تابع معکوس

هر عملی می‌تواند یک برگشت یا معکوس داشته باشد ، مانند :

$$4 \xrightarrow[\text{رفت}]{+3} 7 \xrightarrow[\text{برگشت}]{+(-3)} 4$$

$$7 \xrightarrow[\text{رفت}]{\times 3} 21 \xrightarrow[\text{برگشت}]{\div 3 = \times \frac{1}{3}} 7$$

$5 \xrightarrow[\text{رفت}]{\times 0} 0 \xrightarrow[\text{برگشت}]{\div 0}$ نداریم   گاهی برگشت نداریم :

در خصوص توابع نیز چنین است :

عمل "+" : $f \longrightarrow -f$

عمل "×" : $f \longrightarrow \frac{1}{f}$ به شرط صفر نبودن مخرج

$$\boxed{\text{عمل ترکیب "}\circ\text{" :} \quad f \longrightarrow f^{-1} \qquad \text{بحث ما}}$$

هدف : پیدا کردن تابع معکوس برای تابع f به طوری که

$$x \xrightarrow{f} f(x)=y \xrightarrow{f^{-1}} x$$

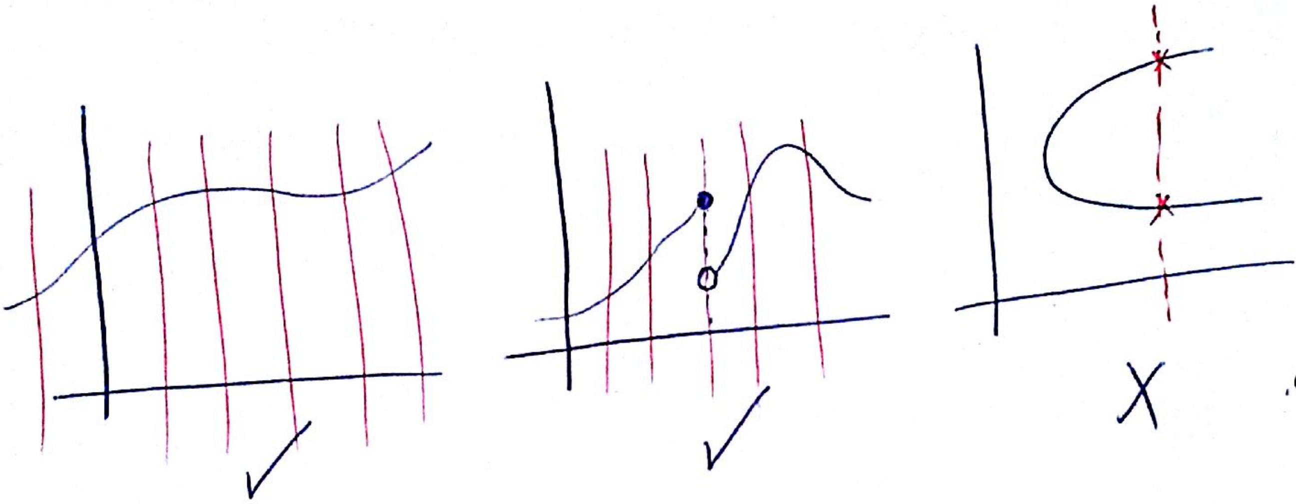
یعنی

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

Scanned by CamScanner

شرط تابع بودن f: هر ورودی x حداکثر یک خروجی y بدهد یعنی

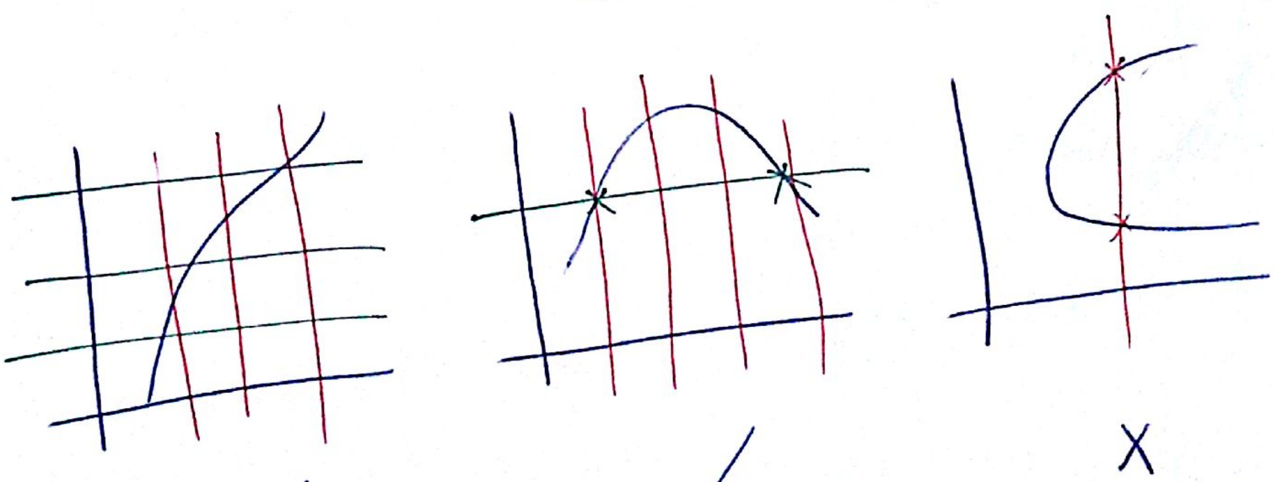
$$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



برای آنکه معکوس تابع نیز خاصیت تابع بودن را داشته باشد باید

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

که این همان شرط یک به یک بودن تابع است.



تابع بودن	✓	✓	—
یک به یک بودن	✓	✗	

نماد $1-1$

تعریف: تابع $f(x)$ را یک به یک گوییم هرگاه

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (*)$$

« یا به بیان معادل: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ » $(**)$

