فصل سوم

حد و پیوستگی

مفهوم حد تابع، حد راست و چپ
حد در بی‌نهایت و حدهای بی‌نهایت
چند نکته درباره «حد بی‌نهایت» و «حدهای بی‌نهایت»
دقت روی مقادیر حد چپ و راست
مواردی که تابع در یک نقطه حد ندارد
برخی قضایای مقدماتی حد
صور مبهم (مفاهیم اولیه)
رفع ابهام حالات مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ (معرفی قاعده هوپیتال)
رفع ابهام حالت مبهم $0\times\infty$
رفع ابهام حالت مبهم $\infty - \infty$
رفع ابهام صور مبهم نمایی
تعریف دو تابع هم ارز
چند قاعده هم ارزی
تعریف بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ
مقایسه چند بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ
پیوستگی تابع در یک نقطه
انواع حالات ناپیوستگی در یک نقطه
پیوستگی تابع در یک فاصله
قضیه مقدار میانی و قضیه بولتزانو
خطوط مجانب
منحنی مجانب
مجموعه تست حد و پیوستگی

یادداشت:

حد تابع

الف) فاصله باز I را که شامل x_0 می‌باشد، را در نظر بگیرید. چنانچه تابع f در همه نقاط این فاصله (مگر احتمالا خود x_0) تعریف شده باشد؛ می‌گوییم وقتی متغیر x به سمت x_0 میل می‌کند، تابع f دارای حد L است و می‌نویسیم: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ هرگاه، استلزام منطقی زیر برقرار باشد:

$$\forall \beta > 0 \;:\; \exists \alpha > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \beta$$

و به تعبیری، هر گاه با به اندازه کافی نزدیک کردن متغیر x به عدد ثابت x_0 $(x \neq x_0)$ بتوان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به عدد L نزدیک و نزدیک‌تر ساخت.

ب) حد راست و چپ

حد راست تابع

اگر متغیر x از سمت راست به سمت عدد معین x_0 میل کند و تابع f دارای حد L باشد؛ یعنی، $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ باید استلزام منطقی زیر برقرار باشد:

$$\forall \beta > 0 \;:\; \exists \alpha > 0 \ni 0 < x - x_0 < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \beta$$

(اصطلاحاً L را در این‌حالت حد راست تابع f در نقطه x_0 می‌گویند).

حد چپ تابع

اگر متغیر x از سمت چپ به سمت عدد معین x_0 میل کند و تابع f دارای حد L باشد؛ یعنی، $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ باید استلزام منطقی زیر برقرار باشد:

$$\forall \beta > 0 \;:\; \exists \alpha > 0 \ni -\alpha < x - x_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \beta$$

(اصطلاحاً L را در این حالت حد چپ تابع f در نقطه x_0 می‌گویند).

نکته: می‌گویند تابع f در نقطه x_0 دارای حد است؛ هرگاه، حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

حد در بی‌نهایت و حدهای بی‌نهایت

هرگاه در یک مساله حد، متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، اصطلاحاً حاصل یک «حد در بی‌نهایت» مورد بررسی قرار گرفته است و نیز اگر نتیجه به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، اصطلاحاً یک «حد بی‌نهایت» مورد نظر بوده است.

بدیهی است یک مساله حد می‌تواند شامل دو حالت حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت به طور هم‌زمان باشد. (مفاهیم حد در بی‌نهایت و حدهای بی‌نهایت در بحث‌های مجانب افقی (مایل) و مجانب قائم کاربرد زیادی دارند).

حالات مختلفی از این موارد قابل طرح است که هر کدام از آنها مترادف برقراری یک استلزام منطقی خاص می‌باشند؛ به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad : \quad \forall\beta>0 : \exists M>0 \ni x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\beta$$

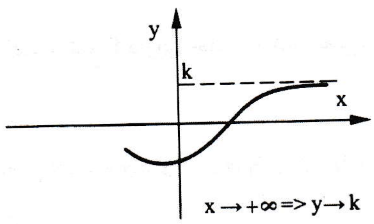
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \quad : \quad \forall N>0 : \exists\alpha>0 \ni 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)<-N$$

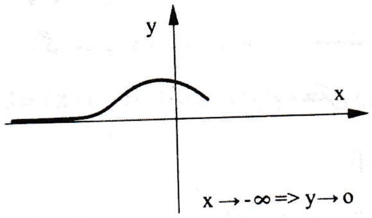
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \text{ یا } -\infty \quad : \quad \forall N>0 : \exists M>0 \ni x<-M \Rightarrow |f(x)|>N$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \quad : \quad \forall N>0 : \exists M>0 \ni |x|>M \Rightarrow f(x)>N$$

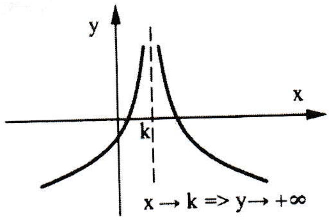
چند نکته درباره «حد در بی‌نهایت» و «حدهای بی‌نهایت»

همان‌طوری که گفتیم در یک مساله حد، چنانچه متغیر به سمت بی‌نهایت میل کند؛ اصطلاحاً، یک حد در بی‌نهایت داریم؛ به عنوان مثال، در اشکال ترسیم شده چند حد در بی‌نهایت دیده می‌شود:

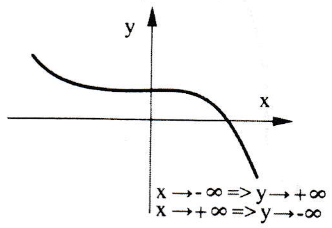


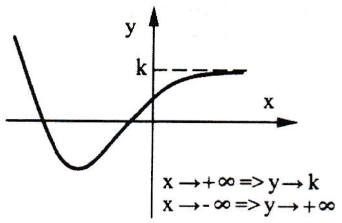


همچنین اگر نتیجه حد، به سمت بی‌نهایت میل کند، اصطلاحاً یک حد بی‌نهایت مورد نظر بوده است؛ به عنوان مثال، در شکل ترسیم شده یک حد بی‌نهایت دیده می‌شود:



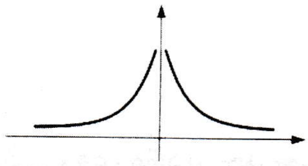
یک مساله حد می‌تواند شامل تلفیق دو وضعیت فوق باشد؛ به عنوان مثال، در اشکال ترسیم شده چند مورد از این وضعیت دیده می‌شود:





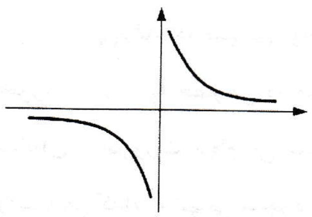
با توجه به نمودار توابع ترسیم شده موارد زیر بدیهی است (k عددی طبیعی فرض شده است):

۱) برای تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^{2k}}$ داریم:



