یادداشتی بر شکل ِیک قطره روی ِسطح ِتخت ِافقی II

امیرحسین ِفتح‌اللهی ahfatol@gmail.com

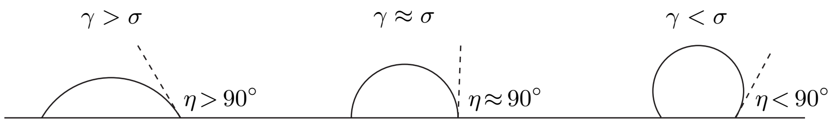
چکیده: شکل ِ یک قطره‌ی مایع روی ِ یک سطح ِ تخت ِ افقی، در حالتی که زاویه‌ی تماس بین ِ مایع و سطح بزرگ‌تر از $90°$ است، به وسیله‌ی حلّ ِ از نوع ِ سری مطالعه شده است.

0 مقدمه

زاویه در نقطه‌ی تماس ِ یک مایع با یک جامد با کشش‌سطحی ِ مایع (σ) و چسبنده‌گی ِ مایع به جامد (γ) تعیین می‌شود؛ اگر η زاویه‌ی تماس باشد داریم:

$$\cos\eta = 1 - \frac{\gamma}{\sigma} \tag{1}$$

حالت‌های ِ مختلفی که زاویه‌ی تماس می‌تواند بگیرد در شکل رسم شده است.



سطح ِ قطره از معادله‌ی پوآسون داده می‌شود؛ اگر Δp اختلاف‌فشار ِ بیرون و داخل روی ِ هر نقطه از سطح ِ مایع باشد، داریم:

$$\Delta p = \pm\, \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{2}$$

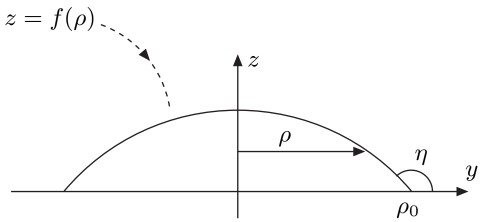
در آن $R_{1,2}$ دو شعاع‌انحنای ِ عمود بر هم ِ سطح هست‌اند. برای ِ قراردادی که برای ِ $\pm$ به کار می‌بریم به [1] رجوع کنید.

در مقاله‌ی قبلی [1] شکلِ یک قطره رویِ یک سطحِ تختِ افقی در مرتبه‌ی صفر و یک از اثرِ وزن به دست آمد. دیده شد که در مرتبه‌ی صفر، یعنی بدونِ اثرِ وزن، قطره قسمتی از یک کره است. مشخصاتِ کره به وسیله‌ی حجم و زاویه‌ی تماسِ بینِ مایع و سطح داده می‌شود.

در این یادداشت از روشِ سری معادله‌دیفرانسیلِ سطح را مطالعه می‌کنیم. دو حالتِ $\eta > 90^\circ$ و $\eta < 90^\circ$ باید جداگانه مطالعه شوند، چون در دوّمی قطره ناحیه‌ی به اصطلاح شکم را دارد که کار را متفاوت می‌کند. در این یادداشت به حالتِ $\eta > 90^\circ$ می‌پردازیم.

1 مقدماتِ ریاضی

برایِ یک قطره که تقارنِ سمتی دارد، مانندِ [1]، از مختصاتِ استوانه‌ای استفاده می‌کنیم. در این صورت zِ سطح به عنوانِ تابعی از ρ بیان می‌شود، $z = f(\rho)$.