مثال ۱: تابع $f(x)=x^2$ روی دامنه خود یعنی $D=\mathbb{R}$ یک به یک نیست زیرا

$$f(x_1)=f(x_2) \xRightarrow{\text{جایگذاری}} x_1^2 = x_2^2 \xRightarrow{\text{جذر}} x_1 = \pm x_2$$

برخلاف $**$

$\Rightarrow$ یک به یک نیست

مثال ۲: تابع $f(x)=x^3$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک می‌باشد زیرا

$$f(x_1)=f(x_2) \xRightarrow{\text{جایگذاری}} x_1^3 = x_2^3 \xRightarrow[\text{ریشه سوم}]{} x_1 = x_2$$

مطابق $**$

مثال ۳: تابع $g(x)=|x|$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست زیرا

$g(x_1)=g(x_2) \Longrightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow 1-1$ نیست

توجه کنید که بررسی این شرط برای توابع دیگر ممکن است به این راحتی نباشد

Scanned by CamScanner

نکته (شرط جایگزین برای بررسی یک به یک بودن):

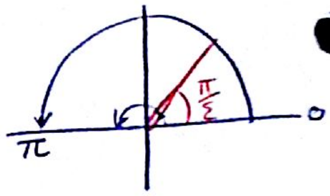
هر تابع یکنوا (صعودی یا نزولی) یک به یک است.

مثال ۱: آیا تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ بر $[0,\pi]$ یک به یک است؟

حل: مشتق را مساوی صفر قرار

$$f'(x)=\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=\cos x$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ;\ k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{فرض}} x=\frac{\pi}{4}$$



تعیین علامت

x	0	$\frac{\pi}{4}$	دلخواه $\frac{\pi}{2}$ ($0-1<0$)	π
$f'(x)=\cos x-\sin x$	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ یکنوا نیست

پس یک به یک نیست

مثال ۲: یک به یک بودن تابع $f(x)=x^3+x$ را بررسی کنید.