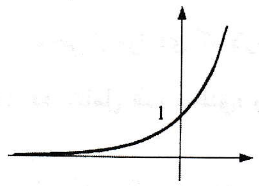
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

۲) برای تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^{2k+1}}$ داریم:



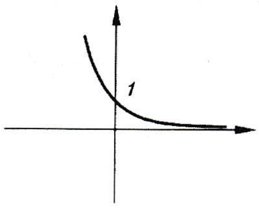
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \end{cases}$$

۳) برای تابع $f(x)=a^x$ با شرط $a>1$ داریم:

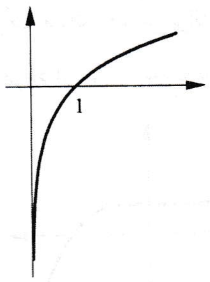


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

۴) برای تابع $f(x)=a^x$ با شرط $0<a<1$ داریم:

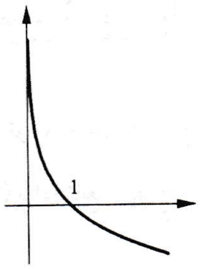


$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$



۵) برای تابع $f(x)=\log_a^x$ با شرط $a>1$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$



٦) برای تابع $f(x)=\log_a^x$ با شرط $0<a<1$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

دقت روی مقادیر حد چپ و راست

از آنجا که وجود حد در یک نقطه، مستلزم وجود حد چپ و راست در آن نقطه و برابر بودن این دو مقدار می‌باشد؛ در بسیاری مواقع، لازم است بررسی مقادیر حد چپ و راست به صورت جداگانه صورت پذیرد. (به خصوص در مسایل چهار گزینه‌ای پاسخی به صورت «حد وجود ندارد.» می‌تواند نشانه‌ای از ضرورت انجام این عمل باشد؛ زیرا، ممکن است در آن مساله خاص، مقادیر حد چپ و راست هر کدام به تنهایی موجود باشند؛ ولی، به علت عدم تساوی آنها، حد مورد نظر وجود نداشته باشد).

برخی از مواردی که لازم است حدود چپ و راست به تفکیک محاسبه شوند عبارتند از:

۱) حد شامل قدر مطلق: وقتی متغیر به سمت ریشه عبارت داخل قدر مطلق‌ها میل می‌کند؛ مثلاً، فرض کنید $a>0$ باشد برای محاسبه حدی؛ مانند، $\lim_{x\to a} \frac{|a^2-x^2|}{x^3-a^3}$ با توجه به جدول تعیین علامت زیر:

x		$-a$		a	
a^2-x^2	$-$	0	$+$	0	$-$

مساله را باید در دو حالت زیر به صورت جداگانه بررسی نمود:

برای حد چپ در نقطه $x=a$ داریم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{(a^2-x^2)}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)(a+x)}{(x-a)(x^2+a^2+ax)}=\lim_{x\to a^-}\frac{-(a+x)}{(x^2+a^2+ax)}=\frac{-2}{3a}$$

برای حد راست در نقطه $x=a$ داریم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{-(a^2-x^2)}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a^+}\frac{-(a-x)(a+x)}{(x-a)(x^2+a^2+ax)}=\lim_{x\to a^+}\frac{(a+x)}{(x^2+a^2+ax)}=\frac{2}{3a}$$

که نتیجه آن عدم موجود بودن حد مذکور در نقطه $x=a$ می‌باشد.

۲) حد شامل جزء صحیح: وقتی عبارت داخل جزء صحیح به سمت یک عدد صحیح میل می‌کند؛ مثلاً فرض کنید a یک عدد صحیح مثبت باشد. برای محاسبه حدی؛ مانند، $\lim_{x\to a}\frac{[-x]+[2x]}{[x]^2}$ با توجه به آنکه a عددی صحیح و مثبت فرض شده، داریم $(\varepsilon>0)$:

$$x\to a^+ \Rightarrow \begin{cases} x=a+\varepsilon & \Rightarrow [x]=a \\ -x=-a-\varepsilon & \Rightarrow [-x]=-a-1 \\ 2x=2a+2\varepsilon & \Rightarrow [2x]=2a \end{cases}$$

$$x\to a^- \Rightarrow \begin{cases} x=a-\varepsilon & \Rightarrow [x]=a-1 \\ -x=-a+\varepsilon & \Rightarrow [-x]=-a \\ 2x=2a-2\varepsilon & \Rightarrow [2x]=2a-1 \end{cases}$$

و لذا، مساله را باید در دو حالت زیر به صورت جداگانه بررسی نمود:

حد چپ در نقطه $x=a$: $\lim_{x\to a^-} f(x)=\frac{-a+2a-1}{(a-1)^2}=\frac{a-1}{(a-1)^2}=\frac{1}{a-1}$

حد راست در نقطه $x=a$: $\lim_{x\to a^+} f(x)=\frac{-a-1+2a}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}$

که نتیجه آن عدم موجود بودن حد مذکور در نقطه $x=a$ می‌باشد.

۳) حد توابع کسری: وقتی مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند؛ ولی، صورت کسر به سمت صفر میل نمی‌کند؛ مثلاً، برای محاسبه حدی؛ مانند، $\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x^2-a^2}$ با توجه به جدول تعیین علامت زیر:

		$-a$		a	
x^2-a^2	$+$	0	$-$	0	$+$

ملاحظه می‌شود:

$$x\to a^- \Rightarrow x^2-a^2\to 0^-$$
$$x\to a^+ \Rightarrow x^2-a^2\to 0^+$$

بنابراین، مساله را باید در دو حالت زیر به صورت جداگانه بررسی نمود:

حد چپ در نقطه $x=a$ $\qquad \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\dfrac{a^2}{0^-}=-\infty$

حد راست در نقطه $x=a$ $\qquad \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\dfrac{a^2}{0^+}=+\infty$

بنابراین، نتیجه حدهای چپ و راست متفاوتند. (دقت داریم در هر دو حالت، حاصل حد به بی‌نهایت گراییده ولی علامت این دو بی‌نهایت متفاوت است).

۴) حد توابع چند ضابطه‌ای در نقاطی که ضابطه تابع عوض می‌شود؛ به عنوان مثال، برای محاسبه حدی؛ مانند، $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وقتی $f(x)=\begin{cases} p(x) & x<a \\ q(x) & x>a \end{cases}$ از آنجا که در مجاورت $x=a$ ضابطه حاکم بر تابع عوض شده، لازم است دو حالت زیر مورد بررسی قرار گیرد:

حد چپ در نقطه $x=a$: $\quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} p(x)$

حد راست در نقطه $x=a$: $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} q(x)$

و حاصل حد مورد نظر موجود است، اگر و تنها اگر، هر دو حد فوق موجود بوده و با هم برابر باشند.