$\rho = 0$ قله‌ی قطره است، پس $f'(0) = 0$. نقطه‌ای که f صفر می‌شود را ρ_0 می‌گیریم که مقدارش باید تعیین شود. پس داریم:

$$f(\rho_0) = 0 \tag{3}$$

$$f'(\rho_0) = \tan\eta < 0 \tag{4}$$

در [1] نشان داده شد که معادله‌ی پوآسون با تقارنِ سمتی به شکلِ زیر خواهد بود:

$$\sigma \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = \Delta p, \tag{5}$$

برای قطره با $\eta > 90$ که همه جا محدّب است قرارداد علامتِ مثبت را نگه می‌دارد. برای تفاوتِ فشار داریم:

$$\Delta p = \Delta p_0 + \mu\, g\, f(z) \tag{6}$$

که در آن μ چگالیِ مایع و g شتاب‌جاذبه است. Δp_0 یک مقدارِ ثابت است که باید تعیین شود. با انتگرال‌گیری از دو طرفِ معادله داریم:

$$\rho\,\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{\,2}}} = \kappa\,\rho^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\int_0^{\rho} \xi\, f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{7}$$

که در آن $\kappa = \dfrac{\Delta p_0}{2\,\sigma}$ است؛ از [1] می‌دانیم Δp_0 و κ منفی هستاند. در واقع معادله‌ی بالا معادله‌ای است که با حلِّ آن $f(\rho)$ به دست می‌آید.

برایِ حجمِ قطره داریم:

$$V = 2\pi\int_0^{\rho_0} \xi\, f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

با استفاده از تعریفِ حجم، با انتخابِ $\rho = \rho_0$ در (7) داریم:

$$-\rho_0\sin\eta = \kappa\,\rho_0^2 + \frac{\mu g}{2\pi\,\sigma}\,V \tag{9}$$

که برایِ به دست آوردنِ آن از این استفاده کرده‌ایم که:

$$\left.\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{\,2}}}\right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\tan\eta}{\sqrt{1+\tan^2\eta}} = -\sin\eta < 0$$

به این ترتیب داریم:

$$-\,\kappa = \frac{\sin\eta}{\rho_0} + \frac{\mu g\ V}{2\pi\,\sigma\,\rho_0^2} \tag{10}$$

توجه داریم که رابطه‌ای که به دست آمد دقیق است، و ρ_0 و κ را، به عنوانِ دو ثابتِ ناشناخته، به هم ربط می‌دهد. خواهیم دید که با استفاده از این رابطه‌ی دقیق می‌توان برآوردی از اعتبارِ جوابِ سری، و در صورتِ لزومِ درصدِ خطا، به دست آورد.

در این‌جا حل برایِ حالتِ بدونِ گرانش $(g = 0)$ را یادآوری می‌کنیم [1]. به راحتی دیده می‌شود که تابع به شکلِ

$$f_{g=0}(\rho) = z_0 + \sqrt{R^2 - \rho^2} \tag{11}$$

در (7) صدق می‌کند به شرطی که $R = |\kappa|^{-1}$، و z_0 یک ثابت باشد. عبارتِ بالا معادله‌ی یک کره به شعاعِ R است که مرکزش در z_0 است. ثابت‌هایِ R، z_0 و ρ_0 از شرط‌هایِ (3)، (4) و (8) به دست می‌آیند:

$$z_0 = R\ \cos\eta < 0, \tag{12}$$

$$\rho_0 = R\ \sin\eta, \tag{13}$$

$$R = \left(\frac{3\,V}{\pi\ (1+\cos\eta)^2(2-\cos\eta)}\right)^{1/3} \tag{14}$$

دیده می‌شود که همه چیز بر حسبِ η و V داده می‌شود.

2 حلِ معادله به روشِ سری

می‌خواهیم معادله‌ی (7) را به روش جای‌گزینیِ یک سری برایِ f بر حسبِ ρ حل کنیم. چون f تابعِ زوج است پس فقط توان‌هایِ زوجِ ρ وارد می‌شوند، پس داریم:

$$f(\rho) = a_0 + a_2\,\rho^2 + a_4\,\rho^4 + a_6\,\rho^6 + \cdots \tag{15}$$

در حلِّ دقیق تمامِ جمله‌ها می‌مانند، امّا ما در این‌جا به دنبالِ حالت‌هائی هستیم که تعدادِ محدودی از جمله‌ها هم جوابِ خوبی باشند. طبیعی است هر چه تعدادِ بیش‌تری از جمله‌ها نگه داشته شوند تقریب به‌تر می‌شود.

