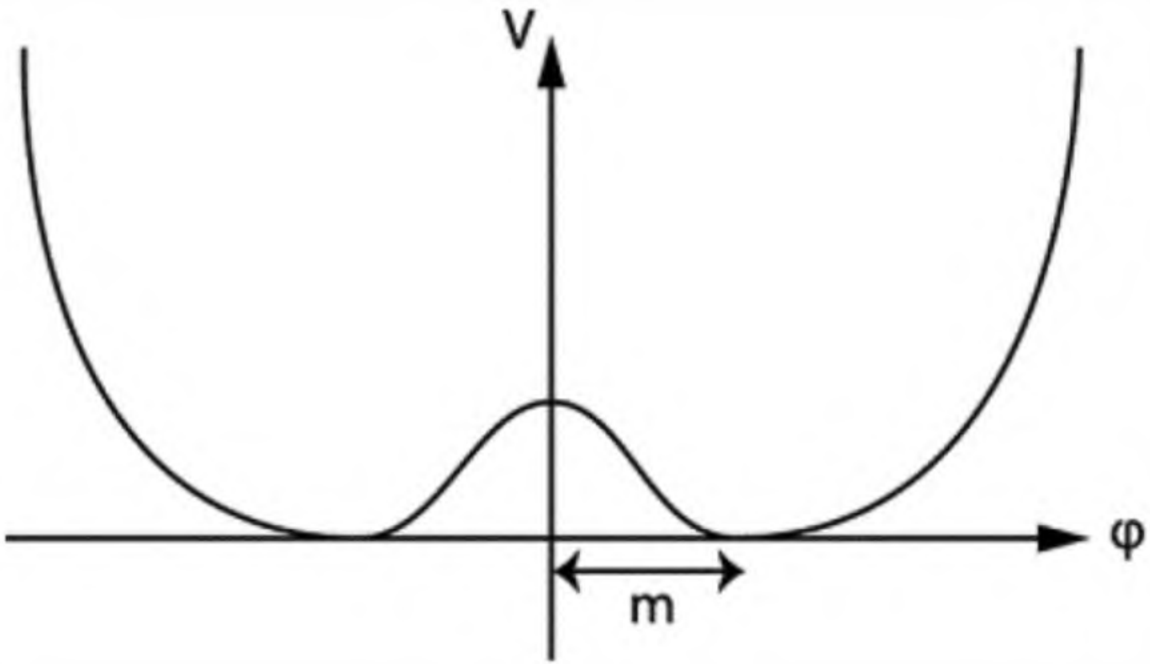
کمینه‌ای دور از صفر پیدا می‌کرد، و

$$\langle \phi \rangle$$

هم ناصفر شد و به جرم ناصفر انجامید (شکل ۳۳). اینکه ذرّه چه جرمی می‌یابد بستگی به شدت برهمکنشش با میدان هیگز دارد (که در a منعکس می‌شود)، و بستگی به این که

$$\langle \phi \rangle$$

چقدر از مرکز دور شده است.



شکل ۳۳. میدان هیگز دارای پتانسیل V است که درست مانند یک برآمدگی در قعر کاسه است شکست تقارن کمینهٔ پتانسیل را از صفر دور می‌کند، که منجر به جرم می‌شود.

پس عالم و ذرّات جرم‌دار آن از شکست خودبه‌خود تقارن برآمده‌اند. ولی چگونه به طور تجربی می‌توان ثابت کرد که این واقعاً سازوکاری است که ذرّات جرم می‌یابند؟

دوباره به توپ در کاسه بیندیشید. اگر کمی توپ را از قعر کاسه دور کنید و کمی از برآمدگی بالا ببرید، برخواهد گشت و نوسان خواهد کرد. به تشابه می‌توان تلاش کرد که میدان هیگز Φ را کمی هل داد، و نوسان را به صورت موج ایجادشده مشاهده کرد. اما مکانیک کوانتومی به ما می‌آموزد که ذرّات همان امواج هستند. پس اگر طرحی دربیندازیم که موجی مرتبط با میدان هیگز خلق کنیم، ذرّه هم خلق می‌شود ــ چیزی که شاید ببینیم (که در واقع هم دیدیم). این همان بوزون هیگز است که برخی اصحاب رسانه آن را «ذرّهٔ خدا»(۱۰۱) خوانده‌اند.

چطور می‌توان این پدیده را مشاهده کرد؟ همان‌طور که گفتیم، وقتی عالم پس از مهبانگ سرد شد، میدان هیگز، همچون دریایی ناپیدا با مقداری ناصفر از فضا را پر کرد. برهمکنش ذرّات با این دریا چیزی است که به آنها جرم می‌دهد و آنها را کند می‌سازد. چگونه می‌شود نشان داد که این دریا وجود دارد اگر نمی‌شود آن را دید؟ خوب، می‌توانید دریا را «نیشگون بگیرید» تا میدان هیگز را وادار کنید از برآمدگی بالا و پایین برود. یک راه برای رسیدن به این (هدف) برخورد دادن دو ذرّه با سرعت زیاد است که منجر به فشردن تکهٔ کوچکی از این دریای ناپیدا در نقطه‌ای می‌شود که با هم برخورد می‌کنند و وجود خود را با خلق امواج هیگز نشان می‌دهند، که می‌توان آن را به ذرّهٔ هیگز تعبیر کرد. در برخورددهندهٔ بزرگ هادرون در آزمایشگاه فیزیک سرن، برخورددهنده‌های پرانرژی قادر به انجامش هستند ــ دو پروتون را با انرژی به اندازهٔ کافی زیاد به هم می‌کوبند تا این اثر را نشان دهند. یک ذرّهٔ هیگز در چنین فرایندی می‌تواند خلق شود، که دقیقاً چیزی است که آزمایشگران سرن دیدند.

این کشف دوران‌ساز در تاریخ ۴ ژوئیه ۲۰۱۲ به جهان اعلام شد، و آنچه را که تقریباً ۵۰ سال پیش از آن پیش‌بینی شده بود محقق ساخت. سرانجام، افکار نظریه‌پردازان در این باره که ذرّات چگونه جرم‌دار می‌شوند تأیید شد، و آخرین قطعهٔ مدل استاندارد فیزیک ــ آخرین ذرّهٔ مورد انتظار که تا آن وقت در آن چارچوب نظری مشاهده نشده بود ــ نهایتاً دیده شد. این بخشی از یک فرایند دیرینهٔ یادگیری بود که فیزیکدانان را به قدرت شکست خودبه‌خود تقارن واقف کرد. زمین حرکت می‌کند علی‌رغم استدلالات دوهزار سال پیش منطق‌دانان یونانی

که به دلایل تقارنی به این نتیجه رسیده بودند که زمین باید ساکن باشد. اکنون آموخته‌ایم که شکست تقارن چقدر مهم است. به علت شکست تقارن است که عالم مملو از ذرّات بی‌جرم نیست که با سرعت نور به هر سو بتازند و هیچ‌گاه آرام نگیرند تا ستاره‌ها و سیارات و کهکشان‌ها و سیاهچاله‌ها و هر جسم شگفت‌آوری را که در جهان می‌بینیم، از جمله خودمان را، تشکیل دهند.

وحدت بزرگ نیروها[۱۰۲]

اگر در وضعیتی هستیم که در آن تقارن شکسته است، ممکن است حتی تشخیص ندهیم که در پس‌زمینه تقارنی نهفته است. اگر مثلاً در ته دره‌ای با تقارن دایره‌ای زندگی می‌کردیم، شبیه شکل پتانسیل میدان هیگز، مانند کاسه‌ای قلنبیده (همچون شکل ۲۶)، شاید اصلاً وجود تقارن دایره‌ای را درک نمی‌کردیم. اتفاقاً، هنگام اندیشیدن به نیروهای اطرافمان هم قضیه همین است. علاوه بر گرانش، سه نیروی شناخته‌شدهٔ دیگر هم وجود دارند: نیروهای الکترومغناطیس (e)، و نیروهای قوی (s) و ضعیف (w). نیروهای الکترومغناطیسی آشنایند. تشخیص نیروهای قوی، که کوارک‌ها را به هم پیوند می‌دهند تا پروتون‌ها و نوترون‌ها را بسازند به این اندازه ملموس نیستند. نیروهای ضعیف هم ــ که مسئول واکنش‌های رادیواکتیوند و برای مثال در واپاشی β (بتا) مشاهده می‌شوند ــ وسیعاً از زندگی روزمره پنهان‌اند. اما کوارک همهٔ نیروهای شناخته شده را تجربه می‌کند. این نیروها قدرت‌های متفاوتی دارند که به شکل زیر می‌توان ارزیابی کرد: فاصلهٔ کوچکی را تعیین می‌کنیم، مثلاً ۱۰ سانتیمتر، که معادل انرژی 1GeVبرای فوتونی با آن طول موج است، و بعد نسبت نیروهای مختلفی را که کوارک‌ها در فاصله ۱۰ سانتیمتر به هم وارد می‌کنند حساب می‌کنیم. نسبت این نیروها به نسبت مربع بارهای متناظرشان

$$g_i^2$$

داده می‌شود. معلوم می‌شود که در چنین مقیاسی

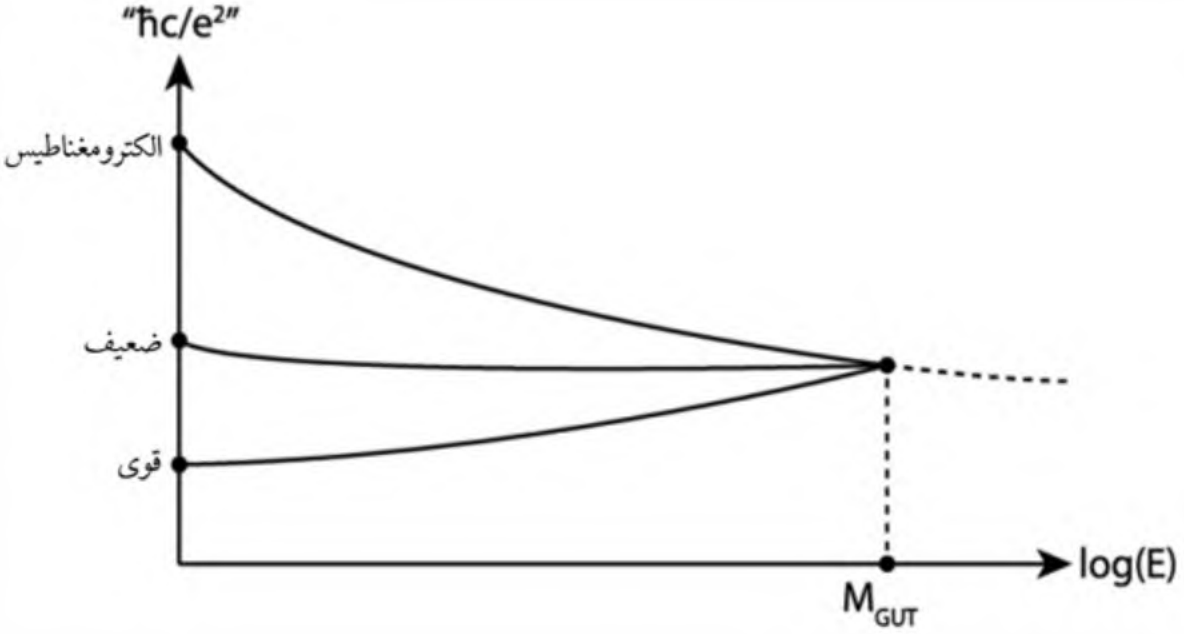
$$g_s^2 \gg g_w^2 \gg g_e^2$$

که e g همان بار الکتریکی آشنا است. پس یقیناً این نیروها، حداقل بر اساس قدرت نسبی‌شان، بسیار متفاوت ظاهر می‌شوند. اما اگر همان سؤال را برای فاصله‌های کمتر و کمتر مطرح کنیم، بارهای متناظر این سه نیرو تغییر می‌کند. به‌علاوه، به نظر می‌رسد که در فاصله‌ای در حدود ۱۰ سانتیمتر (متناظر با مقیاس انرژی

$$10^{16} GeV = M_{GUT}$$

) یک اندازه می‌شوند (شکل ۳۴).

این به‌عنوان «وحدت بزرگ» نیروها خوانده می‌شود. به عبارت دیگر، در انرژی‌های بالاتر تقارن بین نیروها باز برقرار شده است در حالی که در انرژی‌های کمتر به نظر می‌آید شکسته باشد. ظاهراً در انرژی‌های بالاتر در یک نیرو وحدت یافته‌اند!(۱۰۳)



شکل ۳۴. وحدت بزرگ نیروها: در مقیاس‌های کم‌فاصله‌تر، که متناظر با انرژی‌های بالاتر است، بارهای سه نیروی مختلف یکی می‌شوند که اشاره به وحدت نیروها دارد.

ابررسانایی(۱۰۴)

ابررسانایی مثال دیگری از شکست تقارن است. ابررسانایی خاصیتی از برخی مواد است، که تمام مقاومت الکتریکی خود را در دمایی به کفایت پایین از دست می‌دهند، یعنی وقتی جریان الکتریکی راه بیفتد هیچ‌گاه نمی‌میرد. از قضا توضیح این پدیده بر اساس همان پتانسیل هیگز یا کاسه قلنبیده است. مشابه میدان هیگز در این حال میدان مختلط است با پتانسیلی که در

$$|\rho| = A$$

کمینه می‌شود. جریان در یک ابررسانای دایره‌ای در مقادیر گسسته، یا کوانتوم‌ها، روی می‌دهد که می‌تواند به‌عنوان پیچش فاز میدان

$$\rho$$

، در ته پتانسیلی دایره‌ای تلقی شود (شکل ۳۵) و

$$\rho = A \cdot \exp(i\phi)$$

و در حالی که حلقه‌ای را که با θ پارامتریزه شده است دور می‌زنیم، ϕ، n بار به دور «پتانسیل کلاه مکزیکی»(۱۰۵) می‌چرخد،

$$\phi = n\theta$$

جریان

$$I \propto n$$

از آب درمی‌آید. پس شدت جریان مستقیماً متناسب با تعداد چرخش‌های فاز
ρ

است.

جریان،ا، به این دلیل ساده که در بسته‌های کوانتیده می‌آید پایدار است. چون جریان، هم‌چنان که از شکل ۳۵ پیدا است، به دور پایین تپه می‌پیچد، برای باز کردنش باید آن را بالا بکشید، و این انرژی می‌طلبد. به بیان دیگر، انرژی می‌طلبد تا پیچش‌ها باز شوند و جریان تغییر کند، و به همین علت است که وقتی جریان در یک ابررسانا راه می‌افتد، تمایل دارد همان جا بماند.

شکل ۳۵. ابررسانایی را می‌توان برخاسته از پیچیدن فاز میدان تلقی کرد، زمانی که به دور حلقهٔ مداری در پایین پتانسیلش می‌چرخیم. جریان متناسب با عدد پیچش فاز است و از بین بردنش به دلیل سد پتانسیل سخت است. این به جریان پایدار ابررساناها منجر می‌شود.

تصلب(۱۰۶)

چطور است مثال دیگری بزنیم؟ اگر جسم صلبی را از یک سو هل بدهید، طرف دیگرش هم حرکت می‌کند. ممکن است چندان از این مشاهده، که خیلی عادی به نظر می‌رسد، تحت تأثیر قرار نگرفته باشید، ولی واقعاً بسیار شگفت‌انگیز است. به شکلی موفق شده‌اید معجزه‌وار نیرو را از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر انتقال دهید. وقتی این کار را می‌کنید در زیربنای فیزیکش چه رخ می‌دهد؟ اشیا از بلورها ساخته شده‌اند. این واقعیت که آنها مکان ثابتی دارند تقارن انتقالی را می‌شکنند. شکست تقارن انتقالی اتم‌ها منجر به تصلب به‌عنوان خاصیتی برآمده منجر می‌شود. شاید نکتهٔ کلی‌تر این باشد که بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، از پدیده‌های عجیب تا چیزهایی که هر روز می‌بینیم، نتایج شکست تقارن باشد.

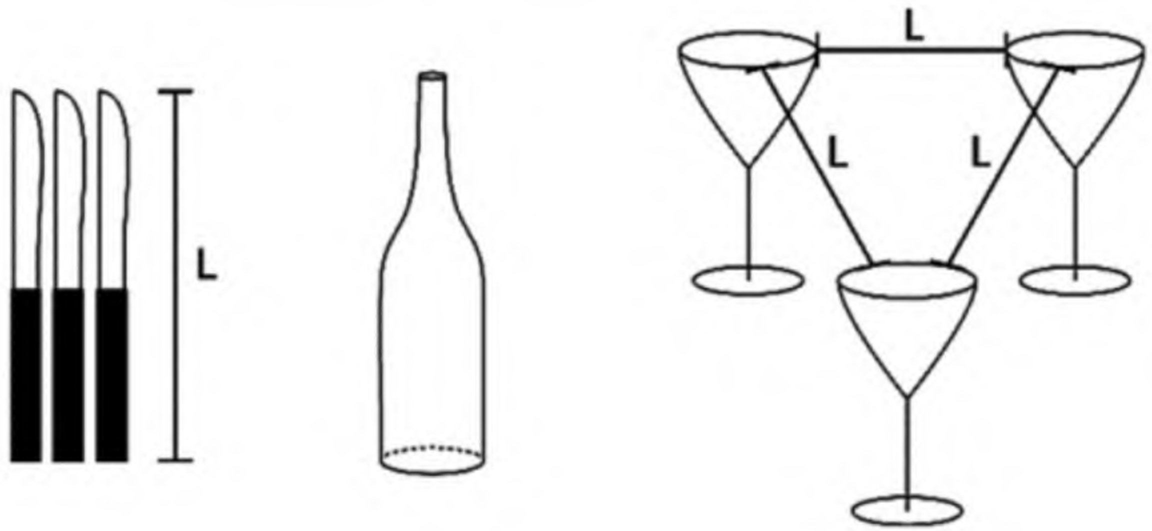
دست‌سانی(۱۰۷)

یکی از چیزهایی که از منظر شکست خودبه‌خود تقارن درک نمی‌کنیم، شکست «دست‌سانی» عالم است. بعضی از ذرّات در ارتباط با جهت‌گیری اسپین‌شان نسبت به حرکتشان یک حس «دست‌سانی» دارند. این موضوع تقارن پاریته (انعکاس در آینه) را می‌شکند. اما این شکست تقارن تعمدی می‌نماید، بدین معنا که ذرّات، در وهلهٔ نخست هرگز آن را نداشتند. راه برازنده‌تر برای تقارن این می‌توانست باشد که در ابتدا سر جایش بوده، و بعد در اثر فرایندی طبیعی به هم بخورد. امیدواریم که در یک نظریهٔ کامل، مانند نظریهٔ ریسمان، بر خلافِ وضعیت‌های ساختگی که تقارن تعمداً با دست شکسته می‌شود، دست‌سانی خودبه‌خود شکسته شود.

این تا حدی یادآور معمایی است که شامل چهار شهر در گوشه‌های یک مربع یا یک مستطیل بود که بزرگراه‌هایش ساخته شده باشند. عدم تقارن در آن مسأله به‌دلیل محدودیت بودجه است، که متناظر با محدودیت انرژی کم در جهان فیزیکی است.

معما(۱۰۸)

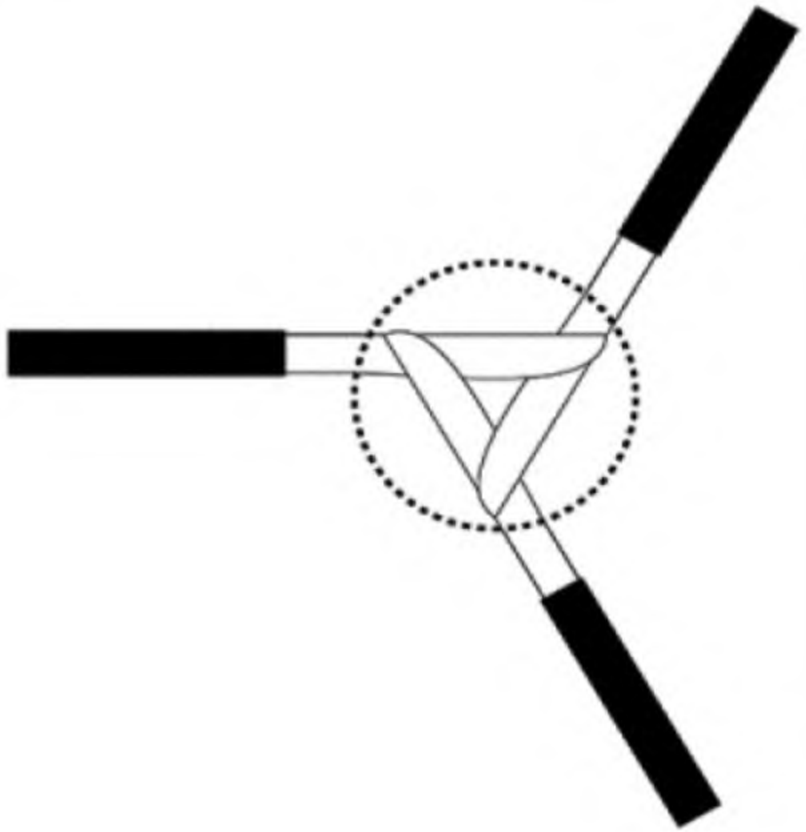
سه چاقو با طول و سه لیوان به‌فواصل مساوی از یکدیگر (کمی بیشتر از)L در اختیار شما است (شکل ۳۶). چاقوها را در وضعیتی قرار دهید که بتوان بطری سنگین را روی لیوان‌ها نگه داشت.



شکل ۳۶. در این تصویر هندسهٔ چاقوها و لیوان‌ها، چه چیدمانی از چاقوها روی لیوان‌ها می‌تواند منجر به امکان نگهداری بطری سنگین روی لیوان‌ها شود؟

حل

برای حل مسأله باید تقارن اولیه را شکست. می‌توانیم بطری را روی ناحیهٔ مثلثی که مانند شکل ۳۷ از چاقوها درست شده است قرار داد.



شکل ۳۷. هندسهٔ چاقوها، (سه لیوان رسم نشده‌اند) به‌نحوی که بطری را نگه دارند، تقارن را می‌شکنند و دست‌سانی را مطرح می‌کند.

این به وضعیت، یک دست‌سانی منتقل می‌کند و تقارن اولیه را که زمانی بین لیوان‌ها وجود داشت می‌شکند.

معما

تصور کنید حوضی دایره‌ای به شعاع R داریم. اردکی در مرکز حوض نشسته است. روباهی، که نمی‌تواند شنا کند، در لبهٔ حوض نشسته است، و طبیعتاً می‌خواهد اردک را بخورد. اردک به راهبردی نیاز دارد که به خشکی برسد تا بتواند پرواز کند و از خوردن توسط روباه در امان باشد. روباه مرتبه سریع‌تر از اردک حرکت می‌کند که $x>1$. آیا اردک می‌تواند جان به‌در برد؟ اگر می‌تواند چه راهبردی باید اتخاذ کند؟

حل

اگرr_1 شعاعی باشد که اردک در آن می‌تواند سرعت زاویه‌ای بیشتری از روباه داشته باشد، آنگاه داریم

$$r_1 < R/x$$

. این بدان معنا است که وقتی اردک در دایرهٔ با شعاع r باشد آن‌قدر می‌تواند حرکت کند تا روباه در سمت مقابلش کنار حوض قرار گیرد. حالا اگر r شعاعی باشد که اردک می‌تواند مسیر مستقیمی را برای رسیدن به لبه و فرار پیش بگیرد باید به اندازهٔ $R-r$ حرکت کند، در حالی که روباه لازم است طولπR را طی کند. پس نیاز داریم که

$$R - r_2 < \pi R/x \Rightarrow r_2 > R - \pi R/x$$

اگر محدوده‌هایr و r ت لاقی کنند، آن‌وقت اردک می‌تواند فرار کند. اگر نه روباه حتماً قادر خواهد بود اردک را بخورد. شرط برای تغییر وضعیت آن است که

$$\frac{R}{x} = R - \frac{\pi R}{x} \Rightarrow x = \pi + 1$$

پس اردک می‌تواند فرار کند اگر.

$$x < \pi + 1$$

این مسألهٔ جالبی است چون با وضعیتی متقارن آغاز می‌کنیم، اما اردک با انتخاب جهت حرکت روی دایره، برای رسیدن به طرف دیگر حوض، ناچار به شکست تقارن دایره‌ای است. وقتی

$$x > \pi + 1$$

، مستقل از اینکه اردک چطور تقارن دایره‌ای را می‌شکند، روباه او را خواهد خورد. پس یک بازهٔ کوچکی ازx داریم، یعنی

$$1 < x < \pi + 1$$

، که می‌توان تقارن دایره‌ای را به‌نحوی شکست که امکان نجات اردک را فراهم سازد!

۴. قدرت ریاضیات ساده و انتزاعی

قانون‌ها در مقابل قیدها

وقتی که حل مسائل فیزیک مطرح است، به‌طور عام از دو نوع دانسته بهره می‌گیریم: اول، قیودی که بر مسأله اعمال می‌شود، و گاهی به‌عنوان شرایط مرزی به آن ارجاع می‌کنیم. این شامل عوامل اعمال‌شده بر وضعیت از طرف محیط است، که ممکن است در نگاه اول به نظر چندان جدی نیایند. مثلاً، توپی را در نظر بگیرید که روی سطحی شیبدار شتاب می‌گیرد. بدون اینکه چیزی از فیزیک بدانیم، می‌توانیم بگوییم که توپ جایی روی سطح شیبدار خواهد بود. اینها جنبه‌هایی از پدیده‌های فیزیکی است که از طرف محیط تحمیل می‌شود که می‌توانند به صورت قید تلقی شوند. در مکانیک کلاسیک، که هدفش توصیف حرکت است، «قیود» مهم جلوه می‌کنند. این را به‌عنوان «سینماتیک» هم می‌شناسیم. دیگر اینکه قانون‌هایی فیزیکی هستند ــ مانند قوانینی که توسط نیوتن یا اینشتین تدوین شده‌اند ــ که بسیار بنیادی‌تر جلوه می‌کنند. دینامیک به نیروهایی می‌پردازد که به طور کلی بر حرکت اجسام و دستگاه‌ها اثر می‌گذارند، و اینجاست که قوانین فیزیکی نقش مهم‌تری ایفا می‌کنند.

در قسمتی از این فصل بر آنچه قسمت کسل‌کننده‌تر فیزیک جلوه می‌نماید متمرکز می‌شویم، یعنی قیدها. ولی آن چنان که امیدوارم در طی این فصل روشن شود، الزاماً این‌چنین نیست. بعضی از افکاری که در این فصل پی می‌گیریم می‌توانند به شیوه‌هایی اساسی خود را نمایان کنند. و ممکن است کشف کنیم که، در سطحی بسیار بنیادی تمایز بین قانون و قید محو می‌شود و عملاً بسیاری از چیزهایی که به اصول نسبت داده‌ایم می‌تواند از قیود برآید.

از دید ریاضی می‌توان توپولوژی را مشابه این قیود عمومی فیزیک دید. توپولوژی جنبه‌های فراگیر کیفی و ویژگی‌های عمومی فضا را تشریح می‌نماید، در تقابل با هندسه، که در جزئیات آن، شامل فاصله‌ها و شکل‌های دقیق و امثالهم غور می‌کند. پیوستگی، که موضوع اساسی در زمینهٔ توپولوژی است ارتباطی طبیعی با این واقعیت دارد که قوانین فیزیک پیوسته‌اند: کمی چیزی را تغییر می‌دهید، ولی به

طور عام نتیجه تغییر فاحشی نخواهد کرد.(۱۰۹)

معما

در یک دوره مسابقات یک حذفی ۱۱۷ بازیکن شرکت دارند. چطور بازی‌ها را تنظیم کنیم که با حداقل تعداد بازی‌ها به یک برنده برسیم؟ به عکس، چه تنظیمی منجر به تعداد حداکثری بازی‌ها می‌شود؟

حل

اگر بخواهید به جزئیات مسابقه بپردازید ممکن است در تله‌ای بیفتید؛ چنین کاری پیچیده و کلاً غیرضروری است. جواب بسیار سر راست است: همیشه فقط ۱۱۶ بازی داریم. دلیلش ساده است: هر بازی یک نفر را حذف می‌کند، و ۱۱۶ بازیکن باید حذف شوند. به عبارت دیگر، ۱۱۶ بازی باید انجام شود. این حداقل و حداکثر تعداد بازی‌ها است. هر سؤالی دربارهٔ چگونگی تنظیم مسابقات فقط گل‌آلود کردن آب است. پس فریب نخورید؛ قیدها این مسأله را پیش می‌برند. لازم نیست که بازی بهینه را با جفت کردن بازیکن‌ها در مسابقه بیابیم، زیرا پاسخ را می‌شود آسان‌تر، در تنظیم اولیهٔ معما پیدا کنیم.

معما

در یک دوره مسابقات دو حذفی، ۶۴ تیم شرکت می‌کنند. مسابقه از چند بازی تشکیل می‌شود؟

حل

در هر بازی دقیقاً یک بازنده داریم. هر تیم باید دو بازی را ببازد تا حذف شود. در نتیجه ۶۳ تیم دو بار خواهند باخت و تیم قهرمان یا باید اصلاً نبازد یا فقط یک بار ببازد. پس یا

۲× ۶۳=۱۲۶

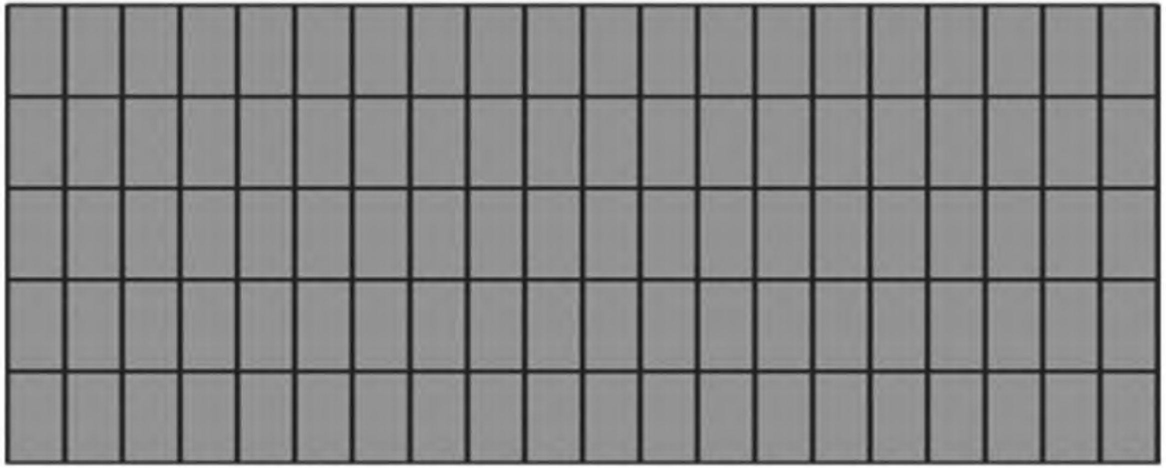
بازی در مسابقه انجام می‌شود یا

۲× ۶۳+۱=۱۲۷

. در اینجا هم طراحی اولیهٔ این مسأله به کفایت محدودیت اعمال می‌کند که مجموعه‌ای متناهی از پاسخ‌های ممکن را تحمیل کند.

معما

تخته شکلاتی داریم به صورت یک شبکهٔ (پیوستهٔ) ۵×۲۰ قطعه‌ای (شکل ۳۸). دو بازیکن به نوبت تخته شکلات را در امتداد خطوط افقی یا عمودی می‌بُرند (به‌طوری که در هر نوبت برش فقط می‌شود یک قطعه را برید).



شکل ۳۸. چه راهبردی منجر به برنده شدن در بازی تخته شکلات می‌انجامد؟ بازی دو بازیکن دارد که به نوبت تخته شکلات را روی خطوط می‌برند، و آخرین نفر که آخرین برش را انجام می‌دهد همهٔ شکلات مال او می‌شود!

آخرین کسی که می‌تواند برشی انجام دهد تمام شکلات مال او می‌شود. راهبرد برنده چیست؟

حل

بازیکن اول همیشه برنده است. در ابتدا فقط یک قطعه وجود دارد؛ در پایان ۱۰۰ قطعه. هر برش تعداد قطعات را فقط یکی افزایش می‌دهد. تعداد قطعات از ۱ تا ۱۰۰ می‌رسد. پس در کل ۹۹ برش داریم. این عددی فرد است، یعنی اینکه بازیکن اول در نهایت به برش ۹۹ام می‌رسد. باز هم مشکل و غیرضروری است که تمام دورهٔ بازی را به تصویر بکشیم. شرایط اولیه (یا قیدها)، همراه با منطق، ما را به حل رهنمون می‌شود.

مقدمه‌ای بر اعداد مختلط

پیش از رسیدن به دور بعدی معماها، نیازمند کمی پیش‌زمینهٔ ریاضی هستیم، که می‌کوشیم اکنون آن را بسازیم. اعداد مختلط،

$$\mathbb{C}$$

، را می‌توان به صورت نقاطی در صفحه نشان داد. در مختصات قطبی، هر

$$z \in \mathbb{C}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

که r فاصله تا مبدأ وθ زاویهٔ قطبی است. مزدوج مختلطش

$$z^* = re^{-i\theta}$$

است. برای دو عدد مختلط

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ و } z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

حاصلضرب آنها می‌شود

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

توجه کنید که

$$zz^* = r^2$$

. بعضی وقت‌ها آن را با

$$|z| = r$$

نشان می‌دهیم.

بعد قضیه‌ای در مورد اعداد مختلط ثابت می‌کنیم. دلیل مطرح کردن این قضیه فقط این نیست که قدرت استدلال‌های توپولوژی را در ریاضی نشان دهیم بلکه این مثال نکته‌ای را منعکس می‌کند که بعداً در این فصل در مثال‌های فیزیکی خواهیم دید.

قضیهٔ اصلی جبر(۱۱۰)

فرض کنید

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n1} \ldots + a_0$$

. اگر

$$n \geq 1$$

، آنگاه(z)fحلی در

$$\mathbb{C}$$

دارد.
یک نتیجهٔ ساده این است که هر چندجمله‌ای درجهٔ n با ضرایبی در، با احتساب چندگانگی، دقیقاً n حل دارد. قضیهٔ اصلی در ریشهٔ حضور فراگیر اعداد مختلط است. حالا این قضیه را چطور ثابت کنیم؟ فرض کنید $f(z)$ هیچ حلی ندارد. نشان می‌دهیم که این ادعا به تناقض منجر می‌شود. اگر $f(z)$ هیچ صفری نداشته باشد، تابع

$$g(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

وجود دارد که

$$|f(z)| = \sqrt{f(z)f(z)^*}$$

و

$$f(z)^*$$

مزدوج مختلط (f(z است. توجه کنید که این تقسیم مجاز است دقیقاً چون فرض کرده‌ایم که (f(z هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.
تابع(g(zچنان ساخته شده که برای هر

$$|g(z)| = 1 ،z \in \mathbb{C}$$

. به عبارت دیگر g(z)روی دایرهٔ واحد قرار دارد. بدین ترتیب، همین‌طور که مقدار

$$z \in \mathbb{C}$$

را تغییر می‌دهیم g(z) کل صفحهٔ مختلط را به دایرهٔ واحد می‌نگارد.
تصویر یک دایرهٔ بسیار بزرگ تحت g را در نظر بگیرید که شعاعش خیلی خیلی بزرگ‌تر از ضرایب چند جمله‌ای است. پس با تقریب بسیار خوبی

$$f(z) \approx z^n$$

برای،

$$|z| \gg 0$$

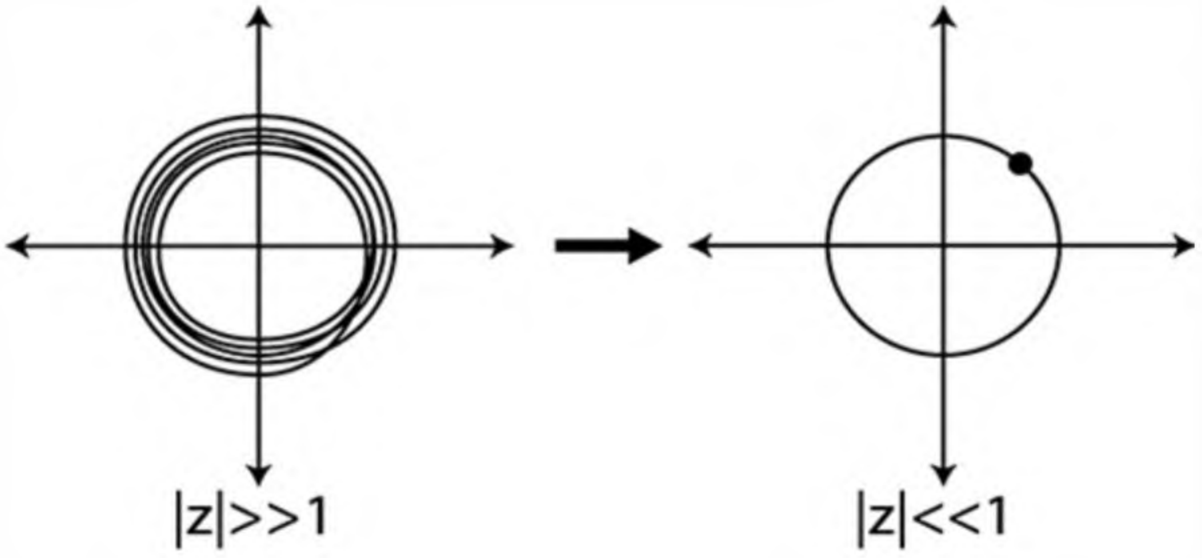
زیرا توانهای دیگر در مقایسه بسیار کوچک‌ترند. پس برای

$$g(z) \cong \frac{z^n}{|z|^n} = e^{in\theta} \text{ ،} |z| \gg 0$$

.، نتیجه آنکه، در مورد دایره‌های واقعاً بزرگ g دایرهٔ بزرگ روی صفحهٔ مختلط را n بار به دور دایرهٔ واحد می‌پیچاند (n بار به دایره واحد می‌نگارد) (شکل ۳۹)، زیرا با تغییر θ از صفر تا ۲π، g از یک تا

$$\exp(2\pi i n)$$

تغییر می‌کند.