مواردی که تابع در یک نقطه حد ندارد

حدی؛ مانند، $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ در حالات زیر موجود نمی‌باشد:

۱) اگر حاصل حد، نامحدود (بی‌کران) شده و به تعبیری به بی‌نهایت میل کند.

۲) اگر حاصل حد، مقدار مشخص و معلومی نباشد (اگرچه ممکن است محدود بودن آن قطعی باشد).

۳) اگر حاصل حدهای چپ و راست دو مقدار متفاوت باشند و یا یکی از آنها عددی مشخص و دیگری بی‌نهایت شود.

٤) اگر امکان میل کردن x به x_0 از سمت راست یا چپ اصولاً ممکن نباشد (به تعبیری x_0^+ و x_0^- اساسا جزء دامنه تابع نباشند).

برخی قضایای مقدماتی حد

۱ـ حاصل یک حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

۲ـ $\lim_{x\to x_0} kf(x) = k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) \quad , \quad (k\in R)$

۳ـ $\lim_{x\to x_0} \left(ax^n + bx^{n-1} + \dots + k\right) = ax_0^n + bx_0^{n-1} + \dots + k$

۴ـ اگر $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; \quad (L_2\neq 0 \text{ با شرط})$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^n = L_1^n$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$$

۵ـ اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و تابع g در مجاورت نقطه x_0 کراندار و محدود باشد (حتی اگر $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجود نباشد) داریم: **

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0$$

۶ـ قضیه فشردگی (قضیه ساندویچ): اگر در همسایگی x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) داشته باشیم:

$$g(x)\le f(x)\le h(x)$$

و $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$ باشد؛ آنگاه:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

صور مبهم (مفاهیم اولیه)

اگر در محاسبه یک حد به حالت‌های $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$ و یا 1^{∞} , 0^{0} , 0^{∞} , ∞^{0} برخورد کنیم؛ اصطلاحاً می‌گوییم، حد مورد نظر مبهم شده و نیاز به رفع ابهام دارد. (چهار حالت اول را صور مبهم مقدماتی و چهار حالت دوم را صور مبهم نمایی می‌گویند). آنچه اهمیت دارد، این است که بدانیم صفر در حالات مبهم، صفر حدی (نسبی) است و نه صفر واقعی (مطلق)؛ بنابراین، بدیهی است:

حاصل $\frac{\text{صفر واقعی}}{\text{صفر حدی}}$ صفر است و حاصل $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر واقعی}}$ تعریف نشده است و:

$0 =$ (مقدار کراندار [حتی نامعلوم]) × (صفر حدی)

$0 =$ (بی‌نهایت بزرگ) × (صفر واقعی)

رفع ابهام حالات مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

اگرچه انجام عملیات جبری متعارف و یا قواعد هم ارزی گفته شده، ممکن است یک حد مبهم از نوع $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ را رفع ابهام نماید؛ ولی، معمولاً مناسب‌ترین راه در این‌گونه موارد استفاده از قاعده هوپیتال است که بیان می‌کند:

اگر در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (a می‌تواند یک عدد و یا بی‌نهایت باشد) به یکی از صور مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ رسیدیم؛ حاصل حد مورد نظر را می‌توان از طریق $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ به دست آورد؛ مشروط بر آنکه، حاصل حد اخیر موجود و معلوم باشد.

تذکر: چنانچه حد حاصل مجددا مبهم باشد، با استفاده دوباره از قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود $I=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ و این عمل تا رسیدن به وضعیت غیر مبهم (رفع ابهام شده) می‌تواند تکرار شود (دقت داریم استفاده از روش مذکور نیازمند توانایی در محاسبه مشتق توابع می‌باشد)؛ ضمناً، می‌توانیم از ترکیبی از روش‌های هم‌ارزی و هوپیتال برای رفع ابهام، استفاده کنیم.

نکته: در محاسبه حد $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ چنانچه حالت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ رخ دهد، می‌توان گفت:

اگر بی‌نهایت صورت بر بی‌نهایت مخرج غالب باشد، آنگاه:

$I=\infty$

اگر بی‌نهایت صورت و بی‌نهایت هم مرتبه باشند، آنگاه:

I = عددی مخالف صفر

اگر بی‌نهایت مخرج بر بی‌نهایت صورت غالب باشد، آنگاه:

$I=0$

و به عنوان ساده ترین مثال، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^{m}+b'x^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}\infty & ; \quad n>m\\ \dfrac{a}{a'} & ; \quad n=m\\ 0 & ; \quad n<m\end{cases}$$

رفع ابهام حالت مبهم $0\times\infty$

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ باشد. در این حالت، برای رفع ابهام حد مبهم $I=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ که از نوع $0\times\infty$ می‌باشد، می‌توان حد مورد نظر را به یکی از دو فرم زیر نوشت:

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0} \quad \text{یا} \quad I=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$$

و سپس با روش‌های گفته شده (مانند استفاده از قاعده هوپیتال) به رفع ابهام آن پرداخت. (توجه به این نکته ضروری است که رفع ابهام یکی از دو حالت فوق با استفاده از قاعده هوپیتال ممکن است به مشکل برخورد نماید که در این وضعیت باید سریعا به سراغ رفع ابهام حالت دیگر پرداخت).

رفع ابهام حالت مبهم $\infty-\infty$

برای رفع ابهام حالت مبهم $\infty-\infty$ علاوه بر استفاده از قواعد هم‌ارزی گفته شده، در بسیاری مواقع، استفاده از عملیات جبری مرسوم (مانند، مخرج مشترک‌گیری، ضرب صورت و مخرج در مزدوج یک عبارت و ...) می‌تواند مساله را به یک حد ساده؛ مانند، $\frac{0}{0}$ تبدیل نماید.

توجه: فرض کنید $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ باشد، در این حالت برای رفع ابهام $I=\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$ می‌توان نوشت:

$$I=\lim_{x\to a} f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

حال ابتدا $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ را که مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است رفع ابهام می‌کنیم، اگر حاصل این حد مخالف 1 باشد، حاصل I بی‌نهایت است و چنانچه حاصل این حد برابر 1 باشد، آنگاه I مبهم از نوع $0\times\infty$ می‌شود که می‌توان آن را با روش‌های گفته شده در قبل رفع ابهام نمود.

رفع ابهام صور مبهم نمایی

اگر در محاسبه حد $I=\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ (a می‌تواند بی‌نهایت هم باشد)، به یکی از حالات مبهم 1^∞، 0^0، 0^∞ و ∞^0 برخورد کردیم، قاعده کلی آن است که از دو طرف مساله مورد نظر لگاریتم نپرین گرفته و بنویسیم:

$$\text{Ln}\, I=\lim_{x\to a} g(x)\cdot \text{Ln}\left(f(x)\right)$$

حال حد به‌دست آمده در سمت راست عبارت فوق (که می‌تواند مبهم از نوع $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty$ باشد) را رفع ابهام کرده، بدین ترتیب LnI محاسبه می‌شود که از آنجا مقدار I مورد نظر به دست می‌آید.