حل: $f'(x)=3x^2+1\geqslant 0 \Rightarrow$ همواره صعودی

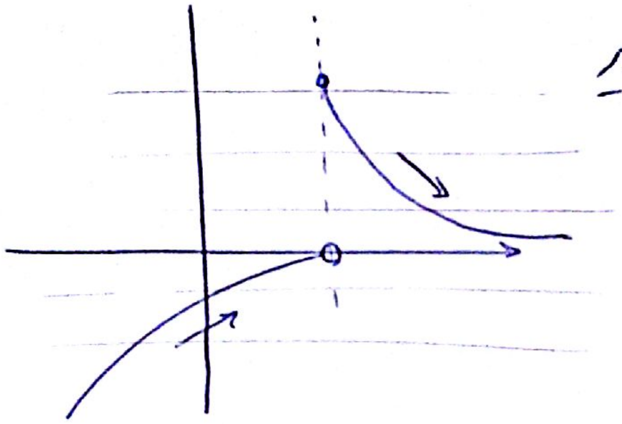
$\Rightarrow$ یکنوا

$\Rightarrow 1-1$

Scanned by CamScanner

سؤال: آیا برعکس عبارت بالا صحیح است؟ یعنی

«آیا هر تابع یک به یک ، یکنواست؟»



پاسخ خیر می باشد مثلاً تابع زیر یک به یک می باشد ولی یکنوا نیست.

نتیجه بحث: هر تابع پیوسته و یک به یک ، یکنواست.

تعریف (تابع معکوس): هرگاه f یک به یک باشد آنگاه دارای تابع معکوس f^{-1} است و مقدار خروجی $f^{-1}(x)$ عدد منحصربفرد $y \in D_f$ که $f(y)=x$.

به بیان راحت‌تر:

$$y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$$

توجه مجدد:

$$a \xrightarrow{f} b = f(a) \xrightarrow{f^{-1}} a$$

دامنه f * — برد f = دامنه f^{-1} ** — برد f^{-1} *

خواص تابع معکوس:

۱/ $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x$

۲/ $D_f = R_{f^{-1}}$

۳/ $R_f = D_{f^{-1}}$

۴/ $\forall x \in D_f \,,\; f^{-1}(f(x)) = x$

۵/ $\forall x \in R_f \,,\; f(f^{-1}(x)) = x$ → مناسب برای محاسبه تابع معکوس

۶/ $\forall x \in D_f \,,\; (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ معکوسِ معکوس خود تابع است.

۷/ نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

۸/ به شرط یک به یک بودن f و g، $f \circ g$ نیز یک به یک است و $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

۹/ معکوس تابع پیوسته، پیوسته است.

۱۰/ " " صعودی، صعودی است.

۱۱/ " " نزولی، نزولی است.

مثال ۱: معکوس پذیری تابع $f(x)=x^{11}+3x^{7}+2x+\sin 2x-13$ را بررسی کنید.

حل:

$$f'(x)=11x^{10}+21x^{6}+2+2\cos 2x$$

$$=11x^{10}+21x^{6}+2(1+\cos 2x)$$

می‌دانیم که:

الف $\quad 11x^{10}+21x^{6}\geq 0$

ب $\quad -1\leq \cos 2x\leq 1 \overset{+1}{\Longrightarrow} \overset{\text{صفر}}{\cancel{1-1}}\leq 1+\cos 2x\leq \overset{2}{\cancel{1+1}}$

$$\overset{\times 2}{\Longrightarrow}\ \underbrace{0\leq 2(1+\cos 2x)}_{\text{کافی است}}\leq 4$$

از الف و ب می‌توان گفت $f'\geq 0 \Longrightarrow$ f صعودی اکید است $\Longrightarrow$ 1-1

پس f تابعی معکوس پذیر است. $\square$

آیا می‌توانید راجع به دامنه و برد f و f^{-1} نظر بدهید؟

Scanned by CamScanner

مثال ۲: تابع معکوس تابع $f(x) = 3x + 2$ را بیابید.

حل: چون $f'(x) = 3 \geq 0$، لذا f اکیداً صعودی و درنتیجه ۱-۱ و معکوس پذیر می‌باشد.