شکل ۳۹. قضیهٔ اصلی جبر را می‌توان با استفاده از یک استدلال سادهٔ توپولوژی بر اساس بقاء عدد پیچیدگی ثابت کرد.

توجه کنید که g پیوسته است. چون در مورد دایره‌های واقعاً بزرگ n بار به دور آنها می‌پیچد وg پیوسته تغییر می‌کند، این عدد نمی‌تواند پرش داشته باشد. لذا، بایدn بار بپیچد حتی اگر به‌تدریج دایره منقبض شود، و حتی تا جایی که به دایره‌های کوچک برسیم. اما همچنان که آن را منقبض می‌کنیم، خیلی به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین.

$$f(z) \approx a_0 = g(0)$$

و.

$$g(0) = \frac{a_0}{|a_0|}$$

در آخر، به بیانی دیگر برای،

$$|z| \ll 1 \text{،} \; g(z)$$

هیچ پیچشی ندارد و متناظر است با یک نقطهٔ واحد

$$g(0) = \frac{a_0}{|a_0|}$$

روی دایره که اگر عدد پیچش،n، صفر نباشد با آن در تناقض است. پس این فرض که f(z) صفر ندارد که منجر به ساختن تابع پیوستهٔ g(z) شد، نمی‌تواند صحیح باشد.

واقعیت این است که می‌دانیم f(z) دارای جواب n است، که ناپیوستگی‌های g را نمایش می‌دهد. عدد پیچش در هریک از این نقاط ناپیوسته (جایی که مخرج g صفر است) به اندازهٔ یک واحد پرش دارد، که توصیف دیگری از چرایی داشتن n جواب است. راه دیگر بیان آن این است که، اگر a یک صفر از f باشد، می‌توان f را به تقسیم (z- a) کرد تا به یک چندجمله‌ای از یک درجه کمتر رسید و باز می‌شود استدلال بالا را تکرار کرد. این استقراء به این نتیجه می‌انجامد که f دارای n صفر است (با در نظر گرفتن تعدد صفرها در صورت تکرارشان).

معما

دمایT را در طول استوای زمین در نظر بگیرید. فرض کنید T تابعی پیوسته از مکان در طول استوا باشد. نشان دهید که در هر زمان معین حداقل دو نقطهٔ متقاطر روی استوا وجود دارد که دقیقاً یک دما دارند. (راهنمایی: به دانستن هیچ چیزی دربارهٔ ترمودینامیک نیاز ندارید، یا در مورد هواشناسی و جغرافیا).

حل

تابع

$$\tilde{T}(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$$

را تعریف کنید، که اختلاف بین دمای یک نقطه و نقطهٔ متقاطر آن است. اگر برای هر θ ای

$$\tilde{T}(\theta) = 0$$

آنگاه نقطهٔ مطلوب را پیدا کرده‌ایم. در غیر این صورت توجه کنید که،

$$\tilde{T}(\theta + \pi) = -\tilde{T}(\theta)$$

پس اگر برای θ ای

$$\tilde{T}(\theta_0) \neq 0$$

(فرض کنید مثبت است) آنگاه وقتی به

$$\theta_0 + \pi$$

برسیم علامت معکوس (منفی) دارد. لذا،

$$\tilde{T}(\theta)$$

باید در نقطه‌ای بین

$$\theta_0 + \pi \text{ و } \theta_0$$

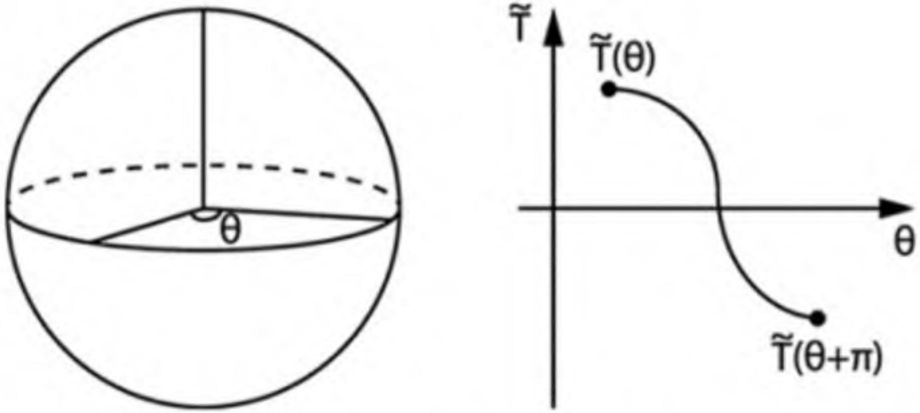
به دلیل پیوستگی (که آن را به نام «قضیهٔ نقطهٔ میانی»(111) هم می‌شناسند.) صفر باشد (نگاه کنید به شکل ۴۰)، زیرا

$$\tilde{T}(\theta_0)$$

و

$$\tilde{T}(\theta_0 + \pi)$$

علامت‌های مخالف دارند.



شکل ۴۰. اختلاف دمای $\tilde{T}$ در یک نقطه و نقطهٔ متقاطر آن، وقتی که به‌سوی نقطهٔ متقاطر می‌رویم علامتشان تغییر می‌کند زیرا این اختلاف علامت را تغییر می‌دهد.

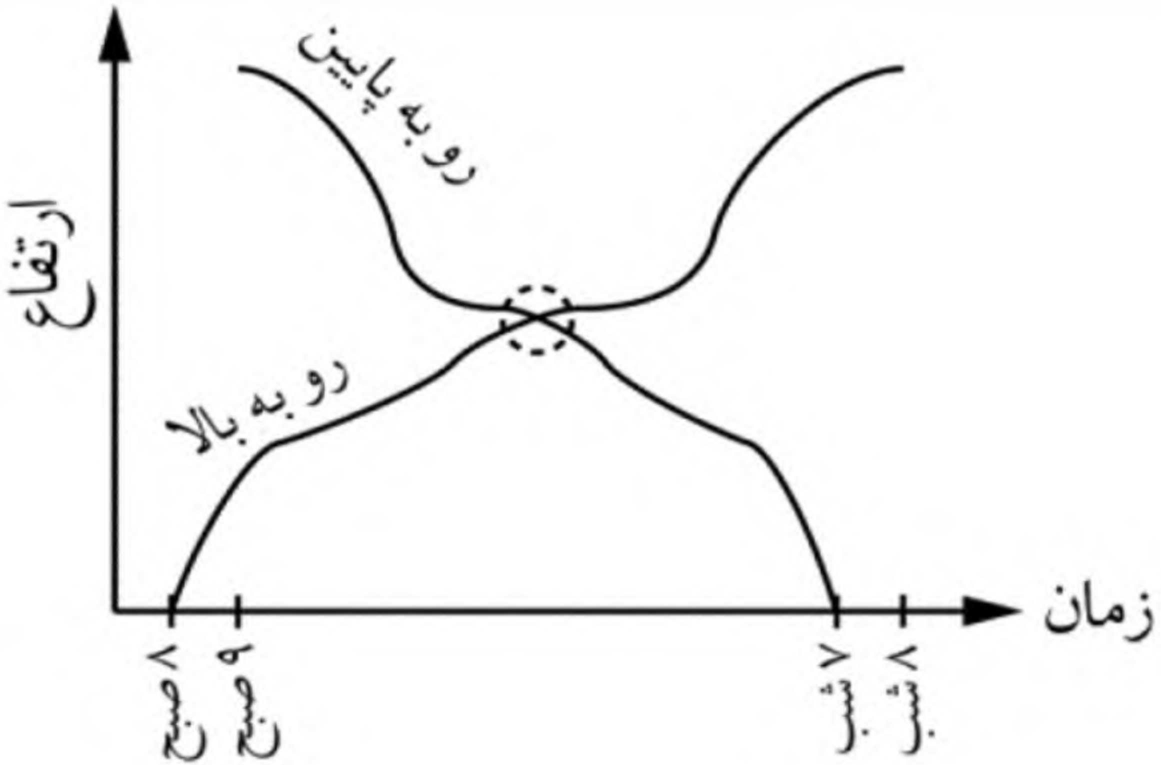
این گزاره حیرت‌انگیز می‌نماید. اما آن‌چنان که از استدلال بالا می‌بینیم، منتج از ملاحظات پیش‌پاافتاده توپولوژیک/ پیوستگی است.

معما

راهبی، از ۸ صبح تا ۸ شب به قلهٔ کوهی صعود می‌کند. روز بعد، از ۹ صبح تا ۷ شب از کوه پایین می‌آید. نشان دهید که لحظه‌ای وجود دارد که او دقیقاً در همان مکانی است که در همان زمان از روز قبل در آن حضور داشته است.

حل

اگر نمودارهای (شکل ۴۱) مسافت بر حسب زمان را برای این سفرهای بالا و پایین رسم کنید، می‌بینید که باید جایی تلاقی کنند. (اگر نمودارها هیچ جا تلاقی نکنند، یعنی راهب سفرش را به پایین کوه کامل نکرده است، که دراین صورت باید بلافاصله گروه تجسس را اعزام کنیم!) راه فیزیکی‌تری برای دیدن آن این است که تجسم کنید راهب دیگری همان مسیر را که روز قبل راهب طی کرد می‌پیماید، و به‌وضوح دو راهب در جایی که یکی بالا می‌رود و دیگری پایین می‌آید به هم بر می‌خورند.



شکل ۴۱. به دلیل پیوستگی ارتفاع به‌عنوان تابعی از زمان روز، راهب در نقطه‌ای در همان ارتفاعی خواهد بود که روز پیش بوده.

معما

بنا بر اساس معمای پیشین در مورد دما: آیا نقطه‌ای روی زمین وجود دارد که دما و فشارش در این لحظه مانند نقطهٔ متقاطرش باشد؟

حل

پاسخ باز هم مثبت است. استدلال کمی فنی‌تر است، ولی باز هم بر اصل پیوستگی و ثابت ماندن اعداد پیچش استوار است. تابع

$$\vec{f} = (P(x), T(x))$$

با ارزشِ برداری را که در آن p فشار و T دما و x نقطه‌ای روی زمین است در نظر بگیرید. بعد، تابع

$$\vec{g}(x) = \vec{f}(x) - \vec{f}(-x)$$

را در نظر بگیرید. صفر این تابع دقیقاً متناظر با نقطه‌ای است که فشار و دمایش برابر با نقطهٔ متقاطرش باشد. فرض کنیم این

هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد و سعی کنیم به تناقضی برسیم. اگر

$$\overrightarrow{g}(x)$$

هیچ‌گاه صفر نشود، می‌توان آن را به قدر مطلقش تقسیم کرد و به جای آن بردار هنجارشدهٔ

$$\vec{g}(x) = \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(-x)}{|\vec{f}(x) - \vec{f}(-x)|}$$

را در نظر بگیریم. این تابع کره را به دایرهٔ واحد تصویر می‌کند چون برداری با طول واحد است. یک برگ‌بندی(۱۱۲) روی کره، در امتداد خطوط طولی آن در نظر بگیرید (شکل ۴۲) چون

$$\vec{g}$$

پیوسته است، تصویر دایره در قطب شمال کره به یک نقطه تبدیل می‌شود، پس عدد پیچش صفر است. از این رو، با همان استدلال پیوستگی، اعداد پیچش مانند گذشته کلاً صفر هستند که این شامل عدد پیچش دایرهٔ متناظر با استوا نیز هست.
اما ببینیم

$$\vec{g}$$

استوا را به چه تصویر می‌کند. تصویر نیم‌دایره بین نقاط متقاطر AوB خمی است با عدد پیچش

$$n + \frac{1}{2}$$

که ½ از این واقعیت ناشی می‌شود که،

$$\vec{g}(x) = -\vec{g}(-x)$$

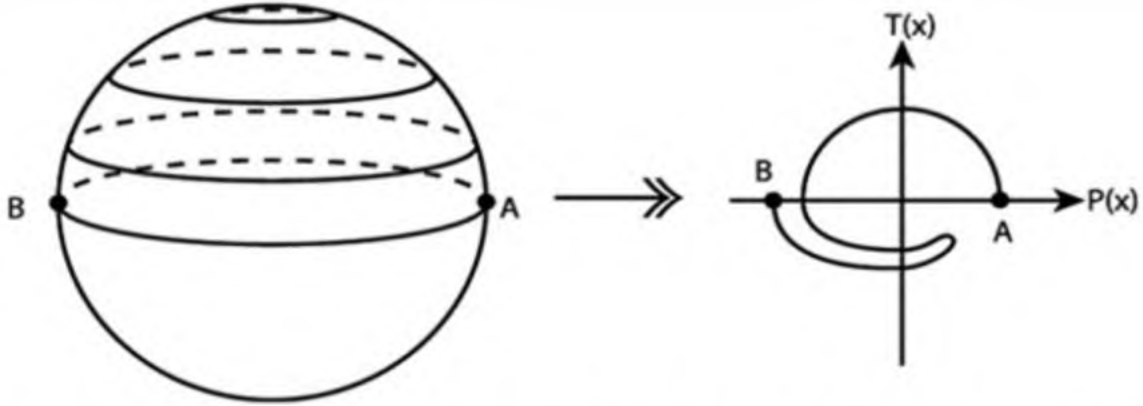
پس نقاط A وB باید از دو سوی مختلف دایرهٔ واحد تصویر شوند و همین‌طور که به دور زدن استوا ادامه می‌دهیم تا دوباره به A بازگردیم، دقیقاً منفی نیمهٔ اول را به‌دست می‌آوریم. بدین‌ترتیب، تصویر کامل استوا عدد پیچش

$$2(n + \frac{1}{2}) = 2n + 1$$

را دارد که چون عددی است فرد، نمی‌تواند صفر باشد. پس به تناقض می‌رسیم چون انتظار داشتیم به دلیل پیوستگی عدد پیچش صفر باشد. این دقیقاً همان استدلالی است که برای اثبات «قضیهٔ اصلی جبر» به کار بردیم. پس تقسیم کردن به

$$|g|$$

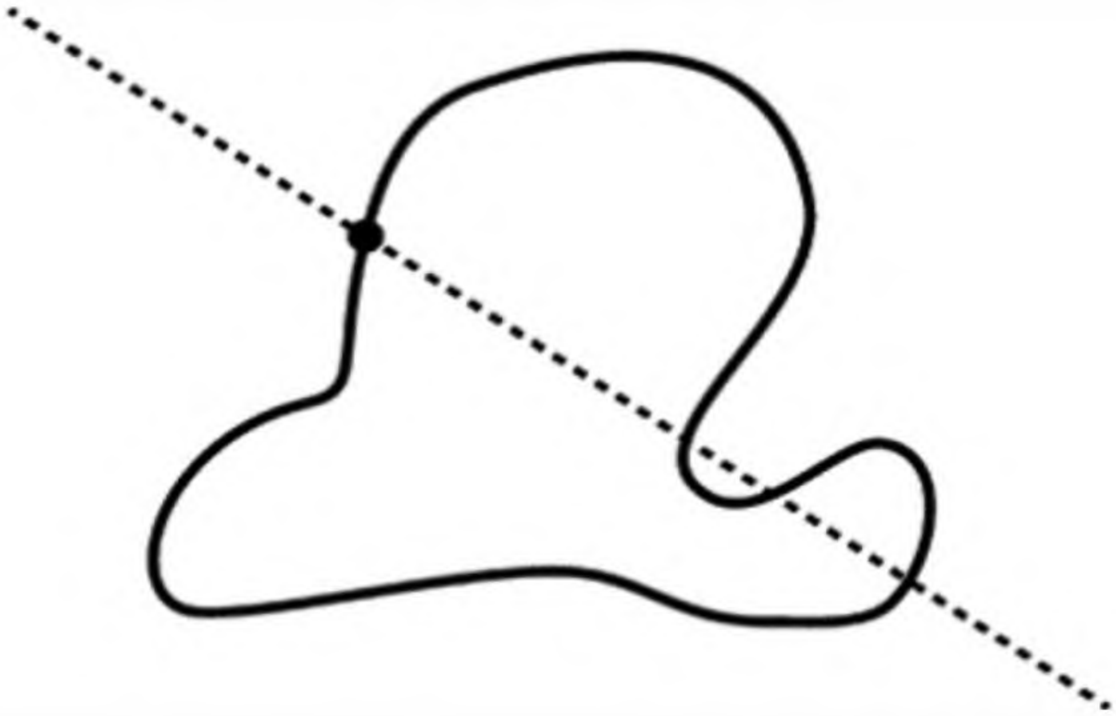
نمی‌بایست مجاز بوده باشد، وg باید صفری داشته باشد، و این دقیقاً چیزی است که می‌خواستیم نشان بدهیم. قیدها، در این حالت، که از هندسهٔ کره و پیوستگی نشأت می‌گیرند، کافی‌اند تا ما را به جواب هدایت کنند.



شکل ۴۲. در حین رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B روی استوا، $\vec{g}(x)$ از یک سوی دایرهٔ واحد به سوی دیگر دایرهٔ واحد حرکت می‌کند. عدد پیچش $\vec{g}(x)$ برای رفتن از A به B، $n+\frac{1}{2}$ است.

معما

با فرض یک خم بسته و نقطه‌ای روی آن، آیا امکان دارد خطی از آن نقطه بگذرانیم که مساحت درون خم را نصف کند(شکل ۴۳)؟



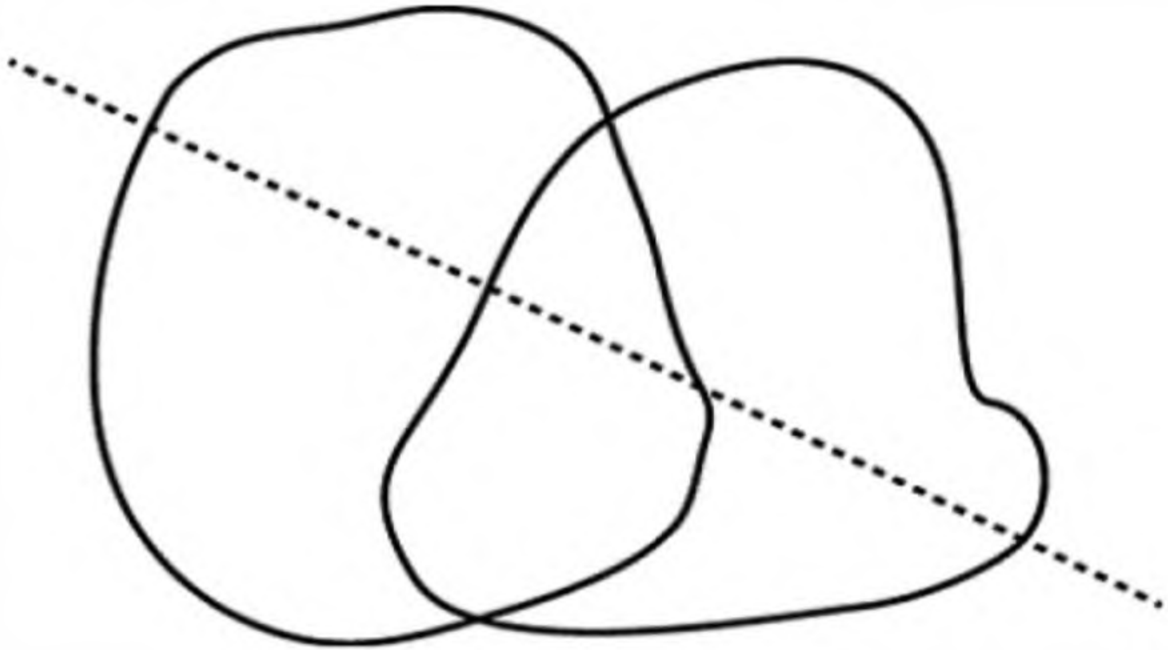
شکل ۴۳. آیا همیشه می‌توانید مساحت را با کشیدن خطی از میان خم، و از یک نقطهٔ مفروض، نصف کنید؟

حل

آری، هر نقطه که روی خم فرض شود، اختلاف مساحت قسمت سمت چپ و سمت راست خط را تابعی از زاویهٔ خط با خم تلقی کنید. بعد از ۱۸۰ درجه، تابع تغییر علامت می‌دهد چون چپ به راست بدل می‌شود و راست به چپ. پس اگر تابع در یک سوی خط ۱۸۰ درجه مثبت است و در سمت دیگر آن منفی، با استفاده از پیوستگی می‌دانیم که باید جایی وجود داشته باشد که تابع صفر می‌شود. و این دقیقاً همان جا است که خط مساحت نصف می‌کند.

معما

دو خم بسته داریم، آیا می‌شود خطی کشید که همزمان دو خم را به دو قسمت با مساحت‌های برابر تقسیم کند (شکل ۴۴)؟



شکل ۴۴. آیا می‌توانید همیشه مساحت هریک از دو خم را با کشیدن خطی از میان آنها نصف کنید؟

حل

آری! نقطه‌ای روی یکی از خم‌ها انتخاب کنید و خط را مقید کنید که به‌تساوی مساحت خم اول را به دو نیم کند. (از معمای قبلی می‌دانیم که این میسر است.) در نظر بگیرید که نقطه را روی خم اول حرکت می‌دهیم و در همان حال همیشه خطی را که مساحت آن را نصف می‌کند نیز انتخاب کنید. حالا تابعی را در نظر بگیرید که اختلاف مساحت دو قسمتی است که چنین خطی، همچنان که روی خم اول حرکت می‌کنیم، در خم دوم ایجاد می‌کند. وقتی که در خم اول به نقطهٔ متقاطری می‌رسیم که دقیقاً مقابل آن (در ۱۸۰ درجه) نسبت به نقطهٔ آغازین قرار دارد، بار دیگر تابع تغییر علامت می‌دهد، از مثبت به منفی می‌رود یا از منفی به مثبت. به سبب پیوستگی، نقطهٔ میانه‌ای باید وجود داشته باشد که در آن تابع صفر است ــ جایی که مساحت‌های هردو خم، همزمان نصف می‌شوند.

معما

این معما از این واقعیت استفاده می‌کند که در میان اعداد صحیح بدون عدد اول می‌توان فاصله‌ای به اندازهٔ دلخواه بزرگ داشت. به یاد بیاورید که عدد اول در تقسیم بر هر عدد صحیحی (به جز ۱ و خودش) باقیمانده دارد. برای اقناع خودتان توجه کنید که اعداد،

$$k! + k \text{ ،} \ldots \text{ ،} k! + 3 \text{ ،} k! + 2$$

به شما k-1 عدد صحیح متوالی می‌دهد که اول نیستند (k!+n وقتی

$$n \leq k$$

، برn قابل قسمت است چون هردو nوk! برn قابل قسمت‌اند.)

نشان دهید عدد صحیح N را می‌توان یافت به‌نحوی که بین Nو N+1000دقیقاً ۱۳ عدد اول وجود داشته باشد.

حل

استدلال ما بر فکر سادهٔ پیوستگی گسسته(۱۱۳) بنا شده است که معنی آن را اکنون توضیح می‌دهیم. فرض کنیدp(N) تعداد اعداد اول بینN وN+1000 را نشان دهد. توجه کنید که بین 1و1001 بیش از ۱۳ عدد اول وجود دارد. پس13<p(1). توجه کنید که برای هرN تفاوت p(N)وp(N+1) حداکثر یک واحد است. به این معنی، p(N) دارای پیوستگی گسسته است. چون می‌دانیم یک M به اندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد که0= p(M) (به دلیل این واقعیت که می‌توانیم فاصله‌ای به دلخواه بزرگ در میان اعداد اول داشته باشیم)، پس زمانی که بهM برسیم، p(N) از عددی بزرگ‌تر از ۱۳ تا صفر تغییر می‌کند. به‌واسطهٔ پیوستگی گسسته نتیجه می‌شود که برای عددی مثلN،

$N<M>1$

،

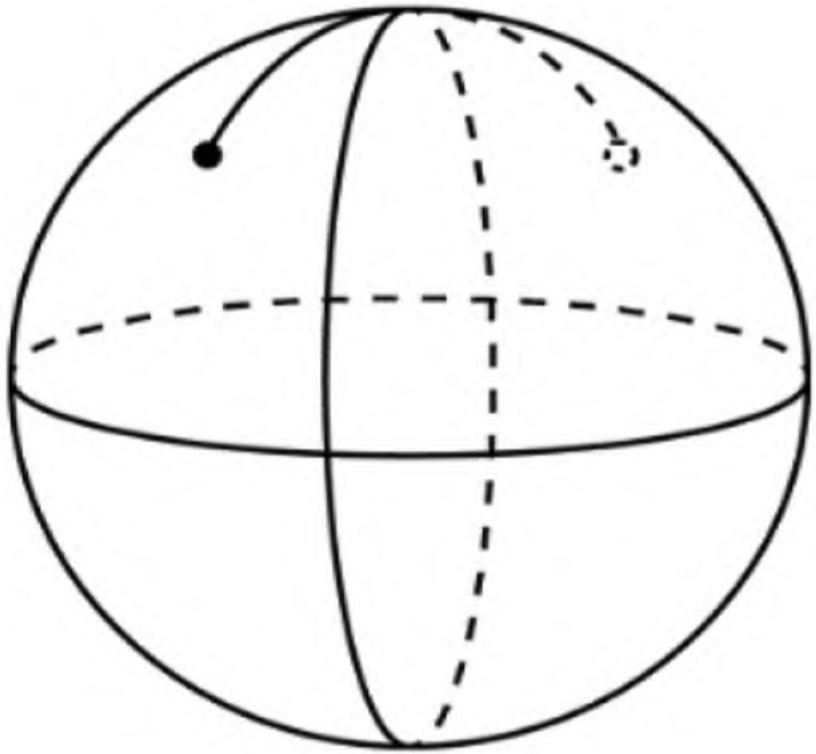
$p(N)= 13$

که چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

عدسی‌های گرانشی(۱۱۴)

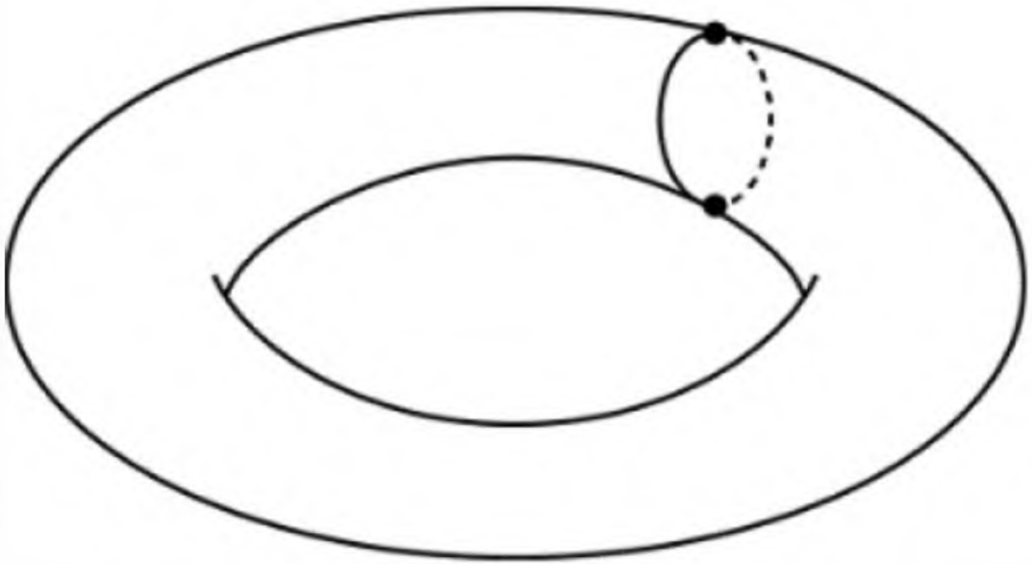
اینشتین توصیفی هندسی برای گرانش ارائه کرد. به‌جای دیدن گرانش به صورت نیروی جاذبه بین اجسام جرم‌دار، آن‌طور که نیوتن نگاه می‌کرد، نظریهٔ اینشتین بر اساس مفهوم خمش پایه‌ریزی شده است. او به ما می‌آموزد که حضور جرم، به معنای دقیق کلمه موجب خمیده شدن یا اعوجاج بافت زمان و مکان می‌شود. اعوجاج زمان و مکان بر حرکت اجسام نزدیک اثر می‌کند. و در اصل همین پدیده است که گرانشش می‌خوانیم.

برای کاویدن این فکر، دو نقطه روی کره در نظر بگیرید. کوتاه‌ترین مسیر (ژئودزیک) یکتایی بین این دو نقطه وجود دارد (شکل ۴۵). هرچند مسیر به معنای متعارفش «مستقیم» نیست باز هم کوتاه‌ترین مسیری است که روی کره بین این دو نقطه قرار دارد. در واقع استثناهایی وجود دارد: تعداد بیشماری مسیر با کمترین طول بین دو نقطهٔ متقاطر داریم. در عوض، می‌توانیم از هر نقطهٔ مفروض روی کره شروع کنیم و در جهتی مفروض تا آنجا که می‌توانیم مستقیم برویم. این چیزی است که ژئودزیک خوانده می‌شود. مسیری که به این ترتیب به دست می‌آوریم یک دایرهٔ عظیمه روی کره است.



شکل ۴۵. به طور معمول فقط یک کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی دایره وجود دارد.

وضعیت‌های دیگر هم رخ می‌دهد. روی چنبره، شیئی به شکل یک نان حلقه‌ای، مانند شکل ۴۶، ژئودزی‌های نامعادل توپولوژیکی بین نقاطی که، در دو نقطهٔ متقابل یک دایرهٔ واقع در مقطع عرضی بر چنبره قرار دارند، وجود دارد.



شکل ۴۶. روی یک چنبره، دو کوتاه‌ترین مسیر بین نقاطی که در دو سوی متقابل دایرهٔ مقطع قرار دارد وجود دارد.

نظریهٔ اینشتین پیش‌بینی می‌کند که نور بین دو نقطه همیشه در کوتاه‌ترین مسیر حرکت می‌کند. اما خمیدگی فضا_زمان به این معنی است که مسیر ممکن است مثل فضای اقلیدسی مستقیم جلوه نکند. به‌عنوان مثال، نظریه به ما می‌گوید که خورشید به‌عنوان جسم جرم‌دار باید مسیر نور را خم کند. هنگامی که حین یک کسوف، خم شدن نور حول خورشید واقعاً مشاهده شد، این پیش‌بینی نخستین پیش‌بینیِ تأییدشدهٔ تجربی در نظریهٔ نسبیت عام اینشتین جای گرفت.

حالا سؤال جالبی پیش می‌آید: آیا ممکن است وضعیتی فیزیکی پیش بیاید که در آن ژئودزیک‌های متعدد داشته باشیم که به تصویرهای متعدد از یک جسم واحد منجر شود؟

اینشتین هرچند که می‌دانست تولید تصویر متعدد از دید نظری میسر است، باور نمی‌کرد احتمال مشاهده داشته باشد. اما، اولین مورد همگرایی گرانشی تقریباً ۴۰ سال پیش در ۱۹۷۹ مشاهده شد که ستاره‌شناسانی در تلسکوپی در آریزونا، دو تصویر یک اختروش را (که به نام اختروش دوقلو یا مضاعف شناخته می‌شود) دیدند که توسط یک کهکشان که بین زمین و اختروش قرار داشت ایجاد شده بود. و پس از آن موارد بیشمار دیگر دیده شده است. در بخش بعد خواهیم دید که همگرایی گرانشی علی‌الاصول تعداد فردی تصویر به دست می‌دهد. ولی در مواردی که مسیر پرتوهایی از نور بسته باشد منجمان روی زمین ممکن است تعداد زوجی تصویر ببینند، که در مورد رصدهای یادشدهٔ «اختروش دوقلو» رخ داد.

کلاً، با فرض اینکه هیچ پرتو نوری مسدود نشود، همیشه تعداد فردی تصویر وجود دارد. اگر این عدد $2n+1$ باشد آنگاه دقیقاً n تصویر معکوس‌اند (که بدین معناست که جهت آنها وارون شده است).

برای اثبات نکتهٔ بالا ممکن است تصور شود باید حقایق بغرنجی در مورد نظریهٔ نسبیت اینشتین یاد بگیریم ــ نظریه‌ای که حول مجموعه‌ای از معادلات پاره‌ای دیفرانسیل غیرخطی نسبتاً با ابهت، شکل گرفته است. اما خواهیم دید که مهم‌ترین چیزی که نیاز داریم بدانیم این است که نظریهٔ اینشتین پیوستگی را محترم می‌شمارد. پیش از اثبات این نکته نخست باید کمی زمینهٔ ریاضی را ــ برای آنان که قصد دارند در این زمینه قدری زورآزمایی کنند آمادّه کنیم. فرض کنید

$$f: X \to Y$$

نگاشتی بین فضاها باشد، (در اینجا خود را محدود به نگاشت‌های هموار(۱۱۵) بین چندگوناهای(۱۱۶) هموار با ابعاد برابر می‌کنیم.) در اینجا مفهوم درجه(۱۱۷) مطرح می‌شود که نقشی محوری در استدلال زیر بازی می‌کند.