چند نکته مهم

۱) اگر a, b, c, d اعداد ثابتی باشند، می‌توان نشان داد:

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{cx+d}=1^\infty \xrightarrow{\text{پس از رفع ابهام}} I=e^{ac}$$

$$I=\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{c}{x}+d}=1^\infty \longrightarrow I=e^{ac}$$

۲) اگر حاصل حد $I=\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ مبهم از نوع 1^∞ باشد، می‌توان گفت:

$$I=\lim_{x\to a} e^{g(x)\left(f(x)-1\right)}$$

۳) اگر m عدد ثابتی باشد، می‌توان نشان داد:

$$I=\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{ax^m+bx^{m-1}+\dots}=\infty^0 \xrightarrow{\text{پس از رفع ابهام}} I=1$$

۴) دقت کنید موارد زیر هیچ ابهامی ندارند ($a>b>0$ فرض شده‌اند):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+m}{bx+n}\right)^x=\left(\frac{a}{b}\right)^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{bx+m}{ax+n}\right)^x=\left(\frac{b}{a}\right)^{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^x=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to a^+}[x-a]^{\frac{1}{x-a}}=(\text{صفر واقعی})^{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{1}{x-a}\right)^{[x-a]}=(+\infty)^{\text{صفر واقعی}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}[1+x]^{\frac{1}{x}}=(\text{یک واقعی})^{+\infty}=1$$

تعریف دو تابع هم ارز

دو تابع f , g را در مجاورت x_0 هم ارز می‌گویند؛ هرگاه، حاصل حد $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر یک باشد (x_0 می‌تواند بی‌نهایت نیز باشد).

در حل مسائل حد، معمولا می‌توان به جای یک عبارت، هم ارز آن را قرار داد و سپس به حل مساله پرداخت.

دو تابع f و g را در مجاورت x_0 هم مرتبه می‌گویند؛ هرگاه، حاصل حد $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی مخالف صفر باشد.

دقت کنید معنای "دو تابع هم مرتبه" متفاوت از معنای "دو تابع هم ارز" است.

چند قاعده هم ارزی

۱ ـ هم ارزی در چند جمله‌ای‌ها

در یک چند جمله‌ای؛ مانند، $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx^m$ که برحسب قوای نزولی مرتب شده است $(n>m)$؛ می‌توان نوشت:

الف) اگر $x\to 0$ داریم: $f(x)\sim kx^m$

ب) اگر $x\to\pm\infty$ داریم: $f(x)\sim ax^n$

۲ـ هم ارزی در صفر

چنانچه $u(x) \to 0$ (دقت کنید در موارد زیر اصولاً مهم نیست، متغیر x به سمت کجا میل می‌کند؛ بلکه، مهم این است که u (x) به صفر میل کرده باشد)، داریم:

در حالت تعمیم‌یافته

$$\sin u(x) \sim u(x) \longrightarrow \sin u(x) \sim u(x) - \frac{u^3(x)}{6}$$

$$\operatorname{tg} u(x) \sim u(x) \longrightarrow \operatorname{tg} u(x) \sim u(x) + \frac{u^3(x)}{3}$$

$$\operatorname{Arcsin} u(x) \sim u(x) \longrightarrow \operatorname{Arcsin} u(x) \sim u(x) + \frac{u^3(x)}{6}$$

$$\operatorname{Arctan} u(x) \sim u(x) \longrightarrow \operatorname{Arctan} u(x) \sim u(x) - \frac{u^3(x)}{3}$$

$$\cos u(x) \sim 1 - \frac{u^2(x)}{2} \longrightarrow \cos u(x) = 1 - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^4(x)}{24}$$

$$\ln(1+u(x)) \sim u(x) \longrightarrow \ln(1+u(x)) \sim u(x) - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{3}$$

$$e^{u(x)} \sim 1+u(x) \longrightarrow e^{u(x)} \sim 1+u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{6} + \cdots$$

۳ـ هم ارزی‌های رادیکالی

وقتی $x \to \infty$ داریم:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \cdots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a}\left(x + \dfrac{b}{na}\right) & ; \quad n = 2k+1 \\ \sqrt[n]{a}\left|x + \dfrac{b}{na}\right| & ; \quad n = 2k \end{cases}$$

وقتی $u(x) \to 0$ داریم:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{1+u(x)} \sim 1 + \dfrac{u(x)}{n} + \dfrac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2} u^2(x) \\ (1+u(x))^n \sim 1 + nu(x) + \dfrac{n(n-1)}{2} u^2(x) \end{cases}$$

۴ـ هم ارزی در توابع جزء صحیح

وقتی $u(x) \to \infty$ داریم (دقت کنید در این حالت نیز مهم نیست که متغیر به کجا میل کرده؛ بلکه، شرط استفاده از بحث زیر آن است که u (x) به بی‌نهایت میل کند):

$$[u(x)] \sim u(x)$$

۵- هم ارزی مربوط به مجموع توان‌های p ام n عدد طبیعی

وقتی $n \to \infty$ می‌توان نشان داد:

$$(1^p + 2^p + \dots + n^p) \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2}$$

توجه بسیار مهم در استفاده از قواعد هم‌ارزی

در استفاده ازهر نوع قاعده هم‌ارزی، اگر هم‌ارز یک عبارت را قرار دهیم و دقیقاً قرینه همین جمله در جای دیگری از مساله با آن جمع شود (و در نهایت به حذف کامل عبارت هم‌ارز بینجامد) استفاده از آن قاعده هم‌ارزی مجاز نیست؛ یا اگر؛ مثلاً، استفاده از یک قاعده هم ارزی سبب شود داخل یک جزء صحیح به عددی صحیح تبدیل شود و یا در مواردی نظیر آن، استفاده از هم‌ارزی غیرمجاز است. در این شرایط یا باید از فرم تعمیم‌یافته هم‌ارزی استفاده نمود و یا حل مساله را با روش‌های دیگر دنبال کرد، به هر حال، در استفاده از هم ارزی ها باید دقت بیشتری را مبذول داشت.

