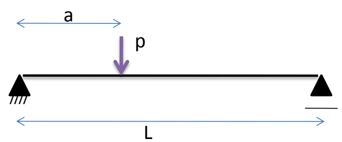
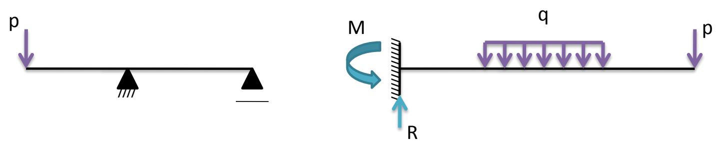
•نیروی برشی و لنگر خمشی :

حالات مختلفی از بارگذاری تیرها ممکن است:

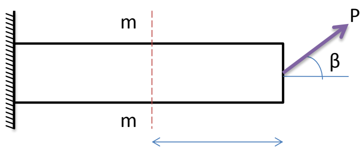
تیر ساده :





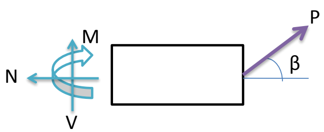
(شکل 1)

روابط تعادل دريك تير براى تعيين نيروهاى داخلى در آن :



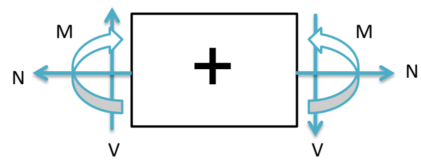
(شکل 2-1)

تعادل قطعه
$$\begin{cases} N = P.\cos\beta \\ V = -\,P.\sin\beta \\ M = P.x.\sin\beta \end{cases}$$



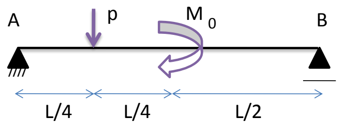
(شکل 2-2)

•قرارداد علامت برای نیروی محوری - نیروی برشی – لنگر خمشی:



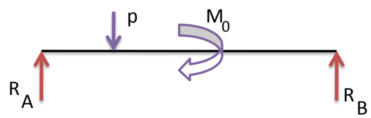
(شکل 3)

•مثال: نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر زیر، در مقاطع مختلف بدست آورید.



(شکل 4)

حل: ابتدا دیاگرام آزاد تیر را رسم می کنیم:



(الف)

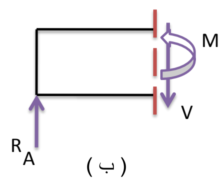
و سپس روابط تعادل را می نویسیم ونیروهای تکیه گاهی را بدست می آوریم:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad P = R_A + R_B$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad -P.L/4 - M_0 + R_B.L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = M_0/L + P/4$$

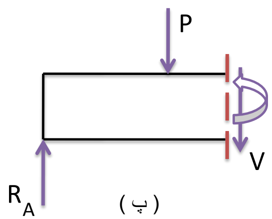
$$R_A = ¾.P - M_0/L$$

حال از روش مقطع زدن استفاده می کنیم:



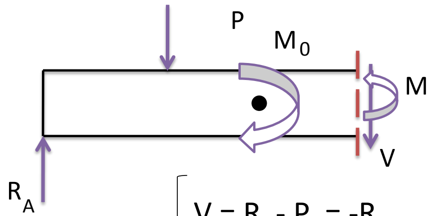
(ب)

$$\begin{cases} V = R_A \\ M = R_A.\,x \end{cases} \qquad 0 < X < L/4$$



(پ)

$$\begin{cases} V = R_A - P \\ M = R_A.(\,L/4 + x\,) - P\,.x \end{cases} \quad , \quad 0 < x < L/4$$



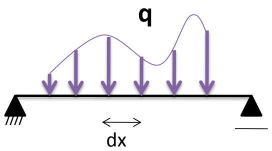
(ت)

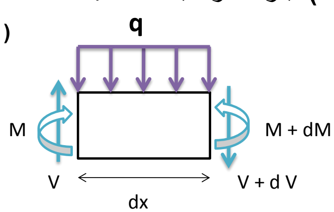
$$\begin{cases} V = R_A - P = -R_B \\ M = R_A.(\,L/2 + x\,) - P\,.(\,L/4 + x\,) + M_0 \end{cases} \quad , \quad 0 < x < L/2$$

• رابطه بین نیروی برشی ولنگر خمشی در يك تير :

الف) بار گسترده با شدت q:

(شكل 5)





(الف)

تعادل نیروها در امتداد قائم :

$$\sum F_y = 0 \;\; => \;\; V - (V + dV) - q.\, dx = 0 \;\;\; => \;\; \boxed{dV / dx = - q}$$

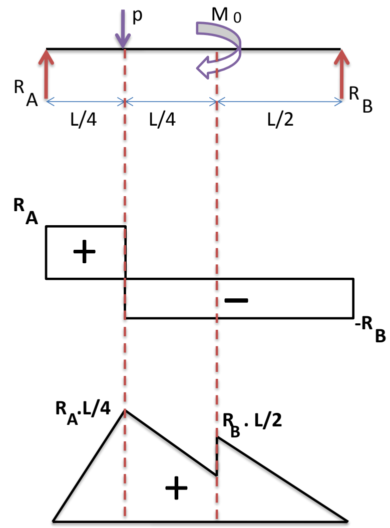
البته اگر q بطرف بالا باشد ، خواهیم داشت: $dV / dx = q$

و چنانچه $q = 0$ باشد، نیروی برشی ثابت می ماند.

(ث)

(ج) نمودار نیروی برشی بر حسب طول میله

(چ) نمودار لنگر خمشی بر حسب طول میله



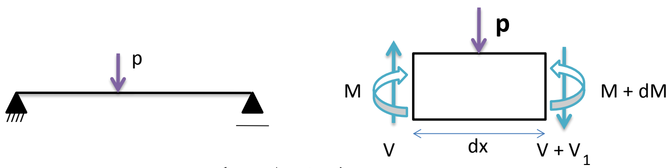
تعادل لنگرها حول سمت چپ :

$$\sum M = 0 \Rightarrow M + q.dx.(dx/2) + (V + dV).dx - (M + dM) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{dM/dx = V}$$

یعنی شدت تغییرات لنگر خمشی نسبت به x برابر با مقدار جبری نیروی برشی است.

ب) <u>بار متمرکز:</u> المانی از تیر زیر در محل اعمال بار متمرکز را درنظر می گیریم:

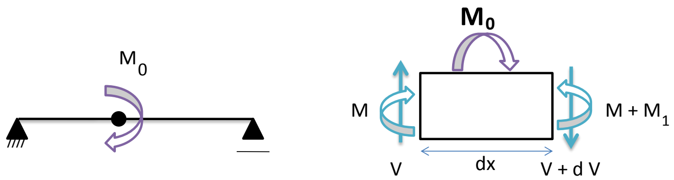


(ب) – بار متمرکز

معادلات تعادل: $\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = P$

یعنی نیروی برشی جهش می کند. (لنگر خمشی تغییر شیب می دهد.)

