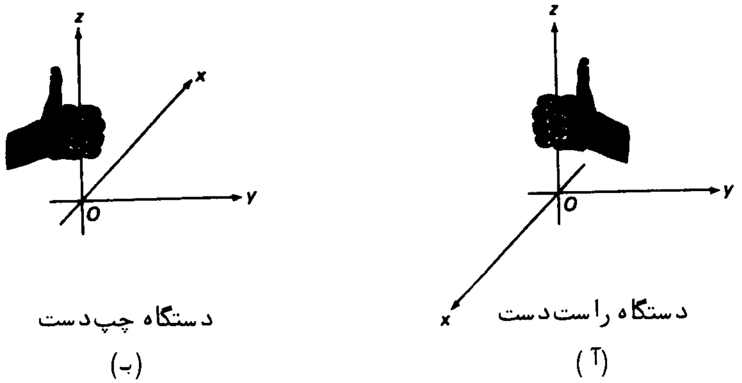
بردارها در فضا و هندسهٔ تحلیلی فضایی [12]

حال وقت آن است که از صفحهٔ دوبعدی به فضای سه بعدی برویم ، و ما این کار را در این فصل و فصول آتی انجام می‌دهیم . بحث را با معرفی مختصات قائم در فضا و مطالعهٔ چند سطح ساده آغاز می‌کنیم . سپس جبر بردارها را از بعد دو به بعد سه تعمیم می‌دهیم . ابتدا نکات مطرح شده در فصل پیش فقط با تعدیل مختصری عرضه می‌شوند ، ولی پس از آن در بخش ۳.۱۲ مفهومی جدید ، یعنی *حاصل ضرب خارجی* دوبردار فضایی ، وارد صحنه‌می شود . خطوط و صفحات در فضا در بخش ۴.۱۲ عنوان می‌شوند ، و در بخش ۵.۱۲ توابع برداری سه‌بعدی را مطرح کرده ، و صورت جدیدی از استنتاج نیوتن از قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر عرضه می‌شود . ما مطالعهٔ سه‌بعدی یا هندسهٔ تحلیلی " فضایی " خود را با بررسی حالاتی که در رسم معادلهٔ درجهٔ دو از سه متغیر پیش می‌آیند خاتمه خواهیم داد .

۱.۱۲ مختصات قائم در فضا

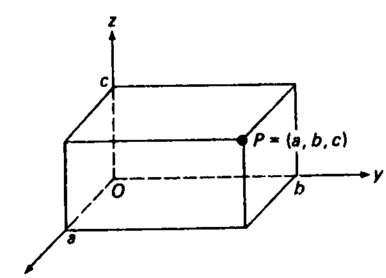
مختصات قائم در فضا توسیع طبیعی مختصات قائم در صفحه‌اند . فرض کنید سه‌خط دو به دو متعامد Ox ، Oy ، و Oz ، به نام *محورهای مختصات* ، هر یک مجهز به جهت مثبت (که در شکل ۱ با سر سهم نموده شده است) ساخته باشیم که در نقطهٔ O به نام *مبداء* متقاطع باشند . محورهای مختصات Ox ، Oy ، و Oz را به ترتیب محور x ، محور y ، و محور z می‌نامند . این محورها سه *صفحهٔ مختصات* دو به دو متعامد مشخص می‌کنند ، به نام صفحهٔ xy شامل محورهای x و y ، صفحهٔ xz شامل محورهای x و z ، و صفحهٔ yz شامل محورهای y و z . صفحهٔ yz در هر دو قسمت شکل ۱ صفحهٔ کاغذ است ، لیکن در قسمت (آ) محور x اشاره به خواننده دارد ، ولی در قسمت (ب) از خواننده دور می‌شود . دستگاه مختصات قسمت (آ) *راست دست* است بدین معنی که اگر انگشتان دست *راست* را طوری خم کنیم که از محور x مثبت به محور y مثبت بروند ، انگشت شست در امتداد محور z مثبت است ، ولی دستگاه مختصات قسمت (ب) *چپ دست* است ، بدین معنی که همان خاصیت را



شکل ۱

در رابطهٔ با دست چپ دارد. توجه کنید که دو دستگاه مختصات منعکس هم نسبت به صفحهٔ yz اند. از حالا به بعد ما فقط با دستگاههای مختصات راست دست کار خواهیم کرد. در این گونه دستگاه یک پیچ گوشتی، که تیغه‌اش $90°$ از محور x مثبت تا محور y مثبت می‌چرخد، به صورت عادی در امتداد محور z مثبت خواهد پیچید.

سه تاییهای مرتب و مختصات قائم. حال فرض کنیم (a, b, c) ***سه‌تایی‌مرتبی*** از اعداد حقیقی باشد، که در آن نماد نشان می‌دهد که a اول، b دوم، و c سوم خواهد آمد. در هر سه محور از یک واحد طول استفاده شده، a را به صورت نقطه‌ای از Ox (به عنوان خط اعداد) b را نقطه‌ای از Oy، و c را نقطه‌ای از Oz رسم می‌کنیم. سپس صفحهٔ عمود بر Ox در a، صفحهٔ عمود بر Oy در b، و صفحهٔ عمود بر Oz در c را رسم می‌نماییم. همانند شکل ۲، این سه صفحه در نقطهٔ P متقاطع‌اند که نمایش سه‌تایی مرتب (a, b, c) گرفته می‌شود. گوییم نقطهٔ P دارای ***مختصات قائم*** (یا ***دکارتی***) a، b، و c یا دقیقتر، مختص x، a، مختص y، b، و مختص z، c می‌باشد. با عکس کردن این ترسیم، یعنی با رسم صفحات‌ماربر

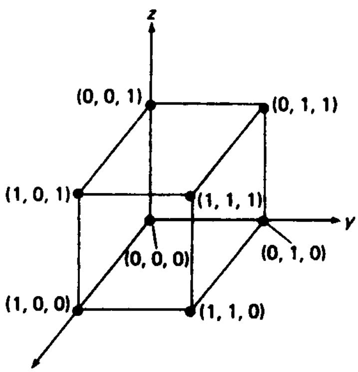


شکل ۲

P عمود بر محورهای مختصات (یا به‌صورت دیگر، رسم صفحات مار بر P موازی صفحات مختصات) می‌توان مختصات، ودرنتیجه‌سه‌تایی مرتب نظیربه نقطهٔ داده‌شدهٔ P رایافت.

لذا، یک نقطهٔ منحصر به فرد در فضا وجود دارد که نظیر یک سه‌تایی مرتب است، و به عکس یک سه‌تایی مرتب منحصر به فرد وجود دارد که نظیر یک نقطه در فضا می‌باشد. به خاطر این تناظر یک به یک، معمولاً" بین سه‌تاییهای مرتب و نقاط نمایش آنها فرق کمی می‌گذاریم یا اصلا" تمایزی قایل نمی‌شوند. بخصوص، $P = (a, b, c)$ یعنی P نقطه‌ای‌است‌به مختص x، a، مختص y، b، و مختص z، c. (بعضی از مؤلفان این نقطه را با $P(a, b, c)$ نشان می‌دهند.) توجه کنید که مبدأ O نقطهٔ $(0, 0, 0)$ است. البته تساوی‌دو سه‌تایی مرتب (a, b, c) و (d, e, f) یعنی دو سه تایی که عنصر اول، عنصر دوم، و عنصر سوم یکسان داشته‌باشند؛ درنتیجه، $a = d$، $b = e$، و $c = f$. مثلا"، $(\sqrt{9}, 4, 0) = (3, 2^2, 0)$ ولی $(1, -1, 2) \neq (-1, 1, 2)$.

مثال ۱. چهار رأس $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$، و $(0, 0, 1)$ یک مکعب داده شده‌اند. چهار رأس دیگر آن را بیابید.



شکل ۳

حل. جواب از شکل ۳ واضح است. توجه کنید که هشت رأس مکعب نظیر هشت سه تایی مرتب متمایز است که هر عنصرشان 0 یا 1 می‌باشد. تمام دوازده ضلع مکعب به طول واحد بوده و هر شش وجه آن دارای مساحت واحد می باشد. حجم مکعب مساوی یک‌خواهدبود.

نقطهٔ (x, y, z) در صفحهٔ yz واقع است اگر و فقط اگر $x = 0$، و بر محور z واقع است اگر و فقط اگر $x = y = 0$. به بیان دیگر، صفحهٔ yz از تمام نقاط به شکل $(0, y, z)$ تشکیل

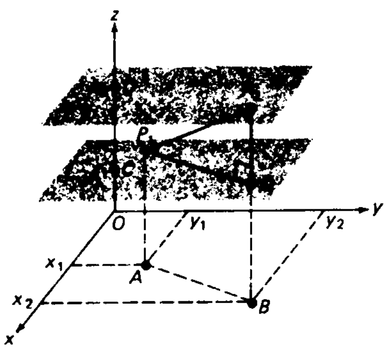
شده است ، ولی محور z از تمام نقاط به شکل $(0, 0, z)$ تشکیل شده است . به عنوان تمرین ، سایر صفحات و محورهای مختصات را توصیف نمایید . صفحات مختصات فضا را به‌هشت ناحیهٔ بی‌کران به نام **یکهشت** تقسیم می‌کنند . یکهشت *اول* از تمام نقاط (x, y, z) تشکیل شده است که در آن $x > 0, y > 0, z > 0$ ، ولی سایر یکهشتها معمولاً اسم خاصی ندارند .

فرمول فاصله. فاصلهٔ بین دونقطهٔ P_1 و P_2 در فضا ، مثل حالت نقاط در صفحه ، با $|P_1P_2|$ نموده می‌شود ، و قضیهٔ زیر تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۳۵ ، می‌باشد .

قضیهٔ ۱ (فاصلهٔ بین دو نقطه در فضا) . *فاصلهٔ بین دو نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *در فضا از فرمول زیر به دست می‌آید :*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{۱}$$

برهان . از دو نقطهٔ P_1 و P_2 خطوطی بر صفحهٔ xy و صفحاتی بر محور z عمود می‌کنیم . در این صورت ، P_1P_2 وتر مثلث‌قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 شکل ۴ است ، که درآن $Q = (x_2, y_2, z_1)$ واضح است که $|P_1Q| = |AB|$ و $|QP_2| = |CD|$ ، که در آنها A و B نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) اند که در صفحهٔ xy درنظر گرفته می‌شوند ، ولی C و D نقاط z_1 و z_2 اند که برمحور z گرفته



شکل ۴

می‌شوند . لذا ، طبق قضیهٔ فیثاغورس و فرمول فاصله در صفحه و روی خط ، داریم

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 \\ &= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + (z_1 - z_2)^2, \end{aligned}$$

که با (۱) معادل می‌باشد .

شکل ۴ تحت فرض $x_1 < x_2$ ، $y_1 < y_2$ ، و $z_1 < z_2$ رسم شده است ، ولی به آسانی معلوم می‌شود که فرمول فاصلهٔ (۱) در صورت عکس‌کردن یکی (یا چند تا) از این نامساویها نیز به دست می‌آید .

مثال ۲ . فاصلهٔ بین نقاط $P_1 = (3, 1, 9)$ و $P_2 = (-1, 4, -3)$ را پیدا نمایید .

حل . بنابر فرمول (۱) ،

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2 + (9+3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

نمودار معادلات و نامعادلات . منظور از *نمودار* یک یا چند معادله یا نامعادله‌از سه متغیر x ، y ، و z یعنی مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) در فضا که در معادلات یا نامعادلات‌داده شده صدق‌می‌کنند . لازم‌نیست همهٔ متغیرها حاضر باشند ،و دراین‌صورت مقادیر متغیرهای غایب نامحدودند . مثلاً ، نمودار $x = a$ صفحهٔ موازی صفحهٔ yz است که از $(a, 0, 0)$ می‌گذرد ، حال‌آنکه نمودار معادلات $x = a$، $y = b$ خط موازی محور z است که‌از $(a, b, 0)$ می‌گذرد .

مثال ۳ . معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{۲}$$

را رسم نمایید .

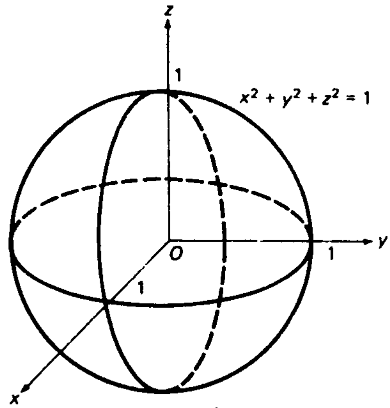
حل . چون $x^2 + y^2 + z^2$ مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y, z) ومبداء $O = (0, 0, 0)$ است ،نقطهٔ (x, y, z) تعلق به نمودار (۲) دارد اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y, z) و O مساوی 1 باشد . لذا ، نمودار (۲) کرهٔ یکه است؛ یعنی ، کره به شعاع 1 و مرکز O (ر.ک. شکل ۵) .

مثال ۴ . نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1 \tag{۳}$$

را رسم کنید .

حل . بنابر (۳) ، مربع فاصلهٔ بین نقطهٔ (x, y, z) و نقطهٔ O از ۱ کمتر است؛ و درنتیجه ،



کرهٔ یکه

شکل ۵

همین امر در مورد خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۳) ناحیهٔ داخل کرهٔ یکهٔ (۲) است؛ این ناحیه **گوی یکهٔ باز** نام دارد. نمودار نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \qquad (3')$$

گوی یکهٔ بسته است؛ یعنی، مجموعهٔ مرکب از گوی یکهٔ باز همراه با مرزش (کرهٔ یکه) می‌باشد.

کرات. با تعمیم مثال ۳ معلوم می‌شود که مختصات نقطهٔ (x, y, z) در معادلهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \qquad (r > 0) \qquad (4)$$

صدق می‌کنند اگر و فقط اگر مجذور فاصلهٔ بین (x, y, z) و نقطهٔ ثابت (a, b, c) مساوی r^2 باشد یا، معادلاً، اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y, z) و (a, b, c) مساوی r باشد. لذا، مختصات (x, y, z) در (۴) صدق می‌کنند اگر و فقط اگر (x, y, z) بر کره‌ای به شعاع r و مرکز (a, b, c) قرار داشته باشد. توجه کنید که اگر $a = b = c = 0$ و $r = 1$ اختیار شود، (۴) به معادلهٔ (۲) کرهٔ یکه تحویل می‌گردد.

مثال ۵. معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0 \qquad (5)$$

را رسم نمایید.

حل . با کامل کردن مربعها ، داریم

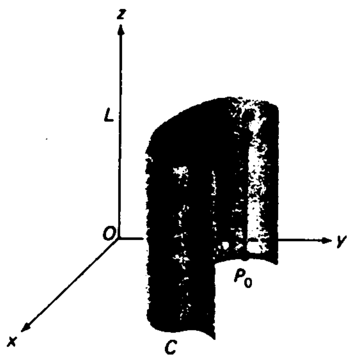
$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4, \qquad y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9, \qquad z^2 + 2z = (z+1)^2 - 1,$$

و با گذاردن این عبارات در (۵) ، به دست می‌آوریم

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25,$$

که معادلهٔ کره‌ای به شعاع 5 و مرکز $(-2, 3, -1)$ می‌باشد . لذا ، معادلهٔ اصلی (۵) نیز این کره را به عنوان نمودار دارد .

استوانه‌ها . فرض‌کنیم C یک منحنی مسطح‌بوده ،و L خطی‌باشد که باصفحهٔ C موازی نباشد (یا در این صفحه قرار نداشته باشد) . در این صورت ، سطح S ساخته شده‌ازتمام‌خطوط مار بر C موازی L ***استوانه*** نام دارد . منحنی C را ***هادی*** استوانهٔ S نامیده ، و بی‌نهایت خطی که موازی L بوده و S را تشکیل می‌دهند ***خطوط جاری*** (یا ***مولدهای*** S) نام‌دارند . مثلا" ، شکل ۶ بخشی از استوانهٔ S را با منحنی C در صفحهٔ xy به عنوان هادی‌و



استوانه

شکل ۶

محور z به عنوان خط L نشان‌می‌دهد ؛ درنتیجه ،خطوط جاری همه موازی محور z می‌باشند . فرض‌کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y بوده ، و منحنی C در شکل نمودارمعادلات همزمان

$$F(x, y) = 0, \qquad z = 0 \tag{۶}$$

است ، که معادلهٔ دوم $z = 0$ صرفا" به ما می‌گوید که C یک منحنی در صفحهٔ xy است.در این صورت ، استوانهٔ S ، با هادی C و خطوط جاری موازی محور z ، نمودار تنها معادلهٔ

$$F(x, y) = 0 \tag{۷}$$

است که از (۶) با حذف معادلهٔ دوم ، یعنی با مجاز کردن z که مقادیر نامحدود (و نه فقط 0)را بگیرد ،به‌دست‌می‌آید . درواقع ، به ازای هر نقطهٔ $P = (x, y, z)$، $P_0 = (x, y, 0)$ را نقطهٔ اشتراک خط مار بر P موازی محور z و صفحهٔ xy می‌گیریم (ر.ک. شکل ۶) . در این صورت ، P بر S واقع است اگر و فقط اگر P_0 بر C باشد؛ یعنی ، اگر و فقط اگر مختصات x و y نقطهٔ P_0 ، و درنتیجه P ، در اولین معادلهٔ (۶) صدق نمایند . امـا این بدان معنی است که ، همانطور که حکم شده ، S نمودار معادلهٔ (۷) می‌باشد .

عدم ظهور مختص z در معادلهٔ (۷) نشان می‌دهد که خطوط جاری S موازی محور z می‌باشند . به همین نحو ،

$$F(x, z) = 0$$

معادلهٔ یک استوانه با خطوط جاری موازی محور y ، و

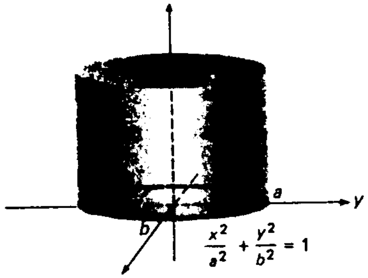
$$F(y, z) = 0$$

معادلهٔ یک استوانه با خطوط جاری موازی محور x می‌باشد . در هر حالت ، خطوط جاری موازی محوری هستند که با مختص غایب نموده شده است .

مثال ۶. نمودار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۸)$$

استوانه‌ای است که خطوط جاری‌اش موازی‌محور z می‌باشند . *اثر* این‌استوانه در صفحهٔ xy؛ یعنی ، اشتراک با صفحهٔ (x, y) ، یک بیضی است (ر.ک. شکل۷) ؛ یعنی ، بیضی با همان معادلهٔ (۸) به عنوان معادله‌ای با مختصات نقطهٔ متغیر از صفحهٔ xy (فضای 2 بعدی) تا معادله ای با مختصات نقطهٔ متغیر (x, y, z) از فضای سه بعدی . به این دلیل ، استوانه یک *استوانهٔ بیضوی* نام دارد .



استوانهٔ بیضوی

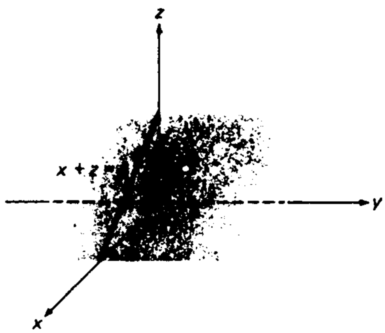
شکل ۷

هر مقطع عرضی استوانه به وسیلهٔ صفحهٔ موازی صفحهٔ xy یک بیضی است که با اثرش در صفحهٔ xy همنهشت است . اگر $a = b = r$، استوانهٔ بیضوی به استوانهٔ مستدیر قائم بهشعاع r بدل می‌شود که محور z محور تقارن آن می‌باشد .

مثال ۷. در صفحهٔ xz نمودار

$$x + z = 1 \tag{۹}$$

یک خط است ، ولی در فضای 3 بعدی نمودار معادلهٔ خطی (۹) صفحهٔ شکل ۸ می‌باشد . این صفحه را استوانه‌ای تعبیر کنید که خطوط جاری‌اش موازی محور y اند .



شکل ۸

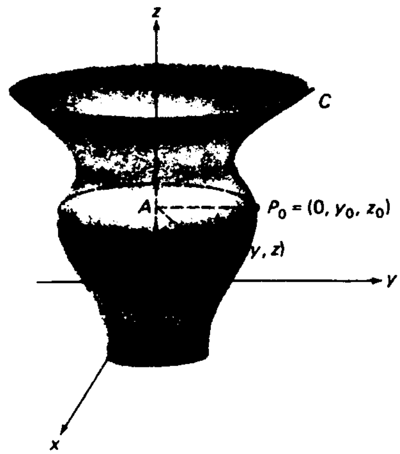
سطوح دوار . سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول خطی در صفحهٔ آن یک سطح دوار نام دارد . (ما قبلا" در بخش ۵.۸ با سطوح دوار ، بدون تلاش‌در یافتن معادلاتشان در فضای سه‌بعدی ،برخورد داشته‌ایم .) مثلا" ، فرض کنیم منحنی C درصفحهٔ yz، نمودار معادلهٔ

$$F(y, z) = 0 \qquad (x = 0) \tag{۱۰}$$

بوده ، و C را حول‌محور z دوران‌داده سطح دوار S شکل ۹ را تولید می‌کنیم .دراین‌صورت، S نمودار معادلهٔ

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{۱۱}$$

است که از $F(y, z) = 0$ به وسیلهٔ تعویض y با $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید (دراینجا موقتا" فرض می‌کنیم هر نقطهٔ C دارای مختص y نامنفی است) . در واقع ، به ازای هر نقطهٔ $P = (x, y, z)$ ، نقطهٔ $P_0 = (0, y_0, z_0)$ را اشتراک‌صفحهٔ yz بادایرهٔ‌مار بر P موازی‌صفحهٔ xy و مرکز A واقع بر محور z می‌گیریم . در این صورت ، P بر S واقع است اگر و فقط اگر



سطح دوار

شکل ۹

P_0 بر C واقع باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر $F(y_0, z_0) = 0$. از شکل واضح است که $z_0 = z$ و

$$y_0 = |AP_0| = |AP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

بنابراین، $F(y_0, z_0) = 0$ معادل (۱۱) است، و P بر S واقع است اگر و فقط اگر (۱۱) برقرار باشد؛ یعنی، همانطور که حکم شده، S نمودار معادلهٔ (۱۱) می‌باشد.