تعریف بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ

تابع f را به ازاء $x \to x_0$ یک بی‌نهایت کوچک می گویند؛ هرگاه:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

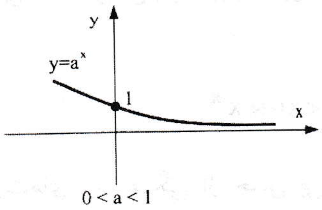
تابع f را به ازاء $x \to x_0$ یک بی‌نهایت بزرگ می گویند؛ هرگاه:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

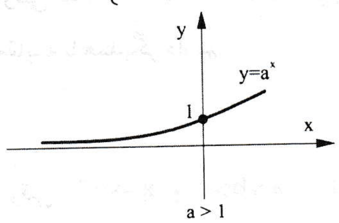
رفتار توابع نمایی و لگاریتمی وقتی x به صفر مثبت یا بی‌نهایت می‌گراید

از روی نمودار توابع مذکور به‌سادگی می‌توان دریافت:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0<a<1 \\ 0 & a>1 \end{cases}$$

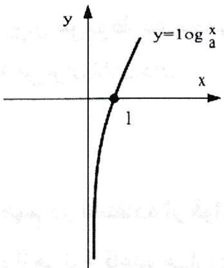


$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

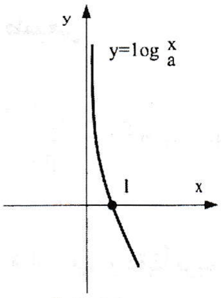


$$\lim_{x \to 0^+} \log_a^x = \begin{cases} +\infty & 0<a<1 \\ -\infty & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a^x = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$



$a>1$



$0<a<1$

(البته، بدیهی است در توابع لگاریتمی x نمی‌تواند به 0^- میل کند).

مقایسه چند بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ

۱) وقتی $x \to +\infty$, $a>b>0$, $m>1$ باشد ، عبارت‌های زیر همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ بوده و در مقایسه با همدیگر داریم:

$$\log_m^x << x^b << x^a << m^x$$

یعنی، در بی‌نهایت‌های توانی هر چه توان بزرگ‌تر باشد، بی‌نهایت قوی‌تر می‌شود و نیز بی‌نهایت نمایی بر بی‌نهایت توانی غالب است و بی‌نهایت توانی بر بی‌نهایت لگاریتمی غالب است.

۲) وقتی $x \to +\infty$, $a>b>1$ باشد، عبارت‌های زیر همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ بوده و در مقایسه با همدیگر داریم:

$$b^x << a^x$$

یعنی، در بی‌نهایت‌های نمایی هر چه پایه بزرگ‌تر باشد، بی‌نهایت قوی‌تر است.

۳) وقتی $x \to +\infty$ و $a>1$ باشد، عبارت‌های زیر همگی از جنس بی‌نهایت بزرگ بوده و در مقایسه با همدیگر داریم:

$$a^x << x! << x^x$$

۴) وقتی $x \to 0^+$ و $a>b>0$, $m>1$ باشد، عبارت‌های زیر همگی از جنس بی‌نهایت کوچک بوده و در مقایسه با همدیگر داریم:

$$x^b >> x^a >> m^{\frac{-1}{x}}$$

یعنی در بی‌نهایت کوچک‌های توانی هرچه توان بزرگ‌تر باشد، عبارت حاصل کوچک‌تر می‌شود (به تعبیری، سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند) و نیز بی‌نهایت کوچک توانی بر بی‌نهایت کوچک نمایی غالب است.

۵) وقتی $x \to o^+$ و $a > b > 1$ باشد، عبارت‌های زیر همگی از جنس بی‌نهایت کوچک بوده و در مقایسه با همدیگر داریم:

$$b^{\frac{-1}{x}} >> a^{\frac{-1}{x}}$$

یعنی، در بی‌نهایت کوچک‌های نمایی هر چه پایه بزرگ‌تر باشد، عبارت حاصل کوچک‌تر بوده و سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند.

توجه: وقتی می‌گوییم عبارت A بر عبارت B غالب است؛ یعنی، در یک مساله حد می‌توان نوشت:

$$(A \pm B) \sim A$$

پیوستگی تابع در یک نقطه

می‌گویند تابع f در نقطه x_0 پیوسته است (متصل است)؛ هرگاه، حد چپ، حد راست و مقدار تابع در این نقطه موجود و همگی با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ـ اگر تنها $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه x_0 پیوستگی از سمت چپ دارد.

ـ اگر تنها $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه x_0 پیوستگی از سمت راست دارد.

انواع حالات ناپیوستگی در یک نقطه

با توجه به تعریف پیوستگی در یک نقطه، برخی حالاتی که به ناپیوستگی تابع در نقطه x_0 منجر می‌شود، عبارتند از:

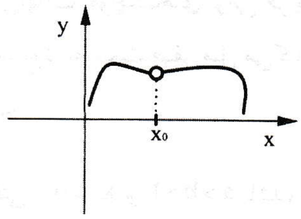
۱ـ تعریف نشده بودن تابع در نقطه x_0 (شکل a).

۲ـ موجود نبودن حد تابع در نقطه x_0 که می‌تواند به یکی از فرم‌های زیر باشد:

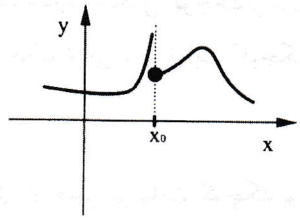
الف) موجود نبودن یک یا هر دو مقدار حد چپ و راست در نقطه x_0 (شکل b).

ب) موجود بودن هر دو مقدار حد چپ و راست در نقطه x_0 ولی عدم تساوی آنها (شکل c).

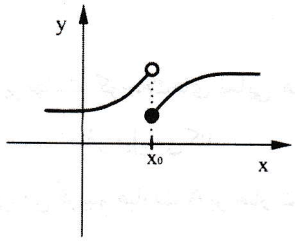
۳ـ موجود بودن حد تابع و مقدار تابع در نقطه x_0 ولی عدم تساوی آنها (شکل d).



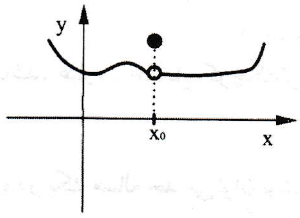
(a)



(b)



(c)



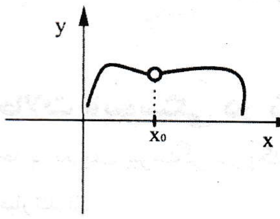
(d)

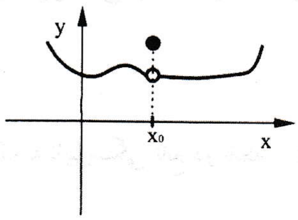
چند اصطلاح

انواع وضعیت‌های ناپیوستگی تابع در یک نقطه را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنند.

۱ـ ناپیوستگی رفع شدنی

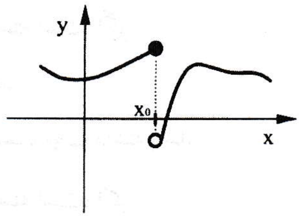
اگر تابع f در نقطه $x=x_0$ دارای حد باشد؛ ولی، مقدار تابع در این نقطه یا اصولا تعریف نشده باشد و یا با حد مذکور مساوی نباشد؛ می‌گویند، تابع در x_0 ناپیوستگی رفع شدنی دارد، بدین معنا که با تعریف مناسب f در $x=x_0$ می‌توان پیوستگی تابع را در این نقطه سبب شد.