معادله‌ی (7) با بسطِ جمله‌ی دارایِ رادیکال، و جاگذاریِ بسطِ (15) در انتگرالِ آن، به شکلِ زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho\, f'\left(1 - \frac{1}{2}\,f'^{\,2} + \frac{3}{8}\,f'^{\,4} - \frac{5}{16}\,f'^{\,6} + \cdots\right) &= \kappa\,\rho^2 \\ &+ \frac{\mu g}{\sigma}\,\left(\frac{1}{2}a_0\rho^2 + \frac{1}{4}a_2\rho^4 + \frac{1}{6}a_4\rho^6 + \frac{1}{8}a_6\rho^8 + \cdots\right)\end{aligned} \tag{16}$$

قبل از آوردنِ مثال‌هائی از روشِ سری، در موردِ شرایطِ عمومی که تحتِ آن انتظار داریم حلِّ سری، مخصوصاً وقتی تعدادِ جملاتِ کمی دارد، تقریبِ خوبی باشد بحث می‌کنیم [2]. تبدیل‌هایِ $\rho = A\,x$ و $f = B\,F$ را طوری درنظر می‌گیریم که در آن‌ها A و B دو ثابت باشند، و عبارت‌هایِ شاملِ متغیرهایِ جدید (x و F) از مرتبه‌ی 1 باشند؛ نه خیلی کوچک، نه خیلی بزرگ. در این صورت، از دو شرطِ (4) و (8)، که شاملِ پارامترهایِ قطره هستند داریم:

$$\frac{B}{A} \quad \sim \quad |\tan\eta|, \tag{17}$$

$$B\,A^2 \quad \sim \quad V \tag{18}$$

که می‌دهد $A \sim \left(\dfrac{V}{|\tan\eta|}\right)^{1/3}$ و $B \sim \left(V\,\tan^2\eta\right)^{1/3}$. با انجامِ تبدیل‌ها در معادله‌دیفرانسیلِ (7) داریم:

$$x\,\frac{F'}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}\,F'^{\,2}}} = \frac{A^2}{B}\kappa\;x^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\,A^2\int_0^x x'\,F(x')\,\mathrm{d}x' \tag{19}$$

در این بحث جمله‌ی شاملِ κ مهم نیست، چون همان طور که خواهیم دید، این جمله به همراهِ جملاتِ دیگرِ شاملِ x^2، فقط مقدارِ κ را می دهد. همان‌طور که دیده شد، در (16) فرض شد که می‌توان f' را کوچک گرفت، که به طورِ معادل می‌دهد:

$$\frac{B^2}{A^2} \sim \tan^2\eta \ll 1 \tag{20}$$

از مقایسه‌ی جملاتِ بعد از x^2 در دو طرف داریم:

$$\frac{B^2}{A^2} \sim \frac{\mu g}{\sigma}\, A^2 \tag{21}$$

که می‌دهد:

$$\left(\frac{\mu g}{\sigma}\right)^3 V^2 \ll \tan^2\eta \ll 1. \tag{22}$$

2.1 حالتِ $f = a_0 + a_2\,\rho^2$:

در این حالت چهارمجهول داریم: a_0، a_2، ρ_0، و κ. برای پیدا کردنِ سه تایِ اوّل سه شرطِ (3)، (4) و (8) کافی هست‌اند، و احتیاجی به معادله‌دیفرانسیلِ (7) نیست. از سه شرط داریم:

$$\begin{aligned} a_0 + a_2\,\rho_0^2 &= 0, && (23)\\ 2\,a_2\,\rho_0 &= \tan\eta, && (24)\\ \pi\,\rho_0^2\,(a_0 + \frac{1}{2}\,a_2\,\rho_0^2) &= V && (25) \end{aligned}$$