در هر نقطه از منحنی C با مختص y منفی، به جای $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ داریم $y_0 = -\sqrt{x^2 + y^2}$. لذا، به‌طورکلی، سطح S معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \qquad (۱۱')$$

که در آن اگر $y_0 \geq 0$ علامت مثبت و اگر $y_0 < 0$ علامت منفی را اختیار می‌کنیم.

اگر منحنی (۱۰) درصفحهٔ yz را به جای محور y حول محور z دوران دهیم، استدلالی مشابه نشان می‌دهد که سطح دوار حاصل از این کار معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

(ممکن است در بعضی حالات جلو رادیکال علامت منها لازم باشد). درجدول زیر فرمولهای فوق، همراه با نتایج مشابه برای منحنیها در صفحات xy و xz، داده شده‌اند. نکاتی در جدول را که قبلاً بحث نشده‌اند تحقیق نمایید.

سطح دوار	محور دوران	منحنی
$F(y, \sqrt{x^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$	محور y محور z	$F(y, z)=0 \quad (x=0)$
$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$	محور x محور z	$F(x, z)=0 \quad (y=0)$
$F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$	محور x محور y	$F(x, y)=0 \quad (z=0)$

مثال ۸. سهمی

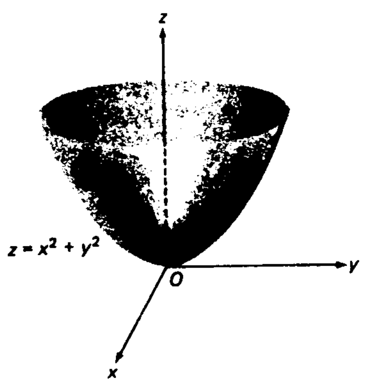
$$z = y^2 \qquad (x=0, y \geq 0)$$

در ربع اول از صفحهٔ yz را حول محور z (محور تقارن آن) دوران داده، سهمی‌گون دوار شکل ۱۰ به معادلهٔ

$$z = (\sqrt{x^2+y^2})^2,$$

یا معادلا"

$$z = x^2 + y^2 \qquad (۱۲)$$

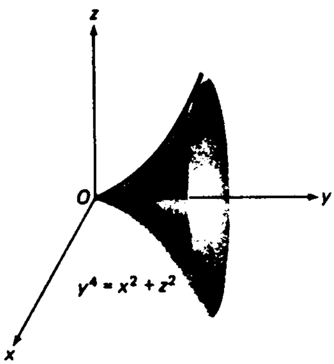


سهمی‌گون دوار

شکل ۱۰

به دست می‌آید . اثر این سطح در صفحهٔ $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{c}$ و مرکز $(0, 0, c)$ است ، ولی اثرش در صفحهٔ xz سهمی $z = x^2$ است که می‌توان آن را با قرار دادن $y = 0$ در معادلهٔ (۱۲) به دست آورد . از دوران همین سهمی حول محور y ، سطح قیفی کاملاً متفاوت شکل ۱۱ به معادلهٔ

$$\sqrt{x^2 + z^2} = y^2,$$



شکل ۱۱

یا معادلاً

$$y^4 = x^2 + z^2,$$

که در آن $y \geq 0$ ، به دست می‌آید .

مثال ۹ . از دوران خط

$$y = z \qquad (x = 0)$$

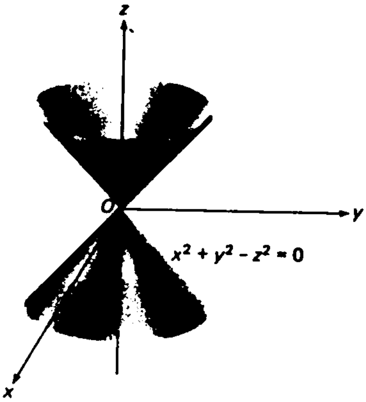
در صفحهٔ yz حول محور z ، سطح دوار S شکل ۱۲ به معادلهٔ

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$$

(وقتی $y < 0$ ، علامت منفی لازم است) ، یا معادلاً

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

به دست می‌آید . S یک مخروط مستدیر قائم دوپارچه به رأس مبداء است که هر مولد آن با محور مخروط، یعنی محور z ، زاویهٔ $45°$ می‌سازد . اثر S در صفحهٔ $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع c (نه $\sqrt{c}$ مثل مثال ۸) و مرکز $(0, 0, c)$ می‌باشد . برای همسازی با مطالب بخش ۱۰.۵، نشان دهید که اثر S در هر صفحهٔ $x = c$ یا $y = c$ هذلولی است اگر $c \neq 0$ و یک جفت خطوط متقاطع است اگر $c = 0$. اثر S در صفحهٔ xy چیست ؟

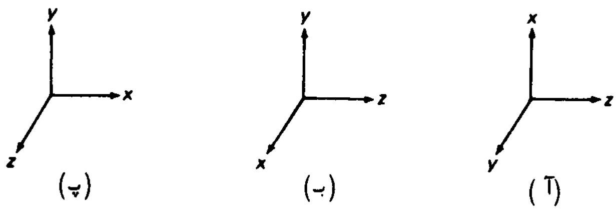


مخروط مستدیر قائم دوپارچه

شکل ۱۲

مسائل

۱. از سه دستگاه مختصات قائم شکل ۱۳ فقط دو تا راست دست‌اند.



شکل ۱۳

کدامها چنین‌اند؟

۲. یکی از دستگاههای مختصات شکل ۱۳ چپ‌دست است. چگونه می‌توان آن را راست دست ساخت؟

۳. یک مکعب مستطیل (جعبه) وجوهش موازی صفحات مختصاتند و مبداء O و نقطهٔ $(2, -3, 4)$ دورأس آن هستند. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگرآن‌رابیابید.

۴. یک مکعب مستطیل به اضلاع موازی محورهای مختصات نقاط $(2, 1, -1)$ و $(-1, 3, 1)$ را به عنوان دو رأس دارد. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگرآن‌رابیابید.

۵. در چه نقاط خط مار بر $(6, -7, 9)$ موازی محور y صفحهٔ مار بر $(8, -4, 5)$ موازی‌صفحهٔ xz را قطع می‌کند؟

فاصلهٔ بین نقطهٔ (a, b, c) و محورهای زیر را بیابید.

۶. محور x ۷. محور y ۸. محور z

فاصلهٔ بین جفت نقاط داده شده را بیابید.

۹. $(0, 0, 0), (12, -15, 16)$

۱۰. $(0, 1, 0), (-4, 3, 4)$

۱۱. $(4, -5, 3), (6, -2, -3)$

۱۲. $(1, 1, 5), (10, 3, -1)$

۱۳. $(8, 11, 9), (4, 12, 2)$

۱۴. $(3, \pi, -14), (-9, \pi, -9)$

۱۵. $(5, 0, -3), (0, 4, 0)$

۱۶. $(1, -1, 1), (-1, 1, -1)$

۱۷. نقطه‌ای روی محور y بیابید که از نقاط $(7, 3-, 1)$ و $(5, 7, -5)$ به یک فاصله باشد.

۱۸. نشان دهید که نقاط $A = (3, -1, 6)$ ، $B = (-1, 7, -2)$ ، و $C = (1, -3, 2)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. چه ضلعی وتر است؟

۱۹. کدام یک از نقاط $(-3, 0, 2)$ ، $(2, 1, 3)$ ، $(-1, 3, 1)$ ، و $(2, 2, -2)$ به مبداء نزدیکتر است؟

۲۰. فرض‌کنید M نقطهٔ میانی پاره‌خط P_1P_2 واصل بین نقاط $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد. نشان دهید که

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

راهنمایی. ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۳۷.

نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین جفت نقاط داده شده را بیابید.

۲۱. $(1, -7, 0), (-9, 11, 12)$

۲۲. $(-4, 9, 2), (6, 3, 8)$

۲۳. $(-1, 3, -5), (2, -4, 6)$

۲۴. $(-5, 10, -20), (5, -10, 20)$

گوییم دو نقطهٔ متمایز P و Q نسبت به نقطهٔ M متقارن اند اگر M نقطهٔ میانی پاره‌خط PQ باشد، و نسبت به خط L یا صفحهٔ Π متقارن‌اند اگر L یا Π از نقطهٔ میانی M پاره‌خط PQ گذشته و بر PQ عمود باشد. فرض کنید P نقطهٔ $(5, -3, 2)$ باشد. نقطهٔ متقارن P را نسبت به

۲۵. مبداء

۲۶. نقطهٔ $(3, 1, -2)$

۲۷. محور x

۲۸. محور y

۲۹. محور z

۳۰. صفحهٔ xy

۳۱. صفحهٔ xz

۳۲. صفحهٔ yz

بیابید.

معادلهٔ کره به شعاع و مرکز داده شده را پیدا کنید.

۳۳. $5, (0, 0, 0)$

۳۴. $8, (-1, 1, -1)$

۳۵. $\sqrt{11}, (3, -2, 4)$ ✓ ۳۶. $15, (10, -5, 10)$ ✓

نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۳۷. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z - 83 = 0$ ✓

۳۸. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 6 = 0$ ✓

۳۹. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 12y - 8z + 77 = 0$ ✓

۴۰. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3y - 4z = 0$ ✓

۴۱. $x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 16z + 90 = 0$ ✓

۴۲. $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 14y - 22z + 270 = 0$ ✓

۴۳. معادلهٔ کره‌ای را بیابید که از نقطهٔ $(4, -1, -1)$ گذشته و بر هر سه صفحهٔ مختصات مماس است.

۴۴. معادلهٔ درجهٔ دو

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (\text{یک})$$

را درنظر بگیرید، که در آن ضرایب x^2، y^2، و z^2 همه مساوی 1 اند، و فرض کنید

$$E = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D.$$

نشان دهید که نمودار (یک) کره‌ای است به شعاع $\sqrt{E}$ و مرکز $(-A/2, -B/2, -C/2)$ اگر $E > 0$، نقطهٔ $(-A/2, -B/2, -C/2)$ اگر $E = 0$، و مجموعهٔ تهی اگر $E < 0$.

نمودار معادله یا نامعادلهٔ داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف کنید.

۴۵. $xy = 0$ ۴۶. $xyz = 0$

۴۷. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ ۴۸. $1 < y^2 + z^2 < 4$

نمودار معادلهٔ داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف و رسم کنید.

۴۹. $z^2 - y^2 = 0$ ۵۰. $x^2 + z^2 = 2z$

۵۱. $xy = -1$ ۵۲. $y^2 + 4z^2 = 4$

۵۳. $y^2 - 8x = 0$ ۵۴. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

۵۵. $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ ۵۶. $y^2 + z^2 - x = 0$

معادلهٔ سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید.

۵۷. $x = 4z^2\ (y = 0)$، محور z ۵۸. همان منحنی، محور x

۵۹. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1\ (z = 0)$، محور x ۶۰. همان منحنی، محور y

۶۱. $y = \sqrt{z}\ (x = 0)$، محور y ۶۲. همان منحنی، محور z

۲.۱۲ از بردارها در صفحه تا بردارها در فضا

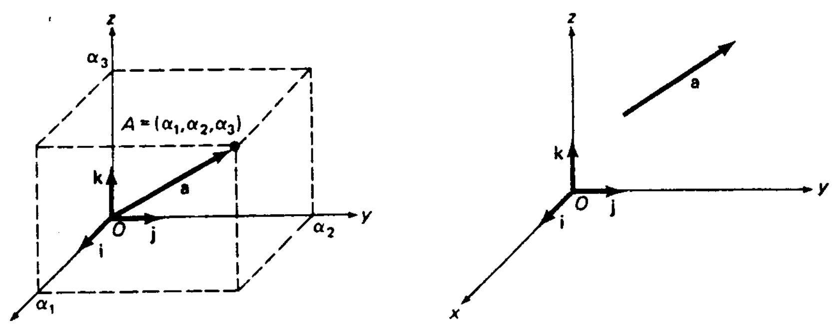
در صفحات ۱۰۵۰ تا ۱۰۴۵ بردارهای در صفحه و اعمال مختلفی مانند جمع ، تفریق ، و ضرب در اسکالرها را برآنها تعریف نمودیم . این تعاریف ، و قواعد حاکم بر این اعمال ، بدون هیچ تغییری برای بردارها در فضا صادقند ، به این دلیل ساده که اینها صرفا " هندسی و " فارغ از مختصات " می‌باشند . از حالا به بعد ، منظور از واژهٔ " بردار " بدون شرح بیشتر ، همواره یعنی بردار در فضای سه‌بعدی معمولی نه در یک صفحه .

مؤلفه‌های یک بردار. با اینحال ، وقتی مختصات وارد می‌شوند ، البته می‌توان انتظار تفاوتهایی بین حالات دوبعدی و سه‌بعدی را داشت . به‌طور مشخص ، فرض کنید دستگاهی از مختصات قائم x ، y ، و z در فضا به مبداء O داشته باشیم . همچنین ، $\mathbf{i}$ بردار یکه در امتداد محور x مثبت ، $\mathbf{j}$ بردار یکه در امتداد محور y مثبت ، و $\mathbf{k}$ بردار یکه در امتداد محور z مثبت ، مثل شکل ۱۴ (آ) ، باشد . در این صورت ، هر بردار مانند $\mathbf{a}$ (در فضا) نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد :

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}. \qquad (۱)$$

اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 *مؤلفه‌های* $\mathbf{a}$ نام دارند ، و به صورت زیر تعیین می‌شوند . بردار $\mathbf{a}$ را انتقال می‌دهیم ، یعنی به موازات خود بدون دوران حرکت می‌دهیم ، تا نقطهٔ شروعش بر مبداء O منطبق شود . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ نقطهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ از فضاست ، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقال یافته‌های یک بردار باهم مساویند . اما ، همانطور که از شکل ۱۴ (ب) برمی‌آید ، مختصات α_1 ، α_2 ، و α_3 نقطهٔ A درست اسکالرهایی هستند که در نمایش یا " بسط " (۱) می‌آیند . به‌علاوه ، اندازهٔ $\mathbf{a}$ چیزی جز فاصلهٔ O تا A نیست ؛ یعنی ،

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \qquad (۲)$$



(ب) (آ)

شکل ۱۴

منظور از یک *پایه* در فضا یعنی مجموعه‌ای از سه بردار ثابت مانند $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ ، به نام *بردارهای پایه* ، به طوری که هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$ نمایش منحصر به فردی به‌شکل زیر داشته باشد:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \tag{۱'}$$

که *بسط* $\mathbf{a}$ نسبت به $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ نامیده می‌شود. در این صورت، اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 *مؤلفه‌های* $\mathbf{a}$ (نسبت به $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$) نام دارند. می‌توان نشان داد که‌سه‌بردار ناصفر $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ یک پایه در فضا تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر غیر همصفحه باشند؛ یعنی، اگر و فقط اگر صفحه‌ای شامل (یا موازی) هر سه بردار موجود نباشد. اگربردارهای $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ از یک پایه دو به دو متعامد باشند، گوییم پایه **متعامد** است، واگر علاوه‌بر عمود بودن **یکه** نیز باشند، گوییم پایه **متعامد یکه** است. مثلاً، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ در امتداد محورهای مختصات یک پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند. توجه کنید که فرمول (۲) فقط برای یک پایهٔ متعامد یکه معتبر است (چرا؟).

بردارها به عنوان سه‌تاییهای مرتب. از اینجا به بعد، باتوجه به نکات فوق، سه‌تاییهای مرتب را برای نمایش هم نقاط و هم بردارها درفضا به کارمی‌بریم. لذا، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ می‌تواند به معنی نقطه به *مختصات* قائم α_1 ، α_2 ، و α_3 یا بردار $\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ با *مؤلفه‌های* α_1 ، α_2 ، و α_3 (نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ زمینهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$) باشد. همچنین، از آنجا که $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، $\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ ، سه تاییهای مرتب نمایش بردارهای پایه خود عبارتنداز

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

حال می‌توان اعمال جبری را از دیدگاه سه‌تاییهای مرتب تعبیر کرد. فرض کنیم $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ بردارهای دلخواهی در فضا باشند. در این صورت،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) + (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}),$$

و درنتیجه،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{j} + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{k} \tag{۳}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3). \tag{۳'}$$

هرگاه p یک اسکالر باشد، آنگاه $p\mathbf{a} = p(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})$؛ و درنتیجه،

$$p\mathbf{a} = p\alpha_1\mathbf{i} + p\alpha_2\mathbf{j} + p\alpha_3\mathbf{k} \tag{۴}$$

یا

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (p\alpha_1, p\alpha_2, p\alpha_3). \qquad (۴')$$

پس از (۳') معلوم می‌شود که به ازای هر بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ،

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (0, 0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0, \alpha_3 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

درنتیجه ، $(0, 0, 0)$ سه‌تایی مرتب نمایش بردار صفر $\mathbf{0}$ است . برای به دست آوردن سه‌تایی مرتب نمایش $\mathbf{a}-$ ، در فرمول (۴) قرار می‌دهیم $p = -1$ ، خواهیم داشت $-\mathbf{a} = -\alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j} - \alpha_3\mathbf{k}$ یا معادلاً

$$-\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3).$$

به‌علاوه ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ ؛ درنتیجه ،

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3) \qquad (۵)$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3). \qquad (۵')$$

همچنین ، دو بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ در فضا مساویند اگر و فقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$ ، $\alpha_2 = \beta_2$ ، و $\alpha_3 = \beta_3$ ، و این درست به دلیل مشابهی است که درصفحات ۱۰۵۳ تا ۱۰۵۴ برای بردارها در صفحه ذکر شد .

مثال ۱ . فرض‌کنید $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 8, 7)$. بردار $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ را حساب کرده ، و سپس اندازه‌اش را بیابید .

حل . با استفادهٔ آزاد از قواعد (۳) تا (۵) ، داریم

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} &= 2(2, -1, 3) + (-1, 4, -2) - (1, 8, 7) \\ &= (4 - 1 - 1, -2 + 4 - 8, 6 - 2 - 7) = (2, -6, -3), \end{aligned}$$

یا معادلاً

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

بنابر فرمول (۲) ، اندازهٔ این بردار مساوی است با

$$|2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

مثال ۲ . بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را همجهت بردار $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ پیدا کنید .

حل . اندازهٔ $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ عبارت است از

$$|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}| = \sqrt{15^2 + (-12)^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25,$$

و درنتیجه،

$$\mathbf{u} = \frac{15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}}{|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{12}{25}\mathbf{j} + \frac{16}{25}\mathbf{k}.$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای. همانند بردارها در صفحه، *حاصل‌ضرب نقطه‌ای* دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در فضا با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta, \tag{۶}$$

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است $(0 \le \theta \le \pi)$. پس از (۶) نتیجه می‌شودکه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$، و نیز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمود باشند (بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود). هرگاه $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$، آنگاه

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{۷}$$

برهان اساساً همان برهان قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۱۰۶۳، است، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود. با استفاده از فرمول (۷)، می‌توان به آسانی تحقیق کرد که هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$،

$$(p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

حال آنکه، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

درست مثل نتیجهٔ صفحهٔ ۱۰۶۳.

مثال ۳. بنابر فرمول (۷)، حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a} = (4, -3, 6)$ و $\mathbf{b} = (2, 5, -1)$ مساوی است با $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(2) - 3(5) + 6(-1) = 8 - 15 - 6 = -13$.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$، و $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ در فرمولهای مهم

$$\begin{gathered} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{gathered} \tag{۸}$$

صدق می‌کنند. مثلاً، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1(1) + 0(0) + 0(0) = 1$، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1(0) + 0(1) + 0(0) = 0$ و غیره. فرمولهای (۸) نیز نتیجهٔ فوری تعریف (۶) و این امر که $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند می‌باشند. توجه کنیدکه هرگاه $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$، آنگاه به کمک (۸)،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \alpha_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + \alpha_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \alpha_1,$$

و به همین نحو، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=\alpha_2$ و $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=\alpha_3$.

فرض کنیم θ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشد. از (۶) نتیجه می‌شود که

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{۹}$$

مثال ۴. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=-4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ را بیابید.

حل. در اینجا داریم

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1(-4)-2(1)+4(-2)=-14,$$
$$|\mathbf{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21},\qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}.$$

بنابراین،

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{-14}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{2}{3},$$

که ایجاب می‌کند

$$\theta=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\approx 131.8^\circ.$$

فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر در فضا باشند. دراین صورت، ***مولفهٔ a در امتداد b*** با $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، و ***تصویر a روی b*** با $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ نموده و، مثل حالت بردارها در صفحه، با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},\qquad \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۰۶۶). توجه کنید که $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ اسکالر است، ولی $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ بردارمی‌باشد.

مثال ۵. $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ و $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ را درصورتی‌بیابید که $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$. $\mathbf{a}$ را به صورت مجموع یک بردار موازی $\mathbf{b}$ و یک بردار متعامد به $\mathbf{b}$ ("متعامد" مترادف "عمود برهم" است) نمایش دهید.

حل. چون

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2(1)-3(2)+1(-2)=-6,\qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3,$$

داریم

$$\operatorname{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{-6(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{9} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}.$$

بردار $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ موازی $\mathbf{b}$ است، و بردار

$$\mathbf{a} - \operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

متعامد به $\mathbf{b}$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۲، صفحهٔ ۱۰۶۶). لذا، نمایش $\mathbf{a}$ به صورت مجموع برداری موازی $\mathbf{b}$ و برداری متعامد به $\mathbf{b}$ عبارت است از

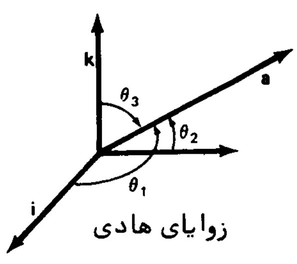
$$\mathbf{a} = \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right).$$

زوایای هادی و کسینوسهای هادی. فرض کنیم $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ بردار ناصفری باشد. همچنین، θ_1، θ_2، و θ_3 زوایای بین $\mathbf{a}$ و بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ باشند (ر.ک. شکل ۱۵). در این صورت، از (۹) معلوم می‌شود که

$$(10)\quad \cos\theta_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{\alpha_1}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|} = \frac{\alpha_2}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|} = \frac{\alpha_3}{|\mathbf{a}|},$$

یا معادلاً

$$(10')\qquad \alpha_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta_1, \qquad \alpha_2 = |\mathbf{a}|\cos\theta_2, \qquad \alpha_3 = |\mathbf{a}|\cos\theta_3.$$



زوایای هادی

شکل ۱۵

زوایای θ_1، θ_2، و θ_3 *زوایای هادی* بردار $\mathbf{a}$ (یا هرخط جهتدار L همجهت $\mathbf{a}$) نام دارند، و اعداد $\cos\theta_1$، $\cos\theta_2$، و $\cos\theta_3$ را *کسینوسهای هادی* $\mathbf{a}$ (یا L) می‌نامند. کسینوسهای

هادی جهت $\mathbf{a}$ را کاملا" مشخص می‌کنند، ولی راجع به اندازهٔ $\mathbf{a}$ چیزی نمی‌گویند. با گذاردن (۱۰') در فرمول $|\mathbf{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ برای مجذور اندازهٔ $\mathbf{a}$، معلوم می‌شود که

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3).$$

لذا، کسینوسهای هادی $\cos\theta_1$، $\cos\theta_2$، و $\cos\theta_3$ باید در شرط زیر صدق کنند:

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1. \tag{11}$$

مثال ۶. کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار $\mathbf{a} = (4, -8, 1)$ را بیابید.