ج) <u>ممان متمرکز:</u>



(ج) – لنگر متمرکز

$$M + M_0 + V.dx - (M + M_1) = 0 \Rightarrow M_1 = M_0$$

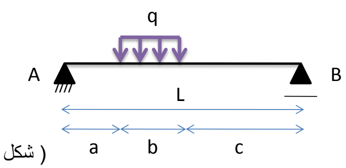
یعنی لنگر خمشی جهش می کند.

• رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی :

الف) استفاده از معادلات تعادل (یا بصورت ریاضی) ⟵ روش مقطع زدن

ب) کاربرد روش ترسیمی (سریع) ⟵ روش جمع زدن

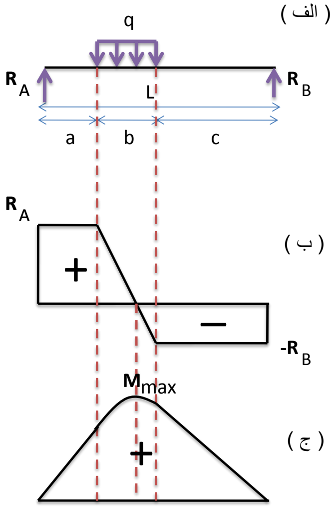
•مثال:



(شکل 6)

$$\begin{cases} R_A = q.b.\,(c + b/2)\,/L \\ R_B = q.b.\,(a + b/2)\,/L \end{cases}$$

با استفاده از روش مقطع زدن و نوشتن روابط تعادل در هرحالت می توان معادلات زیر را بدست آورد و نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر را رسم کرد.



(1) $0 < x < a \quad =>$

$$\begin{cases} V = R_A \\ M = R_A \,.\, x \end{cases}$$

(2) $a < x < a + b \quad =>$

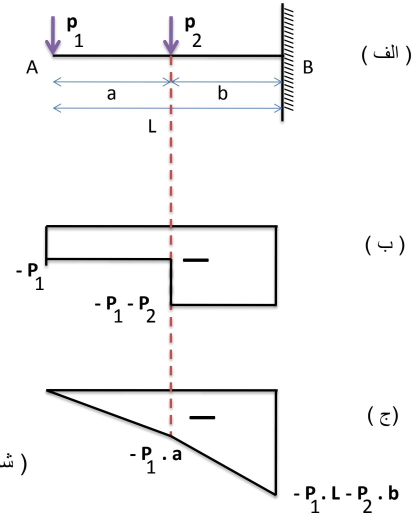
$$\begin{cases} V = R_A - q.(x - a) \\ M = R_A \,.\, x - q.(x-a)^2/2 \end{cases}$$

(3) $a + b < x < L \quad =>$

$$\begin{cases} V = -R_B \\ M = R_B \,.(L - x\,) \end{cases}$$

• شکل 1-6 (الف) دیاگرام آزاد تیر، (ب) نمودار نیروی برشی، (ج) نمودار لنگر خمشی.

- **مثال :**



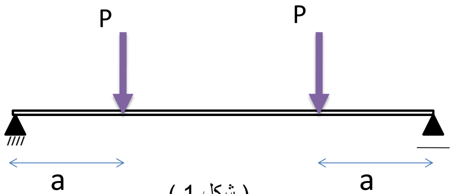
(شکل 7)

- **<u>تنش های خمشی :</u>**

<u>خمش خالص :</u>

تیری را که تحت دو بار متمرکز P مطابق شکل (1) قرار دارد ، در نظرمی گیریم. در ناحیه مرکزی این تیر نیروی برشی وجود ندارد و این ناحیه تنها تحت لنگر خمشی ثابتی برابر با P.a قرار گرفته است . این حالت لنگر خمشی ثابت موسوم به " خمش خالص " می باشد.

مثل برش خالص که فقط تنش برشی محض در تیر بوجود می آید. (بیشتردراتصالات ، برش خالص بوجود می آید.)

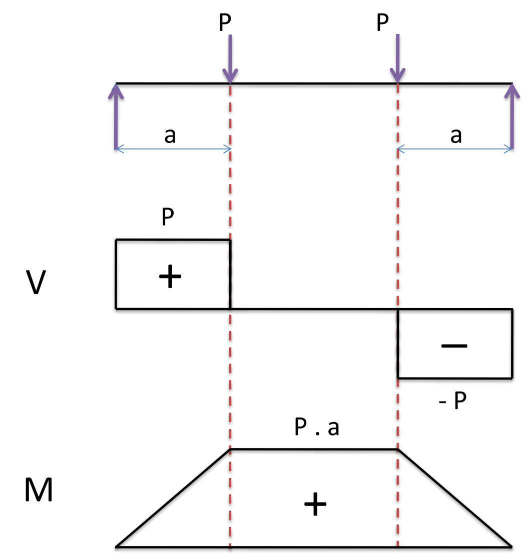


(شکل 1)

برای تعیین توزیع تنش های داخلی در حالت خمش خالص، بایست ابتدا تغییر شکل تیر را مطالعه کنیم. اگر صفحه xy یك صفحه تقارن تیر باشد و بارها در همین صفحه وارد شوند، تغییر شکل ناشی از خمش نیز در همین صفحه خواهد بود.

فرض می شود مقاطع تیر پس از خمش نیز بصورت مسطح باقی می مانند، (اصل برنولی) که از نظر تئوری و تجربی اثبات شده است.

اگر طول جسم (تیر) محور دوران باشد، در آنصورت مقطع تحت تاثیر پیچش قرار گرفته است، ولی در اینجا عرض مقطع (بعد عمود بر صفحه نمایش کل تیر) محور دوران است.



(شکل 1)

لایه ای وجود دارد که نه کشش دارد و نه فشار و تحت تاثیر خمش وارده هیچ تنش خمشی کششی یا فشاری ندارد (ولی در آنجا می تواند تنش برشی ناشی از خمش داشته باشد) که به آن تار خنثی مقطع گویند.

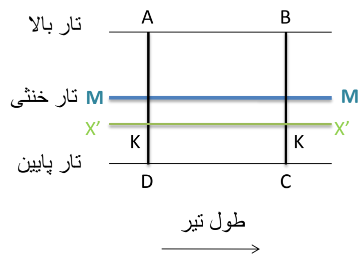
صفحه خنثی : تار خنثی را دربرگرفته و در آن هیچ تنش فشاری یا کششی ناشی از خمش بوجود نمی آید.