به این ترتیب به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2V}{\pi\rho_0^2}, && (26)\\ a_2 &= -\frac{2V}{\pi\rho_0^4}, && (27)\\ \rho_0 &= \left(\frac{-\,4\,V}{\pi\,\tan\eta}\right)^{1/3} && (28) \end{aligned}$$

(یادآوری می‌شود $\tan\eta < 0$). در این صورت داریم:

$$f(\rho) = \frac{2V}{\pi\rho_0^2}\left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \tag{29}$$

که یک سهمیِ وارونه است. دیده می‌شود که در این جواب اثری از شتابِ جاذبه‌ی g نیست. همان طور که انتظار می‌رود و خواهیم دید این جواب و جوابِ کره در شرایطی یک‌سان با هم یکی می‌شوند.
همان‌طور که قبلاً گفته شد، با استفاده از رابطه‌ی دقیقِ (10) می‌توان از این که چه‌قدر تقریبِ به کاررفته خوب است، و در صورتِ لزوم درصدِ خطا را حساب کرد استفاده کنیم. به سراغِ معادله‌دیفرانسیل می‌رویم تا κ را به دست آوریم. از نگه‌داشتنِ جمله‌ها تا مرتبه‌ی ρ^2 در (7) داریم:

$$2\,a_2\,\rho^2\,(1+\mathrm{O}(\rho^2)) = \kappa\,\rho^2 + \frac{\mu g}{\sigma}\frac{1}{2}a_0\rho^2 + \mathrm{O}(\rho^4) \tag{30}$$

که می‌دهد:

$$-\kappa = -2\,a_2 + \frac{\mu g}{2\sigma}\,a_0 \tag{31}$$

با جاگذاری از جواب‌هائی که به دست آمد داریم:

$$-\kappa = -\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{\mu g\ V}{\pi\,\sigma\,\rho_0^2} \tag{32}$$

از مقایسه‌ی عبارتِ بالا با رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) + \frac{\mu g\ V}{2\pi\,\sigma\,\rho_0} = 0 \tag{33}$$

عبارتِ بالا جمعِ دو جمله‌ی مثبت است و تنها وقتی می‌تواند درست باشد که هر کدام صفر باشند. در واقع، چون یکی از جواب‌ها تقریبی است، کافی است داشته باشیم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) \ll 1 \tag{34}$$

$$\frac{\mu g\ V}{\sigma\,\rho_0} \ll 1 \tag{35}$$

از اولی نتیجه می‌گیریم که η از 180° دور نباشد، که یعنی قطره در نقطه‌ی تماس با جامد با زاویه‌ی کمی از سطح جدا می‌شود. مثلاً برایِ وقتی که مایع با زاویه‌ی 20° جدا می‌شود ($\eta = 160^\circ$) داریم:

$$-(\tan\eta + \sin\eta) \simeq 0.02 \tag{36}$$

رابطه‌ی دوم کم‌بودنِ اثر جمله‌ای را که شاملِ g است را نشان می‌دهد. در واقع اگر در رابطه‌ی دوم ρ_0 ِ به دست آمده را جاگذاری کنیم داریم:

$$\frac{\mu g\ V}{\sigma\,\rho_0} \approx \frac{\mu g\ V^{2/3}}{\sigma}\,(-\tan\eta)^{1/3} \ll 1 \tag{37}$$

برای $\eta = 179^\circ$ داریم $(-\tan\eta)^{1/3} \simeq 0.26$. در نتیجه می‌بینیم که رابطه‌ی بالا عمدتاً شرط روی ِ بزرگی ِ حجم ِ قطره می‌گذارد:

$$V^{1/3} \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\, g}} \tag{38}$$

که دقیقاً محدوده‌ای است که کم‌بودن ِ اثر ِ وزن را نشان می‌دهد [1]. به طور ِ خلاصه برای ِ وقتی که η از 180° دور نیست، و قطره خیلی بزرگ نیست، جواب ِ سهمی ِ وارونه خوب است. تحلیل و مقدارهای ِ گفته شده در بالا با رابطه‌ی عمومی ِ (22) سازگاری دارد.