حل. با استفاده از (۱۰) به ازای $\alpha_1 = 4$، $\alpha_2 = -8$، $\alpha_3 = 1$، و

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9,$$

معلوم می‌شود که بردار $\mathbf{a}$ دارای کسینوسهای هادی

$$\cos\theta_1 = \frac{4}{9}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{8}{9}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{1}{9},$$

و زوایای هادی

$$\theta_1 = \arccos\frac{4}{9} \approx 63.6°,$$

$$\theta_2 = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right) \approx 152.7°$$

$$\theta_3 = \arccos\frac{1}{9} \approx 83.6°$$

می‌باشد.

مثال ۷. آیا یک بردار یا خط جهتدار می‌تواند زوایای هادی $\theta_1 = 45°$ $\theta_2 = 135°$، و $\theta_3 = 60°$ داشته باشد؟

حل. خیر، زیرا شرط (۱۱) برقرار نیست. در واقع،

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{1}{2},$$

و درنتیجه،

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1.$$

بالاخره، می‌گوییم که *وابستگی خطی* و *استقلال خطی* برای بردارها در فضا درست مثل بردارها در صفحه تعریف می‌شوند (ر.ک. صفحهٔ ۱۰۵۷). می‌توان نشان داد که هر **چهار بردار در فضا وابستهٔ خطی‌اند و سه بردار در فضا مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیر همصفحه باشند**. مثلاً، بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$، $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ غیر همصفحه می‌باشند (چرا؟)؛ و درنتیجه، مستقل خطی می‌باشند. این را می‌توان با نشان دادن اینکه $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ تساویهای $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ راایجاب می‌کند امتحان نمود.

مسائل

بردارهای $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ و $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ را در هر حالت بیابید.

۱. $\mathbf{a} = (1, -2, 4), \mathbf{b} = (3, 2, -1)$

۲. $\mathbf{a} = (4, 0, 7), \mathbf{b} = (2, 5, 0)$

۳. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

بردار $\overrightarrow{AB}$ را با نقاط انتهایی داده شده بیابید.

۵. $A = (-3, 2, 5), B = (4, 1, -1)$

۶. $A = (7, 0, 3), B = (6, 2, 9)$

۷. $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), B = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6})$

۸. $A = (13, -11, 5), B = (15, 17, -9)$

۹. نقطهٔ پایان بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ شروعش $(1, 2, -3)$ باشد؟

۱۰. نقطهٔ شروع بردار $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ پایانش $(-4, 0, 5)$ باشد.

اندازهٔ بردار داده شده را بیابید.

۱۱. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۲. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۳. $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۱۴. $-4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را یافته، و زاویهٔ بین آنها را نیزپیداکنید.

۱۵. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۶. $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۷. $\mathbf{a} = (1, 1, -1), \mathbf{b} = (-1, 1, 1)$

۱۸. $\mathbf{a} = (12, -15, 16), \mathbf{b} = (2, 2, 1)$

۱۹. مقدار t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = t\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ متعامد باشند.

۲۰. مقادیر s و t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ موازی باشند.

$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ را به ازای بردارهای داده شدهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ حساب کنید.

۲۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

۲۲. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۳. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۲۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

آیا یک بردار می‌تواند زوایای داده شده را به عنوان زوایای هادی داشته باشد؟

۲۵. $45°, 45°, 60°$ ۲۶. $90°, 150°, 60°$ ۲۷. $45°, 60°, 120°$

آیا یک بردار می‌تواند با دوتا از سه محور مختصات مثبت زوایای داده شده را بسازد؟

۲۸. $30°, 45°$ ۲۹. $150°, 30°$ ۳۰. $60°, 60°$

کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

۳۱. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

۳۲. $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۳۳. $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

۳۴. $-15\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

۳۵. برداری با هر سه محور مثبت مختصات زاویهٔ حادهٔ θ می‌سازد. θ را بیابید.

۳۶. مکعبی بردارهای $2\mathbf{i}$ ، $2\mathbf{j}$ ، و $2\mathbf{k}$ را به عنوان سه یال خود دارد. زاویهٔ بردار واصل از مبداء O تا مرکز وجه جلو مکعب با بردار واصل از O تا مرکز وجه بالایی را بیابید.

۳۷. در یک کارت مربع شکل یکی از اقطارش رسم شده است، و نیز دو خط دیگر در آن ترسیم شده که کارت را به سه نوار مستطیلی همنهشت تقسیم کرده‌اند. سپس کارت در امتداد اضلاع نوارهای مستطیلی تاخورده و به یک منشور مثلث القاعدهٔ منتظم تبدیل شده است. تازدن سبب شده تا قطر یک مسیر چندضلعی مرکب از سه پاره‌خط گردد، بر هر وجه جانبی منشور یکی. زاویهٔ بین دوپاره‌خط متوالی این مسیر را بیابید.

۳۸. بردار $\mathbf{b} = (4, 2, 3)$ را به صورت ترکیبی‌خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$ و $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ بیان کنید.

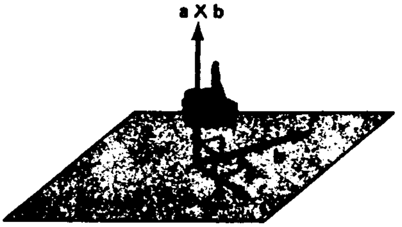
۳۹. یک پایهٔ غیرمتعامد در فضا مثال بزنید.

۳.۱۲ حاصل‌ضرب خارجی

مفهوم " حاصل‌ضرب خارجی " دوبردار هم در مسائل هندسی یافتن برداری عمود بر دو بردار داده شده و هم در مسائل مختلف فیزیکی ، از جمله رفتار نوک دوک و حرکت‌یک‌ذرهٔ باردار در میدان مغناطیسی ظاهر می‌شود . منظور از *حاصل‌ضرب خارجی* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ (به همین ترتیب) یعنی بردار با اندازهٔ

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \theta, \qquad (۱)$$

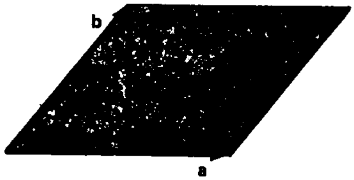
که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است (که در صفحهٔ ۱۰۶۰ تعریف شد) ، به‌طوری‌که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بر صفحهٔ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود می‌باشد . همچنین ،ازدوراستادرامتدادعمودجهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را جهتی اختیار می‌کنیم که با آن بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ یک " دستگاه راست‌دست" تشکیل دهند . این بدان معنی است که هرگاه انگشتان دست راست را طوری خم کنیم‌که از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ به اندازهٔ θ بروند ، آنگاه شست اشاره به جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ خواهد داشت .ر.ک.شکل ۱۶ . به بیان دیگر ، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ اشاره به‌جهت حرکت یک‌پیچ معمولی (با شیارهای‌راست‌دست) دارد که توسط یک پیچ گوشتی که تیغه‌اش از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ به اندازهٔ θ می‌چرخد پیچیده می‌شود. هرگاه $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ،آنگاه θ تعریف نشده‌است ، و طبق تعریف‌قرارمی‌دهیم $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.



تعبیر هندسی حاصل‌ضرب خارجی

شکل ۱۶

حاصل‌ضرب خارجی را *حاصل‌ضرب برداری* نیز می‌نامند ، زیرا $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *بردار*است. این با حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ از آنجهت فرق دارد که حاصل ضرب نقطه‌ای *اسکالر* می‌باشد . (توجه کنید که حاصل‌ضرب خارجی را می‌توان فقط برای بردارهای در*فضا*تعریف کرد .) از فرمول (۱) و شکل ۱۷ معلوم می‌شود که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . در واقع ، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ حاصل ضرب قاعدهٔ $|\mathbf{a}|$ در ارتفاع $|\mathbf{b}| \sin \theta$ این متوازی‌الاضلاع است .



شکل ۱۷

خواص حاصل‌ضرب خارجی. زاویهٔ بین یک بردار و خودش صفر است. بنابراین،

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \sin 0 = 0,$$

درنتیجه،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{۲}$$

حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ مساوی $\mathbf{0}$ است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ موازی $\mathbf{b}$ باشد، که به‌صورت $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ نوشته شده و به معنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ است که در آن p اسکالر است. (با اختیار $p = 0$ می‌بینیم که بردار صفر موازی هر بردار است.) در واقع، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ معادل است با

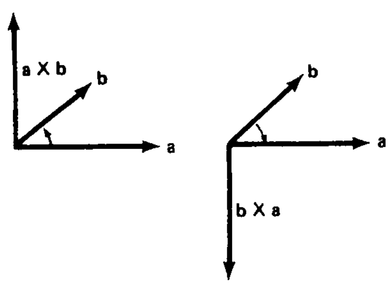
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \theta = 0 \qquad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

و این فرمول برقرار است اگر و فقط اگر $\sin \theta = 0$؛ و درنتیجه، $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$، یا دست کم یکی از بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی $\mathbf{0}$ می‌باشد؛ لذا، در هر حالت، $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

اگر وقتی انگشتان دست‌راست شما از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ خم شده‌اند شستتان در جهتی باشد، با خم شدن انگشتان از $\mathbf{b}$ به $\mathbf{a}$ شست جهت مقابل را نشان می‌دهد. (امتحان کنید: "شست بالا، شست پایین"، آزمایش کنید و ببینید!) لذا، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ جهتهای مختلف دارند. ولی اندازهٔ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ یکسان است، و این را می‌توان از مقایسهٔ فرمول (۱) با فرمول

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}| \sin \theta$$

دریافت. بنابراین، مثل شکل ۱۸،



حاصل‌ضرب خارجی پاد تعویض‌پذیر است

شکل ۱۸

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (۳)$$

زیرا بردارهای هم‌اندازه و مختلف‌الجهت قرینهٔ یکدیگرند. فرمول (۳) نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب خارجی تعویضپذیر نیست؛ درواقع، **پاد تعویضپذیر** است، بدین‌معنی‌که *تغییر ترتیب عوامل* $\mathbf{a}$ *و* $\mathbf{b}$ *علامت حاصل‌ضرب* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *را تغییر می‌دهد*.

مثال ۱. نشان دهید که

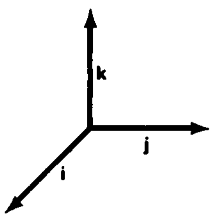
$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, && \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, && \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ &\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, && \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, && \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ &\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, && \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, && \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بردارهای پایهٔ یکهٔ دستگاه راست دست مختصات‌قائم می‌باشند.

حل . سه فرمول اول نتایج فوری فرمول (۲) هستند. برای اثبات سه فرمول‌وسط، ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند؛ و درنتیجه، $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}$ و $\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ نیز چنین می‌کنند (ر.ک. شکل ۱۹)، ولی

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}| \sin 90^\circ = 1,$$

و به همین نحو، $|\mathbf{j} \times \mathbf{k}| = |\mathbf{k} \times \mathbf{i}| = 1$. چون حاصل‌ضرب خارجی پاد تعویضپذیراست، سه فرمول اخیر فورا" از سه فرمول وسط به دست می‌آیند.



شکل ۱۹

توجه کنید که هر فرمول حاصل‌ضرب خارجی مستلزم هر سه بردار $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ ، در صورت تعویض $\mathbf{i}$ با $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}$ با $\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k}$ با $\mathbf{i}$ ، برقرار است. لذا، برای تولید تمام فرمولهای مهم (۴)، کافی است تنها فرمول $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ را همراه با قواعد (۲) و (۳) به‌یاد آوریم.

قضیهٔ زیر شبیه نتیجهٔ صفحهٔ ۱۰۶۲ برای حاصل‌ضربهای خارجی است.

قضیهٔ ۲ (خواص دیگر حاصل‌ضرب خارجی). *هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه، به ازای*

هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ،

$$(p\mathbf{a}) \times (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{۵}$$

ضرب خارجی در قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \tag{۶}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{۶}$$

نیز به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ صدق می‌کنند .

برهان این قضیه کمی خسته‌کننده است؛ و لذا ، تا آخر بخش به تعویق می‌افتد .

مثال ۲ . با استفاده از قضیهٔ ۲ و پاد تعویضپذیری حاصلضرب خارجی ، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) &= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 4(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 6(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \\ &= 0 - 4(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 0 = -7\mathbf{a} \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

که در آن $p\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ اختصاری برای $p(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ است .

مثال ۳ . حاصلضربهای خارجی شرکت *ناپذیر* اند؛ یعنی $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ لزوماً" مساوی $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ نیست؛ ، لذا ، نمی‌توان پرانتزها را حذف کرد و فقط نوشت $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. مثلاً" ، طبق (۴) و (۶) ،

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{j} - \mathbf{i},$$

حال آنکه

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})) = \mathbf{i} \times [(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{j} \times \mathbf{j})] = \mathbf{i} \times (-\mathbf{k}) = \mathbf{j},$$

درنتیجه ،

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})).$$

دترمینانها ، پیش از ادامهٔ بحث ، کمی منحرف شده یک مفهوم جبری معرفی می‌کنیم که بررسی حاصلضربهای خارجی را بسیار ساده می‌کند . علایمی به شکل

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{۷}$$

که در آنها یک آرایهٔ مربع شکل از اعداد حقیقی بین دو خط قائم می‌آید ، **دترمینان** نام دارد (به‌طورکلی ، n سطر هر یک شامل n عدد وجود دارند) . تعداد سطرها یا ستونهای یک دترمینان **مرتبهٔ** آن نام دارد ، و دترمینان مرتبهٔ n دترمینان $n \times n$ (یا n در n)

نیز نامیده می‌شود . لذا ، علامت اول در (۷) یک دترمینان 2×2 است ، و علامت دوم یک دترمینان 3×3 می‌باشد . هر یک از این علایم صورت بسیار فشردهٔ نوشتن عدد خاصی است . به طور مشخص، اولین علامت (۷) نشانگر عدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (۸)$$

است ، و دومین علامت معرف عدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (۹)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

می‌باشد . توجه کنید که در فرمول (۹) دترمینان 2×2 که از راست در a_i $(i = 1, 2\ ,\ 3)$ ضرب شده از دترمینان 3×3 سمت چپ با حذف هر دو سطر و ستون شامل a_i بــه دست می‌آید ، و این امر در نمودارهای زیر مجسم شده است :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

اینکه a_2 در طرف راست (۹) با علامت منها ظاهر شده غلط چاپی نبوده ، بلکه‌قسمت‌ذاتی تعریف یک دترمینان 3×3 می‌باشد .

مثال ۴ . بنابر فرمول (۸) ،

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-1) = 20 + 3 = 23.$$

مثال ۵ . بنابر فرمول (۹) ،

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[7(9) + 2(5)] - 3[4(9) + 2(1)] + 8[4(5) - 7(1)]$$
$$= 2(73) - 3(38) + 8(13) = 136.$$

شکل مؤلفه‌ای حاصلضرب خارجی . حال برای حاصلضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ فرمولی‌برحسب

مؤلفه‌های **a** و **b** نسبت به بردارهای پایهٔ یکهٔ **i** ، **j** ، و **k** به دست آورده ،وسپس نشان می‌دهیم که **a × b** را می‌توان به صورت دترمینان نوشت .

قضیهٔ ۳ (شکل مؤلفه‌ای حاصل‌ضرب خارجی) . هرگاه

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$$

آنگاه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}. \tag{۱۰}$$

برهان . به کمک قضیهٔ ۲ و فرمولهای (۴) برای حاصل ضربهای خارجی بردارهای **i** ،و **j** و **k** ، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \times (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \alpha_1\beta_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + \alpha_1\beta_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + \alpha_2\beta_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \alpha_2\beta_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \alpha_2\beta_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + \alpha_3\beta_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \alpha_3\beta_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + \alpha_3\beta_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1\mathbf{0} + \alpha_1\beta_2\mathbf{k} + \alpha_1\beta_3(-\mathbf{j}) + \alpha_2\beta_1(-\mathbf{k}) + \alpha_2\beta_2\mathbf{0} \\
&\quad + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} + \alpha_3\beta_1\mathbf{j} + \alpha_3\beta_2(-\mathbf{i}) + \alpha_3\beta_3\mathbf{0} \\
&= \alpha_1\beta_2\mathbf{k} - \alpha_1\beta_3\mathbf{j} - \alpha_2\beta_1\mathbf{k} + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} + \alpha_3\beta_1\mathbf{j} - \alpha_3\beta_2\mathbf{i},
\end{aligned}$$

که با (۱۰) معادل است .

باتوجه به فرمول (۱۰) معلوم می‌شود که می‌توان آن را برحسب دترمینانهای 2×2 به صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{۱۰'}$$

از مقایسهٔ مجموع سمت راست با مجموع مشابه در فرمول (۹) ، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{۱۱}$$

این دترمینان 3×3 " علامتی " است بدین معنی که سطر اولش به جای عدد از بردار تشکیل شده است ، ولی آن را با این علم نوشته‌ایم که روش بسیار فشرده‌ای برای نمایش مجموع آمده در (۱۰′) می‌باشد .

مثال ۶. حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ را بیابید.

حل. بنابر فرمول (۱۱)،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (3-1)\mathbf{i} - (1+2)\mathbf{j} + (-1-6)\mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

مثال ۷. مساحت مثلث PQR به رأسهای $P = (1, 2, 0)$ ، $Q = (3, 0, -3)$، و $R = (5, 2, 6)$ را بیابید.

حل. مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ مساوی است با $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ ، و این دوبرابر مساحت A است. چون

$$\overrightarrow{PQ} = OQ - \overrightarrow{OP} = (3, 0, -3) - (1, 2, 0) = (2, -2, -3)$$

$$PR = OR - \overrightarrow{OP} = (5, 2, 6) - (1, 2, 0) = (4, 0, 6)$$

(که در آن O مبداء است) ، داریم

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-12+0)\mathbf{i} - (12+12)\mathbf{j} + (0+8)\mathbf{k} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

بنابراین،

$$2A = |-12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}| = |(-2)(6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k})|,$$

درنتیجه،

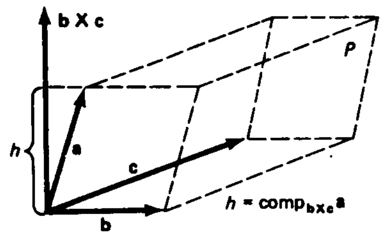
$$A = |6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}| = \sqrt{36 + 144 + 16} = \sqrt{196} = 14$$

حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر. در بین حاصل‌ضربهای مختلف شامل سه یا چند بردار، مهمترین آنها ***حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر*** $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ است‌که حاصل‌ضرب‌اسکالر یا نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ می‌باشد. برای‌تعبیرهندسی‌عدد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$، آن را با‌فرض $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|} = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\,\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a}. \qquad (۱۲)$$

در اینجا $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a}$ مولفهٔ $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ است . قدرمطلق این مؤلفه ارتفاع h متوازی السطوح P پیموده شده‌به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ مثل شکل ۲۰ است که در آن



شکل ۲۰

$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} > 0$ فرض کنیم V حجم P باشد . چون $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ مساحت پایهٔ P است ، از (۱۲) نتیجه‌می‌شودکه

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{cases} V & \text{،} \quad \mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} > 0 \ \text{اگر} \\ -V & \text{،} \quad \mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} < 0 \ \text{اگر} \end{cases}$$

درنتیجه ، در هر حال ،

$$V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|. \qquad (۱۳)$$

مؤلفهٔ $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ صفر است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ در صفحهٔ $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ قرار داشته باشد . بنابراین ،طبق (۱۲) ، سه‌بردارناصفر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ *همصفحه‌انداگروفقط‌اگر* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$. (چرا این حتی اگر $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$ مجاز باشد نیز درست است ؟)

برای بیان حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ برحسب مولفه‌های $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}.$$

در این صورت ، طبق فرمول (۱۱) ،

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

درنتیجه ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$
$$= \alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} - \alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix},$$

یا معادلاً"

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (۱۴)$$

مثال ۸. آیا بردارهای $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ ، $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 9, -11)$ همصفحه‌اند؟

حل. بلی، زیرا طبق (۱۴) داریم

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 9 & -11\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -11\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 9\end{vmatrix}$$
$$= 2(11-27) - 3(-11-3) - (9+1) = -32+42-10 = 0.$$

مثال ۹. حجم V متوازی‌السطوح پیموده شده به وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k}+\mathbf{i}$ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1-(-1) = 2,$$

و درنتیجه، طبق (۱۳)، $V = 2$.

مثال ۱۰. نشان دهید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ، $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ، و $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad (۱۵)$$

حل. از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (\gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k})$$

$$= \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \gamma_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

اگر این دترمینان و دترمینان (۱۴) را حساب کنید، درمی‌یابید که هر دو یک مقدار دارند، و بدین ترتیب فرمول (۱۵) ثابت می‌شود. جزئیات جبری را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

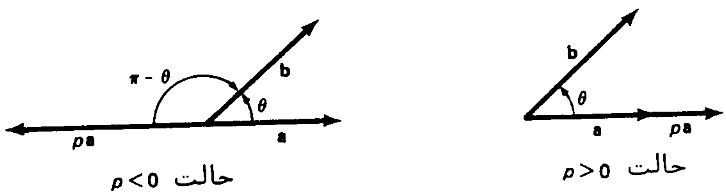
در واقع، ابهامی در نوشتن $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ به صورت $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ وجود ندارد، زیرا عبارات $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ و $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ هر دو بی‌معنی‌اند (چرا؟). لذا، فرمول (۱۵) به ما می‌گوید که در عبارت $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ می‌توان علایم نقطه و ضرب را بدون تغییر در مقدار باهم ضرب کرد.