تعریف سردستی درجه وقتی Xرا Yبه می‌نگاریم تعداد نقاطی (یا پیش‌تصویر(۱۱۸) هایی) است از X که به هر نقطه (یا تصویر) Y نگاشته می‌شود. بیان دوبارهٔ این تعریف با اصطلاحات ریاضی به شکل زیر است:

برای

$$y \in Y$$

درجه عبارت است از.

$$\#\{f^{-1}(y)\}$$

مثال: نگاشت

$$f: S^1 \to S^1$$

که با

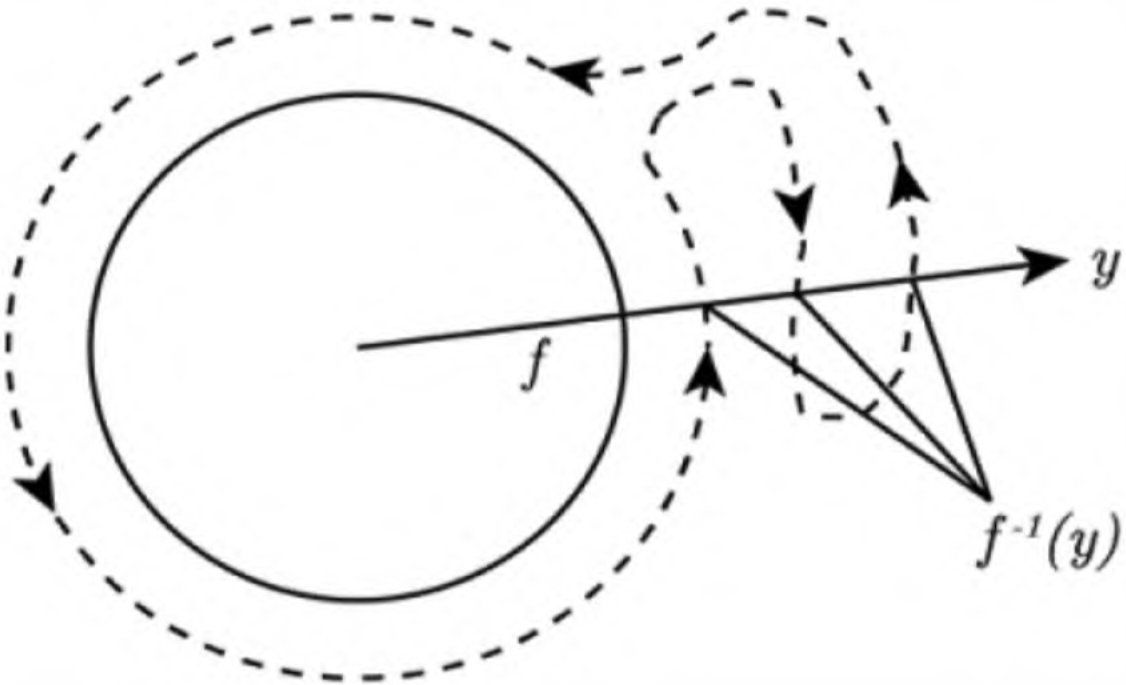
$$\theta \mapsto n\theta$$

داده شده است درجهٔn دارد.
اما پیچیدگی‌هایی پیش می‌آیند مانند مثال زیر:
نگاشتی بین دو دایرهٔ متحدالمرکز

$$S^1 \to S^1$$

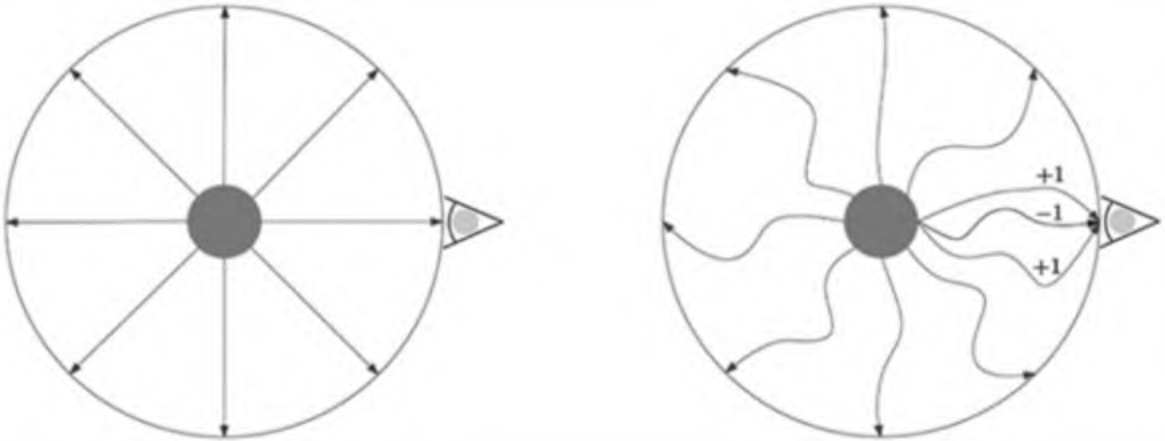
را در نظر بگیرید که دایرهٔ بیرونی به دایرهٔ درونی تصویر می‌شود، به جز آنکه خم (بستهٔ) بیرونی کاملاً دایره نیست بلکه (آن‌گونه که در شکل ۴۷ نشان داده شده است)، دارای یک چین‌خوردگی کوچک است. خط شعاعیْ تعریف‌کنندهٔ نگاشت از دایرهٔ بیرونی به دایرهٔ درونی است. در مکان‌هایی که خط‌های شعاعی چین‌خوردگی را قطع می‌کنند اینچنین می‌نماید که نگاشت از دایرهٔ بیرونی به درونی ۳ به ۱ است و نه ۱ به ۱. اما به‌طور کلی می‌توان گفت که نگاشت را هنوز می‌توان از درجهٔ ۱ دانست اگر این واقعیت را در نظر بگیریم که پیش‌تصویرها «جهت‌ها»ی مختلف دارند که با علامت‌های متفاوت (+ یا -) به آنها منتسب شده است، به طوری که باز می‌توان در شکل ۴۷

دید (نقطهٔ میانی شکل یک علامت منها منتسب به خود دارد). دو پیش‌تصویر با علائم مخالف یکدیگر را خنثی می‌کنند و نگاشتی برای ما باقی می‌گذارند که از درجهٔ ۱ است.



شکل ۴۷. نگاشت از دایرهٔ خط‌چین به دایرهٔ پُر با دنبال کردن خطوط شعاعی تعریف می‌شود. نگاشتی از درجهٔ ۱ می‌تواند شکل نااستانده‌ای(۱۱۹) داشته باشد که کمی روی خود تا می‌خورد و به آن چندین پیش‌تصویر می‌دهد. برای به حساب آوردن این باید جهت پیش تصویر را هم به حساب بیاوریم.

مسألهٔ دیگری باقی می‌ماند: نقاطی وجود دارند که برایشان تعداد زوجی پیش‌تصویر داریم وقتی که دو پیش‌تصویر با علائم مخالف در هم می‌روند و در شرف خنثی کردن یکدیگرند. این برای مجموعه‌ای گسسته رخ می‌دهد، پس می‌توان با اختلال کوچکی در نقطهٔ مورد نظر از آنها اجتناب کرد.(۱۲۰)
اکنون به مسألهٔ پرتوهای نور بازمی‌گردیم. فرض می‌کنیم هیچ چیزی مانع رسیدن پرتوهای نور به ما نشود. مسأله را باز تدوین می‌کنیم به‌نحوی که به شکلی ساده‌تر به سؤال شمارش درجهٔ نگاشت تبدیل شود.



شکل ۴۸. درجهٔ نگاشتی که بر مسیر نور از ستاره به ناظر خارجی حاکم است همیشه ۱ است. در سمت چپ که هیچ مادّه‌ای در میان نیست، درجه به وضوح ۱ است. پس از افزودن مادّه بین ستاره و ناظر نگاشت تغییر می‌کند، اما به دلیل پیوستگی فیزیک، درجه نمی‌تواند پرش داشته باشد. لذا، تعداد خالص تصویرها (با احتساب جهت) هنوز ۱ است.

ستاره‌ای را در نظر بگیرید که تصویرش را مشاهده می‌کنیم. کرهٔ بزرگی را که مرکزش درون ستاره است در نظر بگیرید که از میان ما و ستاره می‌گذرد. حالا کرهٔ بسیار کوچک‌تری را در نظر بگیرید که باز هم به مرکزیت ستاره ولی به اندازه‌ای بزرگ است که خود ستاره را

در بر بگیرد، مثل سطح ستاره (شکل ۴۸). نگاشتی را تصور کنید از کرهٔ کوچک به کرهٔ بزرگ، که از دنبال کردن مسیر نور به دست می‌آید. این نگاشت وجود دارد زیرا فرض کرده‌ایم هیچ پرتوی مسدود نمی‌شود، پس هر پرتوی به بی‌نهایت می‌رسد و به این ترتیب از کرهٔ بزرگ می‌گذرد، و پیوسته است زیرا قوانین فیزیک پیوسته‌اند. ما مشخصاً علاقه‌مند به یافتن درجهٔ این نگاشت هستیم. تجسم کنید که به‌آرامی همهٔ جرم‌های عالم بین ستاره و خودمان را «خاموش کنیم». آن وقت، پرتوهای نور همه خط مستقیم می‌شوند و نگاشت تبدیل به نگاشت همانی

$$S^2 \to S^2$$

می‌گردد، و از این رو درجهٔ ۱ دارد (مانند شکل سمت چپ در شکل ۴۸).

اکنون، تصور کنید که به طور پیوسته جرم‌ها را سر جایشان بگذاریم. درجه همیشه ۱ خواهد بود، چون ارتباط درجه با نگاشت پیوسته است به دلیل این واقعیت که اگرچه سنجه‌ها را تغییر می‌دهیم قانون‌های فیزیک پیوسته‌اند. چون درجهٔ نهایی ۱ است، تعداد پیش‌تصویرها باید فرد باشد. یعنی، ما تعدادی فرد تصویر خواهیم دید به قسمی که وقتی آنها را با توجه به جهتشان با علائم -/+ بشماریم، باید ۱ به دست آوریم. این بدین معنا است که تعداد تصویرها + 2n است، با تصویر دارای جهت منفی. توجه کنید که از نظریهٔ نسبیت اینشتین فقط از پیوستگی استفاده کردیم و نه هیچ چیز دیگر!

نکته‌ای که از این تمرین منتج می‌شود این است که بسیاری از مسائل به‌ظاهر مشکل فیزیک را می‌شود بدون استفاده از فیزیک (نه زیاد، اگر نه اصلاً) حل کرد. باید دقت کنیم که دریابیم آیا گزاره‌های فیزیک را توپولوژی تعیین می‌کند، که در اینجا آن را به چشم قیود می‌بینیم، یا این گزاره‌ها بر اساس جزئیات قوانین فیزیک هستند.

۵. ریاضیات پادشهودی

مقدمات

خوب یا بد، ما تحت فرمان عادتیم. تجربه‌هایی که داشته‌ایم آثارشان را بر ما باقی گذاشته‌اند و به ادراک ما رنگ و بو داده‌اند. بعضی وقت‌ها خرد از این تجربه‌ها برمی‌خیزد، اما ممکن است در این مسیر نیز گاهی تصورات نادرست از این تجربه‌ها برگیریم. وقتی نوبت به ریاضیات می‌رسد، ممکن است رویکردمان به یک مسأله برای یافتن پاسخ درست همراه با تصورات باشد. هرچند در مواردی شهود ارزشمند است، می‌تواند ما را به اشتباه هم بیندازد. اما اندیشه‌های سادهٔ ریاضی اغلب می‌توانند مسائل را روشن کنند. حکایت زیر نشان می‌دهد که چه رخ می‌دهد وقتی شهود ما را به بیراهه می‌برد.

لطیفه

یک ریاضیدان و یک فیزیکدان و یک مهندس تلاش می‌کنند ثابت کنند که تمام اعداد فرد عدد اول‌اند.

ریاضیدان می‌گوید: «۳ فرد است، ۳ عدد اول است، ۵ فرد است، ۵ عدد اول است. ۷ فرد است، عدد ۷ عدد اول است. با استقراء، تمام اعداد فرد عدد اول‌اند.»

فیزیکدان می‌گوید: «۳ فرد است، ۳ عدد اول است، ۵ فرد است، ۵ عدد اول است ۷ فرد است، ۷ عدد اول است ۹ فرد است، ۹ عدد اول نیست. خطای آزمایش. ۱۱ فرد است ۱۱ عدد اول است، ۱۳ فرد است، ۱۳ عدد اول است و قس علیهذا.»

مهندس می‌گوید: «۳ فرد است، ۳ عدد اول است، ۵ فرد است، ۵ عدد اول است ۷ فرد است، ۷ عدد اول است، ۹ فرد است که با تلورانس ۱۰ عدد اول است و قس‌علی‌هذا.»

معما

تجسم کنید که کمربند عظیمی محکم دور استوای زمین بسته شده است. کمربند را باز می‌کنیم و یک متر به طول آن اضافه می‌کنیم. کمربند

چقدر از سطح زمین بلند می‌شود؟ آیا می‌توانید یک برگ کاغذ از زیر آن رد کنید؟ یک موش چطور؟ یا یک آسمانخراش؟

حل

ساده‌اندیشانه‌ترین حدس، بدون اتکاء به هیچ ریاضیاتی این است که کمربند فقط مقدار بسیار کمی بالا می‌آید به طوری که حتی نمی‌توانید یک برگ کاغذ از زیر آن رد کنید. این انتظار که شهودمان ما را به آن هدایت می‌کند غلط از آب در می‌آید. اگر تصور کنید که کمربند را نسبت به زمین یکنواخت بلند کنیم به طوری که دایره باقی بماند، پیرامون دایرهٔ جدید

$$2\pi R + 1$$

خواهد بود که در آن R شعاع زمین است. شعاع دایرهٔ جدیدی که کمربند تشکیل می‌دهد

$$R + 1/2\pi$$

خواهد بود که حدود ۱۶ سانتیمتر بیشتر از R است. هر چند ۱۶ سانتیمتر عظیم نیست، باز هم برای این مسأله، بر اساس آنچه مورد انتظار

بیشتر مردم است، به گونه‌ای تعجب‌آور بزرگ به نظر می‌آید. پس واقعاً به‌راحتی می‌توان موشی را از زیر کمربند رد کرد، همان‌طور که جوندگان بزرگ‌تر و حتی یک گربه را!

وقتی بیشتر متعجب می‌شویم که وضعیتی را در نظر بگیریم که کمربند لازم نیست در تمام جهت‌ها یکسان بلند شود. بیشترین مقداری که می‌تواند بلند شود چقدر است؟ محتملاً ساده‌اندیشانه‌ترین انتظار این است که کمربند را در یک نقطه تا آنجایی که می‌شود بالا بکشیم و این به ارتفاعی حدود نیم متر می‌رسد (سست کردن و تاکردن کمربند به اندازهٔ نیم متر دیگر موجب افزایش ارتفاع به اندازهٔ نیم متر دیگر می‌شود.) اما از قضا وقتی از یک نقطه آن را بالا بکشید به ارتفاع بسیار بالاتری نسبت به استوا می‌رسد. برای پیدا کردن میزان ارتفاع به کمی حسابان نیاز داریم که الآن به آن می‌پردازیم (خواننده‌ای که با حسابان آشنا نیست شاید بخواهد از این قسمت بگذرد). فرض کنیم کمربند فقط در ناحیه‌ای به اندازهٔ زاویه‌ای با زمین مماس نیست (شکل ۴۹). همان‌طور که از شکل می‌شود دید یک متر اضافی طول کمربند (نسبت به محیط زمین)

$$\epsilon = 2R\tan\theta - 2R\theta$$

است و ارتفاع آن از استوا،

$$h = R.\sec\theta - R$$

است.

با فرض کوچک بودنθ و بسط دادن توابع به سری توانی، می توانیم θ را حذف کنیم و رابطه‌ای بین ϵ و h پیدا کنیم:

$$h = \frac{1}{2} R^{1/3} (\frac{3\epsilon}{2})^{2/3}$$

. توجه کنید که وقتی

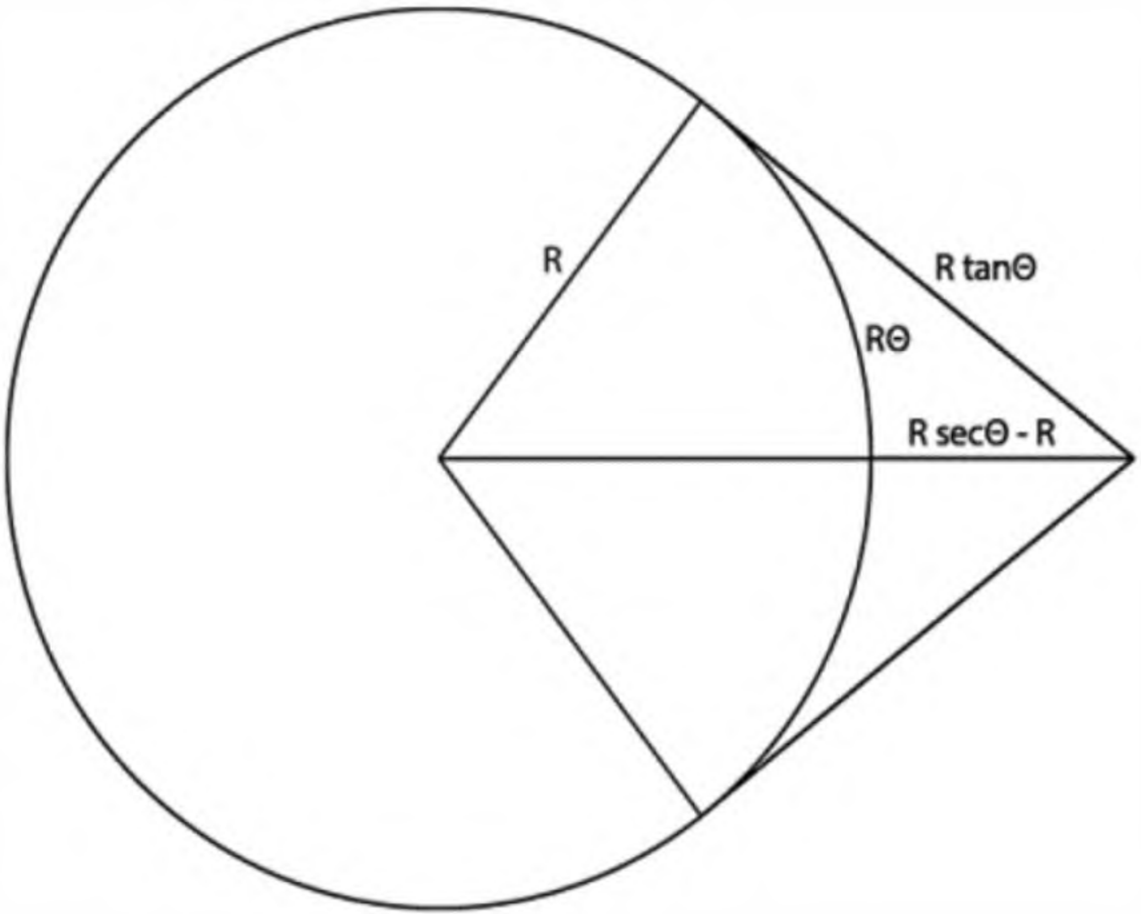
$$\epsilon \to 0$$

، داریم

$$dh/d\epsilon \propto \epsilon^{-1/3} \to \infty$$

. به عبارت دیگر، نسبتی که برای h ارتفاع به طول اضافیϵ به دست می‌آوریم، با صفر شدن طول اضافه شده بزرگ می‌شود. برای R= شعاع زمین و$\epsilon=1$، ارتفاع h=121m را به دست می‌آوریم که واقعاً بر خلاف شهود است. پس واقعاً می‌توانیم یک آسمان‌خراش را از زیر آن رد کنیم! برج ساعت بیگ‌بن هم به‌راحتی زیر کمربند جا می‌گیرد، و همین‌طور مجسمهٔ آزادی شامل پایه و نوک مشعل آن.

با استدلالی که به دنبال می‌آید این را می‌توانیم شهودی‌تر کنیم: ابتدا توجه کنید که دایره بیشترین مساحت را در میان همهٔ شکل‌ها با محیط معین، دارد. پس اگر دایره را کمی تغییر شکل دهیم، مساحتش تغییر مهمی نمی‌کند (چون به هر حال بیشینهٔ مساحت را داریم). چیزی که در این راه‌حل دوم انجام داده‌ایم این است که تمام مساحت بین کمربند و زمین را از جواب اول برداشته‌ایم و زیر گوشهٔ کوچکی از کمربند قرار داده‌ایم. به همین علت است که موفق شده‌ایم چنان ارتفاع زیادی را به دست بیاوریم.


R
R tanΘ
RΘ
R secΘ - R

شکل ۴۹. کمربند که از یک طرف کشیده شود به ارتفاع ۱۲۱ متری از استوا می‌رسد، هرچند که طول اضافه شده به کمربند فقط یک متر بود.

معما

تعداد نقطهٔ نوعی را روی دایره‌ای انتخاب کنید و تمام جفت‌های نقطه‌ها را با خط‌های راست به هم وصل کنید. این درون دایره را به قسمت‌های زیادی تقسیم می‌کند. سؤال این است که پیدا کنیم برای تعداد مفروضی از نقاط روی محیط دایره این مساحت به چند قسمت بخش شده است. مثلاً برای$n=۲$ ما دو ناحیه به‌دست می‌آوریم و برای $n=۳$ چهار ناحیه. آیا فرمولی کلی وجود دارد، و اگر دارد چیست؟

حل

برای مقادیر کوچک جواب‌ها به قرار زیرند.

n	تعداد نواحی
2	2
3	4
4	8
5	16

این پاسخی به شکل ۲ را پیشنهاد می‌کند. حتی شاید بشود توضیح سریعی برای امکان صحیح بودن آن داد: هر نقطهٔ جدید خطوطی اضافه تولید می‌کند که هر ناحیه را به دو قسمت می‌کند، بدین‌ترتیب تعداد نواحی هر بار که نقطهٔ جدیدی اضافه می‌کنید طبیعتاً دو برابر می‌شود.

فقط یک مشکل در مورد این استدلال وجود دارد: جوابی که می‌دهد غلط است! برای۶ =n،
۳۱ ناحیه به‌دست می‌آوریم و نه ۳۲. به همین‌سان، برای،۷=n
۵۷ ناحیه به‌دست می‌آوریم و نه ۶۴. جواب کلی بر حسب ضرایب دو جمله‌ای عبارت خواهد بود از،(۱۲۱)

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

بیایید به این سه جمله بیندیشیم. اگر هیچ خطی نباشد یک ناحیه برای شروع داریم. این جملهٔ اول را توضیح می‌دهد. برای هر خط اضافه ناحیه‌ای تازه به دست می‌آوریم. که عبارت

$$\binom{n}{2}$$

را توضیح می‌دهد زیرا این تعداد خط‌ها است وقتی که یک جفت نقطه از میان n نقطه انتخاب کنیم. اما برای هر گروه متشکل از چهار نقطه، یک نقطهٔ تقاطع اضافی خواهیم داشت که یک ناحیهٔ اضافه می‌سازد. این جملهٔ

$$\binom{n}{4}$$

را روشن می‌کند. می‌توانید خود را قانع کنید که هیچ منبع دیگر دیگری برای انحراف وجود ندارد.

در ابتدا این فریب را خوردیم که باور کنیم پاسخ ۲ است، زیرا خیلی ساده است و تا۵ =n کار می‌کند. به‌علاوه، شاید فقط با دیدن این الگو وسوسه شدیم که فکر کنیم این جواب تا بی‌نهایت کار می‌کند، که نادرست است (مخصوصاً اینکه آزمودن آن برای مقادیر بیشتر n به شکلی فزاینده دشوار و دشوارتر می‌شود). به بیانی دیگر، آزمایش کردن مهم است اما داشتن تعداد کمی آزمایش می‌تواند بالقوه ما را منحرف سازد. درسی که خیلی‌ها، و به‌ویژه فیزیکدانان باید بگیرند، اجتناب از جهش سریع به نتیجه‌گیری است و ادامه دادن به آزمودن.

اما ممکن است باز هم از خود بپرسیم که آیا توضیح دیگری برای اینکه چرا این مسأله ما را به بیراهه برد وجود دارد. این اتحاد را در نظر بگیرید:

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n-1}$$

(برایn های فرد، جملهٔ آخر

$$\binom{n}{n-1}$$

است). این را می‌توانید با استفاده از بسط دوجمله‌ایِ

$$(1-1)^n=0 \text{ و } (1+1)^n=2^n$$

ثابت کنید. فرمول بالا تا n=۵ با جوابی که داریم می‌خواند، و این روشن می‌کند که چرا پاسخ نمایی را برای n<۶ کوچک به‌دست می‌آوریم. اما برای n های بزرگ‌تر، چون (ضرایب) دوجمله‌ای بالاتر را نداریم، جواب‌های بعد از آن از انتظارات اولیهٔ ما دور می‌شود. خلاصهٔ کلام، نه تنها موفق شدیم پاسخ درست این مسأله را بیابیم، بلکه توانستیم به عقب نگاه کنیم و توضیح دهیم که چگونه و چرا و کجا به بیراهه رفتیم.

معما

اگر

$$n \leq 3$$

خط کلی روی صفحه بکشیم، چند ناحیه روی صفحه به‌دست می‌آید؟ همین سؤال را در سه بعد در نظر بگیرید: اگر

$$n \leq 4$$

صفحهٔ نوعی داشته باشیم، چند ناحیه به‌دست می‌آوریم؟ به‌طور عام

$$n \leq d + 1$$

ابرصفحهٔ عمومی درd بُعد در نظر بگیرید. ابرصفحه صفحه‌ای است با یک بُعد کمتر از فضایی که در آن قرار دارد. ابرصفحه‌ها این فضا را به چند ناحیهٔ یکپارچه تقسیم می‌کنند؟

حل

جواب این است:

$$\sum_{i=0}^{\min(d,n)} \binom{n}{i}$$

سعی کنیم برای مقادیر کوچک شهودی در مورد این جواب پیدا کنیم. اگرd=۲، آن‌وقت ابرصفحه چیزی نیست مگر یک خطR (یک‌بعدی). یک خط را به دو ناحیه تقسیم می‌کند، دو خط به چهار ناحیه، ۳ خط آن را فقط به ۷ ناحیه بخش می‌کند نه ۸ ناحیه. اگر d=۳ باشد، ابرصفحه یک صفحهٔ معمولی (دوبعدی) است. یک صفحه R را به دو ناحیه بخش می‌کند، دو صفحه آن را به ۴ ناحیه، ۳ صفحه آن را به ۸ ناحیه، ولی ۴ صفحه آن را به ۱۵ ناحیه، و نه ۱۶ ناحیه تقسیم می‌کند. در حد

$$d \to \infty$$

، جواب به‌ازای هرn برابر ۲ است. برای d متناهی فقط اگر

$$n \leq d$$

جواب ۲ است.

این پدیده‌ای است که در فیزیک بسیار رخ می‌دهد. عبارت‌های زیادی هستند که در حدهای مختلف ساده می‌شوند. در این مورد ساده شدن در حد

$$d \to \infty$$

رخ می‌دهد.

پارادوکس‌های بی‌نهایت

بی‌نهایت مفهومی است که چند هزار سال است انسان‌ها را هم برانگیخته و هم سردرگم کرده است. فیلسوف یونان باستان، زنون الئایی(۱۲۲) مجموعه‌ای از پارادوکس‌هایی در مورد بی‌نهایت طراحی کرد که به نتایجی به ظاهر باطل می‌رسیدند ــ و تا امروز حداقل نه‌تای آنها به یاد مانده است. بیش از ۲۴۰۰ سال بعد، هنوز مفهوم بی‌نهایت برای ما رازها در بر دارد.

مجموعهٔ اعداد مثبت یا اعداد طبیعی

$$\mathbb{N}$$

، که به‌خوبی شناخته‌شده است نامتناهی است. بین هر دو عدد طبیعی روی محور حقیقی به تعداد نامتناهی عدد گویا وجود دارد (که به صورت نسبت دو عدد صحیح می‌توان نوشت). پس شهود ما ممکن است بگوید ــ و شاید به اندازهٔ کافی هم منطقی بنماید ــ که یکی از آنها ــ یعنی اعداد گویا ــ نامتناهی‌تر از سایر اعداد صحیح است. در آن صورت شهود ما نادرست خواهد بود، چون یک تناظر یک به یک یا دوسویه بین اعداد صحیح و اعداد گویا وجود دارد. تعداد کل یا کاردینالیتهٔ اعداد گویا

$$\mathbb{Q}$$

به همان اندازهٔ

$$\mathbb{N}$$

است.
یکی از راه‌های به تصویر کشیدن آن این است که اعداد گویای

$$\frac{p}{q}$$

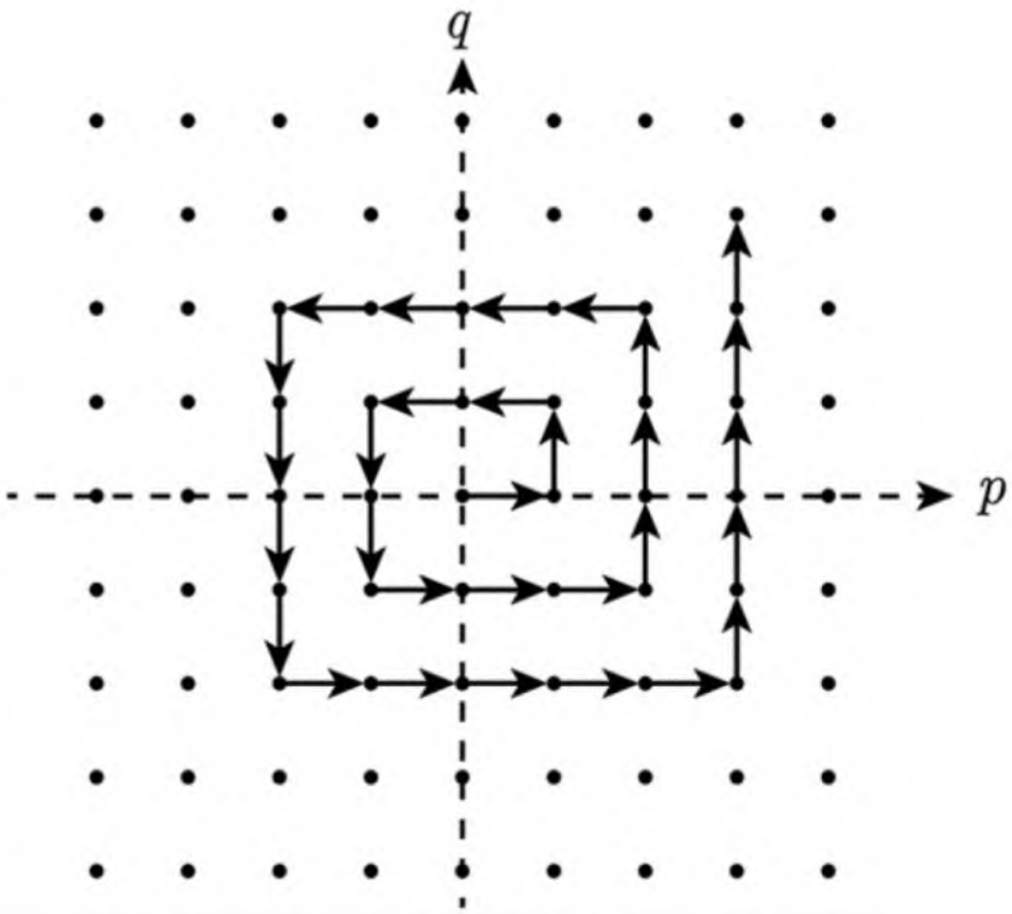
را روی یک شبکه نشان دهیم و اعداد صحیح مثبت را مانند یک مارپیچ دور آن «بپیچیم» (شکل ۵۰). می‌بینیم که اگر شمارش نقاط روی شبکه را آغاز کنیم در ضمنی که به طور مارپیچی می‌چرخیم، و نقاط تعریف‌نشده (وقتی که $q=0$) یا ساده‌نشده (وقتی که p و q مضرب یک عدد صحیح‌اند) را نادیده بگیریم، یک تناظر یک به یک بین

$$\mathbb{Q}$$

و

$$\mathbb{N}$$

به‌دست می‌آوریم.


q
p

شکل ۵۰. به همان تعداد عدد صحیح داریم که عدد گویا. این را با پیچیدن اعداد صحیح مثبت و پوشاندن هر جفت از اعداد صحیح با حرکت مارپیچی به دور صفحه می‌توان دید.

حالا مجموعهٔ اعداد حقیقی

$$\mathbb{R}$$

و مجموعه

$$\mathbb{R}^2$$

نقاط روی صفحه را در نظر بگیرید. هر دو به‌وضوح نامتناهی (بی‌نهایت) هستند، اما دومی به نظر خیلی بزرگ‌تر از اولی می‌آید. با وجود این هر دو یک کاردینالیته دارند. یکی از راه‌های نگاشت یک تناظر یک به یک این است که بسط ده‌دهی (اعشاری)

$$x = x_1 x_2 x_3 \ldots$$

را در نظر بگیریم و یک زوج اعداد حقیقی بسازیم،

$$x_1 x_3 x_5 \ldots$$

و

$$x_2 x_4 \mathrm{x}_6 \ldots$$

.این هنوز کامل نیست ولی ایده را به چنگ می‌آورَد

تعداد اعداد حقیقی بیش از اعداد صحیح است، اما آیا مجموعه‌هایی هستند که کاردینالیته‌ای مابین آنها داشته باشند؟ این مربوط به فرضیهٔ پیوستار(۱۲۳) می‌شود، که مدعی است چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. اما این فرض را نه می‌توان ثابت کرد و نه رد. به عبارت دیگر، ما می‌توانیم انتخاب کنیم که این واقعیت (یا نقیضش) را به‌عنوان یک اصل موضوع اضافه کنیم و باز هم یک دستگاه ریاضی موجه داشته باشیم بدون اینکه یقین بدانیم که این فرض درست است یا نادرست.

در این ارتباط قضیه‌ای در منطق هست، مشهور به قضیهٔ ناتمامیت گودل(۱۲۴) که می‌گوید در هر سیستم منطقی سؤال‌هایی وجود دارند که صحت یا سقمشان در آن چارچوب قابل اثبات نیست. از این رو فیزیکدان دچار این نگرانی می‌شود که آن قوانینی از عالم را که کشف می‌کنیم ممکن است هرگز کامل نباشند. بر اساس قضیهٔ ناتمامیت گودل ممکن است که نه واقعیت فیزیکی، و نه صحت برخی پدیده‌های فیزیکی با اتکا بر یک مجموعهٔ متناهی از اصول موضوع یا قوانین مسجل نگردند. در حال حاضر این از مسائل ضروری و فوری فیزیک معاصر نیست. اما ممکن است در آینده که نظریه‌ها پخته‌تر شوند و ما را به مرزهای حقیقت نزدیک‌تر کنند ضرورت و فوریت پیدا کنند!

مسألهٔ مهمانخانهٔ هیلبرت(۱۲۵)

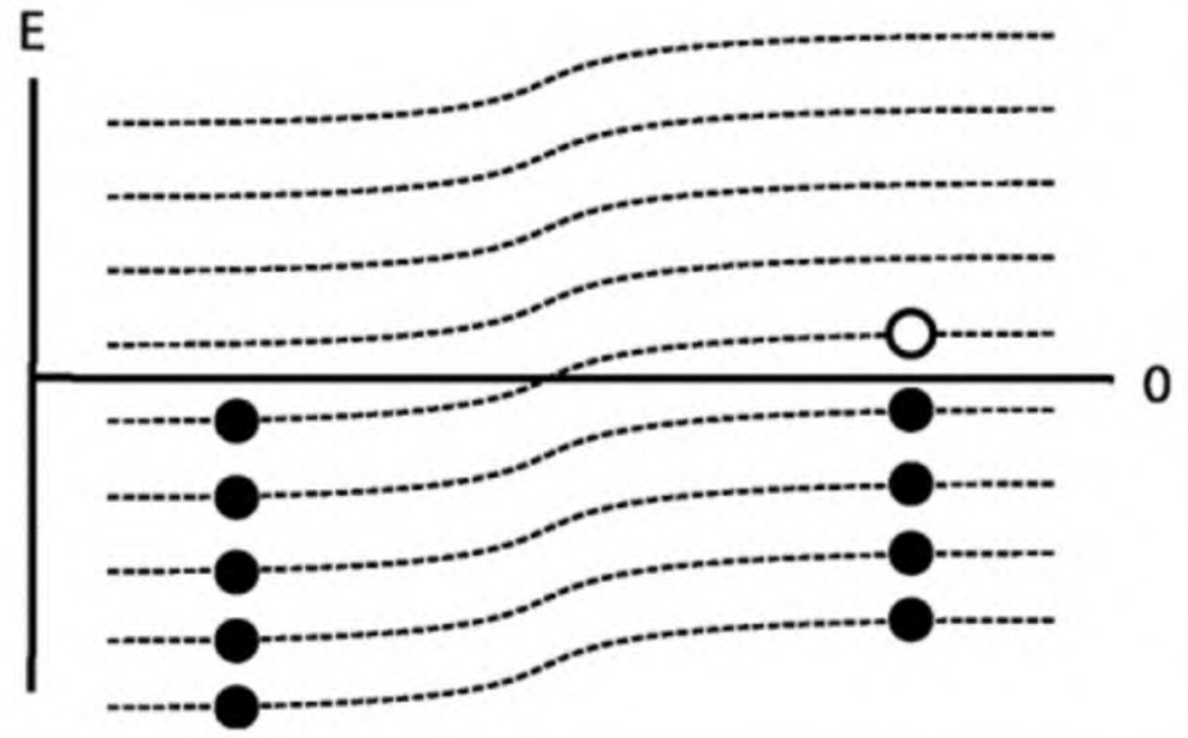
مثال مشهور دیگر در مورد بی‌نهایت، مسألهٔ فکری در ارتباط با مهمانخانهٔ هیلبرت است.