آیا این حل با حالت ِ خاصّی از حلّ ِ دقیق ِ $g = 0$ تطابق دارد؟ می‌بینیم که بله. در حل ِ کروی که با $g = 0$ به دست آمد، اگر η نزدیک ِ 180° باشد ($\eta \lesssim 180^\circ$)، از رابطه‌های ِ بخش ِ قبل، خواهیم داشت:

$$\rho_0 \ll R, \tag{39}$$

در این صورت می‌توانیم رادیکال ِ (11) را بسط دهیم، که می‌دهد:

$$f_{g=0}(\rho)\Big|_{\rho \ll R} = z_0 + R - \frac{\rho^2}{2\,R} + \cdots \tag{40}$$

با انتخاب ِ $\eta = 180^\circ - \alpha$، با شرط ِ $\alpha \ll 1\ \mathrm{rad}$، برای ِ R داریم:

$$R \simeq \left(\frac{3\,V}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^{2/3} 3^{1/3}} \simeq \left(\frac{4\,V}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\alpha^{4/3}} \tag{41}$$

با

$$\tan\eta \simeq -\sin\eta = -\sin\alpha \simeq -\alpha$$

و این که $\rho_0 = R\sin\eta \simeq R\,\alpha$ مقدار ِ ρ_0 همان مقدار ِ قبلی می‌شود. هم چنین داریم

$$z_0 + R \simeq R\,\frac{\alpha^2}{2} \tag{42}$$

که با این جاگذاری دقیقاً جواب ِ سهمی ِ وارونه‌ای که داشتیم تولید می‌شود.

2.2 حالت ِ $f = a_0 + a_2\,\rho^2 + a_4\,\rho^4$:

با جاگذاری ِ بسط ِ دارای ِ سه جمله، و مساوی قراردادن ِ ضرایب ِ ρ^2 و ρ^4 در دو طرف ِ (16) برای ِ ضرایب به دست می‌آوریم:

$$2\,a_2 = \kappa + \frac{\mu g}{2\sigma}\,a_0 \qquad (43)$$

$$4\,a_4 = 4\,a_2^3 + \frac{\mu g}{4\sigma}\,a_2 \qquad (44)$$

سه شرطِ (3)، (4) و (8) می‌دهند:

$$a_0 + a_2\,\rho_0^2 + a_4\,\rho_0^4 = 0 \qquad (45)$$

$$2\,a_2\,\rho_0 + 4\,a_4\,\rho_0^3 = \tan\eta \qquad (46)$$

$$\pi\,\rho_0^2\,\left(a_0 + \frac{1}{2}\,a_2\,\rho_0^2 + \frac{1}{3}\,a_4\,\rho_0^4\right) = V \qquad (47)$$

مجهول‌ها a_0، a_2، a_4، ρ_0 و κ هست‌اند که با پنج معادله‌ی بالا باید تعیین می‌شوند. از ترکیبِ سه معادله‌ی بالا که از شرط‌ها می آمدند داریم:

$$a_0 = \frac{1}{4}\,\rho_0\,\tan\eta + \frac{3\,V}{\pi\,\rho_0^2} \qquad (48)$$

$$a_2 = -\,\frac{\tan\eta}{\rho_0} - \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4} \qquad (49)$$

$$a_4 = \frac{3\,\tan\eta}{4\,\rho_0^3} + \frac{3\,V}{\pi\,\rho_0^6} \qquad (50)$$

دیده می‌شود که ضریب‌ها بر حسبِ ρ_0 پیدا می‌شوند. خودِ ρ_0 را می‌توان از معادله‌ای که از جای‌گذاریِ a_2 و a_4 در (44) به دست می آید حساب کرد. با جای‌گذاری داریم:

$$\frac{3\,\tan\eta}{\rho_0^3} + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^6} + 4\left(\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4}\right)^3 = -\frac{\mu g}{4\sigma}\left(\frac{\tan\eta}{\rho_0} + \frac{6\,V}{\pi\,\rho_0^4}\right) \qquad (51)$$

با حلِّ معادله‌ی بالا ρ_0 بر حسبِ مقدارهایِ معلومِ مسئله داده می‌شود. در حالتِ بسیار کلی معادله‌ی بالا فقط برایِ حلِّ عددی یا ترسیمی مناسب است.