برهان قضیهٔ ۲ *(اختیاری)*. از تعبیر هندسی حاصل‌ضرب خارجی فوراً" معلوم می‌شود که به ازای $p \neq 0$،

$$(p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{۱۶}$$

همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، حالات $p > 0$ و $p < 0$ باید از هم متمایز شوند، ولی این مشکل نیست زیرا $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$. از تلفیق (۱۶) با فرمول همتای

$$\mathbf{a} \times (q\mathbf{b}) = q(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{۱۶'}$$



شکل ۲۱

به ازای $q \neq 0$ فوراً" معلوم می‌شود که

$$(p\mathbf{a}) \times (q\mathbf{b}) = p[\mathbf{a} \times (q\mathbf{b})] = p[q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})],$$

درنتیجه،

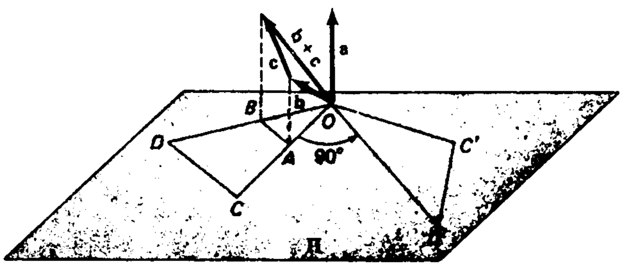
$$(p\mathbf{a}) \times (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

و این فرمول درصورت صفر بودن هر دو اسکالر p و q نیز برقرار می‌ماند.

برای اثبات قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \tag{۱۷}$$

فرض‌کنیم بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ،و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ دارای نقطهٔ شروع مشترک O بوده ، و Π صفحهٔ مار بر O عمود بر $\mathbf{a}$ مثل شکل ۲۲ باشد. عمودهای مرسوم از نقاط پایان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ بر Π این صفحه را در نقاط A و B قطع می‌کنند. با بزرگ‌کردن مثلث OAB به وسیلهٔ عامل $|\mathbf{a}|$ ،مثلث OCD به دست می‌آید ("بزرگ‌سازی درصورت $|\mathbf{a}| < 1$ عملا" کوچک‌سازی است ،واگر $|\mathbf{a}| = 1$ ، OCD بر OAB منطبق می‌شود). سپس OCD را به اندازهٔ $90°$ حول O در صفحهٔ Π می‌چرخانیم،



شکل ۲۲

این دوران OCD را به مثلث همنهشت $OC'D'$ می‌برد ، و از دو جهت دوران ممکن جهتی را اختیار می‌کنیم که بردارهای $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{OC'}$ ، و $\mathbf{a}$ یک دستگاه راست‌دست تشکیل می‌دهند. از شکل واضح است که

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'D'}. \tag{۱۸}$$

اما

$$\overrightarrow{OC'} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{OD'} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \overrightarrow{C'D'} = \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

و با گذاردن این عبارات در (۱۸) فرمول اول (۱۷) به‌دست می‌آید. برای‌به‌دست‌آوردن فرمول دوم ، از فرمول اول و پاد مشتقپذیری حاصلضرب خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -[\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\end{aligned}$$

مسائل

حاصلضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را بیابید.

۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ✓

۳. $\mathbf{a} = (0, 2, 1), \mathbf{b} = (1, 0, 2)$ ✓

۴. $\mathbf{a} = (10, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -2, 6)$ ✓

۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ✓

۶. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ✓

۷. $\mathbf{a} = (1, 3, 4), \mathbf{b} = (2, 6, -3)$ ✓

۸. $\mathbf{a} = (9, -7, 1), \mathbf{b} = (8, 5, -2)$ ✓

مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۹. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ✓

۱۰. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = -6\mathbf{k}$ ✓

مساحت مثلث با رئوس داده شده را بیابید.

۱۱. $P = (3, 4, 7), Q = (0, 6, 1), R = (5, -2, 4)$ ✓

۱۲. $P = (-1, 4, 5), Q = (1, 3, 7), R = (2, 5, 6)$ ✓

۱۳. با استفاده از حاصلضرب خارجی، نشان دهید که مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ اقطار متوازی‌الاضلاع P دوبرابر مساحت خود P است.

۱۴. نشان دهید که به ازای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دلخواه، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$.

بردار یکه‌ای بیابید که بر هر دو بردار داده شده عمود باشد.

۱۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ✓

۱۶. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ✓

۱۷. $\mathbf{a} = (2, 0, -1), \mathbf{b} = (-2, 1, 0)$ ✓

۱۸. $\mathbf{a} = (3, 1, 2), \mathbf{b} = (-1, 3, -1)$ ✓

۱۹. آیا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$، که در آن $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$، تساوی $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۲۰. نشان دهید که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

دترمینان داده شده را حساب کنید.

۲۱. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ ✓

۲۲. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ ✓

۲۳. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x \end{vmatrix}$ ✓

۲۴. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$ ✓

۲۵. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ ✓

۲۶. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ ✓

۲۷. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ✓ ۲۸. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ ✓ ۲۹. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ ✓

۳۰. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ ✓ ۳۱. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ ✓ ۳۲. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ ✓

۳۳. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ ✓

۳۴. نشان دهید که $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ بردارهای داده شده را بیابید.

۳۵. $\mathbf{a} = (1, -1, 3), \mathbf{b} = (-2, 2, 1), \mathbf{c} = (3, -2, 5)$ ✓

۳۶. $\mathbf{a} = (1, 2, 5), \mathbf{b} = (1, -1, 3), \mathbf{c} = (3, -6, -1)$ ✓

۳۷. $\mathbf{a} = (-4, 2, 1), \mathbf{b} = (-5, 1, 2), \mathbf{c} = (-1, -1, 1)$ ✓

۳۸. $\mathbf{a} = (2, -1, 6), \mathbf{b} = (3, -5, 1), \mathbf{c} = (4, -7, 1)$ ✓

۳۹. نشان دهید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{a}) = 0$. بااستفاده ازاین‌نشان‌دهید یک دترمینان 3×3 درصورتی صفر است که دو سطرش یکسان باشند.

۴۰. با استفاده از این امر که تعویض دو سطر یک دترمینان علامتش را تغییرمی‌دهد، ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

آیا بردارهای داده شده همصفحه‌اند؟ جوابتان را توضیح دهید.

۴۱. $\mathbf{a} = (-1, 2, 2), \mathbf{b} = (2, -3, 1), \mathbf{c} = (-4, 7, 3)$ ✓

۴۲. $\mathbf{a} = (3, -2, 1), \mathbf{b} = (2, 1, 2), \mathbf{c} = (3, -1, -4)$ ✓

۴۳. نشان‌دهیدکه‌چهارنقطهٔ $A = (1, 2, -1)$، $B = (0, 1, 5)$، $C = (-1, 2, 1)$ و $D = (2, 1, 3)$ همصفحه‌اند.

حجم متوازی‌السطوح پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۴۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j}\times\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{k}\times\mathbf{i}$

۴۵. $\mathbf{a} = (1, 3, -1), \mathbf{b} = (-2, 1, 2), \mathbf{c} = (3, 5, -2)$ ✓

۴۶. $\mathbf{a} = (-4, 5, 0), \mathbf{b} = (6, 2, 5), \mathbf{c} = (2, 1, 7)$ ✓

۴۷. ✓ حجم چهار وجهی به رئوس $A = (-1, 2, 1)$ ، $B = (5, 5, 4)$ ، $C = (2, 3, -1)$ و $D = (1, 4, 3)$ را بیابید.

۴۸. حاصل‌ضرب سه‌گانه به شکل $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ***حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری*** نام دارد. توجه کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ برخلاف $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ که اسکالر است بردار می‌باشد. با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. وقتی به شکل

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

نوشته شود، " قاعدهٔ بک ـ کب" نام دارد و فرمول مفیدی است که ارزش حفظ کردن دارد.

حاصل‌ضربهای سه‌گانهٔ برداری $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ را به ازای بردارهای داده‌شده حساب کنید.

۴۹. $\mathbf{a} = (2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, -2, 2), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$ ✓

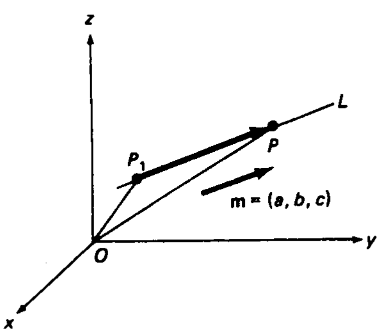
۵۰. $\mathbf{a} = (4, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -1, 6), \mathbf{c} = (1, 2, 0)$ ✓

۵۱. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

۵۲. ذره‌ای با بار q با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ قرار دارد. فرض کنید، همانند در سیکلوترون، میدان مغناطیسی ثابت و بر صفحهٔ حرکت ذره عمود باشد. نشان‌دهید ذره یک مسیر مستدیر به شعاع mv/qB طی می‌کند، که‌در آن $v = |\mathbf{v}|$ ، $B = |\mathbf{B}|$ ، و m جرم ذره است. نشان دهید این مسیر با تندی زاویه‌ای qB/m ، به نام ***فرکانس سیکلوترون*** ، توصیف می‌شود.

۴.۱۲ خطوط و صفحات در فضا

معادلات پارامتری خطوط. خط L در فضا به‌وسیلهٔ نقطهٔ ثابت $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ بر L و بردار ناصفر $\mathbf{m} = (a, b, c)$ موازی L منحصرا" معین می‌شود. در این صورت، همانطور که شکل ۲۳ نشان داده، نقطهٔ P بر L واقع است اگر وفقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P}$ و $\mathbf{m} = (a, b, c)$



شکل ۲۳

موازی باشند، یا معادلاً

$$\overrightarrow{P_1P} = t\mathbf{m} = t(a, b, c),$$

که در آن t اسکالر دلخواهی است. اما

$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

که در آن O مبداء است؛ و لذا، P بر L واقع است اگر و فقط اگر

$$x - x_1 = at, \qquad y - y_1 = bt, \qquad z - z_1 = ct, \tag{۱}$$

یا

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt, \qquad z = z_1 + ct. \tag{۲}$$

وقتی t از $\infty-$ تا ∞ افزایش یابد، نقطه به مختصات (۲) L را می‌پیماید. لذا، معادلات (۲) ***معادلات پارامتری*** L با پارامتر t می‌باشند.

معادلات تقارنی خطوط. اعداد a ، b ، و c ***پارامترهای هادی*** خط L نام دارند. اگر همه مخالف صفر باشند، می‌توان t را از معادلات (۱) حذف کرد. با این کار ***معادلات تقارنی***

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{۳}$$

برای یک خط در فضا به دست می‌آید. می‌توان از این معادلات حتی وقتی یکی (یا چندتا) از پارامترهای هادی صفرند استفاده کرد، و در این حالت این فرض می‌شود که صورت نظیر نیز صفر است. مثلاً، اگر $c = 0$ ، سومین معادلهٔ (۲) به ما می‌گوید که $z = z_1$ و معادلات تقارنی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \qquad z = z_1.$$

توجه کنید هرگاه a ، b ، و c پارامترهای هادی L باشند، آنگاه pa ، pb ، و pc نیز چنین اند، که p ثابت ناصفری است، زیرا بردار $p\mathbf{m}$ موازی L نیز می‌باشد. بخصوص، کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{m} = (a, b, c)$ پارامترهای هادی خط L می‌باشند.

مثال ۱. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقطهٔ $P_1 = (3, -1, 2)$ موازی بردار $\mathbf{m} = (-2, 4, 5)$ را بنویسید.

حل. در اینجا $x_1 = 3, y_1 = -1, z_1 = 2$ و $a = -2, b = 4, c = 5$؛ و درنتیجه، معادلات پارامتری (۲) خواهند شد

$$x = 3 - 2t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2 + 5t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

و معادلات تقارنی (۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

برای یافتن خط L مار بر دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ، بـــردار موازی L را بردار $\mathbf{m} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

واقع بر L می‌گیریم. در این صورت، طبق (۲) و (۳)، L به معادلات پارامتری

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \qquad (۴)$$

که در آنها $\infty > t > \infty-$ ، و معادلات تقارنی

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (۴')$$

می‌باشد.

مثال ۲. معادلات پارامتری و تقارنی خط L مار بر نقاط $P_1 = (3, 2, -1)$ و $P_2 = (4, -1, 1)$ را بنویسید. نقطهٔ اشتراک L با صفحهٔ yz را بیابید.

حل. چون $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, 2)$ ، از (۴) و (۴') نتیجه می‌شود که L به‌معادلات‌پارامتری

$$x = 3 + t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -1 + 2t \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (۵)$$

و معادلات تقارنی

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad (۵')$$

است. نقطهٔ اشتراک L با صفحهٔ yz نقطه‌ای است به شکل $(0, y, z)$ که مختصاتش در (۵') صدق می‌کنند. با گذاردن $x = 0$ در (۵')، به دست می‌آوریم

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2} = -3,$$

درنتیجه، $y = 11, z = -7$. لذا، خط L صفحهٔ yz را در نقطهٔ $(0, 11, -7)$ قطع می‌کند.

قضیهٔ زیر توان روشهای برداری را در هندسهٔ تحلیلی نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴ (فاصلهٔ بین یک نقطه و یک خط در فضا). خط L در فضا و نقطهٔ P غیرواقع بر

L داده شده است. فرض کنیم $\mathbf{m}$ برداری موازی L بوده و Q نقطه‌ای از آن باشد. در این صورت، فاصلهٔ d بین P و L از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|}. \tag{۶}$$

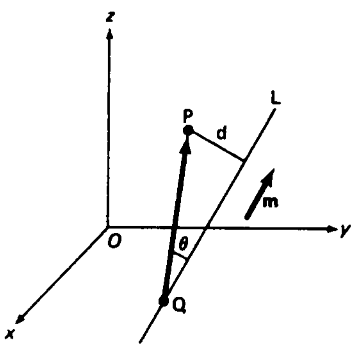
برهان. فرض کنیم θ زاویهٔ بین $\mathbf{m}$ و $\overrightarrow{QP}$ باشد (ر.ک. شکل ۲۴). دراین‌صورت، $0 \leq \theta \leq \pi$ و (۶) از مقایسه با فرمولهای

$$d = |\overrightarrow{QP}| \sin \theta$$

و

$$|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}| = |\mathbf{m}|\,|\overrightarrow{QP}| \sin \theta.$$

فورا" به دست می‌آید.



شکل ۲۴

مثال ۳. فاصلهٔ بین نقطهٔ $P = (4, 2, -2)$ و خط L به معادلات پارامتری

$$x = 3 - 2t, \quad y = 6t, \quad y = -1 + 9t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را بیابید.

حل. با گذاردن $t = 0$ در این معادلات، معلوم می‌شود که $Q = (3, 0, -1)$ نقطه‌ای بر L است. چون $\mathbf{m} = (-2, 6, 9)$ و $\overrightarrow{QP} = (1, 2, -1)$، داریم

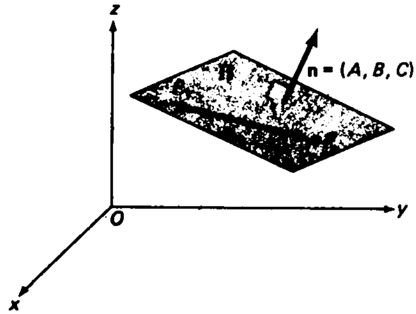
$$\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

لذا، طبق (۶)،

$$d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|-24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}|}{|-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{(-24)^2 + 7^2 + (-10)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 9^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}\sqrt{29} \approx 2.45.$$

صفحات و معادلات آنها . حال صفحات در فضا را درنظر می‌گیریم . درست مثل خط L که با نقطهٔ P_1 بر آن و بردار $\mathbf{m}$ موازی آن معین شد ،صفحهٔ Π با نقطهٔ P_1 در Π وبردارناصفر $\mathbf{n} = (A, B, C)$ عمود بر Π مشخص می‌شود . بردار $\mathbf{n}$ را قائم به صفحهٔ Π می‌نامیم . فرض کنیم $P = (x, y, z)$ نقطهٔ متغیری در فضا باشد . از شکل ۲۵ معلوم می‌شود که P در Π است



شکل ۲۵

اگر و فقط اگر بردارهای $\mathbf{n} = (A, B, C)$ و $\overrightarrow{P_1P}$ برهم عمود باشند ، یا معادلا "

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0.$$

اما $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ ؛ و لذا ، P در Π است اگر و فقط اگر

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (۷)$$

پس از (۷) نتیجه می‌شود که

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (۸)$$

که در آن

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1. \qquad (۸')$$

به عکس، نمودار هر معادله به‌شکل (۸) ،که درآن A ، B ، و C همه صفر نیستند ،صفحه‌ای با قائم $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است . در واقع ، فرض کنیم x_1 ، y_1 ، و z_1 سه عدد صادق در شرط

(۸′) باشند. (چرا یافتن این سه عدد همیشه مقدور است؟) با جانشانی (۸′) در (۸) معادله‌ای معادل (۷) به دست می‌آید، که معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است. توجه کنید که نمودار (۸) صفحه‌ای مار بر مبداء است اگر $D = 0$، صفحه‌ای موازی محور z است اگر $C = 0$، و صفحه‌ای عمود بر محور z است اگر $A = B = 0$. بر خواننده است حالات دیگری که در آنها بعضی از اعداد A، B، C، و D صفرند امتحان شوند.

مثال ۴. معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ $P_1 = (-2, 1, 3)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (4, 5, -1)$ را بیابید.

حل. در اینجا $x_1 = -2, y_1 = 1, z_1 = 3$ و $A = 4, B = 5, C = -1$؛ درنتیجه، معادلهٔ (۷) به صورت

$$4(x + 2) + 5(y - 1) - (z - 3) = 0,$$

یا معادلاً

$$4x + 5y - z + 6 = 0$$

درمی‌آید.

مثال ۵. فصل مشترک L دو صفحهٔ

$$x + 2y - z + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \qquad (۹)$$

را بیابید.

حل. صفحهٔ اول دارای قائم $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4)$ و صفحهٔ دوم دارای قائم $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$ است. چون خط L در هر دو صفحه است، باید بر هر دوی $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ عمود باشد. لهذا، L موازی بردار

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

می‌باشد. برای یافتن نقطه‌ای بر L، در هر دو معادلهٔ (۹) قرار می‌دهیم $z = 0$ ودستگاه حاصل از معادلات $x + 2y + 3 = 0, 2x - 3y - 1 = 0$ را نسبت به x و y حل می‌کنیم تا

به دست آید $x = -1, y = -1$.

لذا ، نقطهٔ $(-1, -1, 0)$ بر L قرار دارد ، و L به معادلات تقارنی زیر است :

$$\frac{x+1}{-5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{7}.$$

برای تعیین یک خط فقط دو نقطه لازم است ، ولی برای تعیین صفحه سه نقطه می‌خواهیم .

مثال ۶ . برای صفحهٔ Π مار بر نقاط $P_1 = (2, -1, 3)$ ، $P_2 = (1, 2, 2)$ ، و $P_3 = (-2, 1, 1)$ معادله بنویسید .

حل . چون نقاط P_1 ، P_2 ، و P_3 در Π واقعند، بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 3, -1)$ و $\overrightarrow{P_1P_3} = (-4, 2, -2)$ نیز چنین‌اند . لذا ، بردار

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k},$$

که بر هردوی $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ عمود است ، قائم به Π می‌باشد . چون Π صفحهٔ مار بر $P_1 = (2, -1, 3)$ با قائم $\mathbf{n} = (-4, 6, 10)$ است ، به کمک (۷) معلوم می‌شود که Π معادله‌ای به شکل

$$-4(x-2) + 6(y+1) + 10(z-3) = 0,$$

یا معادلاً

$$2x - 3y - 5z + 8 = 0$$

دارد .

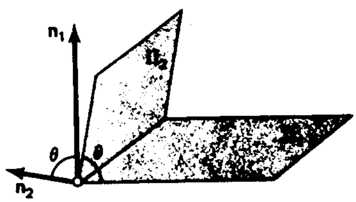
مثال ۷ . زاویهٔ بین صفحات $6x + 6y - 3z + 5 = 0$ و $x - 2y + 2z - 4 = 0$ را بیابید .

حل . زاویهٔ بین دو صفحهٔ Π_1 و Π_2 مساوی زاویهٔ θ بین قائمهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ تعریف می‌شود اگر $0 \le \theta \le \pi/2$ (ر.ک. شکل ۲۶) ، یا مساوی $\pi - \theta$ تعریف می‌شود اگر $\pi/2 < \theta \le \pi$ (بدین ترتیب ، زاویهٔ بین دو صفحه همیشه کوچکترین مقدار از دو انتخاب ممکن‌است) . در اینجا $\mathbf{n}_1 = (6, 6, -3)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 2)$ ؛ درنتیجه ،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{6(1) + 6(-2) - 3(2)}{\sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{-12}{\sqrt{81}\sqrt{9}} = \frac{-12}{9(3)} = -\frac{4}{9}.$$

چون $\cos\theta$ منفی است ، θ منفرجه بوده و زاویهٔ بین صفحات داده شده مساوی است با

$$\pi - \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \arccos\frac{4}{9} \approx 63.6°.$$



زاویهٔ بین صفحات Π_1 و Π_2 مساوی θ است .

شکل ۲۶

قضیهٔ بعدی شبیه قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۵۵ ، برای صفحات است .

قضیهٔ ۵ (فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه) . فاصلهٔ d بین نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و صفحهٔ Π به معادلهٔ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

مساوی است با

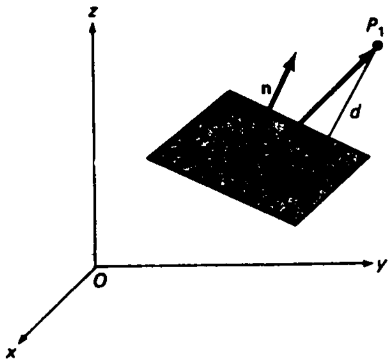
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (۱۰)$$

برهان . بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ قائم به صفحهٔ Π است . فرض کنیم $Q = (a, b, c)$ ، مثل شکل ۲۷ ، نقطه‌ای در Π باشد . در این صورت ،

$$d = |\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_1|,$$

که در آن

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_1 = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}_1}{|\mathbf{n}|}$$



شکل ۲۷

مؤلفهٔ $\overrightarrow{QP_1} = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$ در امتداد **n** است . بنابراین ،

$$d = \frac{|A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (۱۱)$$

اما $Aa + Bb + Cc + D = 0$ ، زیرا $Q = (a, b, c)$ در Π واقع است ؛ درنتیجه ،

$$D = -(Aa + Bb + Cc)$$

با گذاردن این عبارت برای D در (۱۱) ، فوراً (۱۰) به دست می‌آید .