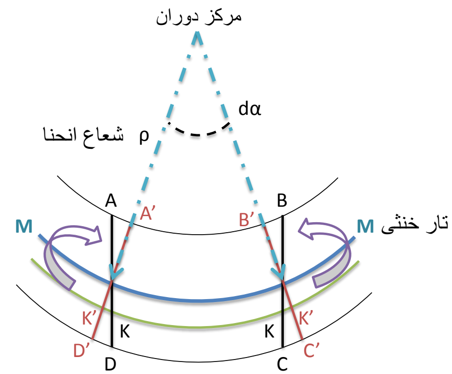
افزایش طول تار در فاصله y : $K'K' - KK$

کرنش خمشی مربوطه : $\varepsilon = \dfrac{K'K' - KK}{KK} = \dfrac{(\rho + y).d\alpha - \rho . d\alpha}{\rho . d\alpha} = \dfrac{\mathbf{y}}{\boldsymbol{\rho}}$

$\boldsymbol{\sigma = E . \varepsilon}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma / E = y / \rho}$

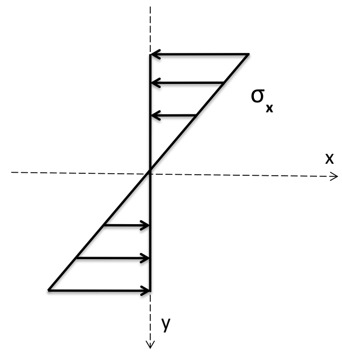




همچنین شعاع انحنا مقطع را می توان برحسب خیز تیر نیز بدست آورد:

$$1/\rho = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \xrightarrow[\text{معمولا } dy/dx < 1/300]{\text{شیب}} 1/\rho \approx \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.I}$$

اثبات در اسلاید بعدی



$$\boxed{\sigma_x = \frac{E.y}{\rho}}$$

چون نیروی عمودی برآیندی در مقطع عرضی ندارد، پس انتگرال $\sigma_x .da$ روی تمام سطح مقطع باید صفر باشد. پس :

$$\int \sigma_x .dA = \int E.y / \rho \ .dA = 0 \quad => \quad \int y . dA = 0$$

یعنی گشتاور و ممان اول سطح (ممان استاتیک) مقطع عرضی نسبت به محور خنثی برابر صفر است. (نسبت به محور z)

لنگر نیروی خیلی کوچک $\sigma_x .dA$ حول محور خنثی برابر $\sigma_x .y.dA$ است.
انتگرال همه این لنگرهای نیروهای کوچک روی تمام سطح مقطع عرضی برابر با لنگر خمشی M می باشد.

$$M = \int \sigma_x .y .dA = E / \rho \int y^2 .dA = E.I / \rho$$

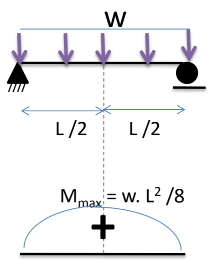
$$\boxed{\sigma_x = M.y / I} \qquad \sigma_{max} = M.c / I = M / s$$

(s = مدول مقطع = I/c)

1- تیری با مقطع متقارن ، عمقی برابر با **400 mm** و ممان اینرسی $I = 19300\ \mathbf{cm^4}$ مفروض است. این تیر با طول دهانه 8 متر روی دو تکیه گاه ساده قرار گرفته است.
در صورتیکه تنش مجاز خمشی برابر با **1200 kg / cm²** باشد، محاسبه نمایید:
الف – بار گسترده یکنواختی که این تیر می تواند تحمل نماید؛
ب – بار متمرکز در وسط دهانه که تیر می تواند تحمل نماید.

$$\sigma_{max} = M.c / I \le \sigma_{allow}$$

$$\frac{M * 20}{19300} = 1200 \Rightarrow M_r = 1158000\ \text{kg.cm}$$



الف) $M_{max} = w. L^2 / 8$

$$1158000 = \frac{w^* (800)^2}{8} \Rightarrow$$

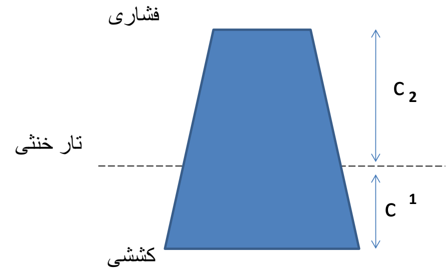
$$w = 14.475\ \text{kg/cm} = 1.4475\ \text{ton/m}$$

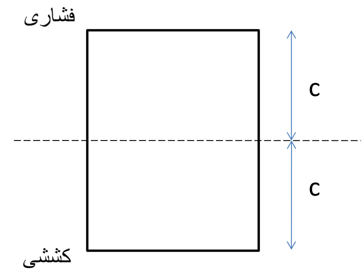
تنش کششی

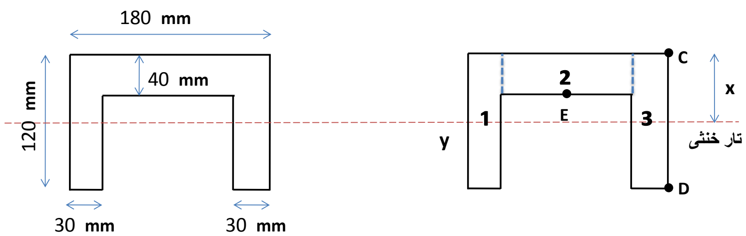
$$\sigma_x)_{max} = M.c_1 / I = M / s_1$$

تنش فشاری

$$\sigma_x)_{min} = - M.c_2 / I = - M / s_2$$





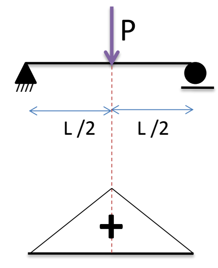


	A_i mm^2	$\bar{x}_i$ mm	$\bar{x}_i . A_i$ mm^3
1	30 * 120 = 3600	60	60 * 3600
2	40 * 120 = 4800	20	20 * 4800
3	30 * 120 = 3600	60	60 * 3600
$\sum$	$12*10^3$		$528*10^3$

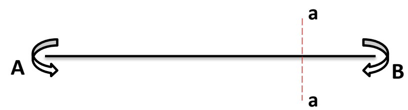
ب) $M_{max} = P. L/4$

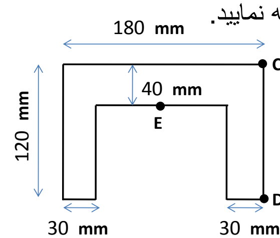
$$\Rightarrow 1158000 = \frac{P * 800}{4} \Rightarrow$$

P = 5790 kg = 5.79 ton



2- در شکل مقابل $M = 25$ KN .m می باشد. تنش ها را در نقاط C ، D و E محاسبه نمایید.