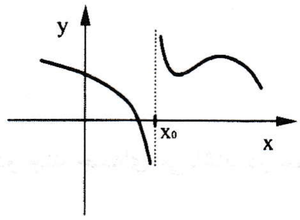
۲ـ ناپیوستگی جهشی (ناپیوستگی اساسی یا رفع نشدنی)

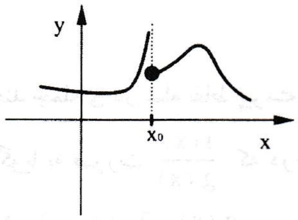
اگر تابع f در نقطه $x=x_0$ دارای دو حد چپ و راست موجود ولی متمایز باشد، می‌گویند تابع در x_0 ناپیوستگی جهشی دارد و $\left|\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right|$ را اصطلاحاً جهش تابع در این نقطه می‌گویند.



۳ـ ناپیوستگی نامتناهی

اگر یک یا هر دو مقدار حد چپ و راست تابع f در نقطه $x = x_0$ بی‌کران شوند، می‌گویند تابع f در x_0 ناپیوستگی نامتناهی دارد.

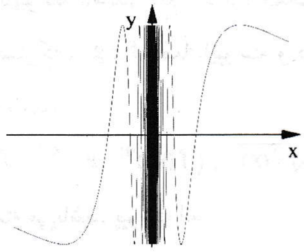




۴ـ ناپیوستگی نوسانی

اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ دارای حد نباشد؛ اما، در مجاورت این نقطه به طور نوسانی بین دو مقدار محدود قرار بگیرد (کراندار باشد)، می‌گویند تابع f در x_0 دارای ناپیوستگی نوسانی است.

$y = \sin\frac{1}{x}$



پیوستگی تابع در یک فاصله

۱ـ تابع f در فاصله (a, b) پیوسته است، اگر در هر نقطه از این فاصله باز پیوسته باشد.

۲ـ تابع f در فاصله $[a, b)$ پیوسته است، اگر:

اولا؛ در فاصله (a, b) پیوسته باشد.

ثانیا؛ در نقطه $x = a$ پیوستگی از سمت راست داشته باشد.

۳ـ تابع f در فاصله $[a , b)$ پیوسته است، اگر:

اولا؛ در فاصله (a , b) پیوسته باشد.

ثانیا؛ در نقطه $x = b$ پیوستگی از سمت چپ داشته باشد.

۴ـ تابع f در فاصله $[a , b]$ پیوسته است، اگر:

اولا؛ در فاصله (a , b) پیوسته باشد.

ثانیا؛ در نقطه $x = a$ پیوستگی از سمت راست داشته باشد.

ثالثا؛ در نقطه $x = b$ پیوستگی از سمت چپ داشته باشد.

چند نکته

۱ـ توابع چند جمله‌ای در تمام نقاط پیوسته‌اند.

۲ـ توابع گویا به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن $g(x)$ و $f(x)$ دو چند جمله‌ای می‌باشند در همه نقاط به‌جز ریشه‌های معادله $g(x) = 0$ پیوسته اند.

۳ـ هرگاه توابع g و fدر نقطه x_0 پیوسته باشند، توابع $f \pm g$, $f . g$ در نقطه x_0 پیوسته‌اند و تابع $\frac{f}{g}$ نیز با شرط آنکه $g(x_0)$ مخالف صفر باشد، در نقطه x_0 پیوسته است.

٤ ـ اگر تابع f در x_0 پیوسته و تابع g در x_0 ناپیوسته باشد، آنگاه توابع $f \pm g$ در نقطه x_0 ناپیوسته‌اند؛ ولی، fog در نقطه x_0 ممکن است پیوسته باشد.

۵ ـ اگر توابع g و f در نقطه x_0 ناپیوسته باشند، تابع $f \pm g$ ممکن است در x_0 پیوسته و یا گسسته باشد. (در نقاط ناپیوستگی غیرمشترک، $f \pm g$ قطعاً ناپیوسته و در نقاط ناپیوستگی مشترک، $f \pm g$ ممکن است پیوسته و یا ناپیوسته باشد).

٦ـ توابع $\sin f(x)$, $\cos f(x)$, $|f(x)|$, $a^{f(x)}$, $(f(x))^n$, $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ (با فرض آنکه n عددی طبیعی است)، در تمام نقاطی که f پیوسته می‌باشد، پیوسته اند.

۷ـ تابع $\sqrt[2n]{f(x)}$ (با فرض آنکه n عددی طبیعی است)، در تمام نقاطی که f پیوسته و نامنفی می‌باشد، پیوسته است.

۸ ـ تابع $\log_a^{f(x)}$ در تمام نقاطی که f پیوسته و مثبت می‌باشد، پیوسته است.

۹ـ اگر f در x_0 و g در $f(x_0)$ پیوسته باشد، تابع مرکب gof در نقطه x_0 پیوسته خواهد بود.

۱۰ـ تابع $[ax]$ در تمام نقاطی که حاصل ax را عددی صحیح می کند ناپیوسته است؛ به‌طوری که، اگر $ax_0 \in Z$ باشد، آنگاه:

الف) چنانچه $a > 0$ باشد، تابع در نقطه x_0 پیوستگی از راست دارد.

ب) چنانچه $a < 0$ باشد، تابع در نقطه x_0 پیوستگی از چپ دارد.

۱۱ـ معکوس هر تابع پیوسته، پیوسته است و به تعبیری هرگاه f در x_0 پیوسته باشد f^{-1} در $f(x_0)$ پیوسته خواهد بود.

۱۲ـ در توابع چند ضابطه‌ای کاندیدای نقاط ناپیوستگی تابع عبارتند از:

الف) جاهایی که تک‌تک ضابطه‌ها ناپیوسته می‌شوند.

ب) جاهایی که ضابطه حاکم بر تابع عوض می‌شود.

توجه: روشن است که اگر جاهایی که هر کدام از ضابطه‌ها ناپیوسته می‌شوند در فاصله تعریف ضابطه مذکور قرار نداشت، تابع در آنجا پیوسته خواهد بود.

اگر حد چپ و حد راست و مقدار تابع در جایی که ضابطه حاکم تغییر می‌کند موجود و یکسان باشند، تابع در آنجا پیوسته خواهد بود.