مثال ۸ . فاصلهٔ بین نقطهٔ $(2, 6, -1)$ و صفحهٔ $3x - 4y + 12z - 22 = 0$ را بیابید .

حل . به کمک فرمول (۱۰) ، معلوم می‌شود که

$$d = \frac{|3(2) - 4(6) + 12(-1) - 22|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{169}} = \frac{52}{13} = 4.$$

از دیدگاه هندسه واضح است که دو صفحه موازیند اگر و فقط اگر قائمهایشان بردارهایی موازی باشند . زاویهٔ بین صفحات موازی صفر است (چرا ؟) .

مثال ۹ . تحقیق کنید که صفحات $3x + 6y - 12z + 7 = 0$ و $x + 2y - 4z - 1 = 0$ موازیند ، و فاصلهٔ d بین آنها را بیابید .

حل. دو صفحه، که با Π_1 و Π_2 نموده می‌شوند، دارای قائمهای $\mathbf{n}_1 = (3, 6, -12)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -4)$ اند. چون $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{n}_1$، بردارهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ موازیند؛ و درنتیجه، صفحات Π_1 و Π_2 نیز چنین می‌باشند. واضح است که d مساوی فاصلهٔ بین Π_1 و هر نقطه از Π_2، یا بین Π_2 و هر نقطه از Π_1، می‌باشد. نقطهٔ $(1, 0, 0)$ در Π_2 قرار دارد؛ و لذا،

$$d = \frac{|3(1) + 6(0) - 12(0) + 7|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-12)^2}} = \frac{|3 + 7|}{3\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{3\sqrt{21}} \approx 0.73.$$

مسائل

معادلات پارامتری خط مار بر نقطهٔ $(1, -2, 4)$ موازی

۱. بردار $\mathbf{m} = (2, 3, -1)$ ✓

۲. بردار $\mathbf{m} = (5, 1, 0)$ ✓

۳. خط $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{z+1}{-3}$ ✓

۴. خط $x = -1 + 3t,\ y = 3 - 2t,\ z = 2 + 5t$ ✓

را بنویسید.

معادلات تقارنی خط مار بر نقطهٔ $(-3, 2, 0)$ موازی

۵. بردار $\mathbf{m} = (9, -4, 3)$ ✓

۶. بردار $\mathbf{m} = (-1, 1, -1)$ ✓

۷. خط $x = 6t,\ y = 4,\ z = 10 - 5t$ ✓

۸. خط $\dfrac{x-6}{-2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+7}{8}$ ✓

را بنویسید.

معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر جفت نقاط داده شده را بنویسید.

۹. $(1, -2, 2), (3, 1, -1)$ ۱۰. $(0, 0, 1), (0, 2, -2)$

۱۱. $(4, 1, 4), (-1, 5, 3)$ ۱۲. $(3, -6, 5), (10, 4, 8)$

فاصلهٔ بین نقطهٔ P و خط داده شده را بیابید.

۱۳. $P = (1, 3, 2),\ x = 3 - 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2 + t$

۱۴. $P = (4, -1, 2),\ x = 2 + 3t,\ y = -3 - 4t,\ z = 1 + 12t$

۱۵. $P = (0, 1, 0),\ \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$

۱۶. $P = (-6, 5, -7),\ \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z+8}{6}$

معادلهٔ صفحهٔ مار بر

۱۷. مبداء با قائم $\mathbf{n} = (4, 5, -3)$

۱۸. نقطهٔ $(2, 1, -1)$ با قائم $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$

۱۹. نقطهٔ $(3, -1, 5)$ عمود بر خط مار بر این نقطه و نقطهٔ $(6, -7, 9)$

۲۰. نقطهٔ $(3, 4, -5)$ موازی هر دو بردار $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ و $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$

۲۱. نقاط $(2, -1, 3)$ و $(3, 1, 2)$ موازی بردار $\mathbf{a} = (3, -1, -4)$

۲۲. نقاط $(3, -1, 2)$ ، $(4, -1, -1)$ ، و $(2, 0, 2)$

۲۳. نقاط $(1, -1, -2)$ و $(3, 1, 1)$ عمود بر صفحهٔ $x - 2y - 3z - 5 = 0$

۲۴. نقطهٔ $(2, -1, 1)$ عمود بر هر دو صفحهٔ $y = 0$ و $2x - z + 1 = 0$

را بیابید .

۲۵. نقطهٔ برخورد خط

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

با صفحهٔ $2x + 3y + z - 11 = 0$ را بیابید .

۲۶. فرض کنید L خط مار بر نقاط $(6, -6, 5)$ و $(-12, 6, -1)$ باشد .
نقاط برخورد L با صفحات مختصات را بیابید .

فصل مشترک جفت صفحات داده شده را بیابید .

۲۷. $x - 2y + 3z - 6 = 0, 3x + 2y - 5z - 10 = 0$

۲۸. $4x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0$

۲۹. $x - 2y + 3z + 2 = 0, 2x + y - 4z - 16 = 0$

۳۰. نشان دهید که خط

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$$

و فصل مشترک صفحات $x + y - z + 3 = 0$ و $x - y - 5z = 0$ موازیند .

زاویهٔ بین جفت صفحات داده شده را بیابید .

۳۱. $6x + 3y - 2z = 0, x + 2y + 2z = 0$

۳۲. $x - \sqrt{2}y + z + 4 = 0, x + \sqrt{2}y - z - 6 = 0$

۳۳. $3y - z + 1 = 0, 2x + z - 2 = 0$

۳۴. $9x - 2y + 6z + 5 = 0, 4x + 2y - 4z + 1 = 0$

فاصلهٔ بین نقطهٔ P و صفحهٔ داده شده را بیابید .

۳۵. $P = (4, -1, 1), 16x - 12y + 15z + 9 = 0$

۳۶. $P = (1, 6, -3), 6x - 2y - 9z + 12 = 0$

۳۷. $P = (8, 3, -2), 12y - 5z - 27 = 0$

فاصلهٔ بین جفت صفحات موازی داده شده را بیابید.

۳۸. $x - 2y + 2z + 12 = 0, x - 2y + 2z - 6 = 0$

۳۹. $6x + 18y - 9z - 21 = 0, 4x + 12y - 6z + 7 = 0$

۴۰. $15x - 16y + 12z + 5 = 0, 30x - 32y + 24z - 5 = 0$

۴۱. به ازای چه مقداری از c صفحهٔ $x + y + z = c$ بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ در یکهشتم اول مماس است؟ نقطهٔ تماس را بیابید.

۴۲. گوییم دو خط در فضا *متنافر* اند اگر نه موازی و نه متقاطع باشند. نشان دهید که خطوط L_1 و L_2 به معادلات تقارنی

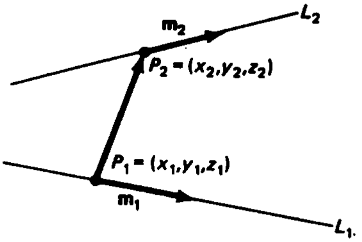
$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \qquad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \qquad (\text{یک})$$

متنافرند اگر و فقط اگر دترمینان

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ناصفر باشد.

راهنمایی. با فرض $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ، $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ، $\mathbf{m}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $\mathbf{m}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ، ملاحظه‌کنید که L_1 و L_2 موازی یا متقاطع اند اگر وفقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، $\mathbf{m}_1$ ، و $\mathbf{m}_2$ همصفحه باشند (که در شکل ۲۸ چنین‌اند).



شکل ۲۸

۴۳. نشان دهید هرگاه خطوط (یک) متنافر باشند، آنگاه (کوتاهترین) فاصلهٔ بین آنها

مساوی است با

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}, \qquad (\text{دو})$$

که در آن P_1 ، P_2 ، $\mathbf{m}_1$ ، و $\mathbf{m}_2$ همان معانی داشته در مسئلهٔ قبل را دارند.

۴۴. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}, \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

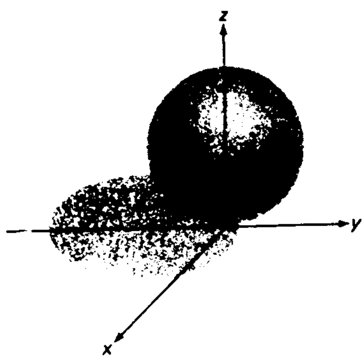
متنافرند. با استفاده از فرمول (دو)، فاصلهٔ بین آنها را بیابید.

۴۵. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}, \qquad \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{1}$$

متقاطعند. نقطهٔ اشتراک را بیابید.

۴۶. کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ به وسیلهٔ یک دسته شعاع نورانی موازی خط $x = 0, y = z$ روشن شده است. سایهٔ کره را روی صفحهٔ xy بیابید (ر.ک. شکل ۲۹).



شکل ۲۹

۵.۱۲ منحنیهای فضایی و حرکت مداری

منظور از یک منحنی در فضا یا یک منحنی فضایی یعنی نمودار سه معادلهٔ (پارامتری)

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (1)$$

یعنی، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) که مختصاتشان در (۱) صدق می‌کنند؛ در اینجا $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ سه تابع پیوسته با قلمرو تعریف مشترک‌اند، که همواره بازه‌ای چون I اختیار می‌شود. همچنین، فرض کنیم $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ همه توابعی ثابت نباشند، زیرا درغیراین

صورت منحنی (۱) به یک نقطه تحویل می‌شود. وقتی پارامتر t، که می‌توان آن را زمان گرفت، روی بازهٔ I تغییر کند، نقطهٔ $P = (x, y, z)$ مواضع مختلفی در فضا گرفته، ومنحنی (پارامتری) (۱) را رسم می‌کند. منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی هر منحنی با همین معادلات پارامتری، ولی قلمرو $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ زیربازه‌ای از I است. همهٔ اینها چیزی جز تعمیم طبیعی تعریف منحنی مسطح داده شده در صفحهٔ ۷۲۳ به ابعاد سه‌نیست.

مثال ۱. منحنی به معادلات پارامتری

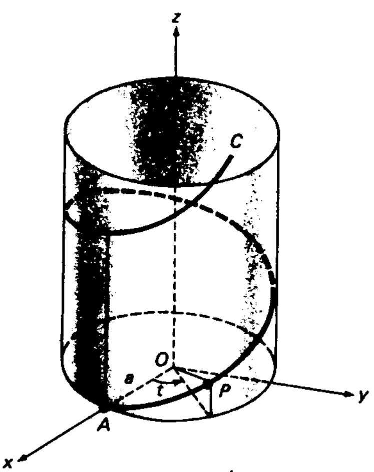
$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct \qquad (-\infty < t < \infty)$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) با پارامترهای هادی a، b، و c.

مثال ۲. فرض کنید a و b اعداد مثبتی‌باشند. دراین صورت، منحنی C بـه معـادلات پارامتری

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \qquad (0 \le t < \infty) \tag{۲}$$

منحنی پیچ سر بطـــری بـــه‌اشکـــل ۳۰ اســـت، کـــه یـــک مارپیچ مستدیر نام دارد. چون $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$، مارپیچ C بر سطح یک استوانهٔ مستدیر قائـم به شعاع a قرار دارد، که محور تقارنش محور z است. وقتی t افزایش می‌یابد، مـارپیـچ حول استوانه می‌پیچد؛ از نقطهٔ‌شروع $A = (a, 0, 0)$ آغاز کرده و باافزایش t به اندازهٔ 2π یکبار استوانه را دور می‌کند. فاصلهٔ قائم h بین "پیچهای" متوالی C، که مساوی $2\pi b$



مارپیچ مستدیر

شکل ۳۰

است ، **پای مارپیچ** نام دارد .

تبصره. مارپیچ آمده در شکل *راست* دست است ، بدین معنی که شبیه به شیارهای یک پیچ راست دست می‌باشد . اگر شرط مثبت بودن b را حذف کنیم ، به ازای $b = 0$ دایره‌و به‌ازای $b < 0$ مارپیچ چپ دست خواهیم داشت (تحقیق کنید) .

طول یک منحنی فضایی. طول منحنی فضایی C همانند طول یک منحنی مسطح تعریف می‌شود ؛ یعنی ، حد طول یک مسیر چندضلعی محاط شده در C مشروط برآنکه‌این‌حد موجود و متناهی باشد ، که در این صورت گوییم C ***با طول متناهی*** است . استدلالی شبیه‌به‌آن که در صفحهٔ ۷۴۱ آمد نشان می‌دهد که هرگاه $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ بر بازهٔ $[a, b]$ به‌طورپیوسته مشتقپذیر باشند ، آنگاه منحنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

با طول متناهی بوده و طولش L از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (۳)$$

(فرض است که C تنها می‌تواند تعدادی متناهی خود قطعی داشته باشد) .

مثال ۳. طول L یک دور از مارپیچ $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ را بیابید .

حل. وقتی t به اندازهٔ 2π افزایش یابد ، نقطهٔ $P = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ یک دورمارپیچ را می‌زند . لذا ، با اختیار 0 و 2π به عنوان حدود انتگرالگیری در (۳) ، معلوم می‌شود که

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 16}\, dt = 5\int_0^{2\pi} dt = 10\pi.$$

فرض کنیم C منحنی به‌معادلات‌پارامتری (۱) باشد . در این صورت ،همانند صفحات ۱۰۸۰ تا ۱۰۸۱، می‌توان ***تابع طول قوس***

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du \qquad (۴)$$

نقطهٔ $P(t)$ را معرفی کرد ،که مساوی طول قوس C با نقطهٔ شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a), z(a))$ ونقطهٔ پایان متغیر $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ است . دراینجا u رامتغیرانتگرالگیری می‌گیریم تاباحدبالایی t انتگرالگیری اشتباه نشود . با مشتقگیری از (۴) نسبت به t ، داریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{۴'}$$

توابع برداری در فضا . توابع بردار مقدار (یا فقط توابع برداری) در فضا درست مثل توابع در صفحه تعریف می‌شوند جزآنکه در اینجا بردارها علاوه‌بر مؤلفه‌های x و y مؤلفهٔ z نیز دارند . صرف‌نظر از این تفاوت‌جزئی ،حدود ، مشتقات ، و انتگرالهای توابع برداری سه بعدی درست مثل حالت دوبعدی ، "مؤلفه‌به‌مؤلفه" حساب‌می شوند. مثلاً ،حد تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (2 \tan t)\mathbf{i} + (4t)\mathbf{j} + (\sec t)\mathbf{k},$$

وقتی $t \to \pi/4$ ، برابر است با

$$\lim_{t\to\pi/4} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to\pi/4} 2\tan t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to\pi/4} 4t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to\pi/4} \sec t\right)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k},$$

و مشتقش مساوی است با

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \left(\frac{d}{dt} 2\tan t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt} 4t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d}{dt}\sec t\right)\mathbf{k}\\ &= (2\sec^2 t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (\sec t\tan t)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

مثال ۴ . مشتق حاصلضرب خارجی توابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ را بیابید.

حل . به جای مشتقگیری از مؤلفه‌ها ، از تعریف مشتق شروع می‌کنیم . لذا ،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) &= \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\\ &= \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\\ &= \lim_{u\to t}\left(\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}\times\mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t)\times\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\right)\\ &= \left(\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}\right)\times\left(\lim_{u\to t}\mathbf{r}_2(u)\right) + \mathbf{r}_1(t)\times\left(\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\right).\end{aligned}$$

اما

$$\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\qquad \lim_{u\to t}\mathbf{r}_2(u)=\mathbf{r}_2(t),\qquad \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}=\frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2\right)+\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right). \tag{۵}$$

در اینجا مراحل زیادی وجود دارند ،و برخواننده است که برقراری آنها را تحقیق نماید .

به تشابه بین فرمول (۵) و قاعدهٔ مشابه برای مشتقگیری از حاصلضرب توابع اسکالر توجه کنید . ولی حاصلضربهای سمت‌راست (۵) معمولی‌نبوده بلکه حاصلضرب *خارجی*‌اند. فرمول همتای

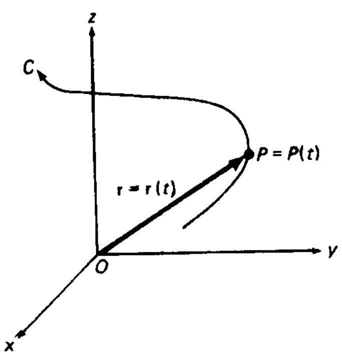
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)=\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot\mathbf{r}_2\right)+\left(\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right) \tag{۵'}$$

برای حاصلضربهای *نقطه‌ای* را می‌توان اساسا" به همین روش ثابت کرد .

سرعت و تندی. حال از توابع برداری در بررسی حرکت در فضا استفاده می‌کنیم . فرض کنیم

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\qquad (I \text{ در } t)$$

یک تابع برداری مشتقپذیر باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است ، و نقطهٔ شروع $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ مثل شکل ۳۱ ، در مبداء O گذارده شده باشد . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ نقطهٔ متغیر $P=P(t)=(x(t), y(t), z(t))$ در فضاست ، و $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ *بردار موضع* $P=P(t)$ نام دارد .



شکل ۳۱

وقتی t افزایش یابد، $P = P(t)$ یک منحنی فضایی، به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را می‌پیماید؛ یعنی، منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t \text{ در } I),$$

و از حالا به بعد پارامتر t را زمان می‌انگاریم. مشتق

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

سرعت نقطهٔ متحرک $P = P(t)$ نام دارد، و اندازه‌اش

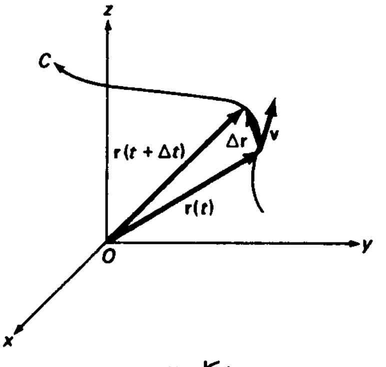
$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

تندیِ نامیده می‌شود. از مقایسهٔ این فرمول با (۴′) نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{ds}{dt},$$

درنتیجه، تندی P چیزی جز میزان تغییر مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C نیست. همهٔ این ایده‌ها قبلاً در فصل اخیر آمده‌اند، و ما در اینجا فقط آنها را مرور می‌کنیم، و درعین حال $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ را مجاز به داشتن سه مؤلفه به جای دو تا می‌نماییم.

بردار یکهٔ مماس. از حالا به بعد فرض می‌کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر، و نقطهٔ شروعش $P = P(t)$ یعنی نقطهٔ پایان بردارموضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. در این صورت، مثل صفحهٔ ۱۰۸۰، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ بر C در نقطهٔ P مماس است، بدین معنی که $\mathbf{v}$ بارفتن $\Delta t \to 0$ دارای "جهت‌حدی" بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ است، که‌درآن $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ بردار $\Delta\mathbf{r}$ در شکل ۳۲ با فرض $\Delta t > 0$ نموده‌شده‌است. بی‌توجه به علامت Δt، بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$



شکل ۳۲

و درنتیجه سرعت $\mathbf{v}$ ، همواره روی C در جهت افزایش t است (چرا؟). این جهت در شکل با سر سهم روی C نموده شده است. مثل حالت دوبعدی، **بردار یکهٔ مماس** $\mathbf{T}$ بر منحنی C در نقطهٔ P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

و مثل خود $\mathbf{v}$ بر C در نقطهٔ P مماس است و به جهت افزایش t اشاره دارد. استدلال صفحهٔ ۱۰۸۲ نشان می‌دهد که اگر C را با پارامتر طول قوس s توصیف شود،

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

مثال ۵. سرعت $\mathbf{v}$، تندی v، و بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ را برای مارپیچ $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,$ $z = 4t$ بیابید. نشان دهید $\mathbf{T}$ با محور z زاویهٔ ثابتی می‌سازد.

حل. در اینجا بردار موضع عبارت است از

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + (4t)\mathbf{k}. \qquad (۶)$$

بنابراین،

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

و

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

درنتیجه، تندی مقدار ثابت 5 را دارد. بردار یکهٔ مماس عبارت است از

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \left(-\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

هرگاه θ زاویهٔ بین $\mathbf{T}$ و محور z باشد، آنگاه

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{T}||\mathbf{k}|} = \frac{4}{5},$$

درنتیجه، θ دارای مقدار ثابت $\arccos\frac{4}{5} \approx 36.9°$ است. هرگاه طول قوس در امتداد مارپیچ و از نقطهٔ $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} = (3, 0, 0)$ سنجیده شود، آنگاه

$$s = \int_0^t v\,dt = 5t,$$

درنتیجه، $t = s/5$ و

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

توجه کنید که اگر $t = s/5$ را در فرمول (۶) قرار داده و سپس مشتق $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ را حساب کنیم، همین عبارت برای $\mathbf{T}$ به دست می‌آید.

بردار یکهٔ قائم. حال فرض کنیم تابع بردار موضع $\mathbf{r}(t)$ بر بازهٔ I مشتق دوم پیوسته‌داشته باشد، و مجدداً $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ را بردار یکهٔ مماس بر منحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ می‌گیریم. در این صورت، چون $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$، داریم

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

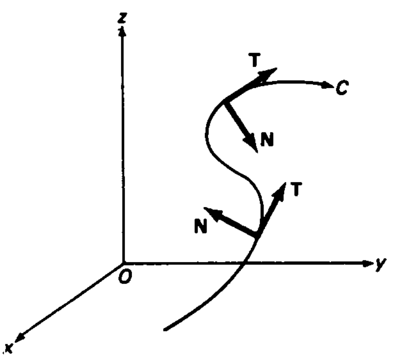
و لذا،

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

درنتیجه، $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ است. حال، علاوه‌بر بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$، بردار دیگر $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ را معرفی و آن را *بردار یکهٔ قائم* برمنحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ می‌نامیم. این بردار یکهٔ

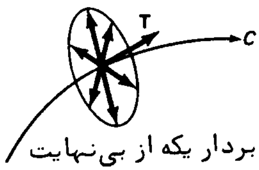
$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq \mathbf{0}\right)$$

در جهت $d\mathbf{T}/dt$ با نقطهٔ شروع P است. چون $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ بوده ودرجهت خمیدگی C اشاره دارد، همین امر در مورد بردار $\mathbf{N}$ صادق می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۳).



شکل ۳۳

تبصره. بردار $\mathbf{N}$ رااغلب برداریکهٔ‌قائم *اصلی* نامندتابراین امرتأکید شودکه $\mathbf{N}$ در فضا، به خلاف صفحه، تنها یک برداریکه‌ازبی‌نهایت برداریکهٔ عمودبر $\mathbf{T}$ می‌باشد (ر.ک. شکل۳۴).