از معادله‌ی (43)، با جاگذاریِ مقدارهایِ پیداشده، می‌توان مقدارِ κ را تعیین کرد. مانندِ بخشِ قبل، می‌توان از مقایسه‌ی این مقدارِ پیداشده برایِ κ و آن چه از رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم برایِ برآوردِ خطا استفاده کرد. در واقع، شرطِ خوب‌بودنِ تقریب هم‌خوانیِ κ هائی است که از دو رابطه می آیند، که به ما می‌دهد:

$$2\,\tan\eta - \sin\eta + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^3} + \frac{\mu g}{\sigma}\left(\frac{1}{8}\,\rho_0^2\tan\eta + \frac{V}{\pi\,\rho_0}\right) \approx 0 \qquad (52)$$

در حالت‌هائی که عبارتِ بالا برآورده شود تقریبی که برایِ تابعِ f به کار رفت خوب خواهد بود. یک حالتِ خاص با کنار گذاشتنِ جمله‌ی شاملِ g است، که می‌دهد:

$$2\,\tan\eta - \sin\eta + \frac{12\,V}{\pi\,\rho_0^3} \approx 0 \tag{53}$$

با توجه به این شرط، و عبارت‌هائی که برایِ a_n ها داریم، می‌شود دید که این جواب همان جوابِ $g=0$ است، در حالتی که η به گونه‌ای بزرگ باشد که لازم باشد سه جمله از بسطِ رادیکال در جوابِ کروی را نگه داشت. امّا بر خلافِ بخش قبل، تقریبِ این بخش لزوماً حالتِ خاصّی از حالتِ $g=0$ نیست.

2.3 حالت‌هایِ با جملاتِ بیش‌تر در بسطِ f:

تعمیم ِ روشِ بالا به بسط‌هائی که توان‌هایِ بیش‌تری از ρ را دارند به نسبت سرراست است، اگرچه حلّ ِ معادله‌هائی که به دست می‌آیند از روش‌هایِ عددی ممکن هست‌اند. در بسط شاملِ k توانِ زوج ِ پی‌درپی از ρ، تعدادِ $k+2$ مجهول، شاملِ k تا a_n، ρ_0 و κ، وجود دارد. از معادله‌دیفرانسیل $k-1$ معادله به دست می‌آید، که به همراهِ سه شرطِ (3)، (4) و (8) تعداد معادله‌هایِ لازم برایِ پیدا کردنِ مجهول‌ها را داریم. در هر مورد از مقایسه‌ی مقدارِ به دست آمده برایِ κ با آن‌چه از رابطه‌ی دقیقِ (10) داریم، می‌توان برآوردی از مناسب بودنِ تقریب به دست آورد.

به نظر می‌رسد حل به روشِ سری این قابلیّت را دارد تا بر اساسِ آن نرم‌افزاری تهیّه کرد که با تقریبِ داده‌شده شکلِ یک قطره با حجم و جنسِ مشخص رویِ یک سطحِ با جنسِ داده‌شده را بدهد.

قدردانی: از محمّدِ خرّمی برایِ پیش‌نهادِ استفاده از روشِ سری ممنون‌ام.

یادداشت‌ها و مراجع

[1] ا. ح. فتح‌اللهی، یادداشتی بر شکلِ یک قطره رویِ سطح ِ تختِ افقی، گاما **8**، ص. 30.

[2] از داورِ این نوشته به خاطرِ ارائه‌ی این تحلیل ممنون‌ام.