معما

مهمانخانه‌ای تعداد نامتناهی اتاق دارد که با اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و... برچسپ خورده‌اند. مسافری درخواست اتاق می‌کند، اما به او می‌گویند که همهٔ اتاق‌ها پرند. آیا مسافر می‌تواند راه‌حلی پیشنهاد کند؟ چه می‌شود اگر به‌تعداد بی‌نهایت (شمارش‌پذیر) مسافر یکباره از راه برسند. آیا راه‌حلی برای جا دادن همهٔ آنها وجود دارد؟

حل

آری! اگر یک مسافر پیدایش شود، پیشنهاد کند که هر کس اتاقش را یکی به راست منتقل کند، $n \to n+1$، و ناگهان یک اتاق خالی پیدا می‌شود، یعنی اتاق شمارهٔ ۱. و اگر تعداد بی‌نهایت ولی شمارش‌پذیر مسافر از راه برسند، می‌توان از مسافرین مهمانخانه خواست خود را به اتاقی با شمارهٔ دوبرابر منتقل کنند، و به تعداد بی‌نهایت ولی شمارش‌پذیر اتاق با شمارهٔ فرد خالی شود!



شکل ۵۱. پس از یک انتقال انرژی به بالا، حالت‌های درون دریای دیراک یک پله بالا می‌آیند و در این فرایند یک الکترون خلق کرده‌ایم!

عجیب اینجاست که این پارادوکس‌ها در فیزیک کاربرد دارند! مثال دیراک را به یاد بیاورید، که در آن بی‌نهایت الکترون حالت‌های انرژی منفی «دریای دیراک» را پر می‌کنند. قابل تصور است که همهٔ الکترون‌ها همزمان یک لایه بالا بروند (شکل ۵۱). در مکانیک کوانتومی، واقعاً می‌توان با بالا بردن سطوح انرژی الکترون خلق و رفتاری مشابه را القا کرد! به همین‌سان، اگر همهٔ الکترون‌ها یک لایه پایین بروند ما می‌مانیم و سوراخ با «بار مثبت» ــ یعنی پوزیترون. باید آسیب‌ها یا پارادوکس‌های ریاضی مربوط به بی‌نهایت را که ممکن است به‌طور بنیادی نامعقول نباشند جدی بگیریم؛ گهگاه ممکن است واقعاً مدلی برای واقعیت باشند!

معما

(ریاضیات پادشهودی). فرض کنید باید دو نوع قرص (A و B) را روزانه از هرکدام یکی مصرف کنید. قرص‌ها به چشم غیرقابل تمیزند. یک روز تصادفاً دو قرص از نوع B و یک قرص A را با هم قاطی می‌کنید. چطور آنها را مصرف کنیم بدون آنکه این سه قرص را تلف کنیم؟

حل

یک قرص از نوع A را بردارید و به سه قرص مشکوک اضافه کنید. بعد هر قرص را نصف کنید، به‌دقت نصفه‌ها را به دو دستهٔ کاملاً مجزا تقسیم کنید. حالا دو دسته داریم هریک با میزان مصرف روزانهٔ صحیح.

معما

در یک میهمانی هستید که از پنج زوج تشکیل شده است. هر کس با کسی دست می‌دهد که تا کنون او را نمی‌شناخته است. هر کس به‌جز همسرتان به شما می‌گوید که با تعداد متفاوتی دست داده است. همسرتان با چند نفر دست داده؟

حل

هرکس می‌تواند حداکثر با ۸ نفر دست داده باشد. (هرکس خود و همسرش را می‌شناخته!) روی‌هم‌رفته ۹ امکان مصافحه و ۱۰ نفر داریم، پس همسرتان باید به اندازهٔ یک شخص دیگر دست فشرده باشد.

یک نفر از چهار زوج باید ۸ بار دست داده باشد و یک نفر هیچ دستی نداده باشد. کسی که ۸ بار دست داده باید با همه به‌جز همسرش مصافحه کرده باشد. پس این شخص باید همسر آن کسی باشد که با هیچ فردی دست نداده. به همین طریق می‌توانیم (۷ و ۱) و (۶ و ۲) (۵ و ۳) را با هم جفت کنیم. توجه کنید که تمام آنهایی که اشاره کردیم به تعدادی متفاوت دست داده‌اند. فقط یک امکان باقی می‌ماند: شما و همسرتان باید هر یک ۴ بار دست داده باشید.

سری‌های تحلیلی

ریاضیدانان دوست دارند معنای معماهایی از نوع زیر را که بعضی وقت‌ها در فیزیک هم پیش می‌آید، درک کنند. به‌عنوان یک سؤال سخت بیایید ثابت کنیم که:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots = -1$$

فرض کنیم.

$$x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots$$

آنگاه به‌سادگی می‌بینیم که اگر آن را در ۲ ضرب کنیم و ۱ را به آن بیفزاییم داریم،

$$2x + 1 = x$$

که ایجاب می‌کند:1- =x. این نتیجه‌ای پادشهودی است که معذلک صحیح است. هرچند این محاسبه ساده دقت نداشت، می‌توانیم با ابزار «اتساع تحلیلی»(۱۲۶) ریاضی‌وار دقیق‌تر باشیم. بسط

$$(1 - x)^{-1}$$

را به یاد بیاورید که به سری هندسی زیر بازمی‌گردد،

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

سمت راست معادله فقط برای

$$|x| < 1$$

معنا دارد. ولی سمت چپ حتی برای

$$|x| > 1$$

هم معنا می‌دهد. می‌توانیم از سمت چپ برای درک آنچه از سمت راست مورد نظرمان است استفاده کنیم حتی اگر

$$|x| > 1$$

. این را یک اتساع تحلیلی آن چیزی می‌خوانند که سمت راست برای

$$|x| > 1$$

نشان می‌دهد.

مثالی دیگر، جمع اعداد طبیعی است،

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

این واقعیت که این حاصل‌جمع متناهی و منفی است دوباره ناقض شهود است. می‌توان تابعی تحلیلی به شکل زیر تعریف کرد، که تابع زتای ریمان(۱۲۷) خوانده می‌شود:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

این تابع در صفحهٔ مختلط و برای با مقدار حقیقی بزرگ‌تر از ۱ تعریف می‌شود، اما می‌توان آن را به صورت تحلیلی در صفحهٔ مختلط به یک تابع یکتا اتساع داد، درست همان‌طور که در مورد سری هندسی فوق انجام دادیم. اما وقتی این کار را می‌کنیم،

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

از کار در می‌آید. اگر ساده‌لوحانه 1- =S را در رابطهٔ مشخص‌کننده جایگزین کنیم، ناچاریم نتیجه بگیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

این نوع محاسبه باز هم در فیزیک پیدا می‌شود (مخصوصاً در کشف تعداد ابعادی که ریسمان‌های بوزونی در آن زندگی می‌کنند)، که از معادلهٔ

$$(d-2)\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\right) = -1 \Rightarrow d = 26$$

می‌آید، که در آن d تعداد ابعاد است. این همان جایی است که ۲۶ بُعدِ گونه‌های اولیهٔ نظریهٔ ریسمان از آن سرچشمه می‌گیرد.(۱۲۸)

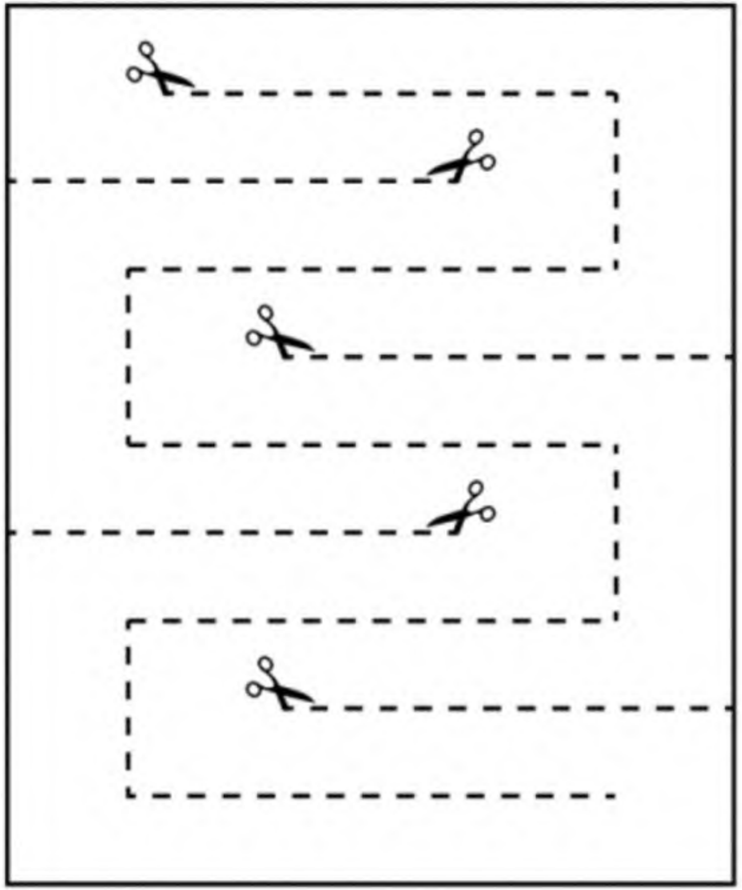
در جای جای فیزیک تکینگی(۱۲۹)ها ظاهر می‌شوند ولی ما به اندازهٔ کافی مجهز نیستیم که با آنها سروکله بزنیم. اما می‌توانیم از این تکینگی‌ها رد شویم و نقاط خوش‌تعریفی را در ورای آن کشف کنیم. به همین دلیل است که تفکرات ناشی از آنالیز مختلط به کار فیزیک نظری می‌آیند. وقتی با این گونه سری‌های بی‌نهایت روبه‌رو می‌شویم سعی می‌کنیم به طور تحلیلی پیش برویم، یعنی تلاش می‌کنیم توابعی مانند تابع زتا بیابیم که حتی در ناحیه‌ای که انتظار نداریم معنادار شوند. برخی اوقات ممکن است راه پیشرفت تحلیلی یکتا نباشد، اما اگر روش‌های مختلف یک جواب به ما بدهند، آن وقت با اطمینان بیشتر می‌توان آنها را در یک نظریهٔ فیزیکی به کار برد.

معما

چیزی آشنا را در نظر بگیریم ــ قطعه‌ای کاغذ تحریر استاندارد. یک قیچی هم دارید، و می‌خواهید کاغذ را چنان ببرید که یکپارچه بماند، اما تمام بدن شما هم از درون آن رد شود. آیا این امکان دارد؟

حل

ممکن است مسلّم فرض کنید که معلوم است چنین امکانی وجود ندارد برای اینکه کاغذ به همین اندازه است و نمی‌شود آن را خیلی بزرگ‌تر کرد. با وجود این، همان‌طور که در زیر می‌بینید، تکلیف تعیین شده واقعاً انجام‌شدنی است ــ با بریدن کاغذ در امتداد خطوط مشخص شده.



کسانی که این نتیجه را شگفت‌آور و در تضاد با درک بالبداهه‌شان می‌یابند، ممکن است با این واقعیت به اشتباه افتاده باشند که مساحت و محیط چیزهای متفاوتی هستند که لزومی ندارد مقیاس‌هایشان خیلی هم‌خوان باشند. این شبیه همان راهی است که شاید برخی از ما در مسألهٔ کمربند بسته‌شده دور استوای زمین فریبش را خوردیم.

معما

صد سکه داریم که در اتاقی تاریک پراکنده شده‌اند. ۹۰ تای آنها سوی شیرشان بالا است و ۱۰ تا خط‌شان. و نمی‌توانید (مثلاً با لمس کردن) شیر یا خط بودن‌شان را تشخیص دهید. چگونه سکه‌ها را به دو دسته تقسیم کنیم که هردو به یک تعداد خط باشند؟

حل

توجه کنید که دسته‌ها لازم نیست به یک اندازه باشند! ده سکه را به‌دلخواه به‌عنوان یک دسته انتخاب کنید، بعد همهٔ ده سکه را در این دسته برگردانید. حالا تعداد خط‌ها در این دسته برابر تعداد خط‌ها در دستهٔ ۹۰ تایی دیگر است!

شاید تعجب کنید که این مسأله که سخت می‌نماید اینچنین راه‌حل ساده‌ای داشته باشد. برای اینکه ببینید درست است، فرض کنید در دستهٔ ده تایی x تا خط بود. چون از اول جمعاً ده خط داشتیم باید

x-10

عدد خط در دستهٔ ۹۰ تایی داشته باشیم. وقتی هر ده سکه را در دستهٔ کوچک‌تر برگردانید، خط در آن دسته شیر می‌شوند و باقیماندهٔ سکه‌ها که باید 10-x تا شیر باشند، تبدیل به خط می‌شوند. این برابر تعداد خط‌ها در دستهٔ بزرگ‌تر می‌شود. پس راه‌حل در واقع درست است و چیزی که لازم داشت کمی ریاضیات ابتدایی بود.

معما

خم $y=۱/x$ را از x-۱ تا x-۱

$$x = \infty$$

در نظر بگیرید. اگر آن را حول محور بچرخانید سطحی قیف‌مانند به‌دست می‌آورید به نام صور اسرافیل(۱۳۰) (شکل ۵۲). چقدر آب می‌توان داخل این سطح ریخت؟ و آیا می‌توانید این سطح را «رنگ‌آمیزی» کنید؟

شکل ۵۲. صور اسرافیل با حجم متناهی ولی مساحت بی‌نهایت.

حل

غیرممکن است که این سطح را رنگ‌آمیزی کنید چون مساحتش بی‌نهایت است، هر چند حجمی متناهی دارد و می‌تواند مقدار محدودی آب را در خود جای دهد. مساحت را می‌توانید به صورت زیر محاسبه کنید

$$A = \int_1^\infty \frac{2\pi\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx = \infty$$

اما، حجم متناهی است:

$$V = \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2} dx = \pi$$

این معمای پادشهودی تصور ما را از رنگ کردن «چیزی» به چالش می‌کشد. از لحاظ فیزیک، معنی‌اش پوشاندن سطحی است با ضخامتی مثبت و یکنواخت از رنگ، اما از نگاه ریاضی، ضخامت به صفر می‌رود. از این رو حجم و مساحت را حقیقتاً نمی‌توان مقایسه کرد. به قول معروف، آنها به اندازهٔ کافور و نمک متفاوتند.

پارادوکس مونتی هال

معما

در یک بازی شرکت دارید که مجری جایزه‌ای را در یکی از سه جعبهٔ دربسته گذاشته است. از شما خواسته‌اند که یکی از سه جعبه را انتخاب کنید. پس از انتخاب آن، ولی قبل از گشودنش مجری یکی از دو جعبه را که می‌داند جایزه‌ای در آن نیست باز می‌کند. بعد به شما این آزادی را می‌دهد که انتخاب خود را تغییر دهید. آیا با تغییر انتخاب اقبال بهتری دارید یا نه؟

حل

همیشه بهتر است که انتخاب خود را تغییر دهید، چون در ابتدا شانس شما برای انتخاب درست

$$\frac{1}{3}$$

است پس شانس بعد از تعویض برابر است با.

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

بسیاری از مردم این را ناشهودی می‌یابند، چون به نظر می‌آید که انگار ½ احتمال باید باشد. بخشی از این شهود از روانشناسی نشأت می‌گیرد: یا مایل نیستیم به مجری اعتماد کنیم یا مقاومیم به تغییر. و بخشی دیگر از این واکنش طبیعی آشکارا نادرست است و استفادهٔ نادرست از نظریهٔ احتمال به شمار می‌آید. برای اینکه وضعیت را شهودی‌تر کنیم، تصور کنید به جای سه جعبه، صد جعبه داریم. پس از اینکه شما اول جعبه‌ای انتخاب کردید، مجری ۹۸ جعبه را که می‌داند خالی‌اند باز می‌کند. آیا جعبه‌تان را با جعبهٔ باقی‌مانده عوض می‌کنید؟ در این صورت باید بدون هیچ محاسبه‌ای واضح باشد که بهترین نفع شما عوض کردن است. بر خلاف تصورتان، بسیار نامحتمل است که انتخاب

$$\frac{1}{100}$$

اول شما، انتخابی درست بوده باشد!

این هم مثال ابلهانه‌ای از اینکه چگونه تمایلات روانی (و کاربرد به‌ظاهر موجه احتمالات) می‌تواند ما را منحرف کند: وقتی برخورددهندهٔ بزرگ هادرونی(۱۳۱) (LHC) را در آزمایشگاه سرن می‌ساختند کسی ادعا کرد که ۵۰% احتمال دارد که سرن، با تولید یک

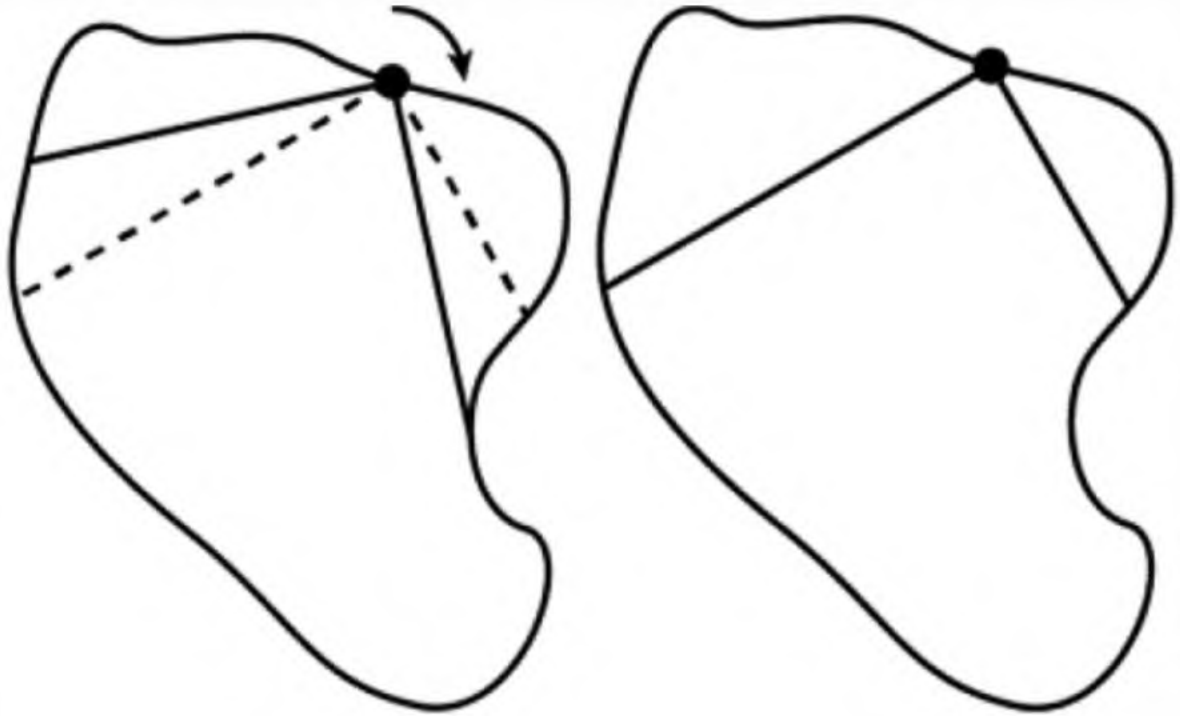
سیاهچاله در برخورددهنده، زمین را به نابودی بکشاند. استدلال بر اساس دلایل غیرمنطقی زیر بنا شده بود: LHC یا زمین را نابود خواهد کرد یا نه، پس هریک ۵۰% احتمال دارد.(۱۳۲)

معما

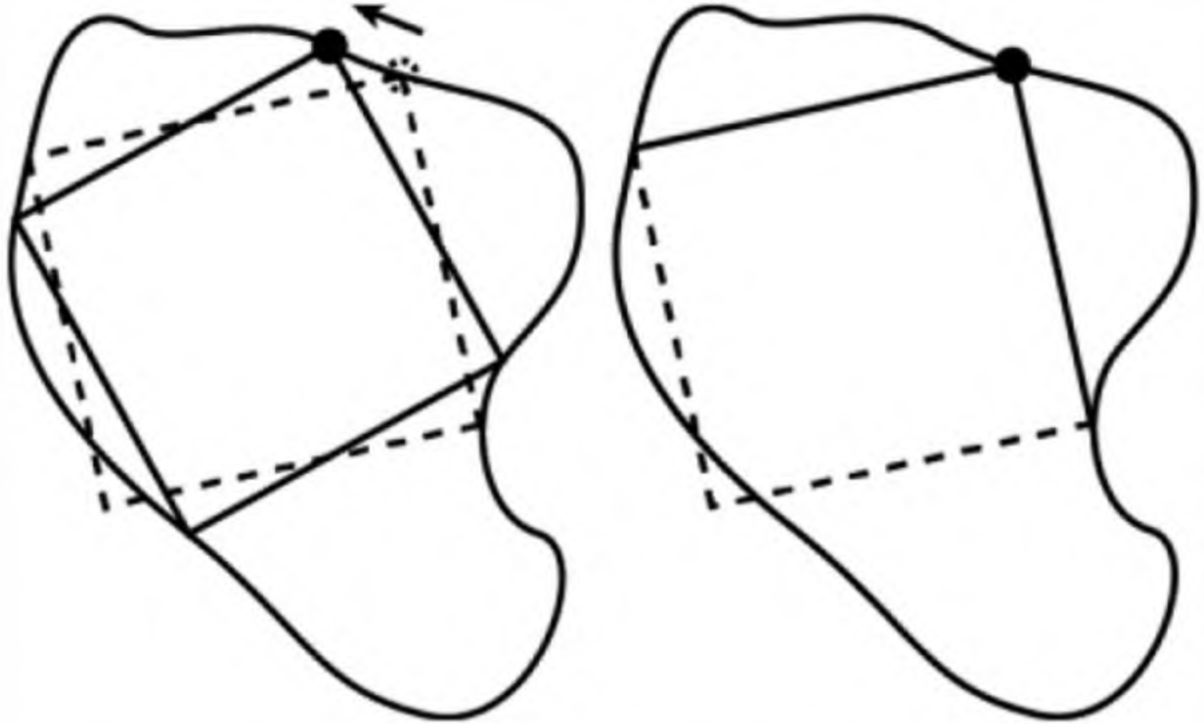
آیا می‌توان خم بسته‌ای روی صفحه رسم کرد که هیچ مربعی در آن محاط نشود؟

حل

باور بر این است که می‌توان (بر اساس حدس تپلیتس(۱۳۳))، اما به‌درستی نمی‌دانیم. اتو تپلیتس(۱۳۴) این مسأله را در ۱۹۱۱ پیش کشید(۱۳۵) و حالت خاص آن را ثابت کرد (زمانی که خم قطعه قطعه نمودارِ تابعی هموار باشد) ــ به بیانی دیگر، برای خمی بسته و پیوسته که خود را قطع نمی‌کند ــ پس همیشه می‌توان یک مربع را در آن محاط کرد. در ابتدا این گزاره ممکن است خیلی ناشهودی جلوه کند، اما چندان دشوار نیست که بر اساس انتخاب‌های موجود ــ انتخاب یک رأس مربع، و بعد تصمیم‌گیری در مورد اندازهٔ آن و زاویهٔ جهتش برای جا دادن سه رأس دیگر ــ استدلال کنیم که درجات آزادی به تعداد کافی وجود دارد تا این حدس محقق شود (شکل ۵۳).



الف. اول نقطه‌ای روی خم انتخاب می‌کنیم و دو پاره‌خط متعامد می‌کشیم.
ب. می‌توان آنقدر این پاره‌خط‌ها را چرخاند تا طولشان مساوی شود.



ج. آنگاه مربع تعریف‌شده را با پاره‌خط‌ها کامل می‌کنیم. حیف که آخرین رأس روی خم قرار نمی‌گیرد.
د. مراحل قبل را برای تمام نقاط روی خم تکرار می‌کنیم. بالأخره یک مربع محاط پیدا می‌کنیم.
شکل ۵۳. حالت خاص حدس تپلیتس: هر خم هموار روی صفحه چهار رأس یک مربع محاطی را در بر می‌گیرد.

معماهای منطقی اغلب بسیار پادشهودی‌اند. این هم یک مثال.

معما

به محکومی گفته‌اند او هفتهٔ آینده در یکی از روزهای دوشنبه تا جمعه حکمش اجرا خواهد شد. او همچنین به دلایل قانونی مطمئن است که قادر نخواهد بود روز اجرای حکم را بداند و فقط ۱۰ صبح همان‌روز مطلع خواهد شد. او نتیجه گرفته است که مجازات نخواهد شد. آیا می‌توانید استدلال او را توضیح دهید؟

حل

اگر قرار بود او را روز آخر مجازات کنند، او می‌توانست روز پنجشنبه این را بفهمد، در نتیجهٔ این واقعیت که پنجشنبه آخرین روزی است که او ممکن است مجازات شود. چون این بر خلاف قولی است که به او داده‌اند، پس می‌داند که روز جمعه حکم اجرا نخواهد شد. اما از طرفی، با همان منطق استقرائی، او روز ماقبل آخر هم مجازات نخواهد شد. با ادامهٔ روز به روز این منطق، او نتیجه می‌گیرد تا زمانی که قولی که به او داده شده پابرجاست، اصلاً مجازات نمی‌شود.

خشنود از این استدلال، او مطمئن بود که نخواهد مرد. اما، روز سه‌شنبه مجازات شد، و او نه از یک روز قبل این را می‌دانست، و نه می‌توانست پیش‌بینی کرده باشد. به این ترتیب شرایطی که به او اعلام شده بود هم برآورده شد و او با فرجامی روبه‌رو شد غیرقابل پیشبینی ولی قابل انتظار!

مثالی دیگر: اعداد مختلط را در نظر بگیرید. برای معادلهٔ

$$x^2 = -1$$

نمی‌توان پاسخی به صورت عدد حقیقی یافت، پس به سادگی عدد i را خلق می‌کنیم که طبق تعریف i مساوی ۱- باشد! اعداد مختلط را به صورت زوج اعداد حقیقی با دستور ضرب زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

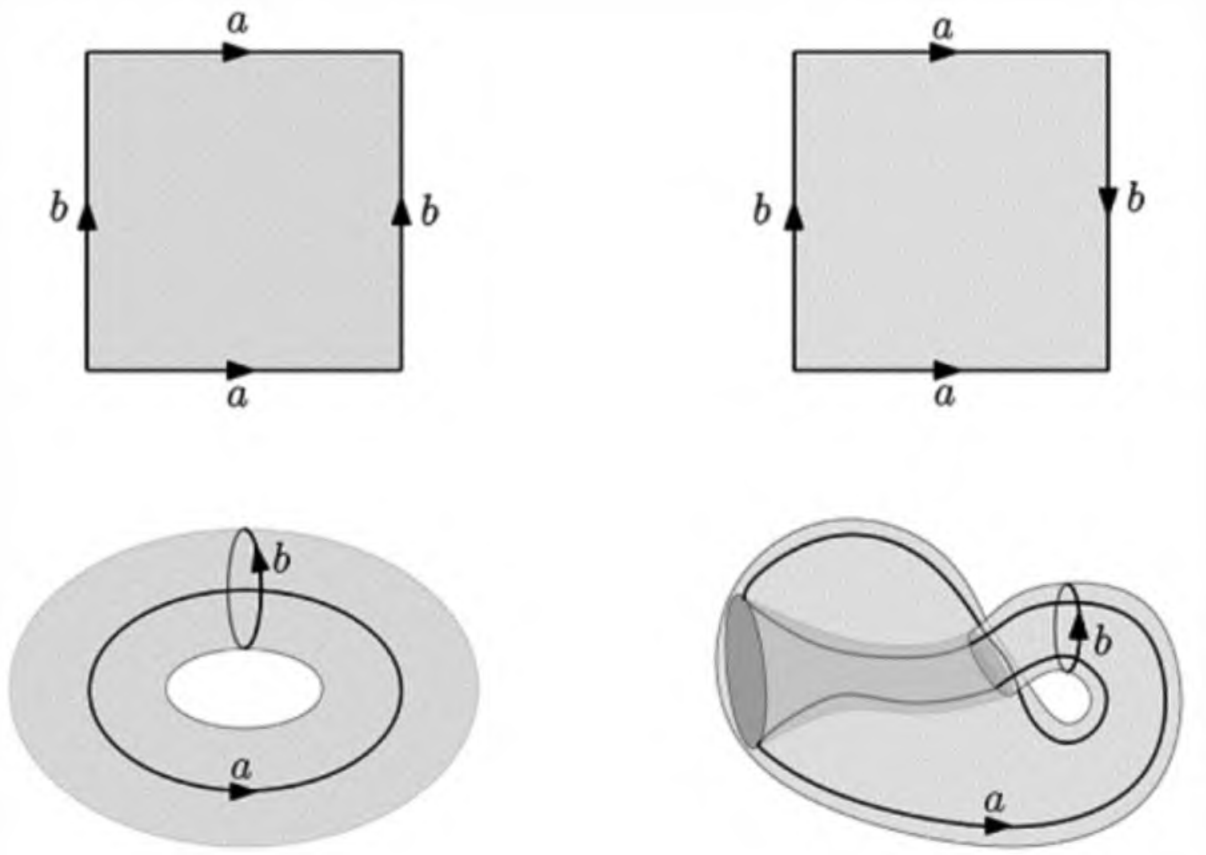
اگر سعی کنیم معادله

$$(x, y).(x, y) = (-1,0)$$

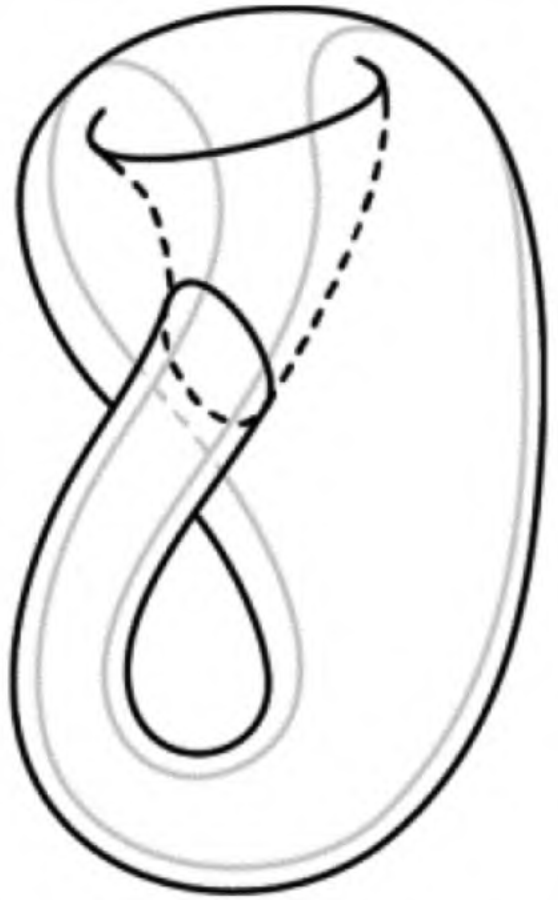
را حل کنیم به دست می‌آوریم که x=0 و x=-1. شاید بگویید که این تقلب است، اما از قضای روزگار، اغلب افکار نو ریاضی شامل ساختارهایی ناشهودی است. ساختن صفر، اعداد منفی، کسرها، و اعداد حقیقی تاریخ مشابهی دارند. به‌علاوه عاقبت کار چنین می‌شود که

اعداد مختلط نقشی بنیادی در فیزیک نوین، بالاخص در مکانیک کوانتومی داشته باشند.(۱۳۶)

و باز مثالی دیگر: سطوح جهت‌پذیر را می‌توان سه‌بعدی رسم کرد، و همیشه کره‌هایی هستند با تعداد g سوراخ. وقتی روی یک سطح جهت‌پذیر حرکت می‌کنید، دستگاه مختصات (که در موارد دوبعدی مثلاً از محورهایx,y تشکیل شده است) تغییر نمی‌کند. اما زمانی که بر روی سطحی جهت‌ناپذیر جابه‌جا می‌شوید راستای محور(ها) در نقطه یا نقاطی برعکس می‌شوند. به‌علاوه، برخی سطوح جهت‌ناپذیر را نمی‌توان در فضای سه‌بعدی قرار داد. «بطری کلاین»(۱۳۷) یک چنین صفحه‌ای است. برای توصیفش اول بیایید یک قطعه کاغذ مربعی را به صورت استوانه لوله کنیم و بعد دو لبهٔ استوانه را به یکدیگر بچسبانیم (شکل ۵۴). به جای قدم دوم، یعنی چسباندن، می‌توان کار زیر را انجام داد: وقتی آنها را به هم می‌چسبانیم، جهت یکی از لبه‌ها را عوض می‌کنیم. چیزی که به‌دست می‌آوریم «بطری کلاین» خوانده می‌شود، و نه چنبره. درس مهمی که از این می‌گیریم این است که چیزها را نمی‌توان به‌راحتی در فضاهایی با ابعاد پایین غوطه‌ور نمود (شکل ۵۵).(۱۳۸)


a
b
b
a
a
b
b
a
b
a
b
a

شکل ۵۴. بسته به اینکه چگونه اضلاع متقابل یک مستطیل رابه هم می‌چسبانیم، یک چنبره (مانند شکل چپ) یا یک بطری کلاین (مانند شکل راست) به‌دست می‌آوریم.



شکل ۵۵. یک بطری کلاین غوطه‌ورشده در فضای سه‌بعدی (به بهترین شکل، تا آنجایی که می‌شود). در حالی که این غوطه‌ورسازی به خاطر خود ـ تلاقی مشکل‌دار است، خودِ بطری از دید ریاضی سالم است.

بعد از کمی بازی بازی با این اشیاء، می‌شود به اندیشیدن دربارهٔ ابعاد بالاتر خو گرفت. به‌عنوان مثال، اگر صفحه‌ای ۷بعدی و صفحه‌ای ۸بعدی در یک فضای ۱۰بعدی داشته باشید، عموماً یکدیگر را در یک فضای ۵بعدی قطع می‌کنند. می‌توانید استدلالِ صحت آن را بر اساس اندیشیدن مشابه در مورد فضاهای با ابعاد کمتر بنا کنید. در ۲ بعد، دو خط یک‌بعدی به طور عام در نقطه‌ای صفربعدی تلاقی می‌کنند.

(۲-۱+۱)= ۰

در ۳ بعد، یک خط یک‌بعدی و یک صفحهٔ دوبعدی عموماً در نقطه‌ای صفربعدی به هم می‌رسند

$$(0 = (1 + 2) - 3))$$

و به همین‌سان، دو صفحهٔ دوبعدی در فضای سه‌بعدی بر یک خط یک‌بعدی تلاقی می‌کنند.

$$(1 = (2 + 2) - 3)$$

به همین قیاس می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ سؤال اصلی

$$(7 + 8) - 10 = 5$$

است. نکته اینجاست که با اعمال استدلالمان به چیزهای آشنا، شاید قادر باشیم نتایجی در مورد چیزهایی خارق‌العاده، چیزهایی مانند صفحات ۷بعدی و ۸بعدی که حتی در ذهنمان به تصور در نمی‌آیند نتیجه‌گیری‌هایی بکنیم. البته در آخر کار، حتماً باید شهودتان را با ریاضیات دقیق بسنجید.

معما

برای پاسخ به یک سؤال دوجوابی درست یا غلط، جیل شانس ۱ در ۱۰ و جان شانس ۷ در ۱۰ برای یافتن جواب صحیح را دارند. کدام را برای

کمک به خودتان برای یافتن جواب بر می‌گزینید؟

حل

بهترین استراتژی انتخاب جیل است، منتها باید پاسخش را با انجام برعکس هر آنچه می‌گوید نفی کنید. آن وقت شانس ۹ در ۱۰ برای گرفتن پاسخ صحیح را دارید.

معما

گروهی از مردم با چشمانی به رنگ‌های گوناگون در جزیره‌ای زندگی می‌کنند. همهٔ آنان منطق‌دانانی تمام‌عیار هستند و اگر بتوانند با استنتاج منطقی به نتیجه‌ای برسند بلافاصله این استنتاج را انجام می‌دهند. هیچ‌کس رنگ چشمانش را نمی‌داند. هر نیمه شب، قایقی در این جزیره پهلو می‌گیرد. هر یک از اهالی جزیره که رنگ چشم خود را یافته باشد، جزیره را ترک می‌کند، و بقیه می‌مانند. هر کس می‌تواند هر کس دیگر را تمام مدت ببیند و آمار کسانی را که می‌بیند با رنگ چشمشان (البته به‌جز خودش) داشته باشد، ولی هیچ راه تماس دیگری ندارند. تمام اهالی مقرراتی را که بیان شد می‌دانند.