محاسبه f^{-1}:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \overset{\text{جایگذاری}}{\Longrightarrow} 3f^{-1}(x) + 2 = x$$

$$\Rightarrow 3f^{-1}(x) = x - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} . \qquad \square$$

پایان مثال

نکته: معمولاً به جای عملیات بالا، به روش زیر عمل می‌کنیم که برگرفته از همان عملیات است:

الف) $f(x) = y$

ب) محاسبه x از رابطه یا معادله فوق به نحوی که x براساس y نوشته شود.

ج) نقش x و y را در پایان عوض می‌کنیم.

حل مجدد مثال بالا:

$$\overset{\text{الف}}{} f(x) = y \overset{\text{ب}}{\Longrightarrow} 3x + 2 = y$$

$$\Rightarrow 3x = y - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$$

$$\overset{\text{ج}}{\Longrightarrow} f^{-1}(x) = y = \frac{x-2}{3}$$

Scanned by CamScanner

مثال ۳: برای تابع $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ ، درصورت وجود معکوس را بیابید. برد تابع f چیست؟

حل: بررسی وجود معکوس:

$$f'(x)=\frac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}\geq 0$$

⇐ یکنوا است ⇐ ۱-۱ است ⇐ معکوس پذیر است

محاسبه معکوس:

$$f(x)=y \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=y \Rightarrow 1+x=y-xy \Rightarrow x+xy=y-1$$

$$\Rightarrow x(1+y)=y-1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{y+1}$$

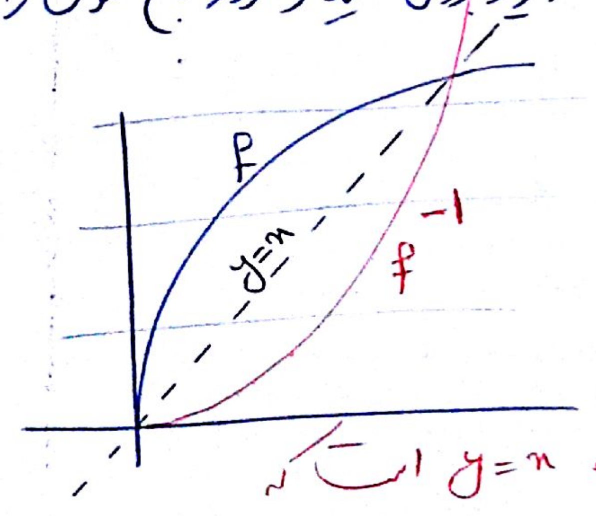
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=y=\frac{x-1}{x+1}$$

محاسبه برد تابع f:

$$R_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{\text{ریشه مخرج}\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

□

مثال ۴: معکوس پذیری تابع با نمودار زیر را بررسی کنید و نمودار تابع معکوس را رسم کنید.



حل: با رسم خطوط افقی می‌توان دریافت که تابع ۱-۱ است پس معکوس پذیر است.

نمودار f^{-1} قرینه f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل مشخص شده است.

مثال ۵: معکوس پذیری تابع $y=2-\sqrt[3]{x^5-1}$ را بررسی کنید و آن را بیابید.

حل:

بررسی. $y=2-(x^5-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=-\frac{1}{3}(x^5-1)^{-\frac{2}{3}}(5x^4)$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^5-1)^2}}(5x^4)=-\frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5-1)^2}}$$

$\Rightarrow y'\leqslant 0 \Rightarrow$ یکنوا $\Rightarrow$ 1-1

پس y معکوس پذیر است.

محاسبه $y=2-\sqrt[3]{x^5-1} \Rightarrow y-2=-\sqrt[3]{x^5-1}$

$$\xrightarrow{\times(-1)} 2-y=\sqrt[3]{x^5-1}$$

$$\Rightarrow (2-y)^3=x^5-1$$

$$\Rightarrow x^5=1+(2-y)^3$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[5]{1+(2-y)^3}$$

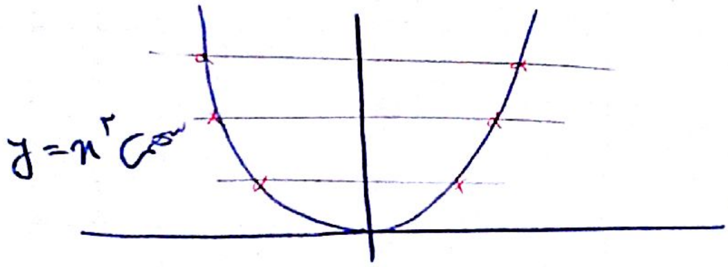
$$\xrightarrow{\text{تعویض نقش}} \boxed{f^{-1}(x)=y=\sqrt[5]{1+(2-x)^3}}\ .\ \square$$

اگر تابعی یک به یک و معکوس پذیر نباشد چه می توان کرد ؟!!