چند بردار یکه از بی‌نهایت
بردار یکهٔ متعامد به T

شکل ۳۴

انحنا. اگر پارامتر را طول‌قوس s بگیریم، بردار موضع $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$، نقطهٔ پایانش $P=P(s)$ بردار مماس یکهٔ $\mathbf{T}=\mathbf{T}(s)=d\mathbf{r}/ds$، و بردار قائم یکهٔ

$$\mathbf{N}=\mathbf{N}(s)=\frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}\qquad\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\neq\mathbf{0}\right) \tag{۷}$$

همه توابعی از s اند، و این امر از نمادها مشهود است. پس از (۷) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|\mathbf{N}.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ باشد. در این صورت، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ *انحنای* C در P نام دارد و با κ نموده می‌شود، و معادلهٔ اخیر را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}. \tag{۸}$$

توجه کنید که تعاریف $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و κ همان تعریفها در مورد منحنیهای در صفحه‌اند (ر.ک. بخش ۱۱.۴).

منحنی C را معمولاً نمودار تابع بردار موضع $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ می‌گیریم، که در آن t پارامتری غیراز طول قوس s است، و حال، با استفاده از حاصل ضرب خارجی، عبارت فشرده‌ای برای انحنای κ برحسب مشتقات اول و دوم $\mathbf{r}(t)$ پیدا می‌کنیم. ابتدا می‌بینیم که

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=v\mathbf{T},$$

زیرا طبق تعریف $\mathbf{T}=\mathbf{v}/v$؛ درنتیجه، بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{dv}{dt}\mathbf{T}+v\frac{d\mathbf{T}}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{T}+v\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds},$$

یا معادلاً ، پس از جانشانی‌از (۸) و استفاده‌از $v = ds/dt$ ،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}. \tag{۹}$$

از تشکیل حاصل ضرب‌خارجی $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ در $d\mathbf{v}/dt$ ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt}\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \kappa v^3\mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

زیرا $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. اما v همیشه‌مثبت‌است ،واین‌به‌خاطر فرض $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ است ،و $|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = 1$ زیرا $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردارهای یکهٔ متعامدی می‌باشند . لذا ، با گرفتن اندازهٔ $\mathbf{v} \times d\mathbf{v}/dt$ وحل نسبت به انحنای κ ، به دست می‌آوریم

$$\kappa = \frac{\left|\mathbf{v} \times \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\right|}{v^3} \quad \text{یا} \quad \kappa = \frac{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}$$

که آن را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت :

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \tag{۱۰}$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد .

شتاب و مؤلفه‌هایش. طبق معمول ، مشتق زمانی $d\mathbf{v}/dt$ از سرعت $\mathbf{v}$ *شتاب* نام دارد و با $\mathbf{a}$ نموده می‌شود . لذا ، (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N},$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

که در آن اسکالرهای

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R} \tag{۱۱}$$

مولفه‌های مماسی و *قائم* شتاب بوده ، و $R = 1/\kappa$ *شعاع انحنا* می‌باشد . این فرمولهادقیقاً همان همتاهای خود برای منحنیهای مسطح می‌باشند (ر.ک. صفحات ۱۰۹۹تا ۱۱۰۰) .

مثال ۶. انحنای κ ی منحنی مسطح C را بیابید .

حل . فرض قرار داشتن C در صفحهٔ xy خللی به کلیت وارد نمی‌سازد . در ایـن صورت، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}$ ؛ درنتیجه ،

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - y'x'')\mathbf{k}.$$

لذا ، در این حالت ، از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

و این در صفحهٔ ۱۰۹۶ با استدلال متفاوتی به دست آمده است .

مثال ۷. بردار یکهٔ قائم $\mathbf{N}$ ، شتاب $\mathbf{a}$ ، وانحنای κ را برای مارپیچ $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,$ $z = 4t$ بیابید .

حل . همانطور که قبلاً" در مثال ۵ نشان دادیم ، سرعت $\mathbf{v}$ ، تندی v ، و بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ عبارتند از

$$\mathbf{v} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \qquad v = |\mathbf{v}| \equiv 5,$$
$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

مشتق $\mathbf{T}$ مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{3}{5}[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که اندازه‌اش ثابت و برابر است با

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{3}{5}.$$

لذا ، بردار یکهٔ قائم مساوی است با

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که همیشه در صفحه‌ای موازی صفحهٔ xy بوده و اشاره به محور z دارد (چرا؟) .

با مشتقگیری از سرعت ، معلوم می‌شود که شتاب مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)]\mathbf{j} = 3\mathbf{N},$$

با موٴلفهٔ مماسی 0 و موٴلفهٔ قائم 3 . چون موٴلفهٔ قائم شتاب κv^2 است ، انحنا مقدار ثابت

$$\kappa = \frac{3}{v^2} = \frac{3}{25}$$

را دارد .

مثال ۸ . انحنای مکعبی پیچ خوردهٔ $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$ رابیابید . همچنین، موٴلفه‌های مماسی و قائم شتاب را پیدا کنید .

حل . در اینجا $x' = 1,\ y' = t,\ z' = t^2,\ x'' = 0,\ y'' = 1,\ z'' = 2t$ ؛ درنتیجه ،

$$v = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + t^2 + t^4},$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

و

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}.$$

لذا ، طبق فرمول (۱۰) ،

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

مثلاً ، انحنا در مبداء ، نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ مساوی است با $\kappa = 1$ ، ولی انحنا در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 1$ برابر است با

$$\kappa = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47.$$

توجه کنید که وقتی $t \to \pm\infty$ ، $\kappa \to 0$ ، نشانگر آنکه منحنی به‌ازای‌مقادیر بزرگ $|t|$ خیلی شبیه خط مستقیم است . بنابر (۱۱) ، موٴلفه‌های مماسی و قائم شتاب عبارتنداز

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{t^4 + t^2 + 1} = \frac{2t^3 + t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

و

$$a_N = \kappa v^2 = \sqrt{\frac{t^4 + 4t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1}}.$$

مثلاً ، در مبداء 0، $a_T = 0$ و $a_N = 1$ ولی ، در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ، $a_T = \sqrt{3}$ و $a_N = \sqrt{2}$.

قوانین کپلر (اختیاری) . بالاخره ، از بردارها استفاده کرده یک مسئلهٔ اساسی مکانیک را حل می‌کنیم ، و آن مسئلهٔ تعیین حرکت مداری جسم P به جرم m است که تحت اثر جاذبهٔ ثقلی جسم دیگری با جرم بسیار بزرگتر M قراردارد . مثلاً ، P ممکن است سیاره‌ای باشد که حول خورشید می‌گردد ، یا قمری (حقیقی یا مصنوعی) باشد که حول زمین یا سیاره‌ای دیگر در حال گردش است . این مسئله ، بدون استفاده از بردارها ، توسط نیوتن (۱۶۸۷) در رسالهٔ معروفش ، *اصول ریاضی*[1] ، پاسخ داده شده است . مبداء O را جسم به جرم M گرفته ، فرض می‌کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بردار موضع P در لحظهٔ t باشد . همچنین $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، مثل شکل ۳۵ ، باشد ؛ درنتیجه ، $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ یا $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ ، که در آن $r = |\mathbf{r}|$. در این صورت ، طبق قانون ثقلی عکس مجذور فاصله (که قبلاً درصفحات ۴۳۲ و ۱۱۰۶ به آن برخورده‌ایم) ، نیروی وارد بر P مساوی است با

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u},$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل بوده و علامت منها نیرو را جاذبه می‌سازد[2] . باگذاردن این نیرو در قانون دوم حرکت نیوتن

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

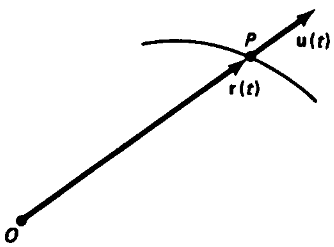
که در آن اینک تمام نیروها بردارهایی فضایی‌اند ، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -C\frac{\mathbf{u}}{r^2} = -C\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad (۱۲)$$

---

1. *Principia Mathematica*

۲ . *گرفتن اجسام سماوی به عنوان نقطه متکی براین امر است (و توسط خود نیوتن اثبات شده است) که جاذبهٔ ثقلی یک کرهٔ توپر همانند آن است که تمام جرم در مرکز کره متمرکز شده باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۱۴۵۹) . تحلیل مشروحتر مسئله نشان می‌دهد که اگر M خیلی از m بزرگتر باشد ، می‌توان موضع جسم به جرم M را ثابت گرفت.*



شکل ۳۵

که در آن $C = GM$ و $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ سرعت P است. توجه کنید که معادلهٔ (۱۲) شامل جرم کوچکتر m نیست.

حال می‌توان از روش برداری به نحو احسن استفاده کرد. با ضرب خارجی (۱۲) در $\mathbf{r}$، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = -\frac{C}{r^3}\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. ولی

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}') + (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') = \mathbf{r} \times \mathbf{r}''$$

(ر.ک. مثال ۴). لذا، دو معادلهٔ اخیر باهم ایجاب می‌کنند که

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

با انتگرالگیری از این معادلهٔ دیفرانسیل برداری، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}, \tag{۱۳}$$

که در آن $\mathbf{h}$ یک بردار ثابت است. از (۱۳) نتیجه می‌شود که جسم P همیشه درصفحهٔ مار بر O عمود بر $\mathbf{h}$ قرار دارد. در واقع، اگر (۱۳) را در $\mathbf{r}$ ضرب نقطه‌ای کنیم، خواهیم داشت $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{h} = 0$ (چرا؟)؛ درنتیجه، تصویر بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ درامتداد $\mathbf{h}$ همیشه‌صفر است. توجه کنید که این نتیجه برای هر نیروی مرکزی درست است، یعنی هر نیرویی که در امتداد خط واصل بین P و نقطهٔ ثابت O عمل می‌کند، و این فقط درمورد قانون عکس مجذور نیروی جاذبهٔ ثقلی نخواهد بود.

بردار $\mathbf{h}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = r\mathbf{u} \times (r'\mathbf{u} + r\mathbf{u}') = r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}'$$

(مثال ۳ ، صفحهٔ ۱۰۷۵، را به یاد آورید که برای بردارها در فضا نیز به کار می‌رود) .لذا، طبق (۱۲) ،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{C}{r^2}\mathbf{u} \times \mathbf{h} = -C\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}'). \qquad (۱۴)$$

اما ، به کمک فرمول مسئلهٔ ۴۸ ، صفحهٔ ۱۱۶۲، و اینکه $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ (برای اثبات این ، از $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ مشتق بگیرید) ،

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{u}',$$

به‌علاوه ،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h}\right) + \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h},$$

زیرا $d\mathbf{h}/dt = \mathbf{0}$ ؛ درنتیجه ، (۱۴) معادل است با

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = C\mathbf{u}'. \qquad (۱۵)$$

با انتگرالگیری از این معادله ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = C\mathbf{u} + \mathbf{q}, \qquad (۱۶)$$

که در آن $\mathbf{q}$ (مانند $\mathbf{h}$) بردار ثابتی می‌باشد .

با ضرب نقطه‌ای (۱۶) در $\mathbf{r}$ ، خواهیم داشت

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = (C\mathbf{u} + \mathbf{q}) \cdot r\mathbf{u} = Cr + qr\cos\theta, \qquad (۱۷)$$

که در آن ثابت $= |\mathbf{q}|$ q و θ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ است . طرف چپ (۱۷) مساوی است با

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$$

(از مثال ۱۰ ، صفحهٔ ۱۱۵۷، استفاده کنید) ، که در آن ثابت $= |\mathbf{h}|$ h . لذا ، (۱۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$h^2 = Cr + qr\cos\theta,$$

که رابطهٔ زیر را ایجاب می‌کند :

$$r = \frac{h^2/C}{1 + (q/C)\cos\theta}, \qquad (۱۸)$$

یا معادلا"

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}, \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$e = \frac{q}{C} = \frac{q}{GM}, \qquad d = \frac{h^2}{q}. \tag{۲۰}$$

اگر اولین فرمول (۶′) ، صفحهٔ ۱۰۱۴، را به یاد آوریم ، درمی‌یابیم که (۱۹) معادلهٔ یک مقطع مخروطی به کانون مبداء ، فاصلهٔ کانون تا هادی d ، و خروج از مرکز e در مختصات قطبی است . لذا ، مدار جسم P یک مخروطی است . به‌طور مشخص، مدار دایره است اگر $e = 0$ ، بیضی است اگر $0 < e < 1$ ، سهمی است اگر $e = 1$ ، و هذلولی است اگر $e > 1$ ، که در آن مقدار e را می‌توان به صورت توصیف شده در مثال ۱۰ زیر تعیین کرد .

حالت بویژه جالب در ستاره‌شناسی است که در آن مدار بیضی می‌باشد . دراین‌صورت جسم P به مرکز جاذبه " مقید " بوده و ، مثال حالت مدار سهموی و هذلولوی ، به "بی ـ نهایت نمی‌رود " . لذا ، ***قانون اول کپلر*** در مورد منظومهٔ شمسی را ، که کپلر در ۱۶۰۹ بیان داشت ، تحقیق کرده‌ایم : ***سیاره‌ها در مدارهای بیضوی حول خورشید طوری‌حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانونها قرار دارد*** . لازم به تذکر است که ستاره‌شناس آلمانی، یوهانس کپلر (۱۶۳۰ـ ۱۵۷۱) ، این قانون و دو قانون دیگر که نام وی بر آنهاست ، را به طور کاملا " تجربی و به‌وسیلهٔ تحلیل‌داده‌های مشاهداتی جمع‌آوری‌شده‌توسط استاد دانمارکی‌اش تیکو براهه[1] (۱۶۰۱ـ ۱۵۴۶) ، کشف کرد . کار نیوتن در توضیح نظری این قوانین ، و ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انجام آن ، بشر را مبهوت می‌سازد .

قانون دوم کپلر (۱۶۰۹) می‌گوید که ***خط‌واصل بین خورشید و هر سیاره مساحات مساوی را در زمانهای مساوی جارو می‌کند*** . این قانون را می‌توان به صورت زیر ثابت کرد. فرض کنیم $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ یک پایهٔ متعامد یکه بوده و $\mathbf{k}$ در جهت بردار ثابت $\mathbf{h}$ باشد ، و مختصات قطبی r و θ را در صفحهٔ مدار با محور قطبی در امتداد $\mathbf{i}$ معرفی می‌کنیم . در این صورت $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j}$ ؛ و درنتیجه ،

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta & r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\theta'\mathbf{k}.$$

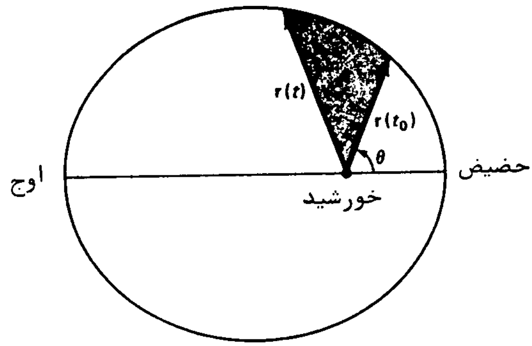
چون $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ ، نتیجه می‌شود که

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{ثابت}\ .$$

1. Tycho Brahe

فرض کنیم t_0 زمان ثابتی بوده و t زمان متغیری بعداز t_0 باشد. در این صورت، طبق فرمول مساحت در مختصات قطبی (ر.ک. صفحهٔ ۱۰۲۴)، مساحت A جارو شده به وسیلهٔ بردار شعاعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در بازهٔ $[t_0, t]$ ، که مساوی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۳۶ است، برابر است با

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2 \frac{d\theta}{d\tau} d\tau$$



A مساحت جارو شده به‌وسیلهٔ
بردار موضع $r(t)$ در بازهٔ $[t_0, t]$ است.

شکل ۳۶

(توی کوچک یونانی τ از اینجهت به کار رفته است که با حد بالایی انتگرالگیری t اشتباه نشود). بنابراین،

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{ثابت}, \qquad (۲۱)$$

که همان قانون دوم کپلر است. فرمول ثابت $= dA/dt$ برای هر **نیروی مرکزی** درست است (چرا؟).

قانون سوم کپلر ، که در ۱۶۱۹ پس از ۱۰ سال تحلیل بیشتر داده‌ها، اعلان شد، می‌گوید که ***مجذور دورهٔ گردش یک سیاره با مکعب نیم محور اطول مدار بیضوی‌اش متناسب است***. برای اثبات این امر، فرض کنیم مدار سیاره یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b باشد. در این صورت، مساحت محصور به بیضی مساوی πab است (ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۹۴۹)، و دورهٔ تناوب سیاره زمان جارو شدن این مساحت می‌باشد؛ یعنی،

$$T = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2\pi ab}{h}, \qquad (۲۲)$$

که در آن فرمول (۲۱) در مرحلهٔ دوم به کار رفته است. با ضرب عبارات (۲۰) در خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d، به دست می‌آید

$$ed = \frac{h^2}{GM},$$

و نیز، طبق فرمول (۸)، صفحهٔ ۹۷۴، داریم

$$d = \left(\frac{1}{e} - e\right) a,$$

درنتیجه،

$$ed = (1 - e^2)a = \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) a = \frac{b^2}{a}.$$

با متحد گرفتن این دو عبارت برای حاصل‌ضرب ed، به دست می‌آوریم

$$h^2 = GM\,\frac{b^2}{a}.$$

لذا، $h = b\sqrt{GM/a}$؛ درنتیجه، (۲۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = \frac{2\pi ab}{b}\sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\,a^{3/2} \qquad (۲۳)$$

(که در آن G ثابت عمومی ثقل و M جرم خورشید است)، یا معادلاً

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3, \qquad (۲۳')$$

و این همان قانون سوم کپلر می‌باشد. در این وضع، T^2 برای تمام اقمار یک سیاره با a^3 متناسب است، با ثابت‌تناسب $4\pi^2/GM$، که در آن M جرم سیاره می‌باشد. درفرمول (۱۱')، صفحهٔ ۱۱۱۰، قانون سوم کپلر برای مدارهای مستدیر پیش‌بینی شده بود.

در مدارهای بیضوی حول‌خورشید، نزدیکترین نقطه به‌خورشید را **حضیض خورشیدی**، و دورترین نقطه به آن را **اوج خورشیدی** می‌نامند. ر.ک. شکل ۳۶. نقاط مشابه‌درمدارهای حول زمین **حضیض** و **اوج** نام دارند. (اصطلاحات عام برای یک مرکز جاذبهٔ دلخواه عبارتنداز **فرامرکز** و **ورامرکز**.)

مثال ۹. فرض کنیم $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ بردار موضع و سرعت سیارهٔ P در حضیض خورشیدی باشند. نشان دهید که ثابتهای h و q عبارتنداز

$$h = r_0 v_0, \qquad q = r_0 v_0^2 - GM, \qquad (۲۴)$$

که برحسب فاصلهٔ حضیضی $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ و تندی حضیضی $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ داده شده‌اند.

حل. بردارهای $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ برهم عمودند، زیرا مماسهای بر بیضی‌در نقاط انتهایی محوراطول بر محور اطول عمودند. بنابراین،

$$h = |\mathbf{h}| = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = |\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{v}_0| \sin\frac{\pi}{2} = r_0 v_0.$$

در حضیض خورشیدی، مختص زاویه‌ای θ ی P مساوی 0 است، زیرا این مقدار از θ کوچکترین مقدار مختص شعاعی r در فرمول (۱۸) یا (۱۹) را به دست می‌دهد. با فرض $\theta = 0$ در (۱۸)، معلوم می‌شود که

$$r_0 = r|_{\theta=0} = \frac{h^2/C}{1 + (q/C)} = \frac{r_0^2 v_0^2}{C + q},$$

ایجابگر آنکه

$$q = r_0 v_0^2 - C = r_0 v_0^2 - GM.$$

در مدارهای سهموی و هذلولوی، حضیض وجود دارد ولی اوج موجود نیست، زیرا جسم P فقط یکبار به مرکز جاذبه نزدیک شده و سپس به بی‌نهایت می‌رود. اما، فرمولهای (۲۴) هنوز به کارند، چرا که r_0 و v_0 کمیات حضیضی می‌باشند.

مثال ۱۰. فرض کنیم r_0 و v_0 فاصله و تندی حضیض خورشیدی (حضیضی) جسمی باشند که تحت اثر جاذبهٔ خورشید (زمین) است. نشان دهید که *مدار جسم دایره است اگر* $r_0 v_0^2 = GM$، *بیضی است اگر* $GM < r_0 v_0^2 < 2GM$، *سهمی است اگر* $r_0 v_0^2 = 2GM$، و *هذلولی است اگر* $r_0 v_0^2 > 2GM$.

حل. به کمک فرمولهای (۲۰) و (۲۴)، معلوم می‌شود که خروج از مرکز مدار مساوی است با

$$e = \frac{q}{GM} = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1.$$

حال می‌توان حکم فوق (با حروف شکسته) را ازاین امر که برای دایره $e = 0$، برای بیضی $0 < e < 1$، برای سهمی $e = 1$، و برای هذلولی $e > 1$ به دست آورد. توجه کنید که M جرم خورشید برای مدارهای شمسی است، ولی جرم زمین برای مدارهای زمینی می‌باشد.

مسائل

طول منحنی فضایی داده شده را بیابید .

۱. $x = 12\sin t,\ y = 12\cos t,\ z = 5t \quad (0 \le t \le 4\pi)$

۲. $x = 1 - \cos t,\ y = t - \sin t,\ z = 4\sin(t/2) \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۳. $x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 6)$

۴. $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \ln t \quad (1 \le t \le 8)$

۵. $x = \sqrt{2}\,t,\ y = e^t,\ z = e^{-t} \quad (0 \le t \le \ln 2)$

۶. نشان دهید که طول n دور مارپیچ $x = a\cos t$ ، $y = a\sin t,\ z = bt$ مساوی است با $2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

۷. هر مارپیچ از مارپیچ مضاعفی که مولکول DNA می‌سازد به قطر 20 Å و پای 34 Å است (Å واحد آنگستروم و مساوی 10^{-8} cm است) . در هر مارپیچ DNA ی انسان حدودا " 290,000,000 دور وجود دارد . اگر این مارپیچ را باز کنیم ، طولش چقدر خواهد شد ؟

۸. تابع طول قوس $s = s(t)$ را برای منحنی فضایی $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ z = e^t$ بیابید . نقطهٔ $(0, 1, 1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ را نقطهٔ شروع بگیرید .