مقطع a-a

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_C = \dfrac{25*10^6 * 44}{13888 * 10^3} = 79.21 \text{ MPa} \\[2ex] \sigma_D = -\dfrac{25*10^6 * (120 - 44)}{13888 * 10^3} = -136.81 \text{ MPa} \\[2ex] \sigma_E = \dfrac{25*10^6 * (44 - 40)}{13888 * 10^3} = 7.2 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\bar{x} \cdot \sum A_i = \sum \bar{x}_i \cdot A_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{528*10^3}{12*10^3} = 44 \text{ mm}$$

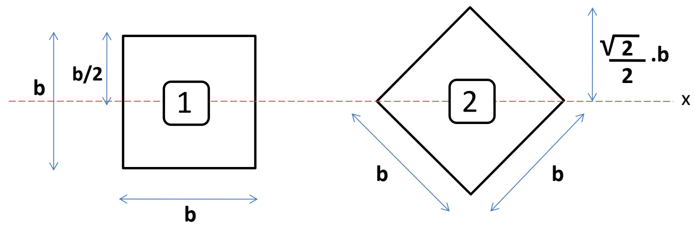
$$I_y = (I_1)_y + (I_2)_y + (I_3)_y = 2\,(I_1)_y + (I_2)_y$$

$$(I_1)_y = 30 * 120^3 / 12 + 30*120*(60 - 44)^2 = 52416*10 \text{ mm}^4$$

$$(I_2)_y = 120 * 40^3 / 12 + 120*40*(44 - 20)^2 = 34048*10 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow I_y = 2* 52416 *10^2 + 34048 *10^2 = 13888 *10^3 \text{ mm}^4$$

3- تیری با مقطع مربعی شکل به اضلاع b مفروض است؛ لنگر مقاوم مقطع را بر اساس نحوه قرار گرفتن مقطع در شکل های زیر مقایسه کنید.



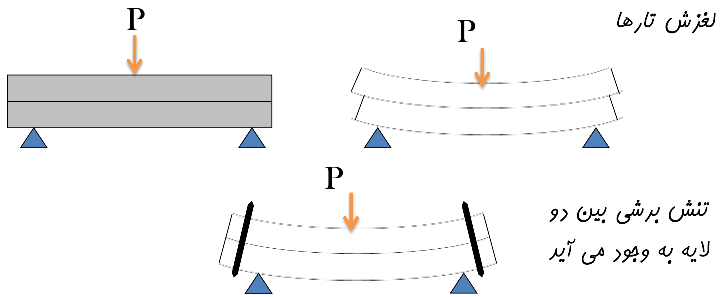
$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \sigma_{allow}$$

$$\Rightarrow \quad M = \sigma_{allow} \cdot \frac{I}{c}$$

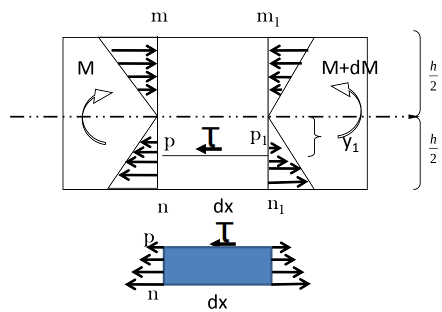
مدول مقطع یا اساس مقطع

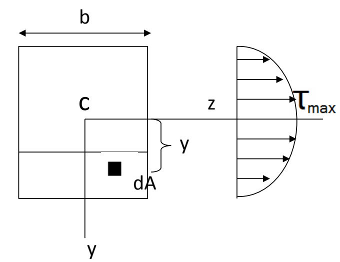
تنش های برشی در تیرها با مقطع مستطیل

هنگامی که تیری تحت تاثیر بارهای جانبی قرار دارد، در هر مقطع عرضی آن لنگر خمشی M و نیروی برشی V اثر میکند .



تنش برشی مماسی τ در هر نقطه از مقطع عرضی برابر با تنش افقی در همان نقطه میباشد.
نیروی تنش افقی را میتوان از تعادل المان pnn_1p_1 در که از قسمتی به طول dx از تیر بریده شده بدست آورد .





اگر لنگرهای خمشی در مقاطع mn و m_1n_1 برابر باشد (تیر در خمش خالص باشد) تنش های عمودی δx نیز در اضلاع np و n_1p_1 مساوی بوده و عنصر مزبور در حال تعادل است (تنش برشی صفر)

در حالت کلی که لنگر خمشی در طول تیر تغییر میکند میتوان $\Sigma Fx=o$ را برای جزء کوچک n_1npp_1 نوشت :

نیروی عمودی بر روی مساحت dA در لبه چپ : $\sigma_x.dA = \frac{M.y}{I} dA$

مجموع تمام این نیروها این در وجه pn : $\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{M.y}{I} dA$

مجموع تمام نیروهای عمودی در وجه n_1p_1 : $\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M+dM)y}{I} dA$

پس نیروی برشی افقی در وجه فوقانی pp1 که τ bdx می باشد به صورت زیر است :

$$\tau.\mathrm{b}.dx = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M+dM)y}{I}.dA - \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{M.y}{I}.dA$$

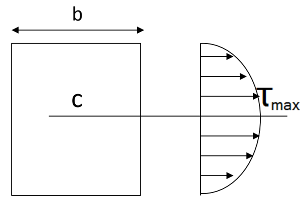
$$\tau = \frac{dM}{dx}\left(\frac{1}{Ib}\right)\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y\,dA = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y.dA = \frac{V}{Ib}Q$$

تنش برشی در فاصله y_1 از تار خنثی

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{Ib}}$$

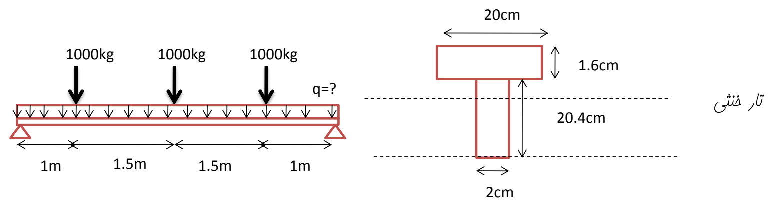
برای مقطع مستطیل

$$\begin{cases} Q = \dfrac{b}{2}\left(\dfrac{h^2}{4} - y_1^2\right) \\ \tau = \dfrac{V}{2I}\left(\dfrac{h^2}{4} - y_1^2\right) \end{cases}$$



$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A} = 1.5\tau_{ave}}$$

مثال) ماکزیمم شدت بار قابل تحمل توسط تیر را بدست آورید به شرطی که تنش های خمشی مجاز در کشش و برش $1400kg/cm^2$ و $1000kg/cm^2$ باشد. دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیز تنش های عمودی و برشی را رسم کنید.