در این جزیره ۱۰۰ نفر چشم‌آبی و ۱۰۰ نفر چشم‌قهوه‌ای هستند با یک مرشد که چشمانی سبز دارد. پس هر فرد چشم‌آبی می‌تواند ۱۰۰ نفر با چشم قهوه‌ای و ۹۹ نفر با چشم آبی (و یک نفر با چشمان سبز) را ببیند. ولی این به او رنگ چشم خودش را نمی‌گوید. تا آنجایی که او می‌داند مجموع رنگ‌ها می‌تواند ۱۰۱ قهوه‌ای و ۹۹ آبی باشد یا ۱۰۰ قهوه‌ای و ۹۹ آبی و خود او ممکن است چشمانی سرخ داشته باشد.

در طول سال‌های آزگاری که در جزیره‌اند، مرشد اجازه دارد یک روز، آن هم یک بار (مثلاً سر ظهر) سخن بگوید. در مقابل اهالی جزیره می‌ایستد و این چنین می‌گوید:

«من می‌توانم چشمانی آبی ببینم.»

چه کسی جزیره را ترک می‌کند و در چه شبی؟

حل

پاسخ این است که در روز صدم تمام چشم‌آبی‌ها می‌روند!

اگر موردِ فقط یک چشم‌آبی در جزیره را در نظر بگیرید، می‌توانید نشان دهید که او به‌وضوح در شب اول جزیره را ترک می‌کند، چون می‌داند تنها چشم‌آبی است که مرشد از او سخن گفته است. به اطراف نگاه می‌کند و هیچ فرد دیگری را با چشمان آبی نمی‌بیند، پس می‌فهمد که باید برود.

اگر دو چشم‌آبی باشند، هریک به دیگری نگاه می‌کند، و هریک تشخیص می‌دهد که «اگر من چشم آبی ندارم، پس این فرد تنها چشم‌آبی است. و اگر او تنها چشم‌آبی است پس او امشب می‌رود». هردو صبر می‌کنند تا ببینند، و وقتی که هیچ‌یکشان در شب اول جزیره را ترک نمی‌کند، هریک می‌فهمد که «من باید چشمانی آبی داشته باشم». و هریک در شب دوم می‌رود.

این استقرا تا روز ۹۹ ادامه می‌یابد تا جایی که همه می‌فهمند که چشمانی آبی دارند (یا نه). پس هریکشان ۹۹ روز صبر می‌کند و می‌بینند که بقیهٔ گروه نرفته‌اند، و شب صدم همه‌شان جزیره را ترک می‌گویند.

معما

این مسألهٔ مربوط به روز تولد از مسائل ناشهودی کلاسیک است: چقدر احتمال دارد حداقل یک روز تولد مشترک در یک گروهn نفری باشد؟

حل

وقتیn برابر ۲۳ باشد، این احتمال حدود ٪۵۰ است. وقتیn برابر ۵۰ باشد احتمال ٪۹۷ است. این به طور شگفت‌آوری احتمال بالایی است. این نتیجه از آنجا ناشی می‌شود که احتمال اینکه هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند عبارت است از:

$$\frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

پس احتمال اینکه حداقل دو نفر در یک روز متولد شده باشند برابر است با

$$1-\frac{365\times 364\times \ldots\times (365-n+1)}{365^n}$$

قسمت قابل توجهی از احتمالات می‌تواند ناشهودی باشد. اما وضعیت ناامیدکننده هم نیست؛ با گذشت زمان و تمرین، مسائلی از قبیل آنها که گفتیم برایمان آشناتر، و سرانجام با شهودمان هم‌سوتر می‌شوند. پرورش شهود نه تنها در ریاضی، بلکه در فیزیک هم کلید مهمی است. و این دقیقاً آن چیزی است که در فصل بعد به آن می‌پردازیم.

۶. شهود فیزیکی

فیزیک شهودی

پس از یورشی به ریاضیات پادشهودی، باز می‌گردیم به مطالعهٔ نقش شهود در فیزیک. بخش اعظم شهود فیزیکی ذاتی است، ولی آن را پرورش نیز می‌توان داد. فیزیکدان‌ها عاشق آنند که شهود فیزیکیشان را آن‌قدر تقویت کنند که بتوانند سؤال‌های فیزیکی را به‌سرعت و بدون نیاز به محاسبات مفصل پاسخ دهند، و از محاسبات دقیق فقط برای پالایش و کمّی کردن درک شهودیشان استفاده کنند.

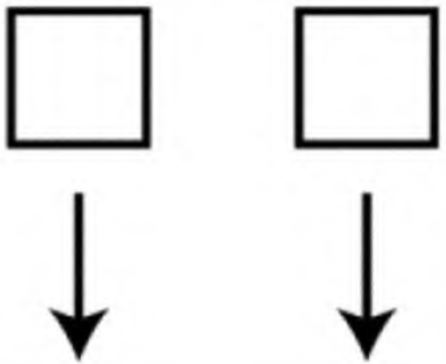
ریچارد فاینمن چنین فیزیکدانی بود، شهره به داشتن شهود فیزیکی عالی. اما این گونه نبود که انگار فقط با شهود عظیمش متولد شده باشد. مقدار زیادی از توانایی‌اش در داشتن شهود فیزیکی، حاصل محاسبات ریاضی مفصلی بود که انجام داده بود. بعداً او اغلب بازمی‌گشت و می‌پرسید که آیا می‌توانست از پیش و بدون اینکه محاسبه‌ای انجام دهد، نتیجه را ببیند. در بسیاری از موارد، او برای نتایجی که از اصل با محاسبات دشوار ریاضی به‌دست آمده بودند، توضیحات سادهٔ شهودی می‌یافت. پس، شهود رایگان به‌دست نیامده بود. اما دفعهٔ بعد که فاینمن با مسأله‌ای مشابه برخورد می‌کرد لازم نبود آن‌همه کار سخت را تکرار کند. می‌توانست از شهودش بهره گیرد تا پاسخ به بعضی مسائل نابدیهی را «حدس بزند».

مهم است در خاطر داشته باشیم که فیزیک شهودی فیزیک بدیهی نیست. فقط وقتی بدیهی می‌شود که درست به آن نگاه کنید. در مورد معماهای خوب نیز همین ممکن است پیش بیاید. ممکن است برای یافتن حل یک معما زمانی طولانی روی آن کار کنید، بدون اینکه سرنخی برای اقدام داشته باشید. مسأله ممکن است لاینحل جلوه کند تا وقتی که جرقه‌ای در مغز زده شود، و رویکرد نویی را نسبت به تکلیف تشخیص بدهید که ناگهان آن را امکان‌پذیرتر بسازد. تغییر جهت ذهنی لازم برای حل مسأله به طور کلی تقریباً غیربدیهی است، حتی اگر راه‌حل ــ پس از زدن جرقه ــ خیلی آسان باشد. به همین علت است که حل معما می‌تواند تمرینی عالی برای کار فیزیک باشد و بالعکس. راهبردهایی که در یک زمینه مؤثرند، امکان دارد در زمینه‌ای دیگر هم مفید از کار درآیند.

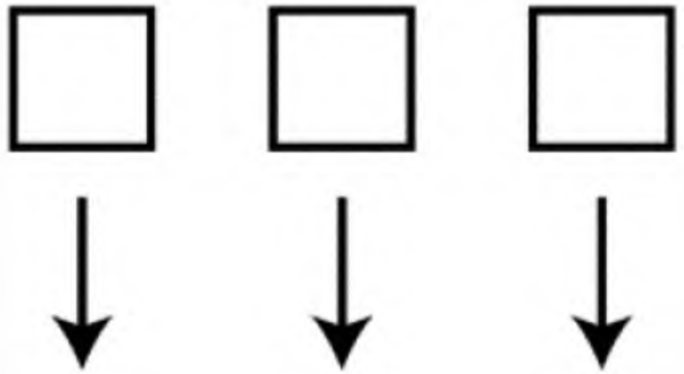
گالیلئو گالیلئی (گالیله)

زمانی که گالیلئو دی وینچنزو بونایوتی دِ گالیلئی(۱۳۹) قوانین حرکت را مطالعه می‌کرد جدل‌های فلسفی زیادی بر سر آن صورت گرفته بود. مثلاً ارسطو این ایدهٔ شهودی را مطرح کرده بود که اجسام سنگین‌تر در حین سقوط شتاب بیشتری می‌گیرند. البته این تصوری است که بسیاری از ما هم به شکلی در آن شریکیم. گالیله این گزاره را با انجام آزمایشی رد کرد، با آزمایش بسیار عالیِ انداختن اجسام سبک و سنگین از برج پیزا(۱۴۰) و نشان دادن اینکه اجسام سبک‌تر و سنگین‌تر، هنگام سقوط آزاد، با یک آهنگ شتاب می‌گیرند. بسیاری آن را شگفت‌آور یافتند. در آن زمانه، به طور عام، روش تجربی چندان جایگاهی نداشت. مردم بیشتر متمایل به پذیرش واقعیت‌هایی بودند که با «استدلال محض»(۱۴۱) حاصل می‌شد، با این اعتقاد که نباید برای دستیابی به حقیقت دست خود را با انجام آزمایش آلوده کنیم.

بعدها، گالیله از طریق استدلال محض هم پشتیبانی برای نتیجه‌اش فراهم آورد، و استدلال او آنچنان زیبا و ساده بود که نتیجهٔ آزمایشش را واضح جلوه داد. استدلال او کمابیش از این قرار بود: فرض کنید دو جسم دارید دقیقاً با یک شکل و جرم.

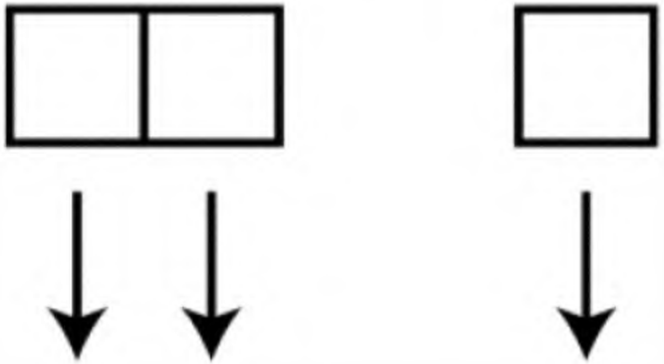


هردو را از سکون و از یک ارتفاع رها می‌کنید. کدام یک اول به زمین می‌خورد؟ واضح است که باید در یک زمان به زمین برسند، چون هردو به یک اندازه‌اند. این فقط بیانی از تقارن انتقالی در راستای افقی است. حالا جسم سومی با همان اندازه را همراه و همزمان با دو تای اول، دوباره از همان ارتفاع رها کنید.



باز هم واضح است که آنها با هم به زمین می‌خورند. همین‌طور به نظر واضح می‌آید که جابه‌جا کردن افقی سه جسم پیش از رها کردنشان این واقعیت را عوض نمی‌کند که باز هم هر سه جسم با هم و همزمان به زمین می‌خورند. حالا تصور کنید که جفت اولیه را به هم نزدیک

کنید، آن‌قدر نزدیک که به صورت یک جسم به چشم آیند.



آنها را می‌توان حتی یک جسم تجسم کرد با اندازهٔ دو برابر، اما واضح است که باز هم، همزمان با جسم دیگر به زمین می‌خورند. پس جسمی با دو برابر جرم جسمی دیگر همزمان با آن به زمین می‌خورد. حالا نتیجه واضح به نظر می‌رسد! اغلب این چنین سطحی از وضوح به‌دست نمی‌آید. و معنی‌اش این است که لازم است شهود فیزیکی ما پالوده شود تا نتیجهٔ صحیح حاصل شود. شهود اولیهٔ ما مبنی بر اینکه اجسام سنگین‌تر اول به زمین می‌خورند ممکن است ریشه در پیش‌شرطی شدن روانی ما باشد: شاید به اجسام سنگین‌تر توجه بیشتری می‌کنیم چون هنگام اصابت، بیش از اجسام سبک انرژی منتقل می‌کنند. و اگر ما طبیعتاً متمایل به توجه بیشتر به اجسام سنگین‌تر باشیم، ممکن است این را هم مسلّم فرض کنیم که آنها اول به زمین می‌رسند.

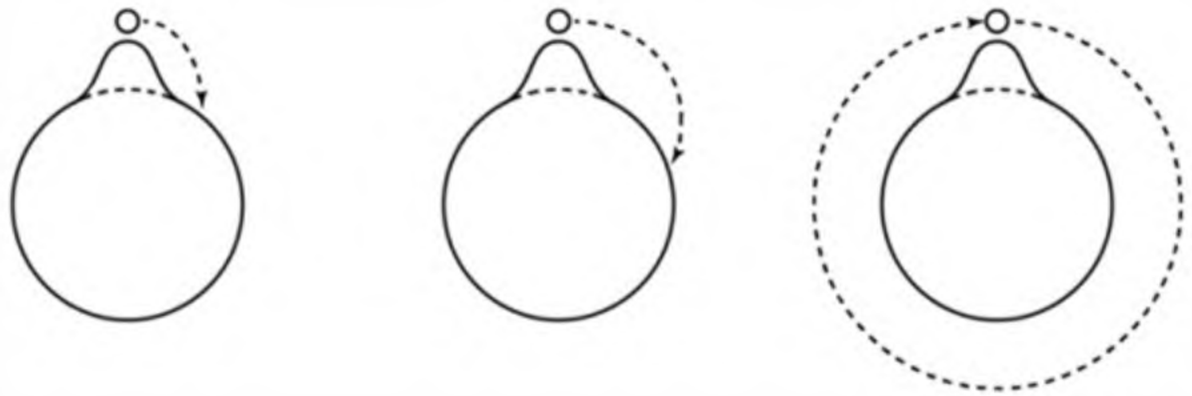
اسحاق نیوتن

در داستان مشهور این گونه روایت شده است که ایده‌های سِر اسحاق نیوتن دربارهٔ گرانش با افتادن سیبی از درخت در باغ مادرش بر انگیخته شد. در برخی روایت‌ها نیوتن سیب را در حال افتادن مشاهده کرد و در روایاتی دیگر سیب بر سرش فرود آمد. در هردو حال، ادعا شده است که افتادن سیب اثری ژرف بر او نهاد. اما می‌توان پرسیدکه سیب را با مدار سیارات که گرانش بر آنها حکم می‌راند، چه‌کار؟

نیوتن در کتابش اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی آن را اینگونه توضیح می‌دهد. می‌پرسد چرا ماه مانند سیب نمی‌افتد؟ برای شروع به درک این موضوع، او تاحدی آن را تعدیل کرد.

کوه بلندی بر قطب شمال تصور کنید، و گلولهٔ توپی را که از بالای آن شلیک می‌کنیم، مانند شکل ۵۶. البته، گلوله به زمین می‌افتد. اما فرض کنید گلوله را با شدت بیشتری شلیک کنید. باز هم به زمین می‌خورد هر چند در این مورد در فاصله‌ای دورتر. و حالا اگر آن را واقعاً محکم‌تر پرتاب کنیم تا به اندازه‌ای قابل مقایسه با اندازهٔ زمین پیش برود، شاید هم در استوا سقوط کند. اگر آن را حتی با شدت خیلی بیشتر پرتاب کنید بسیار دورتر می‌افتد، شاید در قطب جنوب فرود آید. اکنون فرض کنید ضربهٔ به‌مراتب شدیدتری به آن بزنید. آنگاه گلولهٔ توپ به زمین نمی‌افتد و به محل شلیک بازمی‌گردد.(۱۴۲)

اکنون می‌توانیم ماه را با گلولهٔ توپ آزمایش ذهنی خود قیاس کنیم، و به ناگاه دلیل نیفتادن آن واضح می‌شود: اگر به خاطر زمین نبود، ماه مستقیماً به‌درون فضا پرواز کرده بود. ولی به علت کشش گرانشی زمین، ماه از آن مسیر منحرف می‌شود. به سقوطش به‌سمت زمین ادامه می‌دهد، ولی هم‌چنان به آن اصابت نمی‌کند، زیرا زمین گرد است. و این چیزی است که آخر کار به آن می‌رسیم: گلولهٔ توپی که بر مداری به دور زمین می‌چرخد. پس ماه واقعاً دارد به‌سوی زمین سقوط می‌کند اما زمین گرد است و ماه در حالی که سعی می‌کند بر آن بیفتد، هم‌چنان آن را رد می‌کند! گردی زمین است که مانع نزدیک‌تر شدن ماه به آن می‌شود.



شکل ۵۶. یک گلولهٔ توپ افتان با سرعت اولیهٔ به‌کفایت بالا تا حد بسیار زیادی مانند ماه دوران‌کننده رفتار می‌کند.

حالا دیگر قادرید با شهود خود دریابید که پرتاب یک شیء با سرعتی بحرانی(۱۴۳) می‌تواند آن را به مداری دایره‌ای بفرستد. اگر شیء خیلی آهسته حرکت کند، به زمین می‌افتد. اگر خیلی تند حرکت کند، مستقیماً به سوی فضا می‌رود. اما اگر آن‌قدر هم سریع نباشد، امکان دارد به مداری دایره‌ای وارد شود. اما نمی‌توانیم از این بحث نتیجه بگیریم که مدار باید تناوبی باشد. محاسباتی لازم است تا این را مسجل کنیم، هر چند باز هم شهود می‌تواند ما را خیلی پیش ببرد.

در آغاز، موضوع ماه افتان شهودی نبود. اما پس از تغییر دیدگاهمان، مسأله شفاف‌تر شد ــ شاید تا حد وضوح.

معما

کامیونی که به‌کندی با سرعت ۱۰ مایل در ساعت در حرکت است با مگسی که در جهت مخالف با سرعت ۲۰ مایل در ساعت پرواز می‌کند برخورد می‌کند. پس از برخورد مگس می‌چسبد به شیشهٔ کامیون. حدس شما دربارهٔ سرعت کامیون پس از برخورد چیست؟ (از هیچ معادله‌ای استفاده نکنید.)

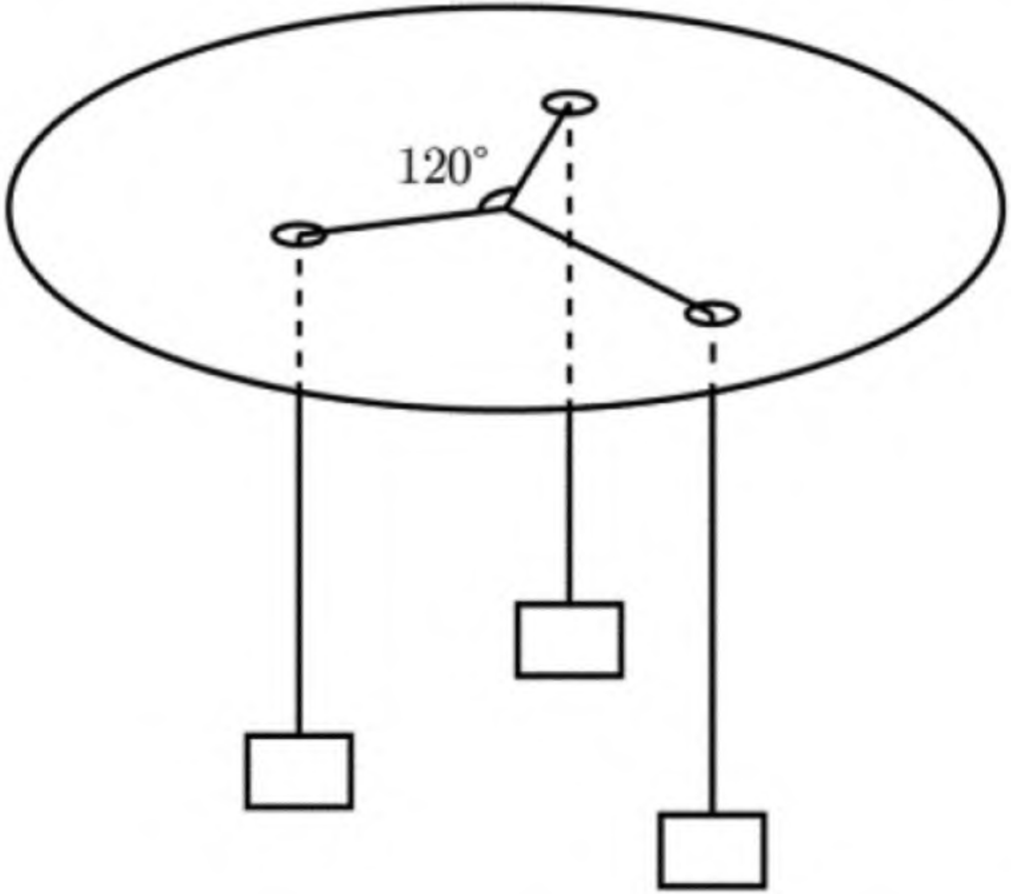
حل

از شهود فیزیکی به‌خوبی می‌دانیم که سرعت کامیون تقریباً تغییری نکرده است. لازم به گفتن نیست که محاسبات دقیق ریاضی بر اساس قوانین فیزیکی، این شهود را تأیید می‌کند.

شهود فیزیکی در ریاضیات

شهود فیزیکی می‌تواند به کار استنتاج حقایق ریاضی هم بیاید. در این بخش به چند نمونه از آنها می‌پردازیم.(۱۴۴)

بیایید به قضیهٔ توریچللی بازگردیم که به‌اختصار (در پانوشتی) در فصل ۳ (به‌عنوان قسمتی از مسألهٔ یافتن کوتاه‌ترین بزرگراه در چهار گوشهٔ یک مربع) اشاره شد: فرض کنید سه نقطه روی یک میز داریم و می‌خواهیم آنها را چنان به هم وصل کنیم که مجموع فواصلشان از یکدیگر را کمینه کنیم. با استفاده از ریاضیات استدلال کردیم که مسیر کمینه باید یک گراف سه‌ظرفیتی باشد ــ مجموعه‌ای از سه خط که در یک رأس با سه زاویهٔ ۱۲۰ درجه به هم می‌رسند.

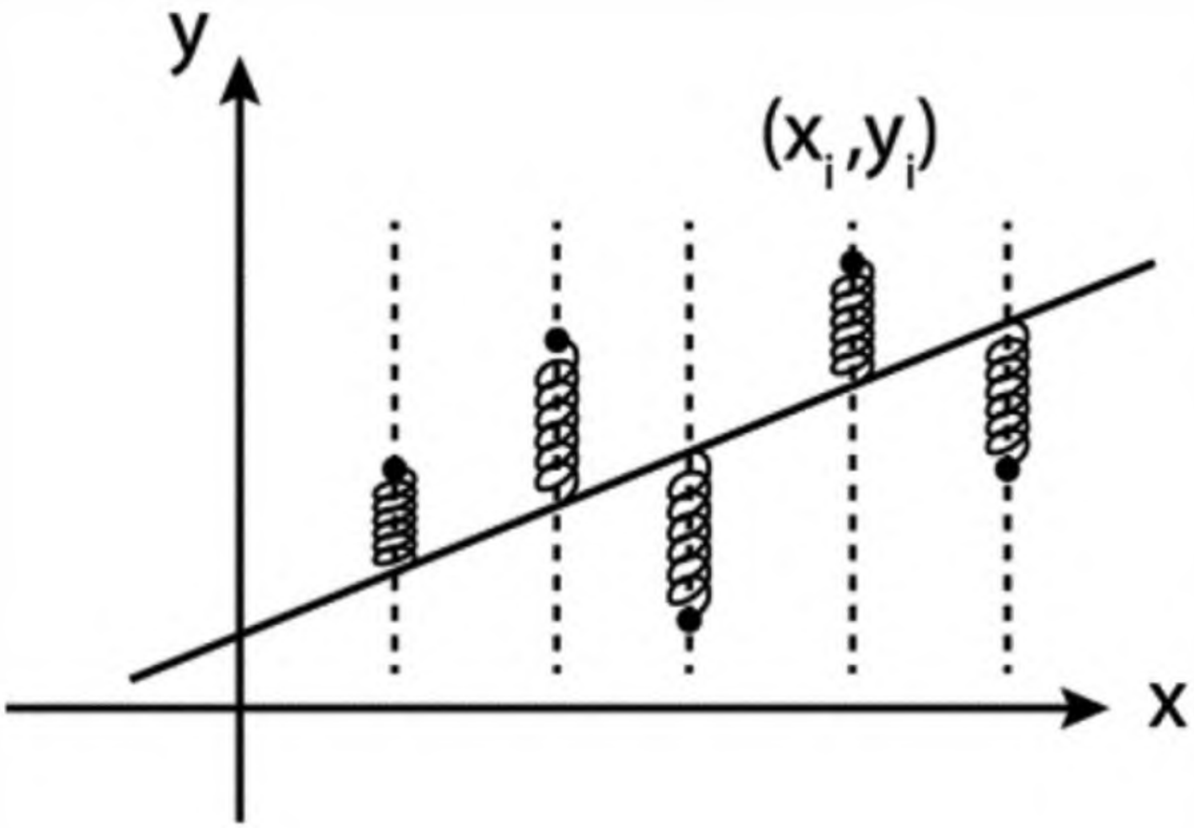

120°

شکل ۵۷. نخ‌های متصل به سه وزنهٔ مساوی در جایی به تعادل می‌رسد که کل طول نخ‌های روی میز را کمینه می‌کند. به آسانی می‌توان دید که زاویه‌ها بر اساس توازن سه نیروی برابر که نقطهٔ مشترکی را به سه جهت مختلف می‌کشند باید ۱۲۰ درجه باشد.

حالا یک راه با انگیزهٔ فیزیکی برای مشاهدهٔ این مطلب: تصور نمایید سه سوراخ در محل این نقاط تعبیه کنیم و بعد سه توپ همسان را به سر سه نخ با اندازهٔ مساوی وصل کنید که در یک رأس مشترک بر بالای میز به هم بسته شده‌اند (شکل ۵۷). با فرض اینکه جرم توپ‌ها مساوی و برابر باm است، انرژی پتانسیل کل سیستم برابرmg- ضربدر مجموع طول نخ‌های آویزان در زیر میز است. این زمانی کمینه است که جمع طول‌های نخ‌های آویزان زیر میز بیشینه است. در چنین وضعیتی، طول نخ‌های متصل روی میز کمینه است چون جمع کل طول‌ها ثابت است. با اِعمال شرایط تعادل، می‌بینیم که کشش‌ها در رأس باید خنثی شود، و چون کشش‌ها برابرند (با وزنه‌های مساوی کشیده شده‌اند) زاویه‌ها هم باید برابر، و در نتیجه ۱۲۰ درجه باشند. این نشان می‌دهد که دخالت دادن فیزیک در مسائلی که اصلاً مسألهٔ ریاضی هستند می‌تواند بینشی به ما بدهد و منجر به حل‌های ساده‌ای برای مسائلی شود که در فرمول‌بندی ریاضی اصلی‌شان مشکل جلوه می‌کردند.

خط بهترین برازش(۱۴۵)

نموداری از نقاط داده‌شدهٔ (x, y) را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم خط بهترین برازش را (به‌منظور وایازش خطی(۱۴۶) (رگرسیون)) پیدا کنیم، بدین معنی که می‌خواهیم جمع مربعات فواصل عمودی نقاط داده از خط را کمینه کنیم. آن را می‌توان به صورت وضعیتی فیزیکی تجسم کرد که نقاط داده‌شده میخ‌هایی روی میزی هستند که راستای افقی به‌عنوان محور و جهت عمودی محور است (مانند شکل ۵۸). میخ‌ها یک به یک به فنرهای مشابه متصل‌اند که خود از طریق حلقه‌هایی به یک میلهٔ مستقیم وصل‌اند. فنرها در لوله‌های عمودی قرار دارند که آنها را مقید به حرکت در راستای قائم می‌سازد. لذا، مربعِ فاصلهٔ بین میخ‌ها تا میله نمایشگر انرژی پتانسیل فنرها است، و بنابراین یافتن بهترین برازش خطی دقیقاً همان یافتن وضعیت میله است که انرژی پتانسیل فنرها را کمینه می‌کند.



شکل ۵۸. خط بهترین برازش را به لحاظ فیزیکی به وسیلهٔ مکان میله‌ای که از طریق فنرهایی به نقاط داده وصل شده است تشخیص داد.

اکنون بیایید مسأله را با فیزیک حل کنیم. می‌دانیم که در حالت تعادل، نیروها و گشتاور روی میله باید خنثی شوند. اگر مکان میله با y=mx+b
داده شود، آنگاه نیروی وارد بر میله توسط فنر اُم متناسب است با

$$y_i - (mx_i + b)$$

(بنا بر قانون هوک)، بنابراین از تعادل نیروها داریم،

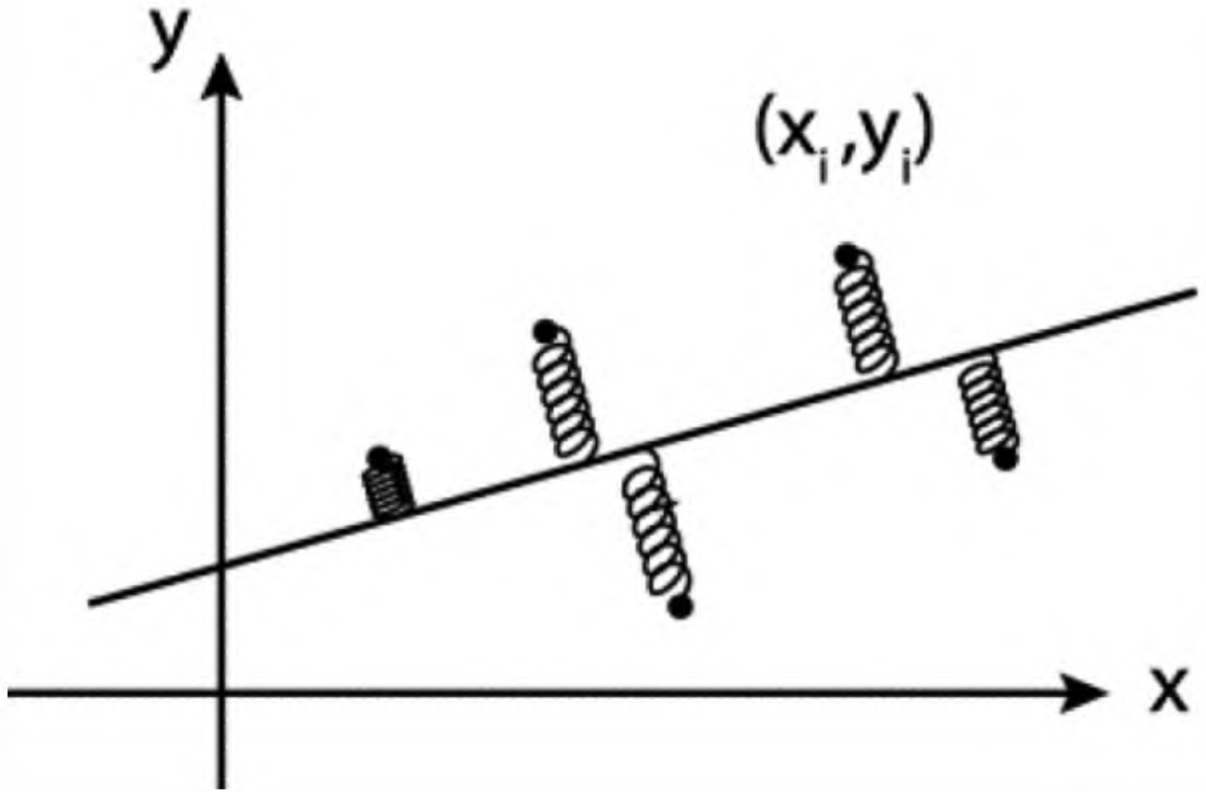
$$\sum_i y_i - (mx_i + b) = 0$$

حالا نوبت گشتاور روی میله است. هر فنر گشتاوری به اندازهٔ وارد می‌کند و در نتیجه شرط دوم ما عبارت است از:

$$0 = \sum_i x_i F_i \Longrightarrow \sum_i x_i (y_i - (mx_i + b)) = 0$$

جای تعجب ندارد که اینها دقیقاً همان فرمول‌های وایازش خطی‌اند.

ممکن است مدل بالا شما را چندان تحت تأثیر قرار نداده باشد. تنها کاری که کردیم ترجمهٔ سؤالی ریاضی به سؤالی فیزیکی و حل آن باز با استفاده از ریاضی بود. پس از این‌همه جابه‌جایی چه نصیبمان شد؟ نکتهٔ جالب اینجاست: مدل‌سازی فیزیکی این وضعیت بلافاصله سؤالی را پیش می‌کشد که در غیر این صورت واضح نمی‌بود. تحدید حرکت فنرها منحصراً به راستای قائم برای یک فیزیکدان تصنعی جلوه می‌کند. چه می‌شود اگر این قید را برداریم و بگذاریم فنرها هر جهتی را برگزینند، مثل شکل ۵۹؟ در نهایت، جستجوی وضعیتی که مربع فاصلهٔ نقاط را با خط کمینه کند طبیعی‌تر جلوه می‌کند تا از آنکه فقط فواصل قائم را کمینه کند.

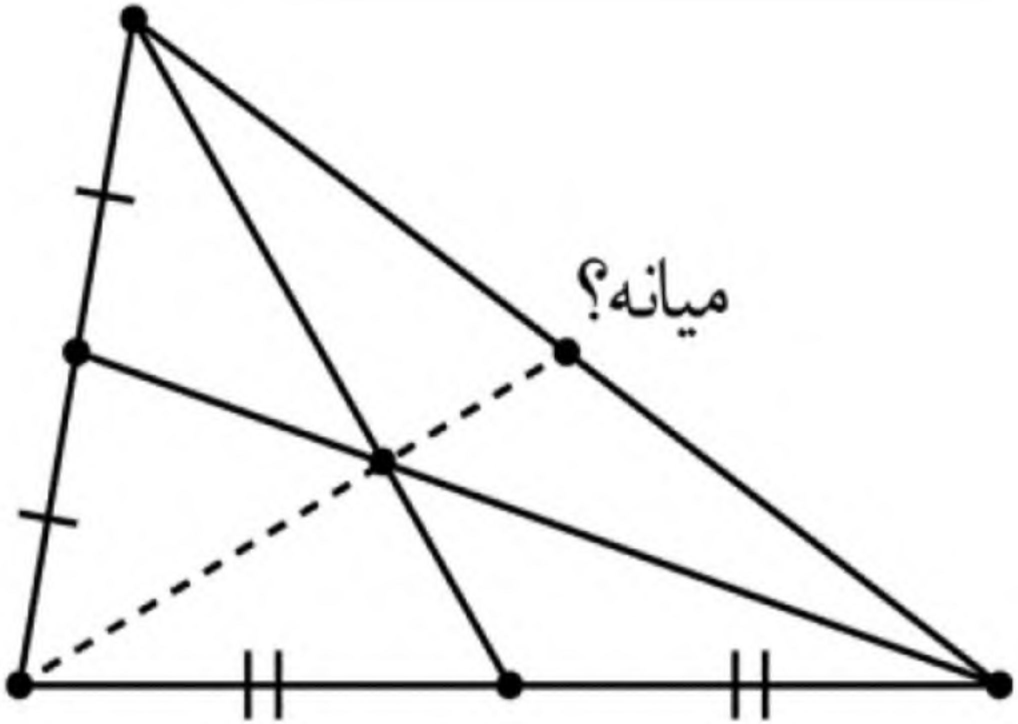


شکل ۵۹. فنرهایی بدون قید حرکت در راستای قائم متناظر با بهترین خط برازش است برای زمانی که xوy عدم قطعیت داشته باشند.

در واقع، اگر عدم قطعیت درx وy به یک اندازه اهمیت داشته باشند این کار درستی است. فرضیات پیشین وایازش خطی متعارف بر این است که عدم قطعیت درy به‌مراتب بیش ازx است. از این رو شهود فیزیکی به ما این امکان را می‌دهد که مسائل ریاضی را به‌نحوی بازپردازش کنیم که مفید باشند و حتی بینش‌های نوی عرضه کنند.