کمیات زیر را محاسبه کنید .

۹. $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}\right)$$

۱۰. $$\lim_{t\to \pi}\left(\frac{\tan t}{t}\mathbf{i} + \frac{1+\cos t}{t}\mathbf{j} + \frac{10t}{\pi}\mathbf{k}\right)$$

۱۱. $$\frac{d}{dt}\left[(\arcsin t)\mathbf{i} - e^{t^2}\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}\right]$$

۱۲. $$\frac{d}{dt}\left[(-\cot t)\mathbf{i} + (\csc t)\mathbf{j} + (\sinh \sqrt{t})\mathbf{k}\right]$$

۱۳. $$\int_0^1 \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}}{t^2+1}\,dt$$

۱۴. $$\int\left(te^t\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \frac{\ln t}{t}\mathbf{k}\right)dt$$

۱۵. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)] = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3\right) + \mathbf{r}_1 \cdot \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right),$$

که در آن $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ ، $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ ، و $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3(t)$ توابع برداری مشتقپذیری می‌باشند .

۱۶ . با استفاده از مسئلهٔ قبل ، قاعدهٔ زیر را برای مشتقگیری از یک دترمینان 3×3 که سطرهایش از توابع اسکالر مشتقپذیری تشکیل شده است ثابت کنید :

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix}$$

(پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد .)

سرعت $\mathbf{v}$ و تندی $v = |\mathbf{v}|$ نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته ، و نیز بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید .

۱۷ . $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

۱۸ . $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$

۱۹ . $\mathbf{r}(t) = 15t\mathbf{i} + (8\cos t)\mathbf{j} + (8\sin t)\mathbf{k}$

۲۰ . $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sqrt{2}\cos t)\mathbf{k}$

مؤلفه‌های مماسی و قائم a_T و a_N شتاب نقطهٔ $P = P(t)$ به بردار موضع داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته ، و نیز انحنای κ ی نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید .

۲۱ . $\mathbf{r}(t) = (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{i} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

۲۲ . $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}$

۲۳ . $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t)\mathbf{i} + (a\sin\omega t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \quad (a > 0)$

۲۴ . $\mathbf{r}(t) = (\arctan t)\mathbf{i} + (t - \arctan t)\mathbf{j} + (1/\sqrt{2})\ln(t^2 + 1)\mathbf{k}$

صفحهٔ شامل بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی فضایی C در نقطهٔ P صفحهٔ بوسان C در P نام دارد (زیرا در P خیلی زیاد به C برازش دارد) . صفحهٔ بوسان

۲۵ . منحنی مسئلهٔ ۲۱ را در نقطه‌ای که $t = -1$ بیابید .

۲۶ . منحنی مسئلهٔ ۲۴ را در نقطه‌ای که $t = 1$ بیابید .

فرض کنید C یک منحنی فضایی بوده ، و $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس بر C در نقطهٔ P باشد . دراین صورت ، خط مار بر P شامل $\mathbf{T}$ (خط) *مماس* بر C در P نام دارد ، و صفحهٔ مار بر P عمود بر $\mathbf{T}$ صفحهٔ *قائم* به C در P نامیده می‌شود . خط مماس و صفحهٔ قائم به

۲۷ . فصل مشترک صفحهٔ $x + y = 0$ و استوانهٔ سهموی $z = x^2$ در نقطهٔ $(2, -2, 4)$

۲۸ . فصل مشترک استوانه‌های $x^2 + y^2 = 10$ و $x^2 + z^2 = 10$ در نقطهٔ $(3, 1, 1)$

را بیابید .

راهنمایی . ابتدا منحنیها را به صورت پارامتری نمایش دهید .

۲۹. در چه نقاطی مماس بر منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ موازی صفحهٔ $x + 2y + z - 1 = 0$ است؟

۳۰. فرض کنید منحنی C نمودار تابع برداری پیوستهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (a \le t \le b)$$

در بعد دو یا سه با مشتق ناصفر $\mathbf{r}'(t)$ در هر نقطهٔ درونی $[a, b]$ بوده، و $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$؛ درنتیجه، نقاط انتهایی C برهم منطبق‌اند (یک چنین منحنی را، مثل صفحهٔ ۷۳۸ بسته می‌نامیم). نشان دهید که نقطه‌ای از C هست که مماس در آن بربردار نا صفر معلوم $\mathbf{m}$ عمود است.

راهنمایی. از قضیهٔ رل استفاده کنید.

۳۱. در مثال ۱، صفحهٔ ۱۱۰۴، در حرکت گلوله، محور z را بر صفحهٔ xy عمود گرفتیم (صفحهٔ قائم شامل بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ است). در این صورت، از قانون دوم نیوتن نتیجه می‌شود که $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$، که در آن g شتاب ثقل است. از این معادلهٔ دیفرانسیل برداری تحت شرایط اولیهٔ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$، که $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$، انتگرال گرفته، و نشان دهید گلوله همیشه درصفحهٔ xy می‌ماند. بافرض $g = 0$ ***قانون اول حرکت*** نیوتن را ثابت کنید، که می‌گوید جسمی که تحت اثر نیروی خارجی نباشد، اگر ساکن باشد ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$) در حال سکون می‌ماند، و اگر متحرک باشد ($\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$) به حرکت مستقیم‌الخط خود باسرعت ثابت $\mathbf{v}_0$ ادامه خواهد داد.

۳۲. منظور از ***اندازهٔ حرکت*** یک ذره یعنی حاصل‌ضرب $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ جرمش m در سرعتش $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. قانون دوم نیوتن برحسب اندازهٔ حرکت به‌شکل $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ درمی‌آید، که درآن $\mathbf{F}$ نیروی‌واردبرذره‌است. حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ***اندازهٔ حرکت زاویه‌ای*** ذره حول مبداء نام دارد؛ یعنی، حول نقطهٔ شروع بردار موضعش $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. نشان دهید که اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یک‌ذره‌که‌برآن‌نیروی مرکزی‌وارداست ثابت (یا، طبق گفتهٔ فیزیکدانان، ***حفظ شده***) است. بردار $\mathbf{h}$ تعریف شده‌بافرمول (۱۳) رابرحسب اندازهٔ حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L}$ بیان‌کنید. حرکت‌رادرصورتی‌که $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ توصیف‌نمایید.

۳۳. نشان دهید که تندی یک سیاره در نقطهٔ P از مدارش با فاصلهٔ عمودی خورشید تا مماس بر مدار در P متناسب است. کجا تندی ماکزیمم است؟ و کجا مینیمم خواهد بود؟

۳۴. در مثال ۸، صفحهٔ ۴۳۲، نشان دادیم که اگر موشکی از سطح‌زمین باتندی $v_0 = \sqrt{2gR}$ که درآن g شتاب ثقل بوده و R شعاع زمین (≈ 3960 mi) است، به‌طور قائم به بالا پرتاب شود، از جاذبهٔ زمین خارج شده و هرگز به آن باز نمی‌گردد. نشان دهید

این امر برای موشکی که به موازات سطح زمین پرتاب شود نیز درست است (ازمقاومت هوا صرف‌نظر کنید) . v_0 در مقایسه با تندی لازم جهت کشاندن موشک به مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد به چه اندازه بزرگ است؟

۳۵. ارتفاع و تندی یک قمر مصنوعی در حضیض مساوی 400 mi و 5 mi/sec می‌باشند . خروج از مرکز مدار چقدر است؟ ارتفاع و تندی قمر را در اوج بیابید . دورهٔ گردش آن چقدر است؟ (به جای تقریب خامتر $g \approx 32$ ft/sec² که تا بحال به کاررفته،ازتقریب $g \approx 32.15$ ft/sec² برای شتاب ثقل استفاده نمایید .)

۳۶. ارتفاعهای ماکزیمم و مینیمم یک قمر مصنوعی عبارتنداز 840 mi و 360 mi . تندیهای ماکزیمم و مینیمم آن چقدر هستند؟ دورهٔ گردش آن را بیابید .

۳۷. یک سفینهٔ فضایی ، که در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع 120 mi حرکت‌می‌کند موشکهای فشار آن عمل کرده شتابی برابر 450 mph/sec تولید می‌نمایند . چه مدت باید موشکها عمل کنند تا سفینه تندی لازم برای خروج کامل از جاذبهٔ زمین را بیابد؟

۳۸. نشان دهید وقتی یک سیاره در یکی از نقاط انتهایی محور اطول مدارش باشد ،تندی آن مساوی تندی در یک مدار مستدیر به شعاعی مساوی نیم محور اطول مدار خواهد بود .

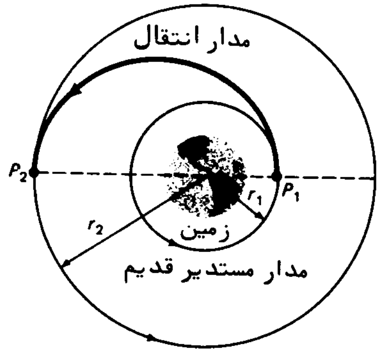
۳۹. یک ماهوارهٔ ژئوفیزیکی در مداری مستدیر و در ارتفاعی مساوی یکسوم شعاع‌زمین‌قرار داده شده است . مدار از دو قطب می‌گذرد . وقتی ماهواره از بالای قطب شمال می‌گذرد ، موشکهای بازگشت وارد عمل شده ، تندی آن را آنقدر تقلیل می‌دهند که مجبور به فرود آمدن در استوا می‌شود . میزان تقلیل لازم تندی چقدر است؟ چه تقلیل تندی موجب فرود آمدن در قطب جنوب می‌شود؟

۴۰. کنترل زمینی می‌خواهد یک قمر مضنوعی متحرک در مدار مستدیری به شعاع r_1 را به مداری مستدیر به شعاع بزرگتر r_2 انتقال دهد . این کار به صورت زیر انجام می‌شود . موشکهای فشار را کمی فعال کرده ، به قمر تندی اضافی Δv_1 در نقطهٔ P_1 از مدار کوچکتر می‌دهیم ، و قمر را مجبور به ورود در یک *مدار انتقال* بیضوی با اوج P_2 در فاصلهٔ r_2 از مرکز زمین می‌کنیم (ر.ک. شکل ۳۷) . سپس، مجددا" در P_2 موشکهای فشار را فعال کرده و به قمر تندی دوم Δv_2 می‌دهیم تا به مدار مستدیری به شعاع r_2 وارد شود. نشان دهید که

$$\Delta v_1 = \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right)\sqrt{\frac{g}{r_1}}\, R,$$

$$\Delta v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right)\sqrt{\frac{g}{r_2}}\,R.$$

Δv_1 و Δv_2 را به ازای $r_1 = 4500$ mi و $r_2 = 9000$ mi محاسبه کنید.



شکل ۳۷

۱۲.۶ سطوح درجهٔ دو

منظور از یک *معادلهٔ درجهٔ دو* از سه متغیر x ، y ، و z یعنی معادله‌ای به شکل

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{1}$$

که در آن ضرایب A ، B ، C ، D ، E ، و F همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) به معادلهٔ درجهٔ یک تحویل می‌شود). نمودار یک چنین معادله یک سطح درجهٔ دو، یا فقط درجهٔ دو، نام دارد، و تعمیم طبیعی یک مخروطی در فضای 2 بعدی است. همانند مخروطیها، تعدادی درجهٔ دو "تباه شده" وجود دارند که در جدول زیر لیست شده‌اند.

درجهٔ دو تباه شده	معادلهٔ نمونه
مجموعهٔ تهی	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
نقطه	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
خط	$x^2 + y^2 = 0$
صفحه	$(x-1)^2 = 0$
یک جفت صفحهٔ موازی	$x^2 - 1 = 0$
یک جفت صفحهٔ متقاطع	$x^2 - y^2 = 0$

اگر یکی از متغیرهای x ، y ، و z در معادلهٔ (۱) نباشد ، این معادله به معادلهٔ درجهٔ دو کلی از دو متغیر دیگر تحویل می‌شود . مثلاً ، اگر z غایب باشد ، معادلهٔ (۱) به شکل زیر درمی‌آید :

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + J = 0.$$

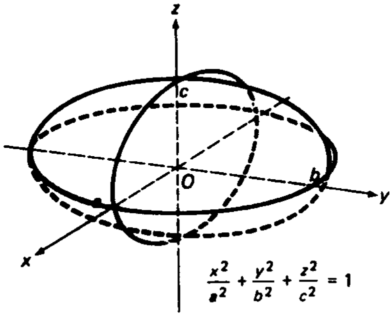
اما از بخش ۶.۱۰ می‌دانیم که نمودار این معادله در صفحهٔ xy مخروطی است؛ ولذا ، جدا از بعضی از حالات تباه شده ، نمودارش یک **استوانهٔ درجهٔ دو** ، یعنی استوانهٔ سهموی ، بیضوی ، یا هذلولوی ، است . این استوانه‌ها قبلاً در بخش ۱۲.۱ ، علاوه‌بر **سطوح دوار** درجهٔ دو ، مانند کره و سهمی‌گون دوار ، مطرح شده‌اند .

در مثالهای زیر درجه دوهایی را مطالعه می‌کنیم که نه استوانه‌اند و نه سطوح دوار ، و اینها عبارتند از بیضی‌گون ، دو نوع هذلولی‌گون (یک پارچه و دو پارچه) ، مخروط بیضوی ، و دو نوع سهمی‌گون (بیضوی و هذلولوی) . اینها اساساً تمام انواع ممکن‌اند به دلیل زیر : تحلیل مشروح معادلهٔ (۱) ، که در اینجا نخواهد شد ، نشان می‌دهد که همواره می‌توان به دستگاه جدیدی از مختصات قائم x' ، y' ، و z' رفت که در آن (۱) به معادله‌ای بدون جملات شامل $x'y'$ ، $x'z'$ ، یا $y'z'$ تبدیل می‌شود که نمودارش یک درجهٔ دو تباه شده ، یک استوانهٔ درجهٔ دو ، یک سطح دوار درجهٔ دو ، یا یکی از شش درجهٔ دو کلی ذکرشده در فوق می‌باشد . مثل حالت دوبعدی ، تبدیل از دستگاه xyz قدیم به دستگاه $x'y'z'$ جدید مستلزم یک دوران و یک انتقال است ، ولی در اینجا دوران و انتقال هر دو فضایی می‌باشند.

مثال ۱ . نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (۲)$$

سطح درجهٔ دو شکل ۳۸ است به نام **بیضی‌گون** . فرض مثبت بودن اعداد a ، b ، و c



بیضی‌گون

شکل ۳۸

خللی به کلیت وارد نمی‌کند (این فرض در مثالهای ۲ تا ۶ نیز می‌شود) . اگر دو تا از این اعداد مساوی باشند ، بیضی‌گون به یک بیضی‌گون دوار یا کره‌گون تحویل می‌شود ، ولی اگر $a = b = c$ ، بیضی‌گون به کره به شعاع a و مرکز مبداء بدل خواهد شد .

بیضی‌گون (۲) نسبت به مبداء ، به نام مرکز بیضی‌گون ، و نیز نسبت به هرسه‌صفحهٔ مختصات متقارن است . با فرض $y = z = 0$ در (۲) ، معلوم می‌شود که بیضی‌گون محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ قطع می‌کند . همچنین ، محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ و محور z را در نقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌نماید . با قراردادن $z = 0$ در (۲) ، معلوم می‌شود که‌اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xy (یعنی ، اشتراکش با صفحهٔ xy) بیضی زیر است :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (z = 0).$$

به همین نحو ، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xz بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz بیضی

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (x = 0)$$

می‌باشد . با فرض $z = k$ در (۲) ، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \qquad (z = k).$$

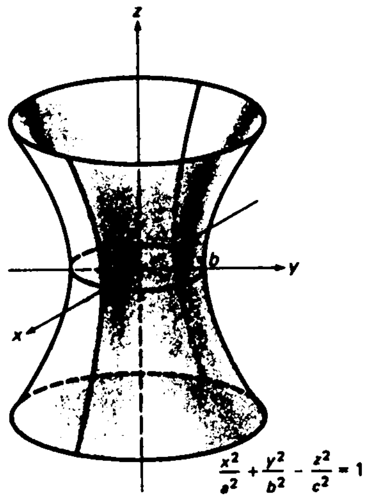
لذا ، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $|k| < c$ ، یک نقطه است‌اگر $|k| = c$ ، و مجموعهٔ تهی است اگر $|k| > c$. اثر بیضی‌گون در صفحات موازی صفحات xz و yz به همین صورت خواهد بود .

مثال ۲. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{۳}$$

درجهٔ دو شکل ۳۹ به‌نام **هذلولی‌گون یک‌پارچه** است . هذلولی‌گون (۳) ، همانند بیضی‌گون نسبت به مبداء ، به نام **مرکز هذلولی‌گون** ، و هر سه صفحهٔ مختصات متقارن است . این سطح محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ و محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ قطع می‌کند ، ولی محور z را قطع نمی‌کند ، زیرا معادلهٔ $-z^2/c^2 = 1$ حاصل از قرار دادن $x = y = 0$ در (۳)

جواب ندارد . در واقع ، هذلولی‌گون ، به خلاف بیضی گون ، سطحی بی‌کران است: این سطح در امتداد محور z ، که محور هذلولی است ، از هر دو جهت " تا بی‌نهایت باز می‌شود " .



هذلولی‌گون یک پارچه

شکل ۳۹

اثر هذلولی‌گون (۳) در صفحهٔ xy بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (z=0)$$

است ، که دور " گلوگاه " هذلولی‌گون حلقه زده است . به‌طورکلی ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ $z=k$ نمودار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \qquad (z=k)$$

است ، که به ازای هر k یک بیضی می‌باشد . از آن‌سو ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ xz هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (y=0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz هذلولی

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (x=0)$$

می‌باشد . اگر $a = b$ ، نمودار (۳) به هذلولی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک از این هذلولیها حول محور z تحویل می‌شود . توجه کنید که معادلهٔ (۳) را می‌توان از معادلهٔ (۲) بیضی‌گون با تغییر علامت‌جملهٔ شامل z^2 به دست آورد . اگر علامت جملهٔ شامل x^2 یا y^2 تغییر می‌کرد ، نمودار معادلهٔ حاصل نیز یک هذلولی‌گون یک پارچه می‌شد ، ولی‌در این صورت محورش محور x یا محور y می‌بود .

هذلولی‌گون (۳) از یک قطعهٔ همبند یا" پارچه "تشکیل شده است ،و به این جهت آن‌را هذلولی‌گون یک پارچه می‌نامند . مثال زیر نوع دیگری از هذلولی‌گون را شرح می‌دهد که‌از دو پارچهٔ ناهمبند تشکیل شده است .

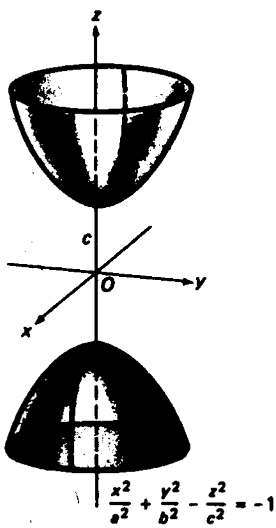
مثال ۳. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{۴}$$

یا معادلهٔ معادل

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{۴'}$$

درجهٔ دو شکل ۴۰ است که **هذلولی‌گون دو پارچه** نام دارد . این هذلولی‌گون محور z را درنقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌کند ،ولی تقاطعی با محورهای x و y ندارد (چرا؟) . هذلولی‌گون



هذلولی‌گون دوپارچه

شکل ۴۰

(۴) ، مانند هذلولی‌گون یک‌پارچه ،سطح بی‌کرانی است که در امتداد محور z ،که‌مجدداً" محور هذلولی نام دارد ، تا بی‌نهایت باز می‌شود . با قرار دادن $z = k$ در (۴) ،به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \qquad (z = k).$$

لذا ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $|k| > c$ ، یک نقطه است‌اگر $|k| = c$ و مجموعهٔ تهی است اگر $|k| < c$. از آن سو ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ xz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (x = 0)$$

می‌باشد . اگر $a = b$ ، نمودار (۴) به هذلولی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک ازاین هذلولیها حول محور z تحویل می‌شود . از این نکات معلوم می‌شود که هذلولی‌گون (۴) از دو قطعه یا پارچهٔ ناهمبند تشکیل شده است .

مثال ۴. از تعویض طرف راست معادلات (۳) و (۴) با صفر ، معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (۵)$$

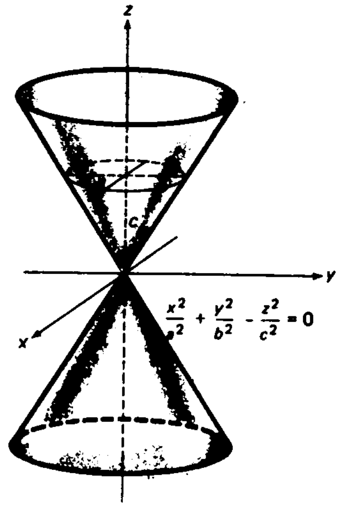
به دست می‌آید . نمودار (۵) ، به نام *مخروط بیضوی* ، در شکل ۴۱ نموده شده است . با فرض $z = k$ در (۵) ، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \qquad (z = k).$$

لذا ، اثر مخروط در صفحهٔ $z = k$ مبداء است‌اگر $k = 0$ و بیضی‌است اگر $k \neq 0$ ،بخصوص بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است اگر $k = \pm c$. به عنوان تمرین ، نشان دهید که اثر مخروط در صفحهٔ $x = k$ یا $y = k$ یک جفت خط متقاطع است اگر $k = 0$ و یک هذلولی است اگر $k \neq 0$. اگر $a = b$ ، مخروط بیضوی به مخروط مستدیر قائم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(دو پارچه) تحویل می‌شود ، که یک سطح دوار است . اگر علاوه‌براین $a = c$ ، مخروط



شکل ۴۱

مستدیر قائم بسیار سادهٔ

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

به دست می‌آید که در مثال ۹، صفحهٔ ۱۱۳۶، مطرح شد.