$$\bar{y}=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{2\times 20.4\times\frac{20.4}{2}+20\times 1.6\times(20.4+0.8)}{2\times 20.4+20\times 1.6}=15.04cm$$

$$I_x=\sum\left(\frac{bh^3}{12}+Ay^2\right)=\left[2\times\frac{20.4^3}{12}+20.4\times 2(15.04-\frac{20.4}{2})^2\right]+$$

$$\left[20\times\frac{1.6^3}{12}+1.6\times 20(6.96-\frac{1.6}{2})^2\right]=3591.8cm^4$$

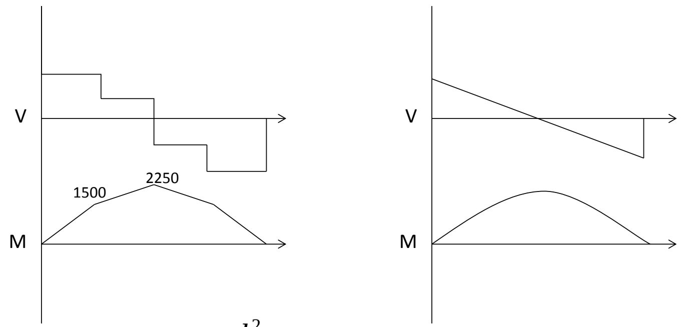
در تکیه گاه جایی که V حداکثر میشود تنش برشی نیز حداکثر میشود که بحرانی ترین شرایط آن در محل تار خنثی است .

$$V_{\max} = 1500 + \frac{ql}{2} = 1500 + 2.5q \qquad Q = 2 \times \frac{15.04^2}{2}$$

$$\tau = \frac{V.Q}{I.t} \le 1000 \qquad q_{\max} = 12013 \, {kg}/{m}$$

پس همان مقدار قبلی حاکم می شود

مقدار قابل قبول $\boxed{q_{\max} = 350 \, {kg}/{m}}$

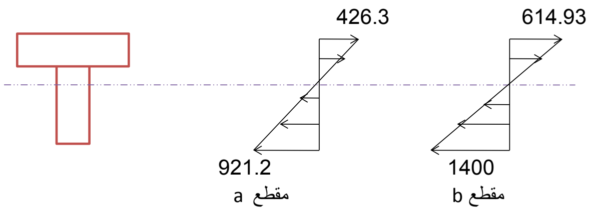


$$M_{\max} = 2250 + \frac{ql^2}{8} = 2250 + 3.125q \;\; (kg.m)$$

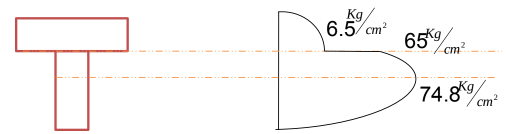
$$\sigma = \frac{M.c}{I} \le 1400 \qquad 1400 = \frac{(2250 + 3.125q) \times 100 \times 15.04}{3591.8}$$

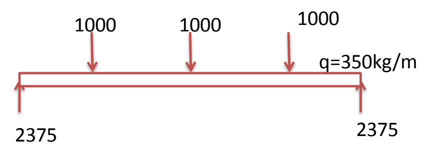
$$q_{\max} = 350 \, {kg}/{m}$$

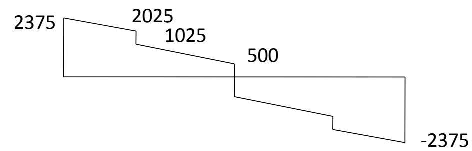
نمودار تنش های خمشی عمودی



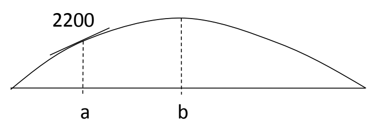
رسم دیاگرام تنش برشی







دیاگرام ممان



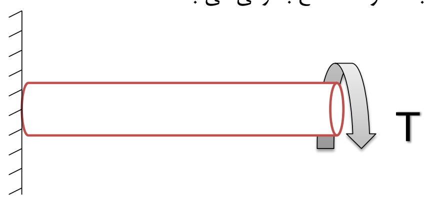
پیچش

گشتاور حول محور طولی جسم است که تنش برشی ایجاد می کند .

با اعمال کوپل پیچشی به انتهای آزاد میله، انتظار زاویه دوران پیچشی در میله و در نتیجه تنش های برشی در مقطع میله خواهیم داشت .

حداکثر لنگر پیچشی داخلی، سبب ایجاد حداکثر تنش و در نتیجه شرایط بحرانی می گردد .

مقطعی که در آن حداکثر لنگر پیچشی ایجاد شود ، مقطع بحرانی می باشد .



رابطه توان انتقالی با کوپل پیچشی

- یک اسب بخار hp , در هر ثانیه ۷۴۶.۶ N.m کار انجام می دهد .

توان = لنگر پیچشی × $\frac{\text{زاویه چرخش (رادیان)}}{\text{زمان}}$

برای محوری که N دور در دقیقه میزند زاویه چرخش $2\pi N$ rad/min میباشد . پس اگر محوری، یک لنگر پیچشی T(N.m) را انتقال دهد کار انجام شده در هر دقیقه $2\pi NT$ می باشد .

با تساوی کارها :

$$HP(746.6)(60)\frac{N.m}{\min} = 2\pi NT\frac{N.m}{\min}$$

(N.m) لنگر پیچشی $\boxed{T = 7130\frac{(HP)}{N}}$ $\quad (kg.m)\ M_t = \frac{716.2}{N}HP$

HP: توان منتقل شده (اسب بخار) N: تعداد دور در دقیقه

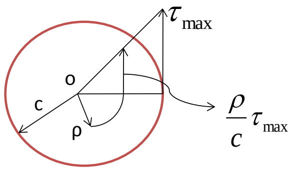
فرضیات اساسی :

1. مقاطع مسطح و صفحه ای عمود بر محور میله استوانه ای ، صفحه ای باقی می ماند . (بدون اعوجاج)
2. کرنش برشی بطور خطی از محور مرکزی تغییر می کند .
3. تنش برشی متناسب با کرنش برشی می باشد . (قانون هوک $\tau = G\gamma$)

رابطه پیچش

تنش برشی ناشی از کوپل پیچشی

چون تنش با کرنش متناسب است پس تنش نیز به صورت خطی از مرکز تغییر خواهد کرد .
تنش هایی که توسط تغییر شکل های مفروض تولید می شوند ، تنش های برشی بوده و در صفحه ای به موازات مقطع عمود بر محور میله قرار دارند .



در هر نقطه دلخواه به فاصله ρ از مرکز دایره میزان تنش برشی برابر با $\frac{\rho}{c}\tau_{\max}$ می شود . با معلوم بودن توزیع تنش روی یک مقطع میتوان مقاومت مقطع در مقابل لنگر پیچشی را بر حسب تنش پیدا کرد .