معما

مثلثی با دو میانهٔ آن رسم شده است، آیا خط واصل بین رأس سوم و نقطهٔ تلاقی دو میانه هم میانه است (شکل ۶۰)؟

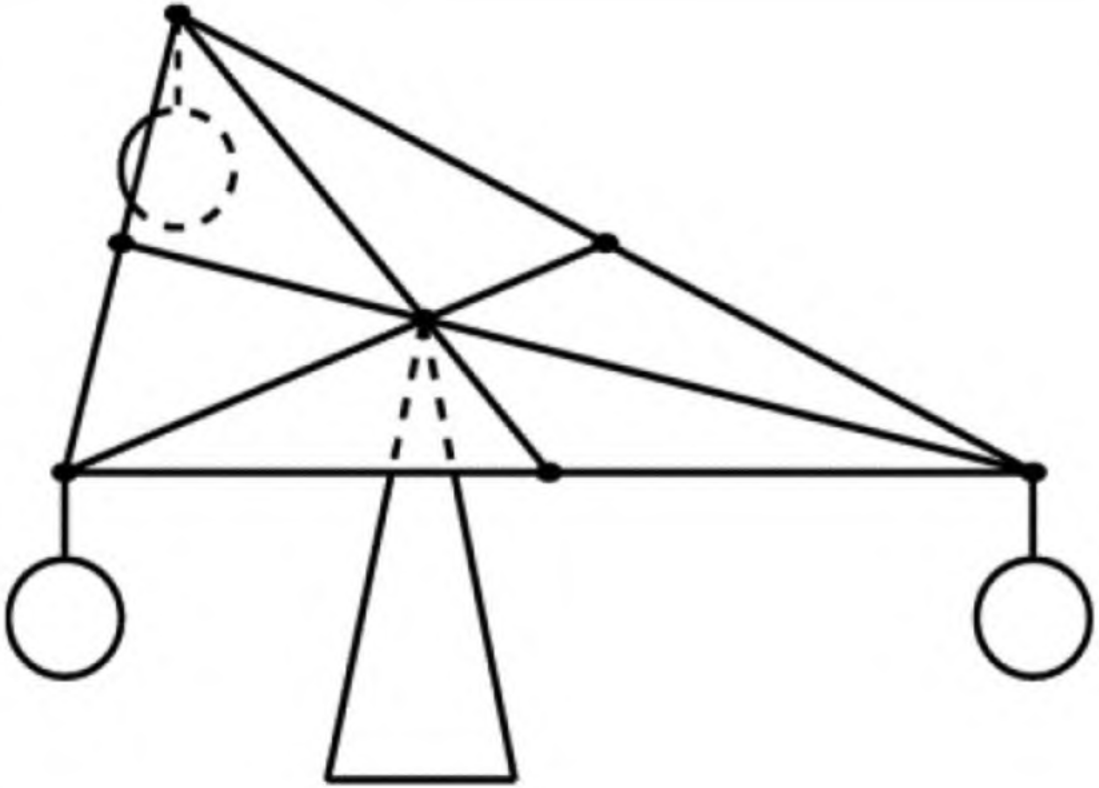


شکل ۶۰. آیا سه میانهٔ یک مثلث از یک نقطه می‌گذرند؟

حل

فرض می‌کنیم که مثلث بدون جرم است. بعد فیزیک را به صحنه می‌آوریم با این فرض که وزنه‌های مساوی به رئوس مثلث متصل شده‌اند (شکل ۶۱). اگر با سعی و خطا، مرکز جرم این دستگاه سه‌وزنه‌ای را پیدا کنیم می‌توانیم آن را روی یک پایه درست در زیر نقطهٔ مرکز جرم، به تعادل برسانیم.

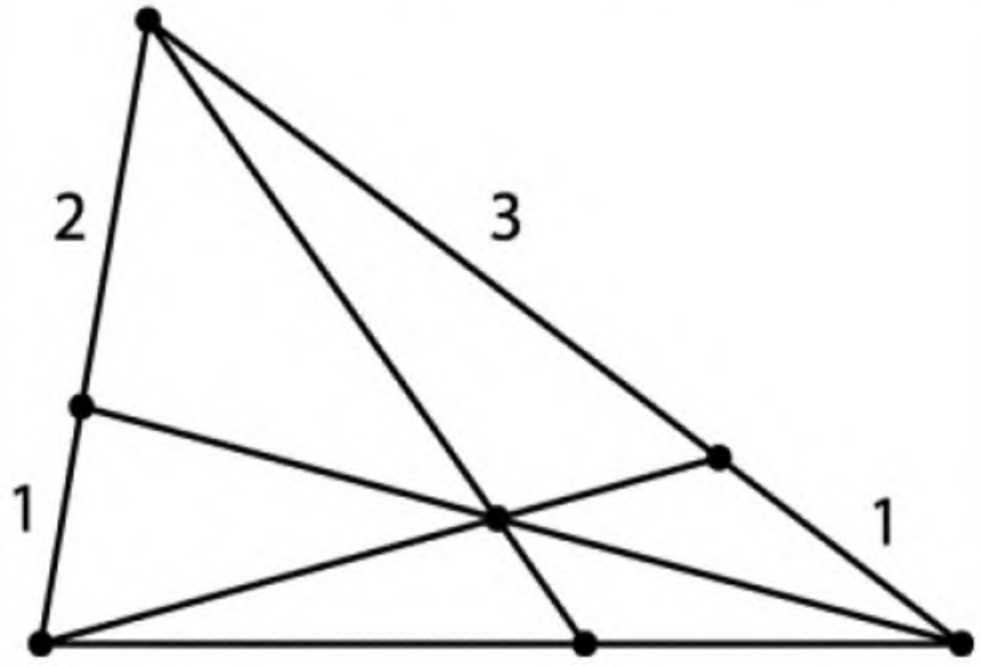
اکنون دو تا از میانه‌ها را در نظر بگیرید. نقطهٔ مرکز جرم باید در محل تقاطع آنها قرار داشته باشد، زیرا برای هر میانه گشتاورهای حاصل از وزنه‌های متناظر به دو وزنهٔ دیگر یکدیگر را خنثی می‌کنند، پس هر میانه باید از مرکز جرم بگذرد. چون هر شیء یک و فقط یک مرکز جرم دارد، میانهٔ سوم باید از آن بگذرد. پس هر سه میانه باید از یک نقطه بگذرند.



شکل ۶۱. میله‌ها باید در این مدل فیزیکی از مرکز جرم بگذرند.

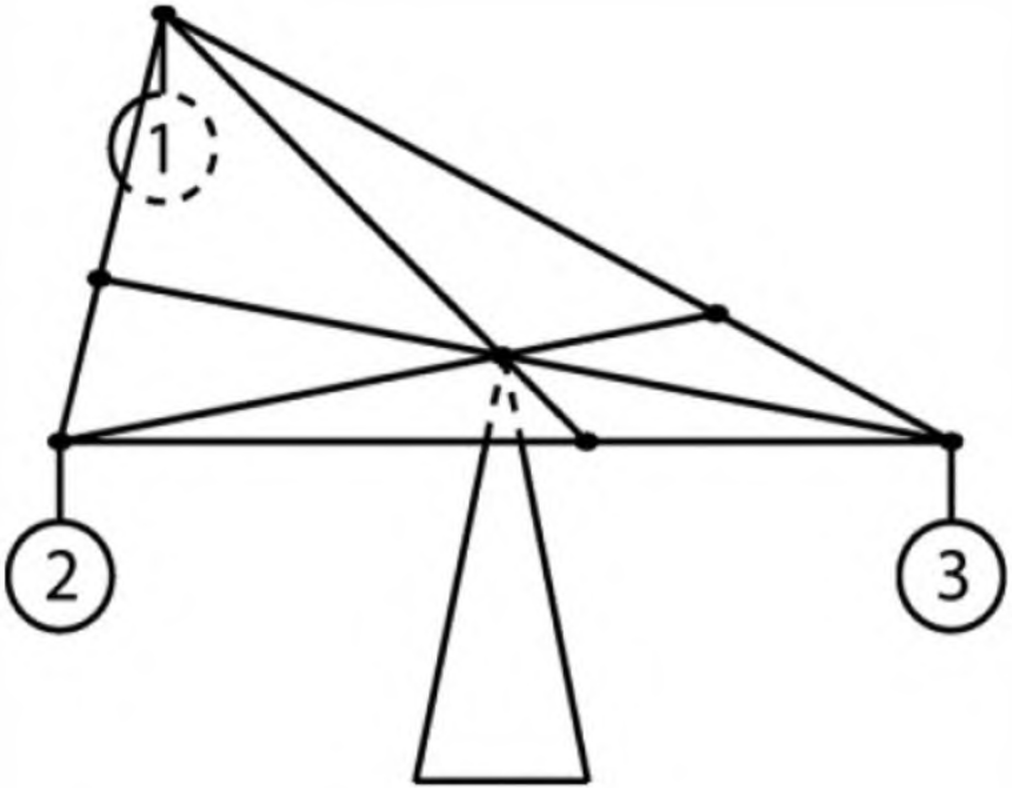
معما

مثلثی با اندازه‌های داده‌شدهٔ زیر در نظر بگیرید، نسبت طول‌های قطعات قاعده چیست؟



حل

فرض کنید در محل برخورد خطوطی که دو ضلع را به نسبت‌های۱:۲ و ۱:۳تقسیم می‌کنند، و همچنین خطی که قاعده را به نسبتی که باید تعیین شود تقسیم می‌کند، پایه‌ای بگذاریم. از نگاه به شکل می‌توان تشخیص داد که برای خنثی کردن گشتاورها و تعادل کل مثلث باید وزنه‌های نابرابر ۱ و ۲ و ۳ کیلوگرمی به سه رأس آن وصل کنیم (۱ در بالا، ۲ و ۳ به ترتیب در چپ و راست) و به این ترتیب این نقطهٔ برخورد را به مرکز جرم مؤثر تبدیل کنیم. از اینجا به بعد به‌آسانی می‌بینیم که نسبت قطعات در قاعده باید ۳ به ۲ باشد. این تمرین که حل آن بدون فیزیک اصلاً آسان نیست قدرت شهود فیزیکی را به نمایش می‌گذارد.



معما

اعداد مثبت حقیقی را در نظر بگیرید. نامساوی AM-HM می‌گوید که میانگین حسابی بزرگ‌تر از میانگین هارمونیک است:

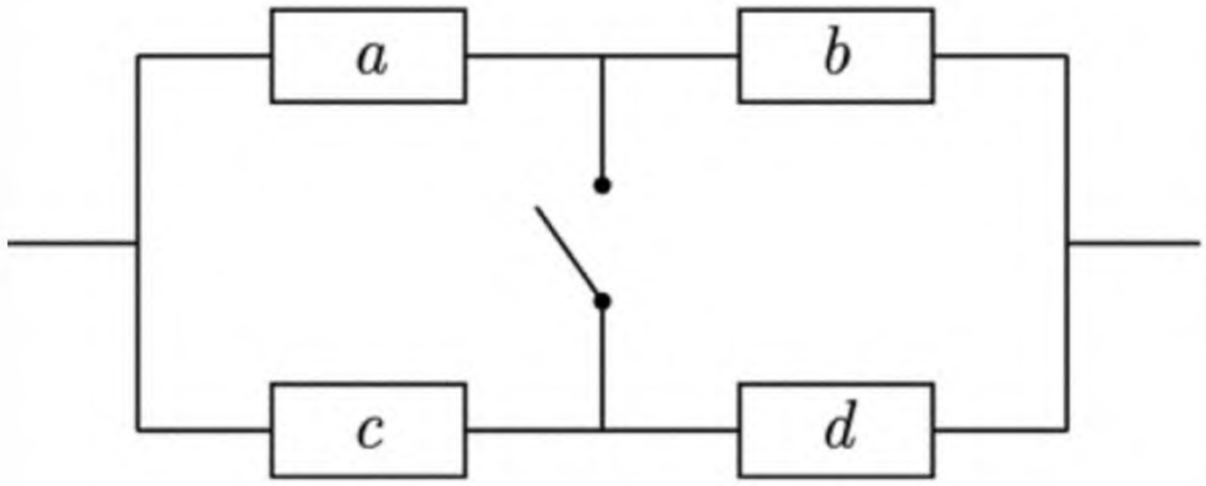
$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

نشان دهید که روابط زیر (که نامساوی AM-HM حد خاص a=d،b=c است) صحیح است:

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}$$

حل

برای نشان دادن صحت این نامساوی بدون محاسبات پیچیدهٔ ریاضی از فیزیک می‌توانیم استفاده کنیم. آنچه در شکل ۶۲ انجام داده‌ایم تبدیل این مسأله به دیاگرام یک مدار الکتریکی است که در آنa،b،c و d مقاومت الکتریکی‌اند. سمت چپ نامساوی نشان‌دهندهٔ مقاومت مدار آن‌طور که رسم شده، بدون زدن کلید است. سمت راست نشان‌دهندهٔ مقاومت مدار پس از زدن کلید است. هر وقت سیم آزادی به مدار اضافه شود مقاومت مدار کم می‌شود و به همین دلیل است که این به نامساوی می‌انجامد. بدون اینکه به ریاضیات پیچیده بپردازیم بر اساس دانش فیزیکی‌مان دربارهٔ نحوهٔ کار کردن مدارهای موازی می‌دانیم که این گزاره درست است. فیزیک به تجسمی منتهی می‌شود که کمک می‌کند تا این مسألهٔ صرفاً جبری را حل کنیم!



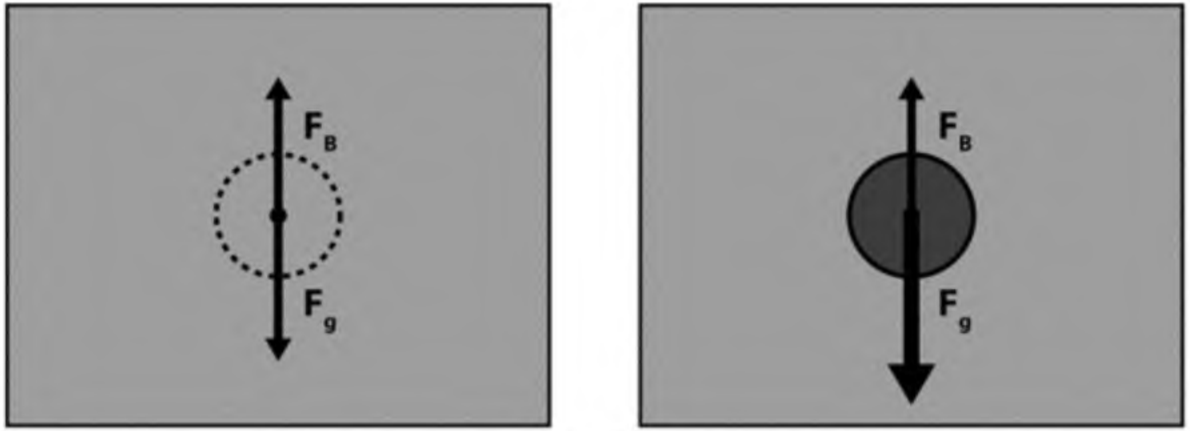
شکل ۶۲. مداری از مقاومت‌ها که برای اثبات یک نامساوی ریاضی طراحی شده است!

«یافتم»(۱۴۷) ارشمیدس

اصل غوطه‌وری ارشمیدس بیان می‌دارد که که هر جسمی، که قسمتی یا کل آن در شاره‌ای غوطه‌ور شود، با نیرویی برابر با وزن شاره جابه‌جا شده به سمت بالا هل داده می‌شود.

ممکن است این به نظر بسیار ناشهودی بیاید، ولی می‌توان این اصل را به‌نحوی توضیح داد که به‌نظر واضح بیاید. فرض کنید جسمی مانند یک تاج در یک سطل آب داریم. حالا نوعی «جراحی» را تجسم کنید که تاج را بیرون بیاورید و به جای آن آب قرار دهید، مانند شکل ۶۳. بقیهٔ آب نمی‌تواند به هیچ طریقی بفهمد که آب آنجا است یا تاج، پس آن چنان رفتار می‌کند که انگار آنجا آب است. اما با جایگزین کردن تاج با آب، سیستم کاملاً همگن می‌شود و انتظار داریم در تعادل باشد. به عبارت دیگر، آب هیچ‌جا نمی‌رود. معنایش این است که نیروی خالص وارده از بقیهٔ آب بر آن قسمت از آب باید برابر وزنش باشد تا سر جایش نگه داشته شود! وقتی تاج را به آب برگردانید، بقیهٔ آب باز هم به هیچ طریقی نخواهد فهمید که چه چیزی آنجا قرار دارد. پس، تاج همان نیروی غوطه‌وری را احساس می‌کند که انگار آب آنجا است و لذا کاهش وزنی به اندازهٔ وزن آب جابه‌جاشده احساس می‌کند.

ضمناً، بر اساس داستان‌های عامیانه دربارهٔ ارشمیدس، او زمانی به این قانون رسید که به این فکر می‌کرد که چگونه یک تاج تقلبی را تشخیص دهد. دقت این داستان چندان روشن نیست. طبق افسانه او فقط می‌خواست چگالی تاج را معلوم کند. چون محاسبهٔ وزن نسبتاً آسان است، فقط کافی است حجم تاج را اندازه گرفت، و این با فروکردن تاج در آب و مشاهدهٔ حجم آب جابه‌جاشده عملی می‌شود. شاید بقاء حجم قبل از ارشمیدس دانسته نبوده است و این کشف، راهی پیش روی او گذاشت که حجم و در نتیجه چگالی جسم را با فروکردن آن در آب محاسبه کند. پس قانون غوطه‌وری برای حل این مسأله لازم نیست. البته واقعاً ارشمیدس بود که قانون غوطه‌وری را کشف کرد.



شکل ۶۳. چون بقیهٔ آب نمی‌داند آنجا چیست، با نیرویی برابر وزن آب جابه‌جاشده هر جسم غوطه‌وری راچنان به سمت بالا هل می‌دهد که انگار آب است.

معما

جعبه‌ای با دانه‌های ریز لوبیا پر شده است و توپ پینگ‌پونگی در ته آن مدفون است. جعبه را برای مدت زمانی تکان می‌دهیم و آنچه را بر توپ پینگ‌پونگ می‌گذرد مشاهده می‌کنیم. توضیحی برای آنچه می‌بینید دارید؟

حل

توپ پینگ‌پونگ به سطح می‌آید به همان دلیل که اجسام کم‌چگالی‌تر به سطح آب می‌آیند. این مثال دیگری از غوطه‌وری است: توپ پینگ‌پونگ مانند جسمی است که، مانند مثال قبلی‌مان، در سیالی غوطه‌ور است و در این مورد «آب» از لوبیاهای کوچک درست شده است. چگالی توپ پینگ‌پونگ از لوبیا کمتر است، پس نیروی خالص وارد بر آن به سمت بالا است.

قضیهٔ فیثاغورس(۱۴۸)

برای نمایش اینکه چگونه فیزیک به ریاضیات جدید منجر می‌شود، می‌توانیم قضیهٔ فیثاغورس را با استفاده از فیزیک ثابت کنیم. محفظه‌ای را به شکل مثلث راست‌گوشه با اضلاعc،b،a در نظر بگیرید که از آب پر شده است (شکل ۶۴). به‌طور شهودی واضح به نظر می‌رسد که محفظه سر جایش است و باید در تعادل باشد. اکنون معنای در تعادل بودن را از دید ریاضی و بر اساس نیروها و گشتاورها می‌کاویم. نیروی آب بر هر وجه جانبی محفظه برابر است با فشار (که اگر ارتفاع محفظه کم باشد ثابت است) ضرب‌در مساحت آن وجه که متناسب است با ارتفاع ضرب‌در طول آن وجه. برای سهولت (و بدون از دست دادن کلیت) ارتفاع را می‌توان به ۱ هنجار نمود.

این واقعیت که جمع نیروها صفر می‌شود بیان این است که سه بردار یک مثلث درست می‌کنند، یعنی همان مثلث راست‌گوشه‌ای که با آن آغاز کردیم. حالا بیایید به گشتاور نگاه کنیم. برای اندازه‌گیری گشتاور در ابتدا باید محوری انتخاب کنیم. تصور کنید محور قائمی را از رأسی که ضلع‌های bوc تلاقی می‌کنند رد کنیم. گشتاور خالص حول این محور باید صفر باشد، در غیر این صورت مثلث در جهتی به چرخش در می‌آید. به یاد بیاورید که گشتاور برابر حاصلضرب نیرو در طول بازوی اهرم است. بنابراین، گشتاور وجه با طول b برابر است با

$$b \times \frac{b}{2}$$

، و در وجه با طولa برابر است با

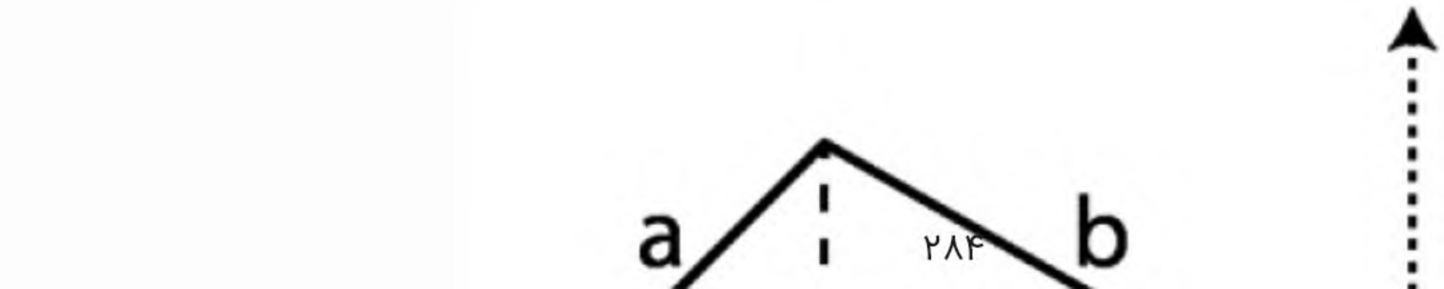
$$a \times \frac{a}{2}$$

هردو در راستای ساعتگرد، و گشتاور وتر

$$-c \times \frac{c}{2}$$

است زیرا در راستای پادساعتگرد است. چون این جمع صفر است نتیجه می‌گیریم که.

a +b =c



شکل ۶۴. محفظه‌ای به شکل مثلث راست‌گوشهٔ پر شده از آب می‌تواند در مبرهن کردن قضیهٔ فیثاغورس به کار رود.

گزاره‌های ریاضی دیگری هم می‌توانیم استنتاج کنیم: تصور کنید میله را از رأس زاویهٔ قائم بگذرانیم. اگر a<b آنگاه گشتاور نسبت به این محور عبارت است از:

$$\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + c\Delta = 0$$

، که Δ فاصلهٔ بین وسط وتر و نقطهٔ تلاقی ارتفاع و وتر است. سعی کنید این تساوی را فقط با روش هندسی بدون هیچ دخالتی از فیزیک ثابت کنید. به‌علاوه، اگر مایل باشید، باز می‌توانید از روش فیزیک بهره بگیرید تا نتیجه‌ای کلی‌تر یعنی قانون کسینوس‌ها را با در نظر گرفتن مثلثی عام ثابت کنید.

کاملاً واضح نیست که آیا این را می‌توان به‌عنوان اثباتی واقعی از قضیهٔ فیثاغورس تلقی کرد. مسأله اینجا است که در تعریفمان از گشتاور، به نوعی پیش‌فرض ما قضیهٔ فیثاغورس بوده است. به هرحال حداقل این راه جالبی برای فکر کردن راجع به قضیهٔ فیثاغورس در یک زمینهٔ فیزیکی است.

معما

میزی گرد بر سه پایه در زاویه‌های ۱۲۰ درجه‌ای استوار است. می‌خواهیم میز را با اعمال نیرویی عمود بر نقطه‌ای از پیرامونش، به سمت پایین کج کنیم. سؤال این است که در چه نقطه‌ای این نیرو را وارد کنیم تا حداقل نیرو را برای وارون کردن میز به کار ببریم؟ هیچ محاسبه‌ای لازم نیست، فقط از شهود خود استفاده کنید.(۱۴۹)

حل

واضح است که مکان ایده‌آل نقطهٔ وسط بین هر دو پایه در لبهٔ میز است. نیاز به گفتن نیست که می‌شود این گزاره را با مکانیک نیوتنی ثابت کرد. اما اگر به پاسخی غیر از آن می‌رسیدیم، باید فرض‌هایی را که منجر به آن شده بود زیر سؤال می‌بردیم. با وجود این اگر جزئیات بیشتری مانند مقدار نیروی لازم برای وارون کردن میز را بخواهیم، باید محاسبات دقیق‌تری انجام دهیم، که البته باید شهودمان در مورد مکان اعمال نیرو را تأیید کند. بعضی وقت‌ها شهود ما با ریاضیات در تقابل می‌افتد، و شهودمان باید اصلاح شود. اما، گاهی ممکن است اشتباهی در استفاده از ریاضیات بکنیم، که در این صورت شهود ما کنترلی قدرتمند خواهد بود.

نظریهٔ نسبیت خاص

اما شگفتا که شهود می‌تواند ما را به‌سوی استنتاجاتی پادشهودی هدایت کند. مثلاً اینشتین، در حین ساختن نظریهٔ نسبیت خاص از آزمایش‌های ذهنی شهودی استفاده کرد که نتایج حیرت‌آور متعددی دارد همچون انبساط زمان، انقباض طول، و رابطهٔ

E=mc

از همه مهم‌تر در نظریهٔ نسبیت خاص یک فرض بسیار ناشهودی است: سرعت نور برای همه یکسان است، مهم نیست که کسی چقدر سریع نسبت به منبع نور حرکت می‌کند. اگر کسی این اصل به شدت ناشهودی را بپذیرد، بقیهٔ عواقب نظریه را خیلی شهودی می‌یابد.

اینشتین با یک آزمایش ذهنی به مفهوم انبساط زمان رسید. مجسم کنید در قطاری نشسته‌اید و با سرعت زیاد

$$\vec{v}$$

نسبت به زمین حرکت می‌کنید. یکی از نتایج نظریهٔ نسبیت خاص این است که اگر کسی بر قطاری سوار شود و به نقطهٔ آغاز باز گردد، ساعتش با ساعت رهگذر ثابت‌مانده روی زمین نمی‌خواند. چرا؟

یک جفت آینه در یکی از کوپه‌های قطار تجسم کنید، یکی بر سقف و دیگری بر کف با فاصلهٔL از یکدیگر (شکل ۶۵). بیایید زمان لازم برای حرکت رفت و برگشت پرتو نور از یک آینه به دیگری را از نگاه شخصِ در قطار در مقایسه با شخصِ روی زمین اندازه بگیریم. از دید مسافر قطار نور مستقیماً بالا و پایین می‌رود و این زمان عبارت است از

$$\Delta\tau = \frac{2L}{c}$$

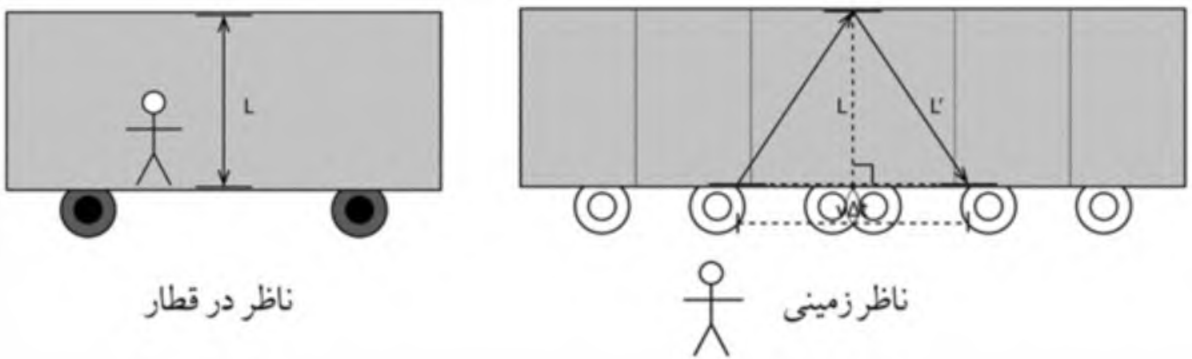
که c سرعت نور است. اما از دید فردی که در کنار ایستاده است نور به صورت قطری حرکت می‌کند. اگر قطار به اندازهٔ $v\Delta t$ حرکت کند آنگاه زمان مشاهده‌شده از رفت و برگشت پرتو نور

$$\Delta t = 2\frac{L'}{c}$$

است. دقت کنید که تکیهٔ ما بر این اصل پایه‌ای است که سرعت نور برای هر دو ناظر یکسان است. اما واضح است که $L' > L$، پس،

$$\Delta t > \Delta\tau$$

یعنی زمان برای آنکه در قطار نشسته است آرام‌تر می‌گذرد. یا آن‌طور که گاهی می‌گویند، «ساعت‌های در حال حرکت آهسته‌تر کار می‌کنند».



شکل ۶۵. همان‌طور که به سادگی با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس و فرض یکسان بودن سرعت نور برای تمام ناظرها با هر سرعتی می‌توان دید، زمان در قطار در حال حرکت نسبت به زمین آهسته می‌شود.

ناشهودی‌ترین قسمت این استدلال می‌تواند این ادعا باشد که سرعت نور در همهٔ چارچوب‌های مرجع همیشه یکی است. اگر کسی این ادعا را بپذیرد باقی کمابیش واضح است.
می‌توان با استفاده از جبر و قضیهٔ فیثاغورس (که کمی پیش با استفاده از فیزیک آن را نشان دادیم) انبساط زمان را نتیجه‌گیری کرد.

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

به بیانی دیگر، زمان اندازه‌گیری‌شده روی زمین به اندازهٔ عامل

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

طولانی‌تر است.

مکانیک آماری

مکانیک آماری دستگاه‌هایی با تعداد ذرّات زیاد را توصیف می‌کند، حتی زمانی که رفتار تک تک ذرّات را نتوان با دقت توصیف کرد.
کمیت بنیادی در مکانیک آماری آنتروپی است،

$$S = \ln \Omega$$

کهΩ تعداد پیکربندی‌های ممکن ذرّه‌ها است. مثلاً برای شمردن تعداد راه‌های چینش دستگاهی با انرژی کل E می‌توان از شمارش تعداد راه‌هایی بهره برد که این انرژی را می‌توان بین ذرّات تقسیم کرد. این تعداد Ω و آنتروپی لگاریتم آن است. فرض بنیادی این است که همهٔ پیکربندی‌ها با یک احتمال رخ می‌دهند. این به نظر طبیعی‌ترین فرض جلوه می‌کند، اما به نتایج شگفت‌آوری منجر می‌شود.

معما

من عددی بین ۱ تا ۱۰۰۰ را انتخاب کرده‌ام. شما می‌توانید عددی را حدس بزنید، آن وقت من به شما می‌گویم که آیا عددی که حدس زده‌اید برابر یا بیشتر یا کمتر از عددی است که من انتخاب کرده‌ام. سعی کنید عدد را با کمترین تعداد حدس بیابید.

حل

ممکن است با جستجوی «دودویی»(۱۵۰) آشنا باشید، که مستلزم آن است که همیشه بکوشیم میانهٔ یک بازه را حدس بزنیم. این بهترین رویکرد

است، زیرا شما عملاً دارید آنتروپی دستگاه را کمینه می‌کنید.(۱۵۱) اساساً می‌خواهید خود را در موقعیتی قرار دهید که از هر حدس حداکثر اطلاعات را به‌دست آورید. پس تقسیم هر بازه به دو قسمت مساوی راهبردی بهینه است، چون به شما امکان می‌دهد که نصف احتمالات را با هر سؤال حذف کنید. هر نوع تقسیم دیگر شما را با بیش از نصف احتمالات باقی‌مانده روبه‌رو می‌کند. پس سعی می‌کنیم طرح بدترین حالت را کمینه کنیم.

معما

۱۲ سکه داریم، و به شما گفته‌اند که یکی از آنها تقلبی است و یا سبک‌تر یا سنگین‌تر از بقیه است، اما نه می‌دانید کدام سکه است و نه می‌دانید سبک‌تر است یا سنگین‌تر. ترازویی هم دارید که نشان می‌دهد هر یک از دو کفهٔ آن برابر با یا سبک‌تر یا سنگین‌تر از دیگری است. کمترین تعداد توزین مورد نیاز که معین کند کدام سکه تقلبی است و سبک‌تر یا سنگین‌تر است چیست؟ چه می‌شد اگر به جای ۱۲ سکه ۵۰۰ سکه داشتیم؟

حل

اینجا هم بر رویکرد تقسیم احتمالات به بخش‌های مساوی اتکاء می‌کنیم، درست مثل معمای قبلی. با ۱۲ سکه در کل و امکان آنکه هر کدام می‌تواند هم تقلبی و هم سنگین‌تر یا سبک‌تر از بقیه باشد، ۲×۱۲ یعنی ۲۴ امکان داریم. و هر بار که وزن یک گروه را با گروه دیگر مقایسه می‌کنیم، سه نتیجه امکان‌پذیر است: گروه اول می‌تواند سبک‌تر یا سنگین‌تر از یا هم‌وزن گروه دوم باشد. پس باید راهبردی برای توزین بیندیشیم که مجموعه را تا حد امکان به سه گروه مساوی تقسیم کند. بهترین کاری که می‌توانیم بکنیم عبارت است از:

$$24 \longrightarrow 8 + 8 + 8$$
$$8 \longrightarrow 3 + 3 + 2$$
$$3 \longrightarrow 1 + 1 + 1 \text{ یا } 2 \longrightarrow 1 + 1 + 0$$

این کار رهنمودی برای پیش رفتن می‌دهد. بهترین کاری که احیاناً می‌توان کرد شناسایی سکهٔ تقلبی، و تعیین وزن آن در سه اندازه‌گیری است، چون.

$$3^3 = 27 \geq 24$$

برای یافتن اولین تقسیم ۸+۸+۸→۲۴، می توانید به آسانی خود را قانع کنید که می‌توانید ۱۲ سکه را به سه گروه ۴ تایی تقسیم ک

نید. آنگاه دو دسته را با ترازو وزن کنید. اگر دستهٔ اول از دستهٔ دوم سنگین‌تر باشد در می‌یابید که یا یکی از ۴ سکه در گروه اول سنگین‌تر از میانگین است یا یکی از ۴ سکهٔ گروه دوم سبک‌تر از میانگین است که منجر به ۸ امکان می‌شود. نتیجهٔ مشابهی برقرار است اگر دستهٔ اول سبک‌تر باشد. اگر دو دستهٔ اول هم‌وزن باشند آنگاه می‌دانید که سکهٔ تقلبی در گروه سوم است، که می‌شود سبک‌تر یا سنگین‌تر باشد، باز هم ۸ امکان. توزین‌های بعدی به روش مشابهی می‌تواند صورت گیرد، که جزئیاتش به خواننده واگذار می‌گردد.

رویکرد برای ۵۰۰ سکه هم مشابه است. پاسخ برای کمترین تعداد حدس ۷ است. در این حال ۱۰۰۰ امکان وجود دارد. درست مثل ۲۴ امکان با ۱۲ سکه. هر توزین از دسته‌ای از سکه‌ها سه نتیجهٔ ممکن دارد و از این رو فضای احتمالات را (حتی‌الامکان) به سه بخش تقسیم می‌کند. لذا ۷ عمل لازم است تا هر امکانی را بتوان مشخص و منزوی ساخت، زیرا

۳ >۱۰۰۰

و

۳ ۱۰۰۰

است. شاید بخواهید امکانات را در هر قدم به سه قسمت (حتی‌المقدور) برابر تقسیم کنید. شاید راهی برای انجام دقیق آن وجود نداشته باشد. بنابراین ما ثابت نکرده‌ایم که این کار فقط در ۷ قدم شدنی است، ولی نشان داده‌ایم که در کمتر از آن نمی‌شود.