چند قضیه

قضیه مقدار میانی

هرگاه تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و k عددی بین مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ فرض شود، همواره می‌توان cای متعلق به فاصله (a, b) یافت به طوری که $f(c) = k$ باشد و به بیان ریاضی داریم:

$$\exists c \in (a,b) \mid f(c) = k$$

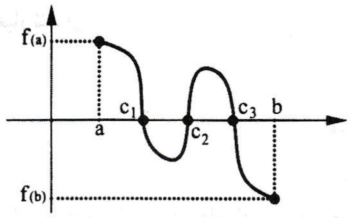
قضیه بولتزاتو (نتیجه قضیه مقدار میانی)

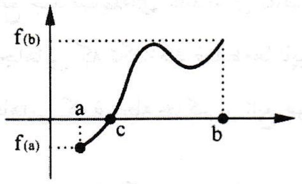
هرگاه تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) . f(b) < 0$ باشد، همواره می‌توان cای متعلق به فاصله (a, b) یافت به طوری که $f(c) = 0$ باشد و به بیان ریاضی داریم:

$$\exists c \in (a,b) \mid f(c) = 0$$

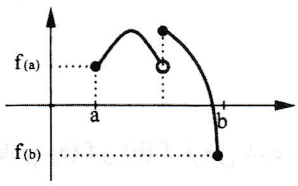
چند نکته

۱) قضیه بولتزاتو عنوان می‌کند، برای تابع f ای که در فاصله [a,b] پیوسته بوده و مقادیر f(a) و f(b) مختلف‌العلامت می‌باشند، نمودار تابع در فاصله (a , b) دست‌کم یک جا باید محور xها را قطع کند.

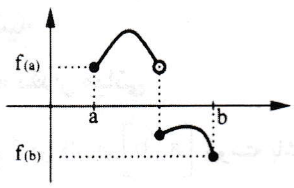




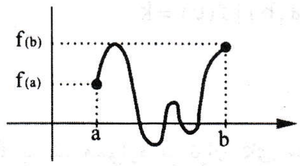
دقت کنید که قضیه بولتزاتو عنوان نمی‌کند، که اگر تابع f در فاصله $\left[a\,,b\right]$ پیوسته نبوده و یا مقادیر f(b) و f(a) مختلف‌العلامت نباشند، آنگاه قطعاً وجود نقطه‌ای؛ مانند، $c\in(a,b)$ که $f(c)=0$ می‌شود (نمودار تابع، محور xها را قطع می‌کند) منتفی است.



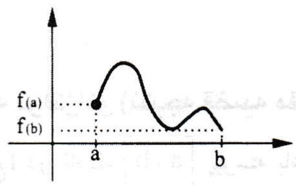
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

در شکل الف تابع در فاصله $\left[a\,,b\right]$ پیوسته نمی‌باشد؛ ولی، cای در فاصله (a , b) وجود دارد که $f(c)=0$.

در شکل ب تابع در فاصله $\left[a\,,b\right]$ پیوسته نمی‌باشد و cای نیز در فاصله (a , b) وجود ندارد که $f(c)=0$.

در شکل ج $f(a).f(b)$ منفی نمی‌باشد؛ ولی، cای در فاصله $(a\ ,\ b)$ وجود دارد که $f(c)=0$.

در شکل د $f(a).f(b)$ منفی نمی‌باشد و cای نیز در فاصله $(a\ ,\ b)$ وجود ندارد که $f(c)=0$.

۲) یکی از کاربردهای قضیه بولتزاتو، بررسی وجود ریشه برای معادله $f(x)=0$ در یک فاصله خاص می‌باشد؛ بدین ترتیب که، اگر f در فاصله $\left[a\ ,\ b\right]$ پیوسته بوده و $f(a).f(b)$ منفی باشد، طبق قضیه بولتزاتو می‌توان نتیجه گرفت، دست‌کم یک c در این فاصله وجود دارد که $f(c)$ برابر صفر می‌شود و به تعبیری معادله مورد نظر در فاصله مذکور دست کم یک ریشه، دارد (البته تصریح می‌کنیم چنانچه $f(a).f(b)$ مثبت باشد، بدین معنا نیست که معادله مورد نظر در فاصله $(a\ ,\ b)$ قطعاً ریشه ندارد و یا اگر $f(a).f(b)$ منفی باشد، بدین معنا نیست که معادله دقیقاً یک ریشه دارد).

خطوط مجانب

به طور کلی مجانب‌های یک تابع رفتار آن تابع را در بی‌نهایت نشان می‌دهند.

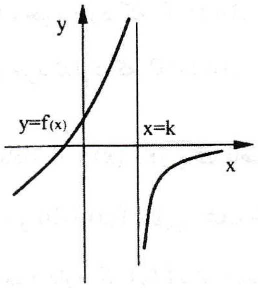
منحنی $y=g(x)$ را مجانب منحنی تابع $y=f(x)$ می‌نامند، هرگاه، منحنی $y=f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت بوده (یعنی نقاطی روی منحنی f موجود باشند که طول و یا عرض آنها به بی‌نهایت میل کند) و فاصله نقطه متغیر M متعلق به آن شاخه تا منحنی $g(x)$ وقتی M روی آن شاخه، بی‌نهایت دور می‌شود به سمت صفر میل کند. در بررسی مجانب‌های یک منحنی، معمولا فقط خطوط مجانب که سه نوع مجانب قائم ، افقی، و مایل می‌باشند مورد توجه قرار می‌گیرند؛ اگرچه، یک منحنی می‌تواند دارای مجانب‌هایی به فرم یک منحنی نیز باشد.

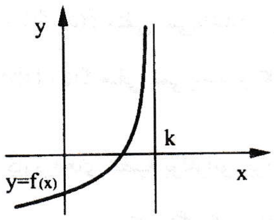
مجانب قائم

اگر وقتی $x\to k^{+}$ یا $x\to k^{-}$ داشته باشیم:

$$y\to+\infty \text{ یا } -\infty$$

خط به معادله $x=k$ را مجانب قائم منحنی $y=f(x)$ می‌گویند.





چند نکته

۱- در توابع کسری به صورت $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن P و Q توابعی چند جمله‌ای می‌باشند، کاندیداهای مجانب قائم از طریق معادله $Q(x)=0$ مشخص می‌شوند؛ اما، باید دقت داشته باشیم چنانچه $Q(k)=0$ باشد، باید وضعیت $P(x)$ در $x=k$ مورد توجه قرار گیرد، اگر $P(k)$ مخالف صفر باشد، $x=k$ مجانب قائم منحنی مورد نظر می‌باشد؛ اما، اگر $P(k)$ صفر باشد باید حد $\lim\limits_{x\to k}\frac{P(x)}{Q(x)}$ را محاسبه نماییم.

اگر حاصل این حد موجود (عددی مشخص و محدود) باشد $x=k$ مجانب منحنی به احتساب نمی‌آید؛ در حالی‌که، اگر حاصل این حد موجود نباشد (بی‌نهایت شود)، $x=k$ مجانب قائم منحنی خواهد بود.

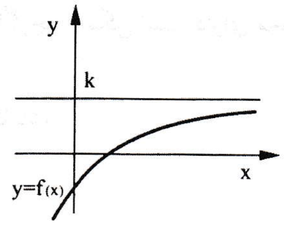
۲- اصولاً در بسیاری مواقع، کاندیدای مجانب قائم یک منحنی از صفر قرار دادن مخرج کسرهای موجود در ضابطه منحنی مشخص می‌شوند. به هر حال دقت کنیم $x=k$ای که از این طریق به دست می‌آید، تنها موقعی می‌تواند مجانب منحنی به احتساب آید که اولاً؛ دست‌کم تابع در یکی از همسایگی‌های از طرف چپ و یا راست $x=k$ معین و پیوسته باشد و ثانیا وقتی $x\to k$ داشته باشیم $y\to\infty$.