لنگر پیچش مقاوم بایستی معادل مجموع لنگرهای پیچشی داخلی مقطع باشد .

$$T=\int \rho . dF \;,\; dF=\tau . dA \;\Rightarrow\; T=\int_A \underbrace{(\overbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}^{\text{تنش}} dA)}_{\text{نیرو}}\rho$$

$$\frac{\tau_{max}}{c}\int_A \rho^2 dA = T \qquad \& \qquad \int_A \rho^2 dA = J$$ اینرسی قطبی (پیچشی) مقطع

برای یک مقطع دایره ای $J=\int_A \rho^2 dA=\int_0^c 2\pi\rho^3 d\rho=\frac{\pi c^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32}$ $\quad (dA=2\pi\rho d\rho)$

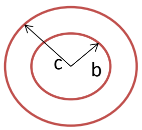
رابطه پیچش برای میله های استوانه ای $\boxed{\tau_{max}=\frac{T.c}{J}}$

یک شکل عمومی تر برای تعیین تنش برشی در هر نقطه دلخواه به فاصله ρ از مرکز هندسی سطح مقطع دایره ای بصورت زیر درمی آید :

$$\boxed{\tau=\frac{\rho}{c}\tau_{max}=\frac{T.\rho}{J}}$$

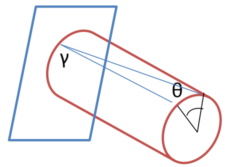
برای مقطع دایره ای تو خالی $J=\int\rho^2.dA=\int_b^c 2\pi\rho^3.d\rho=\frac{\pi c^4}{2}-\frac{\pi b^4}{2}$

$dA=2\pi\rho d\rho \qquad t\to 0 \Rightarrow J=2\pi c^3 t$



رابطه کلی لنگر یا کوپل پیچشی با تنش برشی و زاویه دوران پیچشی

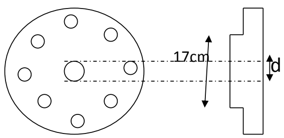
$$\left.\begin{aligned}\tau &= G\gamma \\ \gamma &= \frac{\rho\theta}{l}\end{aligned}\right\} \frac{\tau}{\rho}=\frac{G\theta}{l}$$



$$\boxed{\frac{T}{J}=\frac{\tau}{\rho}=\frac{G\theta}{l}}$$

مثال) کوپلینگی به صورت زیر داریم . فاصله پیچها ازهم 24cm و قطر هر پیچ 3cm می باشد. در صورتیکه ۲۰۰ دور در دقیقه بزند، قدرت انتقال آنرا بر حسب اسب بخار بدست آورید .

اگر حداکثر تنش برشی به 400 Kg/cm² محدود شود ، قطر داخلی لوله را بدست آورید .

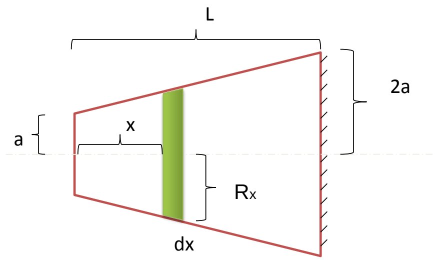


نیروی هر پیچ : $F=\tau.A=400\times\frac{\pi}{4}(3)^2=2827.4\,kg$

$$M_t=8\times2827.4\times\frac{24}{2\times100}=2714\,kg.m$$

$T=\frac{716.2}{N}(HP)$ $\qquad$ $HP=757.9$ اسب بخار

مثال) برای مخروط ناقص شکل زیر که تحت لنگر پیچشی M قرار گرفته است ، زاویه پیچش را بدست آورید .



$$R_x = a + \frac{x}{L} a$$

$$\theta = \int_0^L \frac{M_t dx}{G.J}$$

$$D_x = 2a + \frac{x}{L} 2a$$

$$\tau = \frac{T.r}{j} \le 400$$

در حالت مرزی

$$400 = \frac{2714 \times 100 \times \frac{17}{2}}{\frac{\pi}{32}\left(17^4 - d^4\right)}$$

$$d_{\max} = 12.5cm$$

$$J(x)=\frac{\pi}{32}(2a+\frac{x}{L}2a)^4=\frac{\pi.a^4}{2}(1+\frac{x}{L})^4$$

$$\theta=\int_0^L\frac{M_t.dx}{G.\frac{\pi.a^4}{2}(1+\frac{x}{L})^4}=\frac{2M_t}{G.\pi.a^4}\int_0^L\frac{dx}{(1+\frac{x}{L})^4}=\frac{2M_t}{G.\pi.a^4}\left[\left(\frac{-l}{3}\right)\left(1+\frac{x}{L}\right)^{-3}\right]_0^L$$

$$=\frac{14}{24}\frac{M_t.L}{G.\pi.a^4}$$

$$\boxed{\theta=0.58\frac{M_t.L}{G.\pi.a^4}rad}$$

مقدار درصد خطای وارده در صورتیکه از شعاع متوسط به جای انتگرال گیری استفاده شود را بدست آورید .

$$D_m=\frac{2a+4a}{2}=3a$$

$$\theta=\frac{M_tL}{G\frac{\pi}{32}(3a)^4}=\frac{32}{81}\frac{M_tL}{\pi Ga^4}$$

$$\text{درصد خطا}=\frac{0.58-0.4}{0.58}\times100=31\%$$

هر چه اختلاف در قطر طرفین کمتر باشد ، خطایی که در اثر این تقریب داده می شود کوچکتر خواهد بود

مثال) استوانه توپری به قطر 10cm و طول L داریم که تحت یک کوپل پیچشی M قرار گرفته است . استوانه ای توخالی نیز به طول L و قطر خارجی 15cm و قطر داخلی d تحت تاثیر همان کوپل پیچشی قرار گرفته است . قطر داخلی d را طوری تعیین کنید که تنش برشی ماکزیمم در هردو برابر شود. تغییرات θ چطور است ؟ درصد صرفه جویی مصالح را نیز بدست آورید .

$$\tau = \frac{M.r}{J} \quad , \quad \theta = \int_0^l \frac{M_t dx}{G.J}$$

$$\begin{cases} J = \dfrac{\pi}{32} D^4 \\ J = \dfrac{\pi}{32}(D'^4 - d^4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{max}\Big)_1 = \dfrac{M \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32} D^4} \\ \tau_{max}\Big)_2 = \dfrac{M \frac{D'}{2}}{\frac{\pi}{32}(D'^4 - d^4)} \end{cases} \Longrightarrow \frac{M \frac{D}{2}}{\frac{\pi}{32} D^4} = \frac{M \frac{D'}{2}}{\frac{\pi}{32}(D'^4 - d^4)} \Rightarrow \frac{1}{D^3} = \frac{D'}{D'^4 - d^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10^3} = \frac{15}{15^4 - d^4} \Rightarrow d = 13.74cm$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}\left(D'^2 - d^2\right)$$

چون طولها برابرند نیازی به بررسی حجم نیست

درصد صرفه جویی

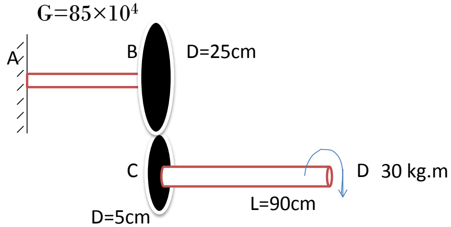
$$\longrightarrow 100 \times \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 64\%$$

مثال) در شکل زیر دوران چرخشی D نسبت به A را بدست بیاورید .