معما

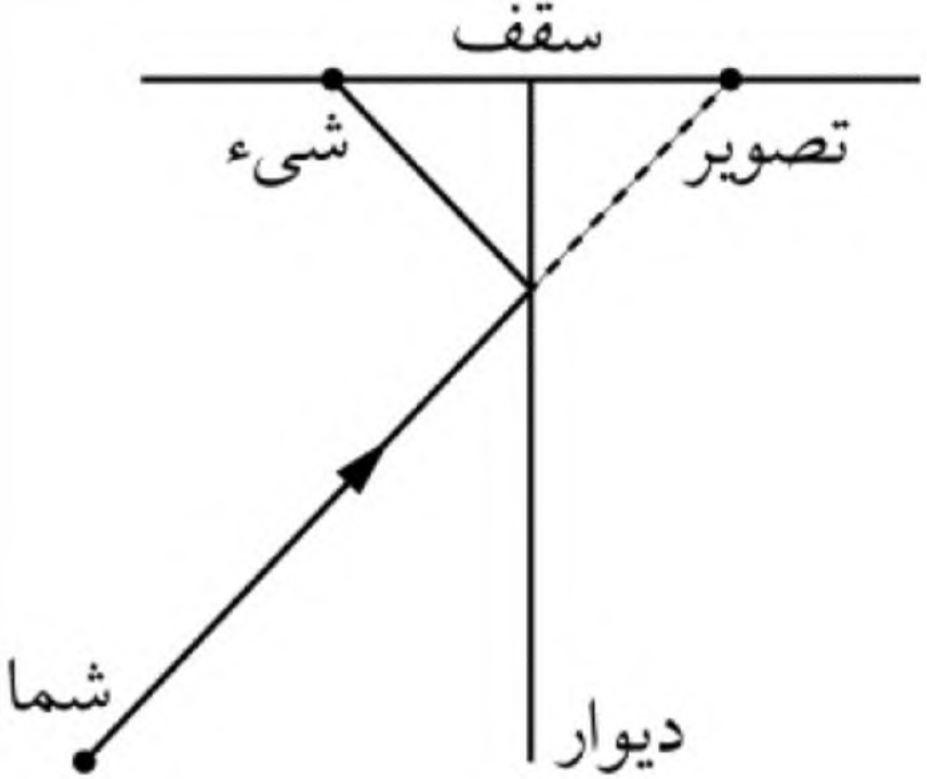
صد بطری شربت دارید، که یکی از آنها سمی است. دوستانتان مایلند به شما کمک کنند آن را پیدا کنید، اما اثرات آن تا ۲۴ ساعت بعد ظاهر نخواهد شد، و میهمانی شما ۲۵ ساعت دیگر شروع می‌شود. حداقل تعداد دوستانی که باید به کمک شما بیایند تا بطری سمی را بیابید چند نفر است.

حل

شما فقط به ۷ نفر احتیاج دارید. بطری‌ها را از ۱ تا ۱۰۰ در پایهٔ دودویی برچسپ بزنید. حداکثر به ۷ رقم نیاز دارید، چون۱۰۰< ۱۲۸=۲ . از دوست ام بخواهید از بطری‌هایی بنوشد که رقم n ام در پایهٔ ۲ آن ۱ باشد. پس از این کار، یک ۱ برای هر رقم متناظر با دوستی که مسموم شده و یک صفر برای دیگران بگذارید تا بتوانید شمارهٔ بطری سمی در پایهٔ ۲ آن را پیدا کنید. البته اینها باید واقعاً دوستان خوبی باشند که برای چنین تکلیفی داوطلب شوند، و امیدوار باشیم که سم کشنده نباشد!

معما

این بازی را می‌خواهیم انجام دهیم: توپی را طوری به دیوار بزنید که به سمت بالا بجهد (از گرانش چشم‌پوشی می‌کنیم) و به شیء معینی در سقف برخورد کند، مثل شکل ۶۶. کجای دیوار را نشانه بگیریم؟



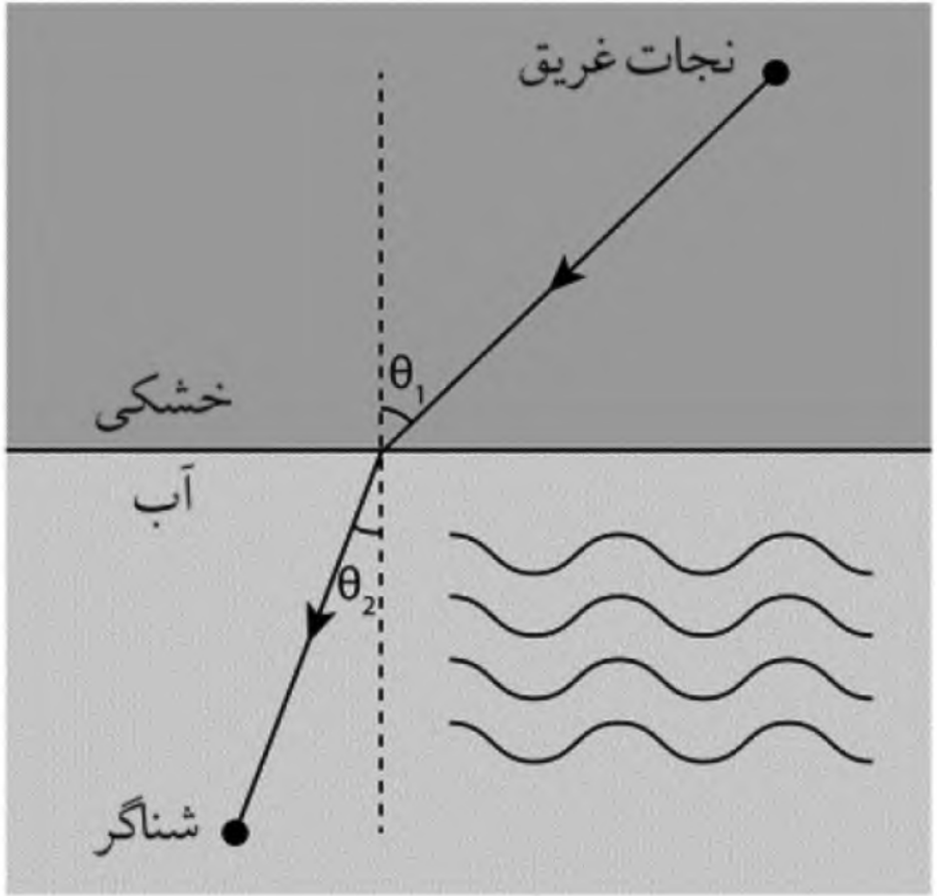
شکل ۶۶. از آینه‌ای روی دیوار می‌توان استفاده کرد تا شیء را به خوبی نشانه گرفت.

حل

می‌توانیم آینهٔ بزرگی روی دیوار بگذاریم و تصویر هدف را نشانه بگیریم.

معما

نجات‌غریقی در کنار ساحل باید شناگر مغروقی را نجات دهد (شکل ۶۷). در این مورد زمان، عامل مرگ و زندگی است. نجات‌غریق در خشکی با سرعت ۷ و در آب با سرعت ۷ حرکت می‌کند و ۷ بزرگ‌تر از ۷ است زیرا از موجودات ساکن در خشکی زندگی می‌کنند همین انتظار می‌رود. چه مسیری را باید انتخاب کند تا زمان رسیدن به شناگر را کمینه سازد؟


نجات غریق
خشکی
θ_1
آب
θ_2
شناگر

شکل ۶۷. نجات‌غریق کدام مسیر را باید برگزیند تا حتی‌الامکان سریع‌تر به شناگر برسد؟

حل

نجات‌غریق در خشکی سریع‌تر حرکت می‌کند تا در آب، پس باید مکان درست برای آغاز شنا کردنش را تعیین کند. مسأله را می‌شود این‌طور هم دید: پیدا کردن مناسب‌ترین زاویه‌ها از ساحل به خط ساحلی و از آنجا به شناگر. پاسخ این سؤال را می‌توانیم از قانون دکارت (یا قانون اسنل)(۱۵۲) به‌دست بیاوریم:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

قانون دکارت (اسنل) معمولاً برای توصیف تغییر مسیر نور (یا هر موج دیگر) یا شکست نور وقتی که از یک محیط (با سرعت v) به محیطی دیگر(با سرعت v) می‌رود، استفاده می‌شود. این قانون به ما می‌گوید که مسیری که نور در حرکت در محیط‌های مختلف برمی‌گزیند، مسیری است که کوتاه‌ترین زمان را طی می‌کند. اما به‌خوبی می‌تواند در مثال بالا به نجات‌غریقی هم که با سرعت‌های مختلف در خشکی و

آب حرکت می‌کند، اعمال شود. برای حل این مسأله می‌توانیم از حسابان برای کمینه کردن

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$$

استفاده کنیم، که l l به ترتیب طول مسیرها در خشکی و آب است.
اما، می‌توان هم دستگاهی مکانیکی طرح ریخت که ما را قادر می‌سازد مسأله را بدون توسل به ریاضیات پیشرفته حل کنیم. میزی را در نظر بگیرید، که دو سوراخ دارد، یکی نمایشگر مکان نجات‌غریق و دیگری مکان شناگر. وزنه‌هایی به جرم

$$m_1 = \frac{1}{v_1}$$

در محل سوراخ متناظر با نجات‌غریق و به جرم

$$m_2 = \frac{1}{v_2}$$

در محل شناگر را با ریسمانی به هم متصل و مانند شکل ۶۸ آویزان کنید. میله‌ای را در محل متناظر با خط ساحل بگذارید. حلقه‌ای که می‌تواند آزادانه در طول میله حرکت کند، به ریسمان‌هایی که به وزنه‌ها وصل شده‌اند، متصل است.

اکنون می‌توانیم پاسخ مسألهٔ اولیه را با تعیین وضعیتی که دستگاه در آن به تعادل می‌رسد تعیین کنیم، یعنی با پیکربندی‌ای که کمترین انرژی پتانسیل را دارد. چون کل طول ریسمان‌ها ثابت است برای کمینه کردن انرژی پتانسیل باید طول‌های زیر میز را بیشینه کنید که به‌خاطر وزنه‌های آویخته تحت کشش‌اند. (در اینجا انرژی پتانسیل با mgh نشان داده می‌شود، کهh ارتفاع وزنه‌ها از کف است). توجه کنید که طول هر قسمت از ریسمان ثابت است. در نتیجه، انرژی پتانسیل وقتی کمینه است که m gl +m gl یا

$$\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$$

کمینه شده باشد. پس بهترین مسیر ــ برای ریسمان‌ها و به به همین قیاس برای نجات‌غریق ــ وضعیت تعادل است. این یعنی چه؟ T و T

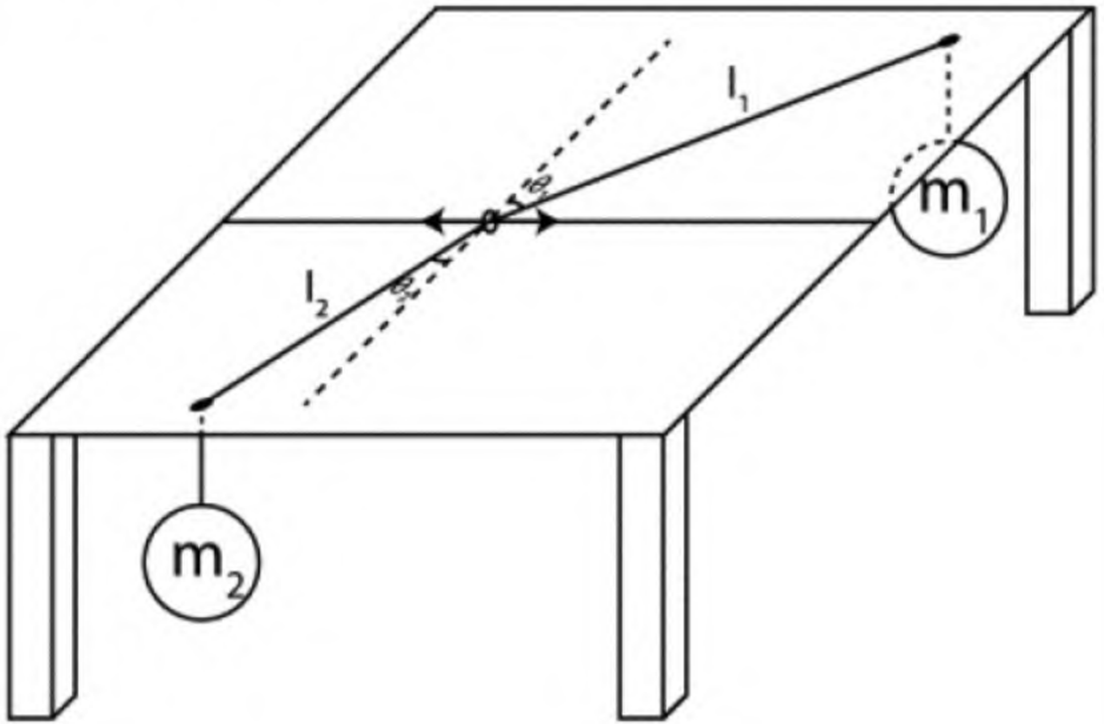
به ترتیب کشش هر ریسمان را نشان می‌دهد که m g و m g و هریک به‌ترتیب متناسب با
v/1
و
v/1
است. در حالت تعادل، نیروهای افقی در امتداد میله باید یکدیگر را خنثی کنند (در غیر این صورت حلقه در راستای میله حرکت می‌کند):

$$T_1 \sin\theta_1 = T_2 \sin\theta_2$$

، که نشان می‌دهد.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

به این ترتیب نشان داده‌ایم که قانون دکارت (اسنل) زمان را کمینه می‌کند ــ واقعیتی که به کار شناگر مغروق هم می‌آید.



شکل ۶۸. مدلی فیزیکی برای کمک به نجات‌غریق تا بهترین مسیر را بیابد.

همسنگی بین ایدهٔ کوتاه‌ترین طول ریسمان و نور که در اصل منظور قانون بود این است که: نور مسیری را دنبال می‌کند که منجر به کمترین زمان شود درست همان گونه که نجات‌غریق راهی را می‌جوید که به کوتاه‌ترین زمان سیر بینجامد.

۷. فیزیک پادشهودی[۱۵۳]

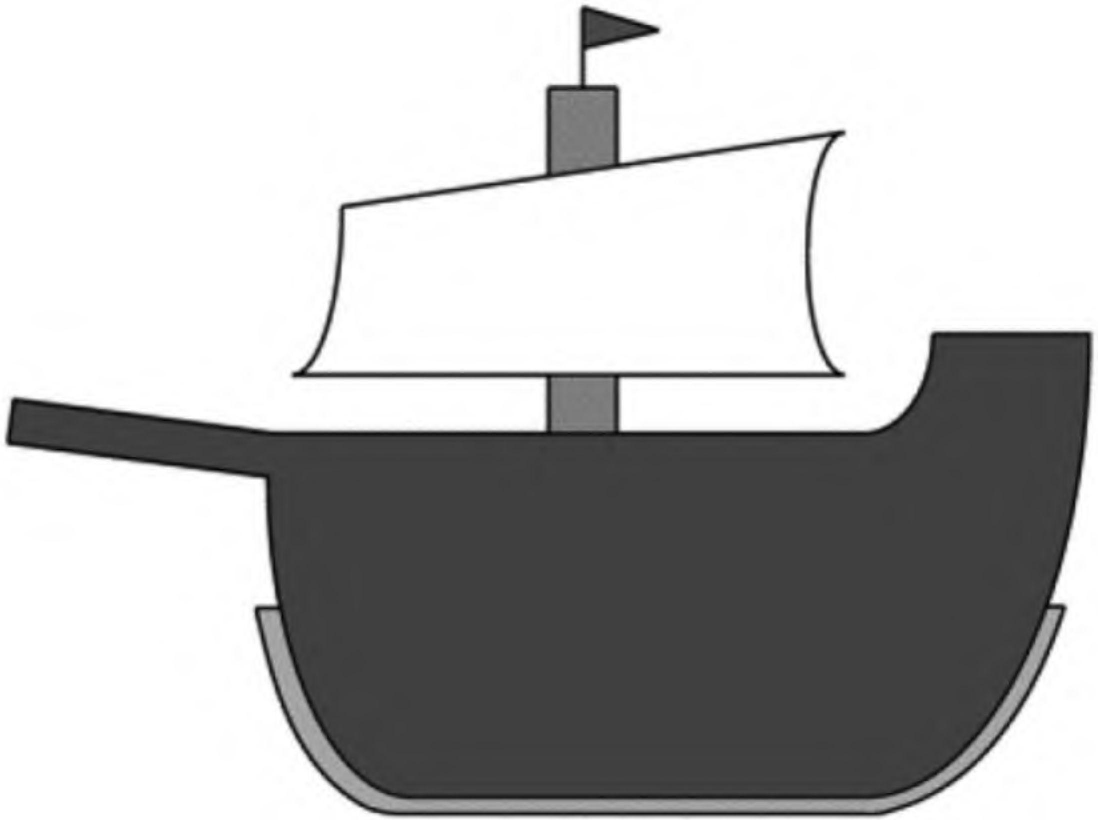
شاید تاکنون برای خواننده روشن شده باشد که همهٔ جنبه‌های فیزیک شهودی نیستند. در واقع برخی از هیجان‌انگیزترین اتفاق‌ها در فیزیک شامل مواردی است که شهودمان واقعاً ما را مأیوس می‌کند. گاهی شهود ما می‌گوید امکان ندارد وضعیتی صحیح باشد، در حالی که هست! بیایید تفحص خود را در فیزیک پادشهودی با بازگشت به موضوع غوطه‌وری آغاز کنیم.

بازدیدار غوطه‌وری

بسیاری از مردم فکر می‌کنند که فیزیک نوین ناشهودی(۱۵۴) است، و البته حقیقتی هم در این گزاره هست. از بیرون که به آن بنگریم، عجیب‌تر و عجیب‌تر دیده می‌شود. اما فیزیک ناشهودی به‌هیچ‌وجه پدیده‌ای معاصر نیست، خیلی خیلی پیش‌تر شروع شده است. مثالش غوطه‌وری است، که بیش از دو هزار سال شناخته‌شده بوده و حتی بعد از گذشت این‌همه زمان هنوز عمدتاً ناشهودی مانده است. چطور یک کشتی بسیار سنگین به‌سادگی می‌تواند توسط نیروی غوطه‌وری روی آب بماند؟ البته، در بخش گذشته دیدیم که اگر به این مفهوم درست فکر کنیم، می‌تواند شهودی شود. می‌توانیم آن را مستلزم اصلاح شهودمان بدانیم تا جنبهٔ ناشهودی فیزیک بیشتر شهودی احساس شود. اما باز هم خیلی عحیب به چشم می‌آید، مخصوصاً وقتی به نفتکش‌های غول‌آسا با طولی تقریباً نیم کیلومتر بیندیشیم که قادر به حمل محمولهٔ نیم‌میلیون‌تنی هستند!

همه می‌دانیم که بادکنک‌های هلیوم‌دار به علت غوطه‌وری صعود می‌کنند. اما اگر بادکنکی هلیومی در خودرو داشته باشید و ناگهان توقف کنید چه می‌شود؟ درحالی‌که شما (راننده) به جلو خم می‌شوید ــ ان‌شاءالله به‌واسطهٔ کمربند ایمنی کنترل می‌شوید ــ بادکنک به عقب می‌رود. اگر دور بزنید چه می‌شود؟ بر خلاف آنچه فکر می‌کنید، به‌سوی داخل حرکت می‌کند. هردو حالت به این دلیل است که از دید مسافر داخل خودرو، شتاب مؤثری داریم و بادکنک نسبت به باقی هوا که غلیظ‌تر است بر خلاف راستای آن شتاب حرکت می‌کند، و همانطور که انتظار می‌رود، این بر اساس غوطه‌وری است.

مورد حادتری از آن هم هست، به نام «پارادوکس ارشمیدس»(۱۵۵). فرض کنید. کشتی عظیمی دارید و فقط چند سطل آب. آیا می‌توانید فقط با استفاده از همان مقدار آب کشتی را شناور کنید؟ با کمال شگفتی پاسخ آری است! از آنجایی که نیروهای غوطه‌وری موضعی است کافی است زیر کشتی را از لایهٔ بسیار نازکی از آب پر کنیم، مثل شکل ۶۹. یقیناً استدلال به نفع نیروی غوطه‌وری که در فصل پیش مرور کردیم، مستلزم وجود مخزن بزرگی از آب نبود.



شکل ۶۹. ارشمیدس استدلال کرد که می‌توان یک کشتی را با یک سطل آب شناور کرد اگر مخزنی داشته باشید که با شکل کشتی جور باشد.

با وجودی که موارد ناشهودی در فیزیک کلاسیک فراوان است، تعداد موارد آن از زمانی که به دوران فیزیک معاصر وارد شده‌ایم به‌سرعت افزایش یافته است. همراه با شگفتی بیشتر ناشی از نسبیت و مکانیک کوانتومی و نظریهٔ ریسمان و غیره.

هواپیماها

دیرصباحی است دیگر زیاد آن را مورد پرسش قرار نمی‌دهیم، این واقعیت که هواپیماها می‌توانند پرواز کنند به خودی خود خیلی حیرت‌آور است. سخن از سازهٔ فلزی عظیمی است که وسط هوا پرواز می‌کند! چه‌طور امکان دارد؟

شکل بال هواپیما چنان طراحی شده است که هوا از بالای آن سریع‌تر از پایین آن می‌گذرد. اصل برنولی که در سال‌های نخستین قرن هجدهم تدوین شد می‌گوید که

$$p+ \rho v \ /2$$

در امتداد جریان ثابت است. در آن p فشار،v سرعت و ρ چگالی سیال است. از این رو هرچه v بیشتر باشد p کمتر است. پس فشار روی بال کمتر است از فشار زیر آن (چون بال طوری طراحی شد که هوا از روی بال آن سریع‌تر حرکت می‌کند). همین منجر به نیرویی به سوی بالا می‌شود و هواپیما را بالا می‌برد.

اصل برنولی، علی‌رغم عواقب ناشهودی‌اش منشائی ساده دارد: اساساً اصل بقاء انرژی است که در مورد جریان آرام(۱۵۶) به کار رفته است(۱۵۷): افزایش سرعت جریان (و در نتیجه انرژی جنبشی) ناشی از کار انجام‌شده به علت تغییر فشار است و از این رو ازدیاد انرژی جنبشی همراه با کاهش فشار است.

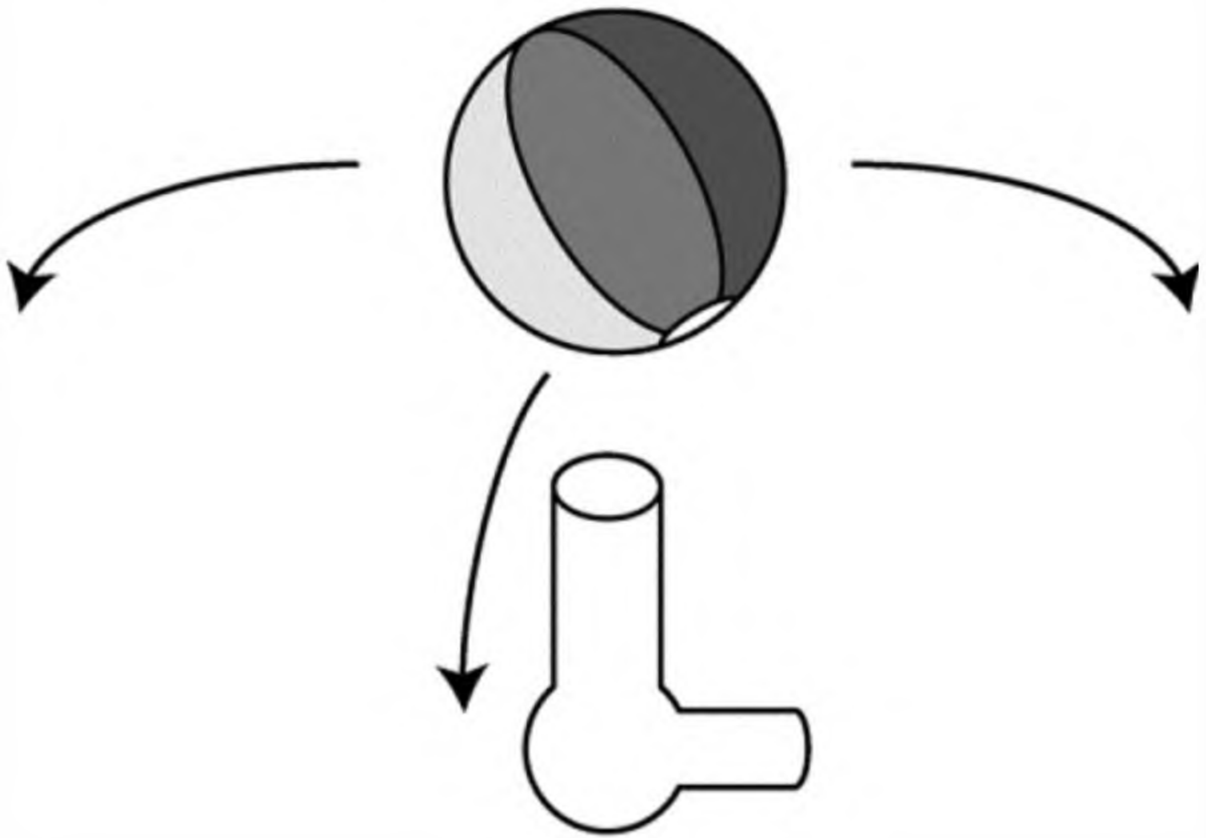
معما

یک دمندهٔ (کوچک) هوا دارید با یک توپ ساحلی سبک (بزرگ). چگونه می‌توانید توپ ساحلی را در هوا فقط با استفاده از دمنده معلق نگه دارید؟

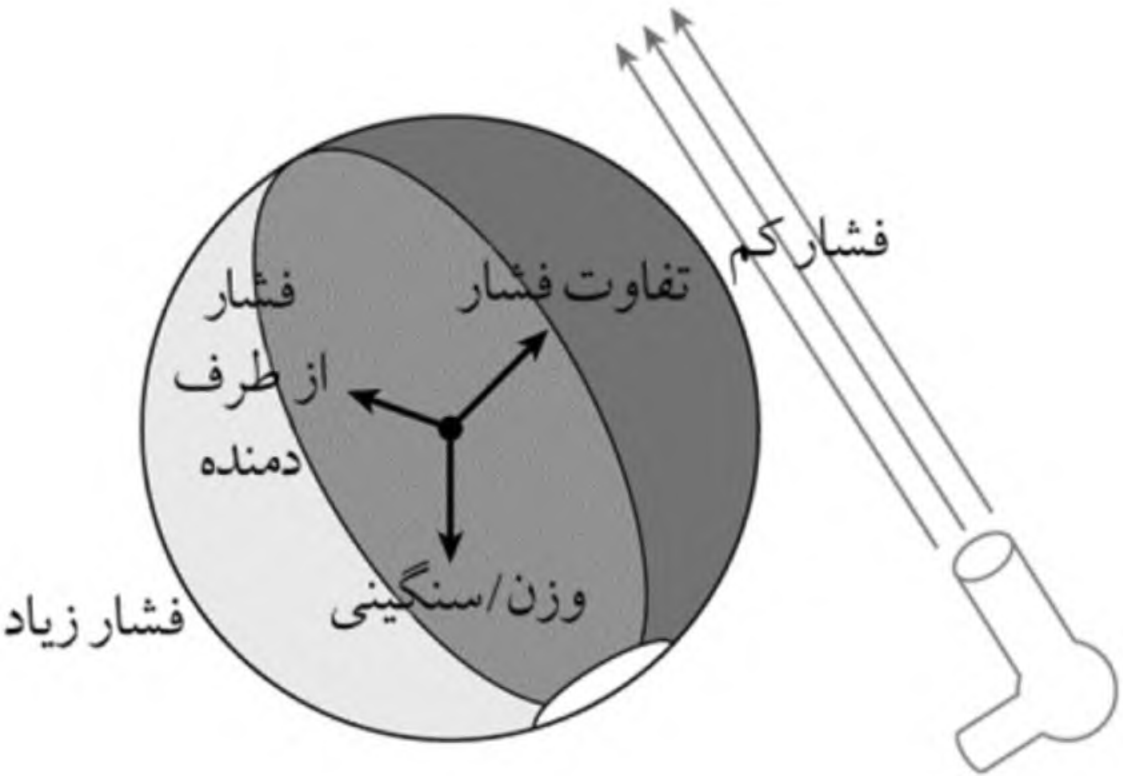
حل

شاید اول فکر کنید که دمنده را به سمت بالا بدمید، ولی این وضعیت تعادل ناپایداری می‌سازد و توپ به سرعت می‌افتد. عجیب اینجاست که نشانه گرفتن جریان هوا درست به بالای توپ و نه زیر آن، نیرویی به بالا تولید می‌کند که توپ را به بالا می‌راند. همان‌طور که

در موضوع هواپیما بحث کردیم، فشار و سرعت بر اساس قانون برنولی که از آن یاد کردیم به یکدیگر مربوط‌اند. پس وقتی سرعت هوای بالای توپ را زیاد می‌کنیم، فشار کاهش می‌یابد و هوا توپ را با خنثی کردن وزنش به سمت بالا می‌راند که به وضعیتی پایدار می‌انجامد.



شکل ۷۰. آیا می‌توانید توپ ساحلی را با دمنده معلق نگه دارید؟



شکل ۷۱. برای معلق نگه داشتن توپ در هوا لازم است دمنده را درست به بالای توپ نشانه بگیرید تا زیر آن!

چرا آسمان شب تیره است؟

این گزاره آن‌چنان که می‌نماید، واضح نیست. در سال ۱۵۷۶ توماس دیگز(۱۵۸) محاسبهٔ ساده‌ای انجام داد که یک معمای مشهور تاریخ علم را ــ پارادوکس آسمان شب تیره ــ (آن سان که خواهیم دید، تقریباً به معنی واقعی کلمه!) روشن ساخت. با فرض افت شدت نور یک منبع طبق قانون عکس مربع فاصله، و با فرض اینکه عالم نسبتاً همگن است به‌نحوی که چگالی ستاره‌ها تقریباً همه جا ثابت است، می‌توان محاسبه کرد که شدت نور ستاره‌ها باید کورکننده باشد. تحت این شرایط، در واقع شدت نور باید بی‌نهایت باشد، که بر خلاف آن چیزی است که از تجربهٔ هر روز (و «هر شب») می‌دانیم: یعنی آسمان شب نباید تاریک باشد!

برای این که ببینیم چرا با توجه به فرض‌های فوق این‌طور می‌شود، بیایید چگالی عددی ستاره‌ها را ρ بگیریم. در این صورت تعداد ستاره‌هایی که در لایه‌ای کروی به شعاع Rو ضخامت dR قرار دارد تقریباً برابر است با.

$$4\pi\rho R^2 dR$$

اما شدت نور متناسب است با معکوسR . به عبارت دیگر، برای هر ستاره،

$$I(R) = I_0/R^2$$

پس شدت نوری که از لایه‌ای به ضخامت dRو از فاصلهٔ R می‌گیریم تقریباً برابر است با

$$(I_0/R^2) \times (4\pi\rho R^2 dR) = 4\pi I_0 \rho dR$$

اگر رویdR از0 تا ∞ انتگرال بگیریم خواهیم داشت.

$$\int_0^\infty 4\pi I_0 \rho dR = \infty$$

به بیانی دیگر نور ستارگان باید بی‌نهایت درخشان باشد. این به‌وضوح مسأله است، چون در این میان چیزی با عقل جور درنمی‌آید!

پاسخ این معما چیست؟ راهی برای خروج از این بن‌بست این است که فرض کنیم مکان ما ویژه است و چگالی ستاره‌ها در سراسر عالم ثابت نیست. نیوتن راه‌حل دیگری عرضه کرد؛ به این صورت که عالم متناهی است. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که این نتیجه‌گیری استنباط ما را به نتیجه‌ای سازگار با مشاهداتمان می‌رساند. به‌علاوه این مسأله ارزش پارادوکس‌ها را در متوجه کردن ما به جنبه‌های عمیق‌تر از فیزیک نشان می‌دهد و شامل اشاراتی است دربارهٔ ماهیت متناهی عالم.

حل امروزی این پارادوکس این است که عالم در حال گسترش است. در نتیجه، نور در طی سفر خود در فضا دچار انتقال به سرخ می‌شود که از انرژی‌اش می‌کاهد. همچنین می‌دانیم عالم سِنی متناهی دارد، که بدین معناست که نورِ تعدادی متناهی از ستاره‌ها وقت دارند که به ما برسند. این دو عامل ترکیب می‌شوند تا پارادوکس را حل کنند. به بیانی متفاوت، حتی اگر عالم واقعاً اندازهٔ نامتناهی داشته باشد، اندازهٔ مؤثر عالمی که در دیدرس ما است متناهی است. از این تمرین می‌فهمیم که عالم بی‌نهایت پیر نیست، که حاکی از آن است که عالم باید آغازی داشته باشد. پس آسمان شب تیره است چون سن عالم متناهی است!

معادلات ماکسول

همان‌طور که تا حالا بحث کرده‌ایم، ماکسول راهی برای وحدت نظریه‌های الکتریسیته و مغناطیس یافت. معادلات او، آن‌سان که امروزه می‌توانیم بیان کنیم، به این نتیجه می‌انجامد که امواجی هستند که در فضای تهی با سرعت نور حرکت می‌کنند. اما ماکسول هرگز به این صورت به آن فکر نمی‌کرد. بر اساس شهود فیزیکی او، امواج به وسیلهٔ چیزهایی لرزنده ایجاد می‌شوند، که معنایش این بود که در فضای تهی نمی‌شود موج داشت. از نظر او تصور داشتن حلی در فضای تهی معنا نداشت، لذا او سعی کرد توضیحی بر حسب یک محیط فرضی به نام «اثیر» بسازد، که معلوم شد نادرست است. بعضی وقت‌ها شهود ما می‌تواند ما را به نوعی منحرف کند در حالی که به نوعی دیگر ما را در مسیر صحیح قرار دهد.

نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین

نسبیت پر از پارادوکس است، ولی بالمناقشه، سردرگم‌کننده‌ترین آنها قانون جمع سرعت‌ها است. بر اساس فیزیک نیوتنی، اگر جسمی در یک دستگاه مرجع با سرعت v حرکت کند، آن‌وقت در دستگاه مرجعی که با سرعت v نسبت به مرجع اصلی حرکت می‌کند، باید با سرعت حرکت کند. اما این نادرست از آب در می‌آید، مخصوصاً برای اجسامی که با سرعت بسیار زیاد حرکت می‌کنند. فرمول صحیح جمع سرعت‌ها بر اساس نظریهٔ نسبیت خاص این است:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

که در آن c سرعت نور است. به‌ویژه، اگر c= v می‌یابیم که

$$\frac{v_2+c}{1+v_2/c} = c$$

که مستقل از v است! پس سرعت نور در هر دستگاه مرجعی یکسان است.

معما

آیا ممکن است که لااقل به‌طور نظری، ماشین زمان(۱۵۹) بسازیم؟ ایده این است که یک سفینهٔ فضایی را چنان طراحی کنیم که بتوانیم حداقل در یک جهت در زمان سفر کنیم. کدام جهت سفر در زمان میسر است و چگونه دست به کار ساخت چنین وسیله‌ای می‌شوید؟ اگر بنا باشد سفر در زمان شما را به سفری هزارساله بر اساس اندازه‌گیری زمینی ببرد و نیز مایل باشید طول سفر برای شما به اندازهٔ تماشای یک فیلم دوساعته باشد، مشخصات اصلی طرح خود را تهیه کنید!

حل

بازگشت در زمان اصل علیت(۱۶۰) را نقض می‌کند و در هیچ نظریهٔ فیزیکی جایی ندارد. ولی می‌توانید با سرعت به کفایت زیاد به آینده سفر کنید و بازگردید. سرعت لازم حدود

$$(1 - 2.6 \times 10^{-14})c$$

خواهد بود. این ناشی از مفهوم انبساط زمان با ضریب انبساط

$$1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

است، که در بخش قبلی در مورد آن بحث کردیم. پس، طرحی که این تکلیف را انجام دهد نیازمند موشکی است که بتواند با چنین سرعتی نسبت به زمین حرکت کند. درنتیجه با این سرعت می‌توانیم در کنار دایره‌ای با پیرامون هزار سال نوری با مبدأ و مقصد زمین سفر کنیم و این سرعت حدود دو ساعت به ما وقت می‌دهد که فیلم خود را تماشا کنیم! در طول راه فقط حدود ۱/۵۰ شعاع کهکشان‌مان، یعنی راه شیری، را طی می‌کنیم.

در واقع، این آن‌چنان که فکر می‌کنیم غیرعملی نیست. برای اینکه جرم خود را به چنان سرعت‌هایی برسانید به انرژی معادل جرم خود احتیاج دارید. برای فردی با جرم حدود ۱۰۰ کیلوگرم می‌توانید این نوع انرژی را از منابع انرژی هسته‌ای تأمین کنید. و ما می‌توانیم آرام، بدون اینکه سرنشین بمیرد، شتاب بگیریم. ممکن است تعجب کنید چرا تا کنون این سفر انجام نشده است!