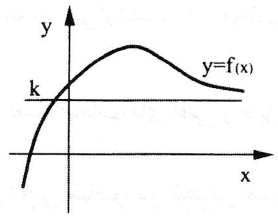
۳- در توابعی به‌صورت $y=\log_{Q(x)}^{P(x)}$ ریشه‌های معادلات $Q(x)=0$ و $P(x)=0$ کاندیدای مجانب قائم تابع هستند.

۴- اگر $x=k$ مجانب قائم منحنی نمایش تابع به معادله $y=f(x)$ باشد، آنگاه $x=k$ عضو دامنه تعریف تابع نیست.

مجانب افقی

اگر وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ داشته باشیم: $y\to k$ خط به معادله $y=k$ را مجانب افقی منحنی $y=f(x)$ می‌گویند.



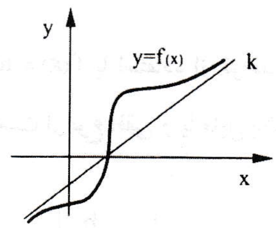


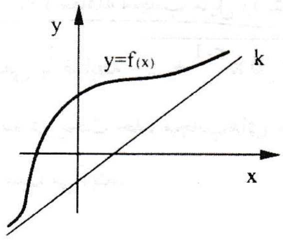
مجانب مایل

اگر وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ داشته باشیم:

$y = +\infty$ یا $-\infty$

منحنی مورد نظر ممکن است دارای مجانب مایل باشد.





چنانچه دو حد زیر موجود باشند:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} \quad , \quad h = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx)$$

آنگاه خط $y = mx + h$ مجانب مایل منحنی مورد نظر است و در صورت عدم وجود یکی از دو حد مذکور، منحنی مجانب مایل نخواهد داشت.

چند نکته

۱ـ شرط لازم برای وجود مجانب افقی و یا مایل آن است که ضابطه منحنی اجازه میل کردن x به سمت بی‌نهایت را داده باشد؛ لذا، در مواقعی که دامنه تغییرات متغیر فاصله محدودی؛ مانند، $[a, b]$ می‌باشد، اصولا مجانب افقی و یا مایلی موجود نخواهد بود.

۲ـ برخی مواقع در محاسبه $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ اینکه x به سمت مثبت و یا منفی بی‌نهایت میل کند، به دو جواب متفاوت برای حد مذکور منجر می‌شود که در این حالت باید هر کدام از موارد به طور جداگانه بررسی شود؛ لذا، ممکن است تابع در $+\infty$ یا $-\infty$ دارای دو مجانب افقی متفاوت و یا در یکی از بی‌نهایت‌ها دارای مجانب افقی و در بی‌نهایت دیگر دارای مجانب مایل باشد.

۳ـ توابع متناوب نمی‌توانند دارای مجانب افقی و مایل باشند؛ اگرچه، ممکن است دارای مجانب قائم باشند.

۴ـ مجموع تعداد مجانب‌های افقی و مایل حداکثر می‌تواند دو تا باشد.

روش‌هایی خاص در تعیین مجانب مایل

۱ـ در توابعی با ضابطه $f(x)=mx+h+g(x)$؛ اگر حد $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ برابر صفر باشد، $y=mx+h$ مجانب مایل منحنی است (بنابراین، در توابع گویا به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشد، اگر و تنها اگر، درجه مخرج یک واحد از درجه صورت کمتر باشد، منحنی تابع دارای مجانب مایل است و چنانچه صورت را بر مخرج تقسیم نماییم، خارج قسمت به‌دست آمده معادله مجانب مایل را نشان می‌دهد.)

۲ـ در توابعی با ضابطه $f(x)=mx+h+\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}$ با استفاده از قواعد هم‌ارزی گفته شده در بحث حد، مجانب‌های منحنی تابع که ممکن است از نوع افقی و یا مایل باشند به فرم زیر به دست می‌آیند:

$$y=mx+h+\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| \quad , \quad n=2k$$

$$y=mx+h+\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) \quad , \quad n=2k+1$$

دو نکته

۱) در توابعی به‌فرم $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ محل تقاطع مجانب‌های افقی و قائم مرکز تقارن منحنی است.

۲) در توابعی به‌فرم $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ محل تقاطع مجانب‌های مایل و قائم مرکز تقارن منحنی است.

تذکر: در تعیین مجانب مایل:

۱ـ اگر $m=0$ و h حد معینی داشته باشد، می‌گوییم خط مجانب مایل به مجانب افقی تبدیل شده است.

۲ـ اگر m عددی حقیقی و h بی‌نهایت شود، می‌گوییم منحنی دارای شاخه سهمی شکل در امتداد خط D به ضریب زاویه m است.

۳ـ اگر m عددی حقیقی باشد و h حد معینی نداشته باشد، می‌گوییم منحنی در راستای $y=mx$ به بی‌نهایت می‌رود؛ ولی، دارای شاخه سهمی مانند نیست.

نکته: به روش دیگری برای تعیین مجانب مایل توجه کنید:

فرض کنیم خط $y = mx + h$ معادله مجانب مایل باشد، معادله این خط را با معادلـه منحنـی تقـاطع می دهیم، سپس معادله حاصل را برحسب x بازنویسی مـی کـنیم؛ آنگـاه، ضـرایب دو جملـه متـوالی از بزرگ‌ترین درجات معادله حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم. از آنجا m و h به دست می آید.

تذکر مهم: اگر در توابع رادیکالی فرجه زوج به طریقه فوق عمل کردیم؛ مجانب مایل وقتی قابل قبول است که حداقل یک دسته از بی‌نهایت‌های تابع و متغیر در آن صدق کند.

توجه: در توابعی رادیکالی که زیر رادیکال کسری قرار دارد کـه درجـه صـورت آن ۲ واحـد بـیش از درجه مخرج است؛ برای تعیین مجانب مایل، می توانیم؛ ابتدا، صورت را بر مخرج تقسیم کـنیم و سپس از هم ارزی‌های رادیکالی استفاده نماییم.

نکته: اگر معادله یک منحنی به صـورت $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k\neq 0$ باشـد، شـکل منحنـی هذلولی است و هر یک از پرانتزهای معادله مساوی صفر، یک مجانب آن است.

منحنی مجانب

اگر درجه صورت معادله یک تابع کسری بیش از یک واحد از درجه مخرج آن بیشتر باشـد، یـا وقتـی صورت را بر مخرج تقسیم کرده‌ایم، خارج قسمت بـه صـورت $ax+b$ نباشـد، مـی گـوییم منحنـی آن تابع، منحنی مجانب دارد.