L=120cm

D=6.25cm

$G=85\times10^4$



D=2.5cm

G=35*10^4

$$F\times\frac{D}{2}=M_t\quad\rightarrow F=\frac{30}{\frac{0.05}{2}}=1200kg$$

کوپل پیچشی که به میله بالایی وارد میشود

$$M'=1200\times12.5=15000kg.cm=150kg.m$$

$$\theta_1=\frac{M.L}{G\frac{\pi}{32}(10)^4}=\frac{32M.L}{G\pi}.\frac{1}{10^4}$$

$$\theta_2=\frac{M.L}{G\frac{\pi}{32}\left(15^4-13.74^4\right)}=\frac{32M.L}{G\pi}.\frac{1}{14984}$$

درصد کاهش زاویه پیچش

$$=\frac{\frac{1}{10^4}-\frac{1}{14984}}{\frac{1}{10^4}}=33\%$$

خیز تیرها (کاربرد مقاومت مصالح در طراحی مهندسی)

روشهای تعیین تغییرمکان(خیز)تیرها:

2 بارانتگرال گیری

$\downarrow^{+}\ EIy'' = -M$ حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$\downarrow^{+}\ EIy^{(4)} = q$ حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم

4 بارانتگرال گیری

1) روش انتگرال گیری مستقیم

2) روش کاربرد توابع استثنایی

3) روش ممان سطح

4) روش تیر فرضی(روشهای انرژی)

$$\theta_{\frac{B}{A}} = \frac{M_t . l}{G.J} = \frac{15000\times 120}{85\times 10^4 \times \frac{\pi}{32}\times 6.25^4} = 0.014 rad$$

طول طی شده در اثر چرخش،روی هر یک از دو دیسک برابر است :

$$L_1 = \theta_1 R_1 \quad , \quad L_2 = \theta_2 R_2$$

$$0.014\times\frac{25}{2} = \theta_2\times\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 0.07 rad$$

$$\theta_{\frac{D}{B}} = \frac{3000\times 90}{35\times 10^4 \times \frac{\pi}{32} 2.5^4} 0.2 rad$$

چون شعاعش کمتر است بیشتر می چرخد

$$\theta_{\frac{D}{A}} = 0.07 + 0.2 = 0.27 rad$$

1)انتگرال گیری مستقیم

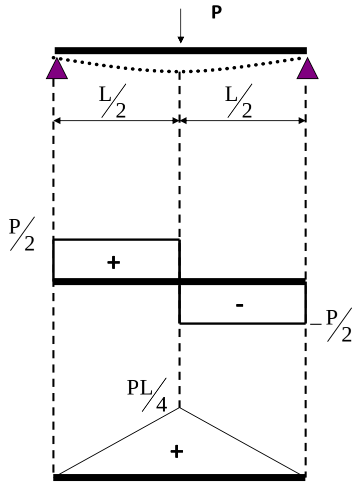
دربحث خمش تیرها دیدیم که $\boxed{\frac{1}{\rho}} = \frac{M}{EI}$

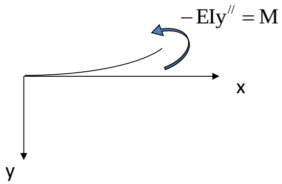
انحنای تیر (تقعرتیر)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} \approx y''$$

(مثبت yها به طرف بالا فرض شده است)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$





ولی اگر yها بطرف پایین باشد: $y'' = \frac{-M}{EI}$

با دوبار انتگرال گیری داریم :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{-M}{EI}\,dx + C_1$$

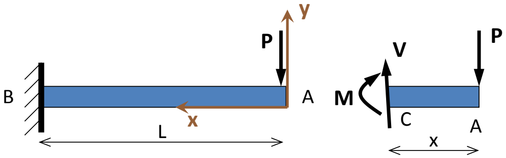
$$\longrightarrow y = \int\left(\int \frac{-M}{EI}\,dx\right)dx + C_1x + C_2$$

و در روش حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم داریم: $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q}{EI}$

که ازاین رابطه باید 4 بارانتگرال گیری نمود تا به معادله خیزتیر رسید.

مثال 1:

تیر طره ای AB دارای سطح مقطع یکنواخت بوده واز انتهای آزاد A خود تحت بار P قرار گرفته است. مطلوب است تعیین معادله منحنی الاستیک ، خیز وشیب در نقطه A ؟



با توجه به شکل میتوان نوشت :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=-Px \xrightarrow{\int} EI\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}Px^2+C_1$$

$$EIy=-\frac{1}{6}Px^3+C_1x+C_2$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} x=L\,,\ \dfrac{dy}{dx}=0 \longrightarrow C_1=\dfrac{1}{2}PL^2 \\ x=L\,,\ y=0 \longrightarrow C_2=-\dfrac{1}{3}PL^3 \end{cases}$$

$$EIy=-\frac{1}{6}Px^3+\frac{1}{2}PL^2x-\frac{1}{3}PL^3$$

$$y=\frac{P}{6EI}(-x^3+3L^2x-2L^3)$$

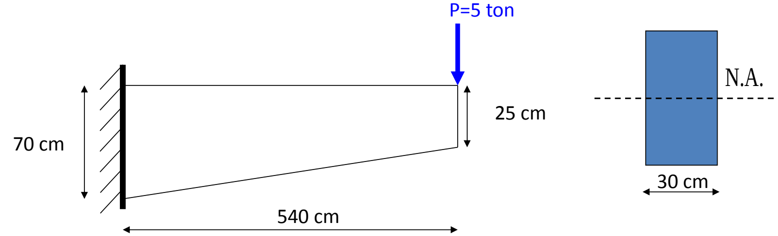
با جاگذاری x=0 در معادلات بالا ، خیز وشیب نقطه A محاسبه میشود:

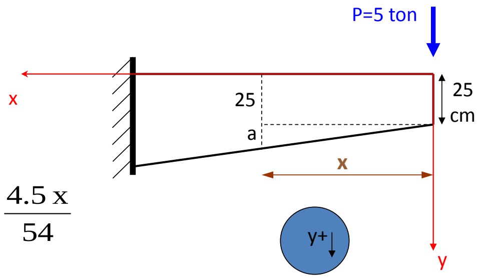
$$y_A=-\frac{PL^3}{3EI}\quad,\quad\left(\frac{dy}{dx}\right)_A=\frac{PL^2}{2EI}$$