این همان موضوع پارادوکس دوقلوها است. بنا بر نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین، تمام چارچوب‌های مرجع لَخت معادل‌اند، پس چگونه ممکن

است سن یکی از دوقلوها متفاوت از دیگری باشد؟ جواب این است که یکی از دوقلوها باید برای بازگشت به زمین تحت شتاب قرار بگیرد و همین تقارن بین آنها را می‌شکند.

اندیشیدن در مورد این مسأله ممکن است ما را به پارادوکس دیگری بکشاند: اگر عالم تناوبی باشد چه؟ مثلاً اگر شکل آن استوانه‌ای باشد و نهایتاً سفینهٔ فضایی به همان مکان که بود برسد، حتی با سرعت ثابت بدون شتاب، چه می‌شود؟ در این صورت بر سر پارادوکس دوقلوها چه می‌آید؟

پاسخ این است که یک چارچوب مرجّح وجود دارد که در آن عالم واقعاً در فضا تناوبی است، بدون انتقال زمانی وقتی که دور فضا بچرخیم. و آن چارچوبی است که در آن عمرتان با بیشترین سرعت می‌گذرد.

آزمایشی کلاسیک

اگر یک توپ تنیس را روی یک توپ بسکتبال بگذارید و آنها را با هم به زمین بیندازید، از دید نظری، با فرض اینکه برخوردها کشسان باشند، توپ تنیس تقریباً نُه‌برابر بالاتر از ارتفاع اولیه‌ای که از آن انداخته شد می‌جهد. این واقعیت که توپ تنیس به چنین ارتفاعی می‌جهد کاملاً ناشهودی به نظر می‌رسد، ولی از یکی از مصادیق سادهٔ قانون بقاء انرژی و تکانه ناشی می‌شود. این‌طور عمل می‌کند: فرض کنیم توپ‌های بسکتبال و تنیس هر دو با یک سرعت در حال سقوط و در نزدیکی برخورد به زمین‌اند. به‌علاوه فرض کنیم که در حین سقوط، توپ تنیس به میزان بسیار کمی نسبت به توپ بسکتبال جابه‌جا می‌شود. توپ بسکتبال اول به زمین برخورد می‌کند و چون برخورد کشسان است ــ با سرعت v شروع به بالا رفتن می‌کند در حالی که توپ تنیس هنوز در حال سقوط با همان سرعت است. سرعت نسبی آن دو در آن لحظه 2v است. لحظه‌ای بعد توپ بسکتبال به توپ تنیس برخورد می‌کند و آن را به بالا می‌فرستد. توپ بسکتبال با همان سرعت v به حرکتش به سمت بالا ادامه می‌دهد زیرا توپ تنیس در مقایسه با توپ بسکتبال آن‌قدر سبک است که تأثیر برخوردش ناچیز است. برخورد توپ تنیس با توپ بسکتبال هم کشسان است، بدین‌معنی که سرعت نسبیشان لزوماً همان می‌ماند که بود،2v، و برای همین توپ تنیس باید با سرعت 3v بالا برود. از آنجایی که بیشینهٔ ارتفاع قابل حصول متناسب با مربع سرعت اولیه است، توپ تنیس تقریباً نه برابر همتای سنگین‌ترش بالا می‌رود.

پارادوکس‌های مکانیک کوانتومی

نسبیت و مکانیک کوانتومی هر دو بیش از یک قرن پیش سر برآوردند. هرچه نسبیت عجیب است، مکانیک کوانتومی از آن هم عجیب‌تر است. پس از صد سال هنوز جوانبی از این موضوع برجسته‌ترین فیزیکدانان جهان را به اعجاب وامی‌دارد، و هیچ مایهٔ آسودگی خاطری هم در چشم‌انداز وجود ندارد.

یکی از اولین پارادوکس‌ها که موجب حدوث مکانیک کوانتومی شد مسألهٔ تابش جسم سیاه بود. اگر به تابشی که از یک جعبه می‌آید توجه کنید، در تصویر کلاسیک در دمای T ، بنا بر مکانیک آماری هر وجه(۱۶۱) انرژی

$$\frac{1}{2}kT$$

دارد که k ثابت بولتزمن است. اما بی‌نهایت وجه هماهنگ برای امواج تابشی در یک جعبه وجود دارد و از این رو انرژی باید بی‌نهایت باشد. این شبیه همان مسألهٔ شدت بی‌نهایت است که در مورد تاریک بودن به‌جای به‌شدت درخشان بودن آسمان شب بحث کردیم. پلانک معما را با پیشنهاد کوانتیده بودن انرژی در مضرب‌های

$$\hbar\omega$$

حل کرد که در آن w بسامد تابش است. او نشان داد که این فرض به‌تنهایی برای حل پارادوکس کافی است. اساساً آنچه رخ می‌دهد این است که بسامدهایی که

$$\hbar\omega \gg kT$$

تولید نخواهند شد و از این رو عملاً تعداد وجوه فرکانس‌های تابشی متناهی است.

این بینش قدم مهمی در راه ابداع مکانیک کوانتومی بود، که تشکیل‌دهندهٔ بعضی از پادشهودی‌ترین بخش‌های قوانین فیزیک ما آن‌چنان که امروز می‌شناسیمشان هستند. جنبه‌های ناشهودی از همان فرض‌های مکانیک کوانتومی آغاز می‌شود: ذرّات مانند امواج‌اند، و ما نمی‌توانیم پدیده‌های فیزیکی را با قطعیت تأیید کنیم، فقط می‌توانیم احتمال‌گرایانه برخورد کنیم.

برای تعیین مکان ذرّه یک تابع چگالی احتمال (که مربع تابع موج ذرّه است) وجود دارد. لذا عدم قطعیت در مکان فقط به علت ناکارآمدی دستگاه‌های اندازه‌گیری ما نیست، بلکه جنبه‌ای ذاتی از ذرّه است. در واقع، نتیجهٔ آزمایش وابسته به چیزی است که اندازه می‌گیرید: بدین ترتیب اندازه‌گیری قسمت مهمی از نظریه می‌شود.

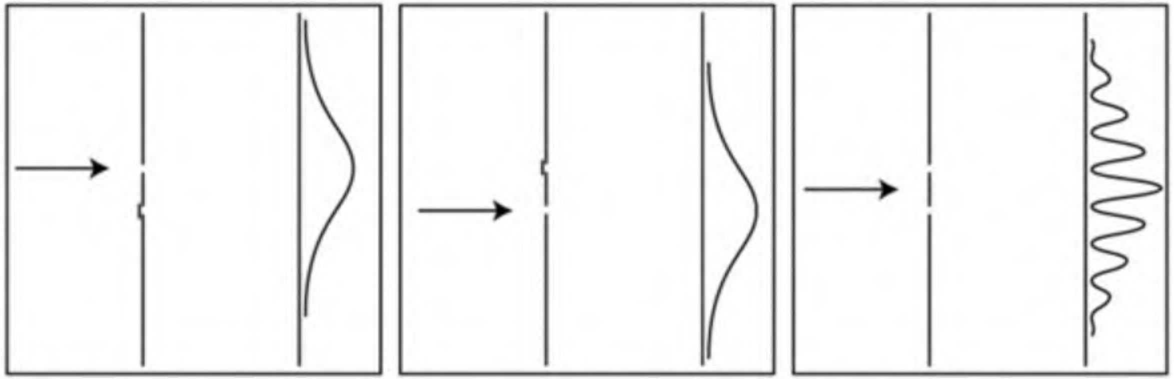
گفته‌ای شبیه به این را به فاینمن نسبت می‌دهند: «هر کس مدعی فهمیدن مکانیک کوانتومی باشد دروغ می‌گوید». می‌توان متخصص

برجسته‌ای در مکانیک کوانتومی بود، همچنان که فاینمن مطمئناً بود، بدون اینکه حسی غریزی در مورد این موضوع داشت. به طریقی مشابه، ممکن است گهگاه شاید هم به‌دفعات، از فرمالیسمی در فیزیک استفاده کنیم بدون آنکه مفاهیم زیربنایی آن را درون‌گیری کرده باشیم.

ماهیت احتمال‌گرایانهٔ مکانیک کوانتومی سؤال‌هایی فلسفی دربارهٔ علیت‌باوری و ارادهٔ آزاد مطرح می‌کند. اگرچه این ارتباط‌ها تا حدی خیال‌پردازانه هستند، مکانیک کوانتومی ذاتاً پادشهودی است. اینشتین تردیدهای خود را در مورد جنبه‌های احتمال‌باورانهٔ مکانیک کوانتوم به طور وسیعی آشکار ساخت و استدلال کرد که «خدا با عالم طاس‌بازی نمی‌کند». که بور(۱۶۲) به آن پاسخ معروف را داد: «از تعیین تکلیف برای خدا دست بردار!»

آزمایش دو شکاف

آزمایش دو شکاف عبارت است از پرتاب ذرّات به مانعی با دو شکاف و دیدن اینکه به کجا می‌رسند. اول، فقط شکاف بالایی باز می‌شود، و بعد شکاف پایینی. سرانجام هر دو شکاف باز می‌شوند (شکل ۷۲). ممکن است انتظار داشته باشید که توزیع مسیرهای ذرّه‌ها وقتی هر دو شکاف باز باشند جمع توزیع‌های زمانی باشد که شکاف‌ها تک‌تک بازند، اما اینچنین نیست!

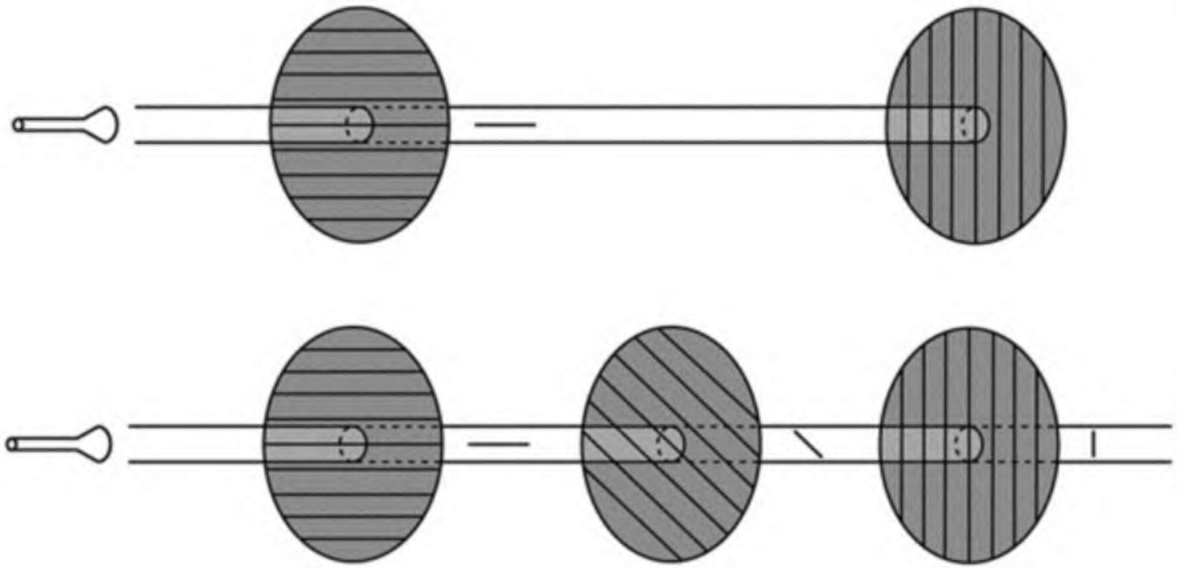


شکل ۷۲. الگوی تداخل در آزمایش دو شکاف.

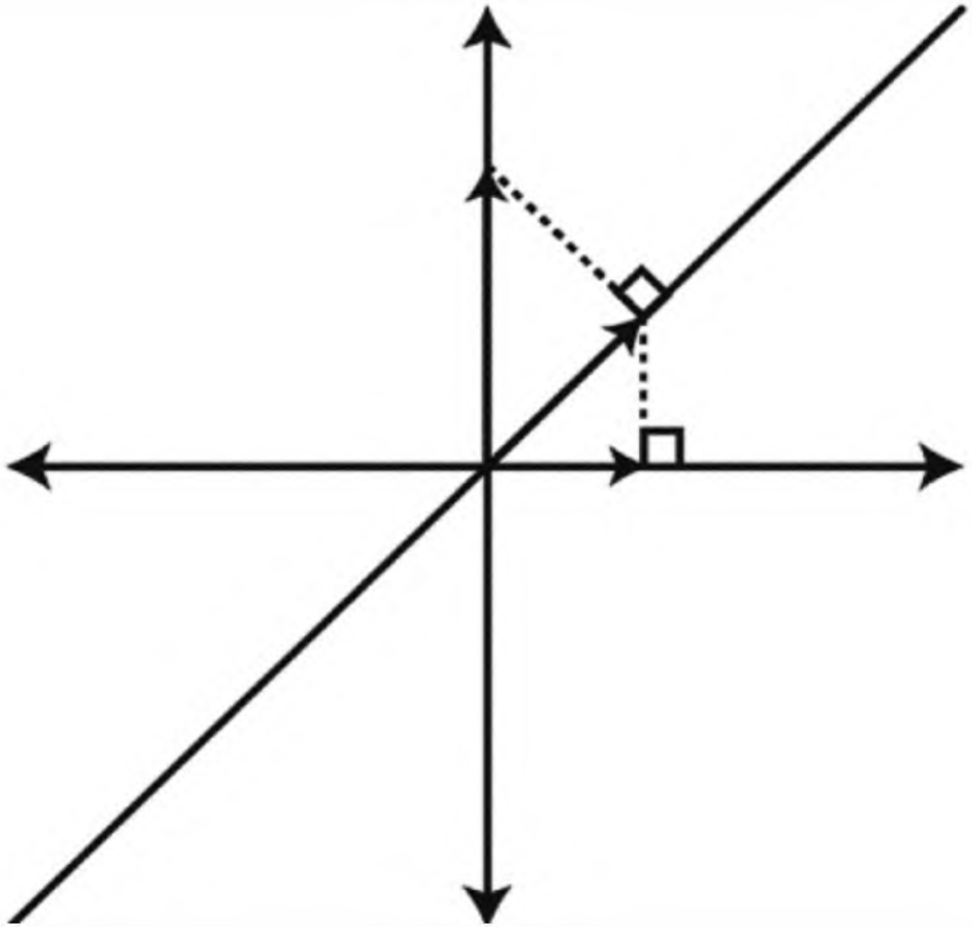
وقتی هر دو شکاف بازند، ذرّه فقط از یکی از شکاف‌ها نمی‌گذرد، بلکه همزمان از هردو رد می‌شود، همان‌طور که برای موج آب رخ می‌دهد! به این طریق ذرّه با خودش تداخل می‌کند که منجر به یک الگوی تداخلی می‌شود. این حتی زمانی که ذرّه‌ها را یکی یکی پرتاب کنیم هم رخ می‌دهد: ذرّات در الگوی توزیع با طرح تداخلی انباشته می‌شوند. انگار که طبیعت با ما شوخی می‌کند. اگر بخواهیم تعیین کنیم که ذرّه «واقعاً» از کدام شکاف می‌گذرد، مثلاً با تاباندن نور بر ذرّه، و دنبال کردن مسیر آن، خواهیم دید که فقط از یکی از دو شکاف رد می‌شود ــ اما بهایی که می‌پردازیم آن است که الگوی تداخلی ناپدید می‌شود! ما در آزمایش دخالت کرده‌ایم. به عبارت دیگر، عملِ اندازه‌گیری نتیجه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. نه می‌توانیم نحوهٔ آزمایش را از حاصل آن جدا کنیم و نه می‌توانیم ناظر منفعلی باشیم که تأثیری در وقایع ندارد. تا حدی تقریباً شبیه روانشناسی است، که پاسخی که می‌گیریم به نوع و ترتیب سؤالاتی که می‌پرسیم وابسته است!

مثال دیگری از فیزیک کلاسیک با رنگ و بویی مشابه داریم. می‌شود آزمایشی از نوع زیر ترتیب داد. اگر نور را به دو تیغه شیشه‌ای خاص بتابانیم نوری در پشت دو تیغه مشاهده نمی‌شود. اما، وقتی تیغهٔ خاص سومی بین دو تیغه قرار دهیم، ناگهان نور دیده می‌شود!

این چگونه ممکن است؟ تیغه‌ها قطبنده(۱۶۳)اند. نور را چنان عبور می‌دهند که میدان‌های الکتریکی فقط در راستای معینی نوسان کنند. در ابتدا، دو تیغه محورهای قطبش عمود بر هم دارند، مثل شکل ۷۳، به طوری که نوری که از قطبندهٔ اول بیرون می‌آید هیچ میدانی در راستای محور قطبشِ دوم ندارد، و در نتیجه، هیچ نوری از دومی در نمی‌آید. با افزودن تیغهٔ دیگر در بین‌شان و انتخاب زاویهٔ آن به اندازهٔ زاویهٔ ۴۵ درجه برای محور نسبت به دو تیغهٔ دیگر، باعث تغییر راستای محور میدان الکتریکی می‌شویم. زمانی که نور به تیغهٔ آخر می‌رسد به جای آنکه بر آن عمود باشد، نسبت به آن زاویهٔ ۴۵ درجه دارد و در نتیجه قسمتی از آن می‌تواند از آن تیغه بگذرد.(۱۶۴)



شکل ۷۳. افزودن یک قطبنده در وسط اجازه می‌دهد مقداری از نور گذر کند.



شکل ۷۴. جا دادن قطبندهٔ میانی منجر به دوران زاویهٔ قطبش می‌شود.

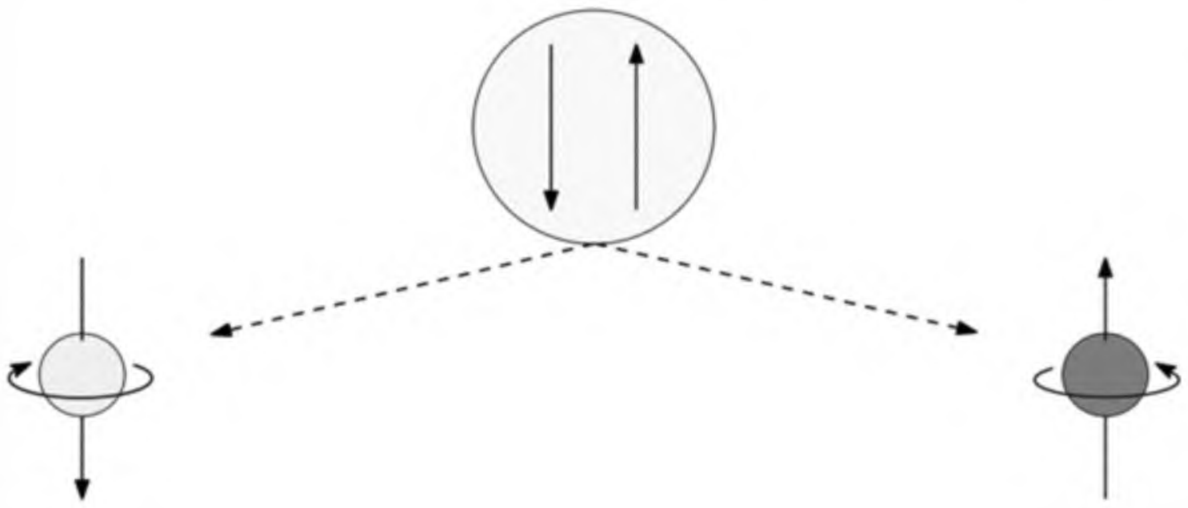
ارتباط اینها به نظریهٔ کوانتومی چیست؟ الکترونی را در نظر بگیرید. الکترون می‌تواند نسبت به هر محوری اسپین بالا یا پایین داشته باشد. تا همین جا هم عجیب است: بر اساس استدلال کلاسیک ممکن است فکر کنیم که اسپین‌های «میانه» هم باید وجود داشته باشد. اما چنین نیست: برای هر راستایی که انتخاب کنید اسپین الکترون در آن راستا کوانتیده است، و یا رو به بالا است یا رو به پایین. می‌توان به آزمایشی اندیشید که در آن بپرسید آیا اسپین الکترون رو به بالا است یا پایین. اگر این سؤال را برای دو محور مختلف، مثلاً x وy مطرح کنید، آن‌وقت دارید این راستاها را بر اسپین‌ها تحمیل می‌کنید. پس اگر اسپین الکترونی را در جهت بالا در مورد محورx ، و بعد در راستای محورy اندازه‌گیری کنید می‌بینید که احتمال مساوی دارد که در امتداد محور y رو به بالا یا رو به پایین باشد. اما اگر اسپین الکترون را در راستای محور میانه،x=y ، اندازه بگیرید قبل از اینکه آن را در راستای محورy اندازه‌گیری کنید عملاً الکترون را وادار می‌کنید که اسپینش را در امتداد این محور میانه برگزیند که بیشتر متمایل به جهت بالا است تا پایین. حال اگر اسپین را در راستای محور y اندازه بگیرید، بیشتر با این احتمال مواجه می‌شوید که رو به بالا باشد، و به این ترتیب نتیجهٔ اندازه‌گیری نهایی را تغییر داده‌اید. آنچه می‌بینید چیزی مشابه مثال بالا در مورد امواج نور در فیزیک کلاسیک است: زمانی که تیغهٔ سوم اضافه شد، که محور قطبشش به اندازهٔ ۴۵ درجه چرخیده بود، میدان الکتریکی را در آن راستای جدید تغییر دادیم که نتیجهٔ تیغهٔ آخر را عوض می‌کند.

تمایزناپذیری([165]) در مکانیک کوانتومی

یکی دیگر از جنبه‌های ناشهودی مکانیک کوانتومی تمایزناپذیری ذرّات بنیادی است. اگر من یک الکترون داشته باشم و شما هم یک الکترون، و آنها را با الکترون‌های دیگر در جعبه‌ای بگذاریم، هیچ یک از ما نمی‌توانیم بر الکترونمان برچسپ بزنیم تا بعداً آنها را از میان انبوه‌شان برداریم. تمایز بین دو الکترون ناممکن است. این از تقارن تابع موج مشترک آنها ناشی می‌شود. اگر الکترونی در نقطه‌ای خاص داشته باشید و آن را وادارید تا جایش را با الکترونی در جای دیگر عوض کند، از دید فیزیک هیچ چیز تغییر نمی‌کند، و منظور ما از تقارن تبادل ذرّات همسان همین است. می‌توانیم کمی فراتر برویم و بگوییم که طبیعت از جهاتی دموکراتیک است. تمام الکترون‌های عالم همسان هستند و تمامشان تمایز ناپذیرند؛ هیچ الکترونی بر دیگری ارجح نیست!

پارادوکس ئی پی آر

معروف است که اینشتین مکانیک کوانتومی را رد می‌کرد، و می‌کوشید آزمایش‌هایی فکری در رد آن طراحی کند. یکی از آنها «پارادوکس اینشتین ـ پادولسکی ـ روزن (ئی پی آر)»(۱۶۶) است. تصور کنید اتمی با اسپین صفر دارید،که به دو ذرّه وامی‌پاشد (مثلاً یک پوزیترون و یک الکترون). شکل ۷۵ را ببینید. چون اسپین اتم اصلی صفر بود، جمع اسپین‌های ذرّات حاصل باید صفر باشد. پس اگر اسپین یکی رو به بالا باشد، اسپین دیگری باید رو به پایین باشد. اما با این فرض که دربارهٔ مکانیک کوانتومی حرف می‌زنیم، از پیش نمی‌دانیم که کدام یک رو به بالا یا پایین است تا اینکه آزمایشی را انجام دهیم.



شکل ۷۵. پارادوکس ئی پی آر

حالا فرض کنید که واپاشی مدت‌ها پیش رخ داده است، و دو ذرّه از هم دور شده‌اند، اما هیچ‌کس تا حالا آن را اندازه نگرفته است. بعد کسی تصمیم می‌گیرد آزمایشی بر یکی از دو ذرّه انجام دهد تا اسپین آن را بیابد. در این صورت می‌تواند نتیجهٔ آزمایش روی ذرّهٔ دیگر را با قطعیت مطلق پیش‌بینی کند زیرا باید اسپین معکوس داشته باشد. به عبارت دیگر، او دارد نتیجهٔ آزمایشی را در جایی خیلی دور که آزمایشگری دیگر ممکن است در همان لحظه انجام دهد تعیین می‌کند. اینشتین این اندیشهٔ حیرت‌آور را عمل اجنّه از راه دور(۱۶۷) نامید.(۱۶۸)

در واقع، مفهوم ناموضعیت(۱۶۹) در اندازه‌گیری یکی از جنبه‌های ناشهودی نظریهٔ کوانتومی است. در مکانیک کوانتومی، حالت‌ها و سرنوشت‌های دو ذرّه «در هم تنیده‌اند»، بدین معنی که اندازه‌گیری یکی مثل اندازه‌گیری دیگری است، حتی اگر دیگری بسیار دور باشد ـــ و به‌جدّ دور از دسترس آزمایشگر. اینشتین (به همراه تعدادی فیزیکدان دیگر) این ایده را کلاً نامطلوب یافت، و کوشید بدیل‌هایی برای مکانیک کوانتومی طراحی کند که در آنها خصیصه‌های احتمال‌گرایانهٔ میدان‌ها نه ناشی از راه و روش طبیعت، بلکه فقط به علت فقدان اطلاعات دقیق از حالت یک دستگاه باشد، که معمولاً در مورد مدل‌های آماری چنین است. او فرض می‌کرد باید متغیرهایی نهانی(۱۷۰) باشند که اطلاعات دقیقی دربارهٔ آنها نداریم. اما اگر به آنها دست می‌یافتیم، می‌توانستیم یک پیش‌بینی دقیق، و نه گزاره‌ای احتمال‌گرایانه و سرهم‌بندی‌شده در مورد نتیجهٔ یک آزمایش داشته باشیم.

بعدها، جان بِل(۱۷۱) راه زیبایی برای آزمودن کمّی این نظریه یافت، آزمایشی را طراحی کرد که به موجب آن مکانیک کوانتومی یک نتیجه را پیش‌بینی می‌کرد و نظریهٔ متغیرهای زمانی (مستقل از اینکه این متغیرها چه باشند) چیزی دیگر را. آزمایش‌های اخیر تصویر مکانیک

کوانتومی را با مشاهدهٔ مستقیم، تأیید کرده‌اند، و از این طریق نظریه‌های متغیرهای نهانی را منتفی دانستند. در نتیجه، مجبوریم با این نظریهٔ شگفت‌انگیز زندگی کنیم که اینشتین هیچ‌گاه با آن در آرامش نبود.

علیرغم توفیقی که مکانیک کوانتومی در توضیح عالم ما داشته ــ به شیوه‌هایی که اغلب شهود را به چالش می‌کشد ــ مناقشات مربوط به نظریهٔ اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی هنوز آرام نگرفته‌اند. برخی از فیزیکدانان انتظار دارند که گرانش کوانتومی این وضعیت را کمی روشن‌تر سازد.

سیاهچاله‌ها

سیاهچاله‌ها حاصل تکینگی‌ها در معادلات اینشتین در نسبیت عام‌اند. یکی از عواقب این نظریه آن است که وقتی در حجمی مفروض به اندازهٔ کافی مادّه انباشت شود، سیاهچاله به وجود می‌آید. مثلاً اگر بتوان تمام جرم خورشیدمان را در ناحیه‌ای با شعاعی کمتر از چند کیلومتر فشرده کرد، سیاهچاله‌ای به‌دست می‌آید. سرعت فرار لازم برای ترک سیاهچاله از سرعت نور فراتر می‌رود. به بیانی دیگر، هیچ چیزی، حتی نور وقتی در درون سیاهچاله باشد، نمی‌تواند از آن بگریزد. به این دلیل است که آنها را سیاهچاله می‌خوانند. مرز بیرونی، که نقطهٔ بی‌بازگشت را مشخص می‌کند، افق سیاهچاله نام دارد. باور بر این است که ابَرسیاهچاله در مرکز بسیاری از کهکشانه‌ها، از جمله کهکشان ما، وجود دارند. منجمین نشانه‌های فراوانی از وجود سیاهچاله‌ها یافته‌اند ــ نه با مشاهدهٔ مستقیم آنها، بلکه از مطالعهٔ مادّه‌ای که در آستانهٔ سقوط در آن مغاک است. علاوه بر این اخیراً در آزمایش لیگو(۱۷۲)، امواج گرانشی رهاشده در طی ادغامشان اندازه‌گیری شده‌اند.

اگرچه دانشمندان هم‌چنان مطالب زیادی دربارهٔ سیاهچاله‌ها می‌آموزند، این اجسام از دید نظری آن‌قدرها شناخته‌شده نیستند. سی سال اخیر را در تلاش به پاسخ این سؤال صرف کرده‌ایم که وقتی چیزی در سیاهچاله می‌افتد چه می‌شود (شکل ۷۶) و هنوز واقعاً نمی‌دانیم. معادلات اینشتین می‌گوید که چون جسمی در سیاهچاله بیفتد، در زمانی متناهی به تکینگی در مرکز ــ نقطه‌ای با انحناء بی‌نهایت ــ می‌رسد. اینکه در تکینگی چه رخ می‌دهد هیچ‌کس نمی‌داند.

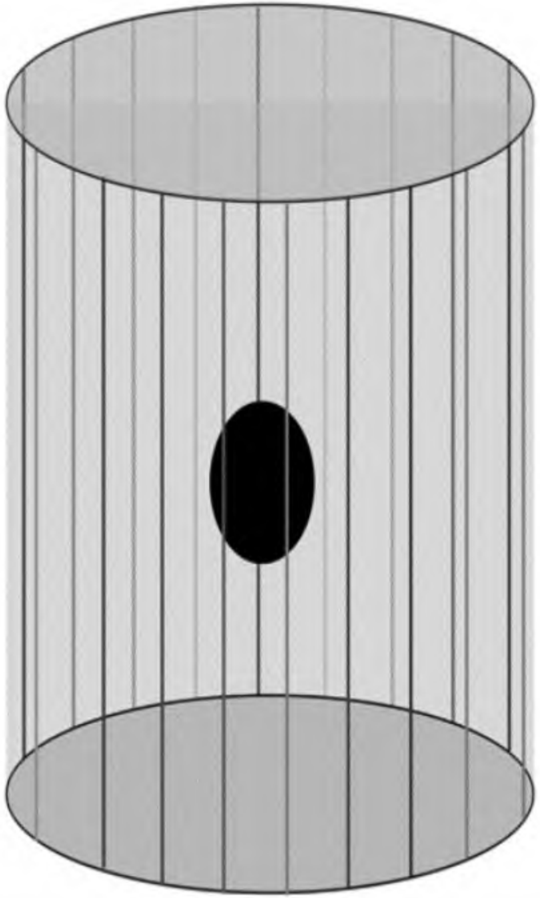
شکل ۷۶. می‌توان از افق رویداد گذر کرد و در زمانی متناهی به تکینگی سیاهچاله اصابت کرد.

این واقعیت که حل‌های معادلات اینشتین منتج به بی‌نهایت شدن انحناء فضا ـ زمان در برخی جاها می‌شوند حکایت از آن دارد که این نظریه به‌تنهایی برای توصیف کامل سیاهچاله‌ها کافی نیست. اینشتین خودش از باور به وجود سیاهچاله‌ها امتناع می‌ورزید هر چند که ما امروزه دیگر مطمئن هستیم که وجود دارند. به‌علاوه، اکنون دیگر بسیاری از فیزیکدانان باور دارند که برای حل معضل تکینگی‌های انحنا که در قلب سیاهچاله نشسته‌اند، به نظریهٔ وسیع‌تری نیاز داریم که نسبیت عام و مکانیک کوانتومی را با هم تلفیق کند.

با وجود پیشرفت قابل ملاحظه، معلوم شده است که این چالشی بس عظیم است. استیون هاکینگ(۱۷۳) تقریباً نیم قرن پیش نشان داد که سیاهچاله‌ها به علت اثرهای کوانتومی می‌توانند تابش هاکینگ گسیل کنند. هاکینگ بر اساس کار بکنشتاین(۱۷۴) نشان داد که مساحت یک سیاهچاله به آنتروپی آن (آنتروپی محبوس در آن) مربوط است که به نوبهٔ خود به جرمش بستگی دارد. در اینجا پارادوکس اطلاعاتی(۱۷۵) به وجود می‌آید، چون اجسامی که به درون سیاهچاله سقوط می‌کنند نمی‌توانند از آن خارج شوند. اما آن گونه که هاکینگ گفته است، سیاهچاله به شکل گرمایی انرژی تابش می‌کند بدین معنی که بالاخره ناپدید خواهد شد بدون دادن هیچ اطلاعاتی، و لذا تمام اطلاعاتی را که اشیای افتاده در آن با خود حمل کرده‌اند از بین می‌برد. با دانستن اینکه بر اساس مکانیک کوانتومی اطلاعات نمی‌تواند نابود شود، این بالقوه مسأله‌ای جدی را مطرح می‌کند. تفکر فعلی ما بر این باور است که این اطلاعات به طریقی قابل بازیابی است، اما دانسته‌های ما از درون سیاهچاله‌ها آن‌قدر نیست که ساز و کاری را توضیح دهیم که ما را قادر به بازیابی آن سازد. این یکی از دلایل متعددی است که سیاهچاله‌ها را در میان عجیب‌ترین و ناشهودی‌ترین اشیای عالم قرارمی‌دهد.

هولوگرافی

هولوگرام‌ها تصویرهای دو بعدی‌اند که توهم سه‌بعدی را القا می‌کنند. به طور وسیع‌تر، هولوگرافی، با دستگاهایی سرو کار دارد که از آنچه می‌نمایند یک بُعد آزادی کمتر دارند. این به سیاهچاله چه ربطی دارد؟ خوب، گفتیم که آنتروپی سیاهچاله به مساحت آن مربوط است و نه به حجمش. پس در این مورد، به نظر می‌آید که یک بعد کم داریم، انگار که تمام اطلاعات درون سیاهچاله به‌نحوی سرّی روی سطحش (یا افق حادثه‌اش) رمزگذاری شده است ــ درست مثل هولوگرام. به شکل ۷۷ نگاه کنید. از این راه، یک مسألهٔ سه‌بعدی به ناگاه به مسأله‌ای دوبعدی تقلیل یافته است. و این خط فکری منبع الهام مهمی برای فیزیکدانانی شده است که می‌کوشند گرانش را یک‌جا به نظام فیزیکی با یک بعد کمتر مربوط کنند. اصل تأثیرگذار در اینجا، که به هولوگرافی(۱۷۶) شهره شده است، در قلب بعضی کارهای جاریِ بسیار هیجان‌انگیز در فیزیک نظری امروزه جای گرفته است. و منصفانه است اگر بگوییم که انگیزهٔ پشت این کار از اندیشیدن دربارهٔ سیاهچاله آمده است ــ شیء ناممکنی که در ابتدا از محاسباتی در سال ۱۹۱۵ سر برآورد، و حالا به‌مراتب مهم‌تر از آن چیزی به نظر می‌آید که ممکن بود تصور شود.



شکل ۷۷. اشیاء درون استوانه، از جمله سیاهچاله را می‌توان از منظر مرز استوانه توصیف کرد. این همان مفهوم هولوگرافی است که در ابتدا جرارد اِتهوفت و لنی ساسکیند آغاز کردند.

۸. طبیعیت(۱۷۷) در فیزیک: تحلیل ابعادی(۱۷۸)

زمانی برای آموختن

معلمی قضیهٔ زیر را در کلاس توضیح می‌داد: اگرM ماتریسی n ×nباشد، آنگاه

$$\det(M - \lambda I) = P(\lambda)$$

یک چندجمله‌ای درجهٔn ازλ است، که چندجمله‌ای مشخصهٔ خوانده می‌شود. این واقعیت که

$$P(M) = 0$$

قضیهٔ کیلی ـ همیلتون(۱۷۹) نام دارد. به عبارت دیگر، هر ماتریس در معادلهٔ مشخصه‌اش صدق می‌کند.

دانش‌آموزی پرسید چرا این گزاره صادق است. معلم پاسخ داد، «اگر ماتریسی در معادلهٔ مشخصهٔ خودش صدق نکند، پس در معادلهٔ مشخصهٔ چه چیزی صدق کند؟»

این حکایت به‌عنوان یک لطیفه مطرح می‌شود، منتها لطیفه‌ای با ماهیتی نسبتاً فنی. و حتی اگر این لطیفه شما را به قهقهه نیندازد، دارای ارزشی آموزشی است که به اندیشهٔ «طبیعی بودن» اشاره می‌کند که اتفاقاً موضوع اصلی این فصل است.