تابعی مانند $y=x^2$ را در نظر بگیرید که یک به یک و معکوس پذیر نیست :

$y'=2x=0 \Rightarrow x=0$

x		0	
$y'=2x$	$-$ ↘	0	$+$ ↗

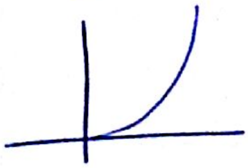


برای اینگونه توابع می توان معکوس بر یک بازه یکنوا و مورد نیاز محاسبه کرد. بدین جهت به جای تابع اصلی از «تحدید» شده آن استفاده می کنیم که تابع تحدید شده :

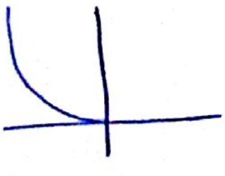
الف) یکنواست   ب) برد تابع اصلی را دارد

در اینجا به جای تابع $y=x^2$ بر $D=\mathbb{R}$ که معکوس ندارد می توان :

۱) تابع $y=x^2$ را بر بازه $I_1=[0,+\infty)$

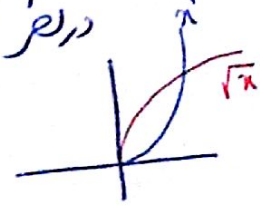


۲) تابع $y=x^2$ را بر بازه $I_2=(-\infty,0]$

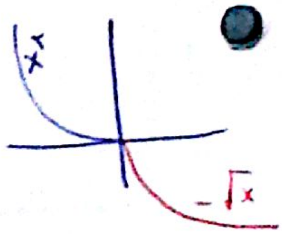


در نظر گرفت و در هر حالت معکوس را محاسبه کرد :

۱) $y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y} \in I_1 \Rightarrow f^{-1}(x)=+\sqrt{x}$



۲) $y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y} \in I_2 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$



مثال ۶: معکوس پذیری تابع $y=\sqrt{x(8-x)}$ را بر بازه $4\leq x\leq 8$ بررسی و آن را بیابید:

* **حل:** به جهت آشنایی بیشتر دامنه تابع را بیابیم:

$x(8-x)\geq 0$

$x(8-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases} \Rightarrow$

x		0		8	
$8x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow D_f=[0,8]$

که در بازه ۸ و در فرض نصف بازه را خواسته است یعنی $\boxed{x\in[4,8]}$

* بررسی معکوس پذیری:

$y=\sqrt{8x-x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{8-2x}{2\sqrt{8x-x^2}}=0 \Rightarrow 8-2x=0 \Rightarrow x=4$

x		0		4		8	
$y'=\dfrac{8-2x}{2\sqrt{8x-x^2}}$			$+$	0	$-$		

که f بر بازه $[4,8]$ نزولی $\Rightarrow$ یکنوا $\Rightarrow$ ۱-۱ $\Rightarrow$ معکوس پذیر

پس تابع f معکوس پذیر است.

* محاسبه معکوس:

$y=\sqrt{8x-x^2} \Rightarrow y^2=8x-x^2 \Rightarrow x^2-8x+y^2=0 \Rightarrow x=?$

$\xRightarrow{\Delta} x=\dfrac{+8\pm\sqrt{64-4(1)(y^2)}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-4y^2}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{4(16-y^2)}}{2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{8\pm 2\sqrt{16-y^2}}{2} \Rightarrow x=4\pm\sqrt{16-y^2}\in[4,8]$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=4+\sqrt{16-x^2}$. □

Scanned by CamScanner