مثال 2:

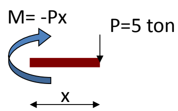
تیری مطابق شکل زیر نشان داده شده است.
تغییرمکان انتهای آزاد تیر را بدست آورید؟

$$E = 2\times10^{5}\,\frac{Kg}{cm^{2}}$$





$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{45}{540} \longrightarrow a = \dfrac{4.5\,x}{54} \\ I = \left(25 + \dfrac{45\,x}{540}\right)^{3} \times \dfrac{30}{12} \end{cases}$$



$$EI\,\frac{d^{2}y}{dx^{2}} = -M = Px$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{Px}{EI}\,dx + C_{1} = \frac{P}{E}\int \frac{x}{2.5\left(25 + \dfrac{x}{12}\right)^{3}}\,dx + C_{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{E}\int\frac{25+\frac{x}{12}-25}{\frac{25}{120}\left(25+\frac{x}{12}\right)^{3}}dx+C_1=\frac{P}{E}\left[\int\frac{4.8\,dx}{\left(25+\frac{x}{12}\right)^{2}}-\int\frac{120\,dx}{\left(25+\frac{x}{12}\right)^{3}}\right]+C_1$$

$$=\frac{P}{E}\left[-12\times4.8\left(25+\frac{x}{12}\right)^{-1}+\frac{12\times120}{2}\left(25+\frac{x}{12}\right)^{-2}\right]+C_1$$

حال با اعمال شرایط مرزی ، ضریب C_1 بدست می آید :

درتکیه گاه تیر، شیب صفر است :
$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=0\\ x=540\end{cases}\longrightarrow C_1=0.017$$

$$y=\int\frac{dy}{dx}dx$$

$$=\frac{P}{E}\left(-12\times12\times4.8\ln\left(25+\frac{x}{12}\right)-\frac{12\times12\times120}{2}\left(25+\frac{x}{12}\right)^{-1}\right)+0.017x+C_2$$

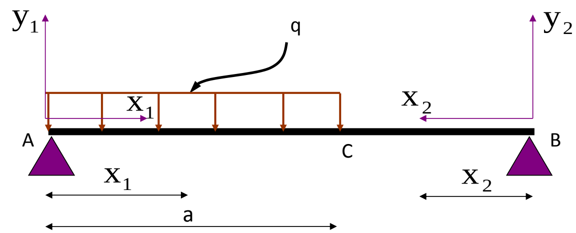
شرط خیزبرابرباصفر
$$\begin{cases}y=0\\ x=540\,cm\end{cases}\longrightarrow C_2=67.32$$

لذا معادله خیزتیر بدست آمده است. واگر x=0 گذاشته شود ، خیز انتهای آزاد تیر بدست می آید:

$$x=0\longrightarrow y=\Delta=3\,cm$$

مثال 3:

یک تیر چوبی بامقطع مستطیلی $h = 20 \times b = 15\,\mathrm{cm}^2$ روی تکیه گاههای ساده به دهانه 6متر ، قراردارد. بارگسترده یکنواخت به میزان 1.2 t درطول a=4 m اعمال شده است . خیز وسط تیر وخیزحداکثر را بدست آورید؟



شدت بارگسترده $$q = \frac{Q}{a} = \frac{1.2}{4} = 0.3\ {}^{t}\!/\!_{m}$$

عکس العمل ها

$$R_A = \frac{qa\,(L - \frac{a}{2})}{L} = \frac{0.3 \times 4 \times 4}{6} = 0.8\,t$$

$$R_B = \frac{qa^2}{2L} = \frac{0.3 \times 4^2}{2 \times 6} = 0.4\,t$$

حال معادلات دیفرانسیلی را تشکیل داده وانتگرال گیری می کنیم:

$$EIy_1'' = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

$$EIy_1' = \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{qx_1^3}{6} + C_1$$

$$EIy_1 = \frac{R_A x_1^3}{6} - \frac{qx_1^4}{24} + C_1 x + D_1$$

$$EIy_2'' = R_B x_2$$

$$EIy_2' = \frac{R_B x_2^2}{2} + C_2$$

$$EIy_2 = \frac{R_B x_2^3}{6} + C_2 x + D_2$$

برای تعیین مقادیر ثابت ازشرایط حدی وپیوستگی استفاده می کنیم:

$x_1 = 0$ در $\longrightarrow$ $y_1 = 0$ $\qquad D_1 = D_2 = 0$

$x_2 = 0$ در $\longrightarrow$ $y_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = L-a \end{cases} \longrightarrow \theta_c = +y_1' = -y_2' \longrightarrow \frac{R_A a^2}{2} - \frac{qa^3}{6} + C_1 = -\frac{R_B (L-a)^2}{2} - C_2$$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = L-a \end{cases} \longrightarrow y_1 = y_2 = \delta_c \longrightarrow \frac{R_A a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} + C_1 a = \frac{R_B (L-a)^3}{6} + C_2 b$$

$$C_1 = -\frac{1}{a+b}\left[\frac{R_A a^2}{6}(a+3b) + \frac{R_B b^3}{3} - \frac{qa^3}{24}(a+4b)\right] = -2.133\ \text{t.m}^2$$

$$C_2 = -\frac{1}{a+b}\left[\frac{R_A a^3}{3} + \frac{R_B b^2}{6}(3a+b) - \frac{qa^4}{8}\right] = -1.867\ \text{t.m}^2$$

با استفاده از رابطه اول و با درنظرگرفتن $x_1 = \frac{L}{2} = 3\,\text{m}$:

$$\left.\begin{aligned} EIy &= 0.8\frac{3^3 \times 0.3 \times 3^4}{6 \times 0.4} - (2.133 \times 3) \\ EIy_1 &= -3.812\ \text{t.m}^2 = 3812 \times 10^6\ \text{Kg.cm}^3 \\ I &= \frac{20^3 \times 15}{12} = 10^4\ \text{cm}^4 \\ EI &= 1 \times 10^5 \times 10^4 = 10^9\ \text{Kg.cm}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{Center} = y_1 = \frac{3812 \times 10^6}{10^9} = 3.81\,\text{cm}$$

ب)برای تعیین y_{max} :

واضح است که خیز حداکثر (شیب صفر) درمحدوده $0 < x_1 < a$ رخ می دهد ، پس ازمعادله مربوط به y_1' استفاده میکنیم:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow EIy_1' = \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{qx_1^3}{6} + C_1 = 0 \longrightarrow x_1 = 2.889\ \text{m}$$

$$\longrightarrow y_{max} = 3.818\ \ \text{cm}$$

مسئله : معادله خیزتیر را بدست آورید؟