مثال ۵. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \qquad (۶)$$

سطح درجهٔ دو شکل ۴۲ به نام سهمی‌گون بیضوی است. با قرار دادن $z = k$ در (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1$$

اگر $k > 0$،

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

اگر $k = 0$، و

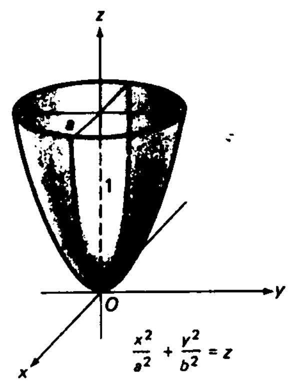
$$\frac{x^2}{|k|a^2} + \frac{y^2}{|k|b^2} = -1$$

اگر $k < 0$. لذا ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $k > 0$ ، مبداٴاست اگر $k = 0$ ، و مجموعهٔ تهی است اگر $k < 0$. همچنین ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ xz سهمی

$$\frac{x^2}{a^2} = z \qquad (y = 0),$$

و اثرش در صفحهٔ yz سهمی

$$\frac{y^2}{b^2} = z \qquad (x = 0)$$



سهمی‌گون بیضوی

شکل ۴۲

می‌باشد . اگر $a = b$ ، سهمی‌گون به سهمی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک ازاین‌سهمیها حول محور z تحویل می‌شود (حالت $a = b = 1$ قبلاً " در مثال ۸ ، صفحهٔ ۱۱۳۵ ، مطرح شده است .)

مثال ۶. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \qquad (۷)$$

سطح درجهٔ دو شکل ۴۳ است به نام **سهمی‌گون هذلولوی** ، که از سایر سطوح درجهٔ دو ساختار پیچیده‌تری دارد . اثرش در صفحهٔ xz سهمی

$$z = \frac{x^2}{a^2} \qquad (y = 0)$$

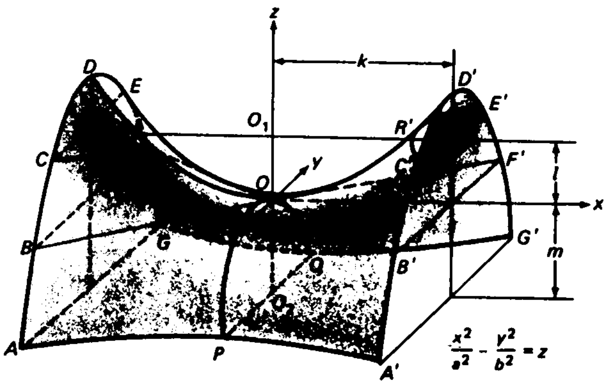
است که به بالا باز می‌شود(DOD' در شکل) ، و اثرش در صفحهٔ yz سهمی

$$z = -\frac{y^2}{b^2} \qquad (x = 0)$$

است که به پایین باز می‌شود (POQ درشکل) . سهمی‌گون (۷) صفحات $x = \pm k$ را درسهمیهای

$$z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} \qquad (x = \pm k)$$

قطع می‌کند (ADG و $A'D'G'$ در شکل) ، که مانند POQ به پایین باز می‌شود ، ولی رئوسش



سهمی‌گون هذلولوی

شکل ۴۳

به اندازهٔ k^2/a^2 از رأس O در POQ بالاتر است . به‌علاوه ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ xy جفت خطوط متقاطع

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (z = 0),$$

یا معادلا"

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (z = 0)$$

است (BOF' و FOB' در شکل) . همچنین ، صفحهٔ $z = l\ (l > 0)$ را در هذلولی

$$\frac{x^2}{la^2} - \frac{y^2}{lb^2} = 1 \qquad (z = l)$$

با شاخه‌های $CRE, C'R'E'$ و محورمتقاطع RO_1R' ، و صفحهٔ $z = -m\ (m > 0)$ را در هذلولی

$$\frac{x^2}{ma^2}-\frac{y^2}{mb^2}=-1 \qquad (z=-m)$$

با شاخه‌های APA', GQG' و محور متقاطع PO_2Q قطع می‌کند.

توجه کنید که سهمی‌گون‌هذلولوی در مجاورت‌مبداء O به‌شکل‌زین یا گذرگاه‌کوهستانی است. نقطهٔ O یک **نقطهٔ** زینی یا **مینیماکس** سطح است. تناسب واژهٔ " مینیماکس" ازاین ناشی می‌شود که اگرچه ارتفاع سطح در O نه مینیمم دارد نه ماکزیمم، ولی پایین‌ترین‌نقطهٔ سهمی DOD' و بالاترین نقطهٔ سهمی POQ هر دو در O رخ می‌دهند.

برای شناسایی نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دو می‌توان از تبدیلات جبری‌مقدماتی یاری جست. مثلا" ، پس از کامل‌کردن مربع ، معادلهٔ

$$x^2+y^2-z^2+2xy=0,$$

که دارای جملهٔ حاصل‌ضرب $2xy$ است ، به صورت

$$(x+y)^2-z^2=0$$

یا معادلا"

$$(x+y+z)(x+y-z)=0,$$

درمی‌آید ؛ و درنتیجه ،نمودارش سطح درجهٔ دو تباه شده‌ای است‌که از جفت‌صفحهٔ متقاطع $x+y+z=0$ و $x+y-z=0$ تشکیل شده است. به همین نحو، معادلهٔ

$$36x^2+9y^2+4z^2-72x+8z+4=0$$

پس از کامل شدن دو مربع ، به صورت

$$36(x-1)^2+9y^2+4(z+1)^2=36$$

و پس از تقسیم بر 36 ، به شکل

$$(x-1)^2+\frac{y^2}{4}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

درمی‌آید ؛ درنتیجه ، نمودارش بیضی‌گونی است‌که مرکز آن به جای مبداء $(0, 0, 0)$ نقطهٔ $(1, 0, -1)$ می‌باشد.

مسائل

درجهٔ دو را که نمودار معادلهٔ داده‌شده‌است شناسایی کنید ، و در صورت تباه‌نشده‌بودن آن را رسم نمایید.

۱. $2x^2-\frac{1}{9}y^2+z^2=1$

۲. $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{36}z^2 = 1$

۳. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$

۴. $6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 6 = 0$

۵. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 1$

۶. $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 1 = 0$

۷. $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x + 4y + 7 = 0$

۸. $z^2 - 4x^2 = y$

۹. $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 12z + 11 = 0$

۱۰. $x^2 + 2y^2 - z^2 - 6x - 12y + 26 = 0$

۱۱. $x^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z + 1 = 0$

۱۲. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$

۱۳. $z = xy$

۱۴. $z^2 = xy$

۱۵. $x^2 = z - y$

۱۶. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$

۱۷. $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$

۱۸. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4 = 0$

راهنمایی. در مسائل ۱۳ تا ۱۵، ابتدا حول محور z دوران دهید.

فرض کنید S جسم داخل بیضی‌گون $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ باشد. مساحت ناحیهٔ مشترک S با

۱۹. صفحهٔ $y = 3$ ۲۰. صفحهٔ $x = 1$

را بیابید.

۲۱. نقاط اشتراک خط

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4}$$

با بیضی‌گون $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{81}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ را بیابید.

۲۲. سهمی‌گون بیضوی $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 2z$ صفحهٔ $2x - y - 2z - 10 = 0$ را فقط در یک‌نقطه قطع می‌کند. چه نقطه‌ای؟

۲۳. مکان هندسی تمام نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $(0, 0, c)$ و صفحهٔ $z = -c$ به‌یک‌فاصله باشند.

۲۴. با استفاده از روش مقاطع مخروطی (ر.ک. بخش ۱.۸)، نشان دهید که حجم جسم

محدود به سهمی‌گون بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h-z \qquad (h>0)$$

و صفحهٔ xy مساوی نصف حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است .

۲۵ . با استفاده از روش مقاطع عرضی ، حجم جسم محصور به بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

را پیدا کنید .

۲۶ . نشان دهید که مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

مجانب هذلولی‌گون یک پارچهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

و هذلولی‌گون دوپارچهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

است بدین معنی که هر دو هذلولی‌گون ، وقتی $z\to\pm\infty$ ، بدلخواه به‌مخروط نزدیک می‌شوند .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مختصات قائم در فضا

فاصلهٔ بین دو نقطه در فضا

معادلات استوانه‌ها و سطوح دوار

بردارها در فضا و نمایش آنها به صورت سه‌تاییهای مرتب

حاصل‌ضرب خارجی و خواص آن

دترمینانها

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر

معادلات پارامتری و تقارنی خطوط در فضا

فاصلهٔ بین یک نقطه و یک خط در فضا

صفحات و معادلات آنها
زاویهٔ بین دو صفحه
فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه
منحنیهای فضایی، توابع برداری در فضا
حرکت مداری و قوانین کپلر
سطوح درجهٔ دو

مسائل تکمیلی

۱. دو نقطه از محور x بیابیدکه در فاصلهٔ 12 از نقطهٔ $(-3, 4, 8)$ قرارداشته‌باشند.

۲. نشان دهید که نقاط $A = (0, 1, 2)$، $B = (2, 0, 1)$، و $C = (1, 2, 0)$ رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. طول ضلع این مثلث چقدر است؟

۳. نشان دهید که کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = 0$ بر صفحهٔ xy مماس است.

۴. سطح حاصل از دوران خط $x = 0, y = c$ حول محور y؛ حول محور z را بیابید.

معادلهٔ استوانه‌ای را بیابید که بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$ محیط شده و خطوط جاری‌اش موازی

۵. محور x ۶. محور y ۷. محور z باشند.

۸. فرض کنید $(-3, -6, 2)$ و $(1, -4, 3)$ دورأس مجاور یک‌متوازی‌الاضلاع باشند. همچنین، اقطار در نقطهٔ $(-1, 7, 4)$ متقاطع باشند. دو رأس دیگر را پیدا نمایید.

۹. فرض کنید $(3, -1, 2)$، $(1, 2, -4)$، و $(-1, 1, 2)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند. رأس دیگر آن را بیابید. (سه حالت وجود دارد.)

۱۰. برداری با محورهای x و z مثبت زوایای $120°$ و $45°$ می‌سازد. این بردار چه زاویه‌ای با محور y مثبت می‌سازد؟

۱۱. بردارهایی به‌اندازهٔ 2 بیابید که با محورهای x و y مثبت زوایای $60°$ و $120°$ بسازند.

۱۲. زوایای مثلثی را بیابید که رئوسش $A = (3, 2, -1)$، $B = (1, 1, 1)$، و $C = (5, 0, 0)$ باشند.

۱۳. نشان دهید هرگاه $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$، آنگاه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. با استفاده ازاین، قانون سینوسها را (که در مسئلهٔ ۵۳، صفحهٔ ۱۰۰ داده شده) اثبات نمایید.

۱۴. فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ $30°$ می‌سازند. مساحت‌مثلث پیموده شده توسط بردارهای $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ و $\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ را بیابید.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ $45°$ می‌سازند. مساحت

متوازی‌الاضلاعی را بیابید که بردارهای $\mathbf{v}-2\mathbf{u}$ و $4\mathbf{u}+2\mathbf{v}$ اقطار آن باشند .

۱۶ . نشان دهید که مساحت مثلث به رئوس $A=(x_1, y_1)$ ، $B=(x_2, y_2)$ ، و $C=(x_3, y_3)$ در صفحهٔ xy مساوی نصف قدرمطلق دترمینان

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

است . نشان دهید که نقاط A ، B ، و C همخط اند اگر و فقط اگر این دترمینان صفر باشد .

فرض کنید $\mathbf{a}=(3, -2, 5)$ ، $\mathbf{b}=(-2, 2, 1)$ ، و $\mathbf{c}=(1, 4, -1)$. عبارات زیر را بیابید .

۱۷ . $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۱۸ . $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۱۹ . $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$

۲۰ . $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

۲۱ . حجم متوازی‌السطوح پیموده‌شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}=(3, -7, 1)$ ، $\mathbf{b}=(-2, 0, 4)$ و $\mathbf{c}=(10, 6, 0)$ را بیابید .

۲۲ . نشان دهید که به ازای هر سه بردار $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ،

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$$

راهنمایی . از مسئلهٔ ۴۸ ، صفحهٔ ۱۱۶۲ ، استفاده کنید .

۲۳ . نشان‌دهیدهرگاه‌بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ ،و $\mathbf{d}$ همصفحه‌باشند ،آنگاه $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{0}$.

فرض کنید $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ ، و $\mathbf{d}$ بردارهای دلخواهی باشند . نشان دهید که

۲۴ . $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

۲۵ . $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})]\mathbf{c}-[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{d}$

۲۶ . $[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\mathbf{a}-[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\mathbf{b}+[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})]\mathbf{c}-[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{d}=\mathbf{0}$

۲۷ . فرض کنید $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ سه بردار غیرهمصفحه باشند ؛ درنتیجه ، $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ یک پایه تشکیل می‌دهند (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۴۷) . نشان دهید که بسط بردار دلخواه $\mathbf{a}$ نسبت به این پایه عبارت است از $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ ، که در آن

$$\alpha_1=\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)},\quad \alpha_2=\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)},\quad \alpha_3=\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)}{\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)}. \qquad \text{(یک)}$$

بردارهای $\mathbf{e}_1=(0, 1, 1)$ ، $\mathbf{e}_2=(1, 0, 1)$ ، و $\mathbf{e}_3=(1, 1, 0)$ غیرهمصفحه بوده ، ودرنتیجه یک پایه تشکیل می‌دهند . با استفاده از فرمولهای (یک) ، بردار دادهٔ شدهٔ $\mathbf{a}$ را نسبت به این پایه بسط دهید .

۲۸ . $\mathbf{a}=(3, -6, 4)$

۲۹ . $\mathbf{a}=(2, 1, 5)$

۳۰. $\mathbf{a} = (-1, 2, -3)$

۳۱. خط ماربر نقطهٔ $(5, -7, 6)$ موازی خط

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$$

را بیابید.

۳۲. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقاط $(2, -1, 0)$ و $(-2, 0, 4)$ را بیابید.

۳۳. فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3, 5, 4)$ و خط $x = y = z$ را بیابید.

۳۴. نشان دهید که خط $x = -4 + 3t, y = 2 - 4t, z = 6 + 4t$ موازی صفحهٔ $4x - 3y - 6z - 2 = 0$ است.

۳۵. خط مار بر نقطهٔ $(-4, 2, 5)$ و عمود بر صفحهٔ $6x - 3y + 8z + 10 = 0$ را بیابید.

۳۶. اگر صفحهٔ Π محور x را در نقطهٔ $(a, 0, 0)$، محور y را در نقطهٔ $(0, b, 0)$، و محور z را در نقطهٔ $(0, 0, c)$ قطع کند، a را قطع x، b را قطع y، و c را قطع z، Π می‌نامیم. نشان دهید که معادلهٔ صفحه با قطع x، a، قطع y، b، و قطع z، c، مساوی است با

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

مشروط براینکه a، b، و c همه ناصفر باشند.

معادلهٔ صفحه با قطعهای داده شده را بیابید.

۳۷. $a = -1, b = 5, c = 2$

۳۸. $a = 10, b = -20, c = 15$

۳۹. بدون قطع x، $b = 4$، $c = 8$

۴۰. $a = 2, b = -3$؛ بدون قطع z

قطع x، a، قطع y، b، و قطع z، c صفحهٔ داده شده را بیابید.

۴۱. $2x - 3y + 4z - 12 = 0$

۴۲. $3x + 5y - 10z + 30 = 0$

۴۳. $5x + 7y - 35 = 0$

۴۴. $6y - 7z + 21 = 0$

۴۵. صفحات $3x - 5y + az - 9 = 0$ و $x + 3y + 4z + 6 = 0$ به ازای مقداری از a بر هم عمودند. این مقدار را بیابید.

۴۶. مقادیر a و b را طوری بیابید که صفحات $2x + ay + 3z - 1 = 0$ و $bx - 10y - 6z + 5 = 0$

موازی باشند .

۴۷ . صفحهٔ مار برنقطهٔ $(1, -9, 3)$ را طوری‌بیابیدکه برفصل‌مشترک‌صفحات $x - 2y + z - 5 = 0$ و $x + y - z + 4 = 0$ عمود باشد .

۴۸ . زاویهٔ بین صفحهٔ $x + 2y - 2z - 1 = 0$ و هر یک از صفحات مختصات را بیابید .

۴۹ . فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3, -4, 12)$ و صفحهٔ $x + y + z = 180$ را بیابید .

۵۰ . نشان دهید که خطوط $x = y = z$ و

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+10}{6}$$

متقاطع‌اند . نقطهٔ تقاطع را بیابید .

۵۱ . فاصلهٔ بین خط $x = y = z$ و خط مار بر نقاط $(3, -1, 2)$ و $(6, 1, 4)$ را بیابید .

۵۲ . طول منحنی فضایی

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln(\cos t) \qquad (0 \le t \le \pi/4)$$

را پیدا کنید .

عبارات زیر را حساب کنید .

۵۳ . $$\lim_{t \to 1}\left(\frac{\ln t}{t-1}\mathbf{i} - \frac{e^t - e}{t-1}\mathbf{j} + \frac{t+1}{t^2}\mathbf{k}\right)$$

۵۴ . $$\lim_{t \to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} - \frac{\sinh t}{t}\mathbf{k}\right)$$

۵۵ . $$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t}\mathbf{j} + \frac{\cos t}{t}\mathbf{k}\right)$$

۵۶ . $$\frac{d}{dt}\left[(\cosh t)\mathbf{i} + (\tanh t)\mathbf{j} + 10^t\mathbf{k}\right]$$

۵۷ . $$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[(\cot t)\mathbf{i} - (\tan t)\mathbf{j} + 24\mathbf{k}\right]dt$$

۵۸ . $$\int\left(\frac{1}{t^2+4}\mathbf{i} + \frac{1}{t^2-1}\mathbf{j} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{k}\right)dt$$

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی داده شده در نقطهٔ P نظیر به مقدارذکرشده از پارامتر t را بیابید . همچنین ، انحنای κ در P را پیدا نمایید .

۵۹ . $x = 1 - 6t,\ y = 3 + 2t,\ z = 4 - 3t,\ t = -1$

۶۰ . $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \ln t,\ t = 1$

۶۱. $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t,\ t = 0$

۶۲. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ t = \pi/4$

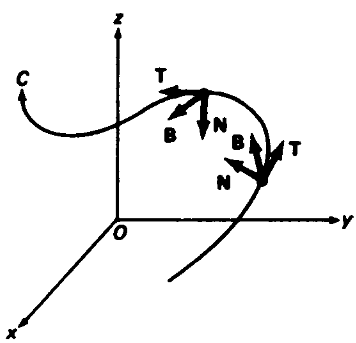
۶۳. طول قوس s را پارامتر گرفته ، فرض کنید C منحنی پیموده شده به وسیلهٔ نقطهٔ $P = P(s)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ بوده ، و C دارای بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ در P باشند . در این صورت ، بردار یکهٔ $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ *قائم دوم* به C در P نام دارد . واضح است که $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$ و $\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$. بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، و $\mathbf{B}$ ، باهمین ترتیب ، یک پایهٔ متعامد یکهٔ راست دست تشکیل می‌دهند، که با موضع P تغییر می‌نماید . این پایهٔ موضعی **سه وجهی حرکت** C نام دارد (ر.ک. شکل ۴۴) . با این فرض که $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ مشتق سوم پیوسته دارد ، نشان دهید که $d\mathbf{B}/ds$ موازی $\mathbf{N}$ است . لذا ،

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N},$$

که در آن اسکالر τ *تاب* C در P نام دارد؛ انتخاب علامت منها قراردادی است ، و به مقدار مثبتی برای تاب یک مارپیچ راست دست منجر می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۶۵) همچنین ، نشان دهید

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T},$$

که در آن κ انحنای C در P است (از قبل می‌دانیم که $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$) .



شکل ۴۴

۶۴. منحنی C معمولاً نمودار تابع بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ گرفته‌می‌شود ،که در آن t پارامتری غیر از طول قوس است . نشان دهید که تاب C با فرمول زیر داده می‌شود :

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}, \qquad \text{(دو)}$$

که در آن طبق معمول پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. نشان دهید C یک منحنی مسطح است اگر و فقط اگر تاب آن متحد صفر باشد.

۶۵. تاب τ مارپیچ مستدیر کلی

$$x = a\cos \omega t, \quad y = a\sin \omega t, \quad z = bt \qquad (a > 0)$$

را بیابید.

۶۶. نشان دهید که منحنی $x = t^2,\ y = 1 - 3t,\ z = 4t - 2$ در یک صفحه قرار دارد. این صفحه چیست؟

فرض کنید C مکعبی پیچ خوردهٔ $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$ باشد.

۶۷. انحنای ماکزیمم C را بیابید.

۶۸. تاب τ و بزدارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، و $\mathbf{B}$ سه‌وجهی حرکت C را در مبداء بیابید.

۶۹. تاب τ و بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، و $\mathbf{B}$ را در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ بیابید.

۷۰. تاب ماکزیمم C را پیدا کنید.

۷۱. تاب منحنی $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t$ در نقطهٔ نظیر به $t = \ln 2$ چقدر است؟

۷۲. نشان دهید که انحنای κ و تاب τ منحنی $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$ درهرنقطه مساویند.

۷۳. گلوله‌ای از یک توپ شلیک شده است که نقطهٔ شروع بردار موضع آن خود توپ‌است. نشان دهید که اندازهٔ حرکت‌زاویه‌ای آن حفظ شده‌نیست. اما نقطه‌ای وجود داردکه اندازهٔ حرکت زاویه‌ای حفظ شده است. این نقطه کجاست؟

۷۴. ارتفاع یک قمر مصنوعی در اوج 660 mi بوده، و نسبت تندی ماکزیمم آن به تندی مینیمم‌اش 1.1 است. ارتفاع قمر در حضیض چقدراست؟ دورهٔ گردش آن چقدر است؟ (شعاع زمین را $R = 3960$ mi و شتاب ثقل در سطح زمین را $g = 32.15\ \text{ft/sec}^2$ بگیرید.)

۷۵. یک سفینهٔ هوایی دریک مدارمستدیر به‌ارتفاع 150 mi بالای زمین سر می‌خورد. راننده با فعال کردن موشکهای فشارتندی آن را 900 mph بیشترمی‌کند. ارتفاع ماکزیمم سفینه در مدار جدیدش چقدر است؟

۷۶. فاصلهٔ حضیض خورشیدی یک سیاره r_0 بوده، و خروج از مرکز مدارش e می‌باشد. نشان دهید که شعاع انحنای مدار در نقاط انتهایی محور اطول $(1 + e)r_0$ است.

۷۷. نقطهٔ $(3, -4, 7)$ بر یک مخروط مستدیر قائم دوپارچه قرار دارد که محورش در امتداد محور z و رأسش در مبداء است. معادلهٔ مخروط را پیدا کنید.

۷۸. معادلهٔ کره‌گون کشیدهٔ حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

حول محور x را بیابید. همچنین، معادلهٔ کره‌گون جمع شدهٔ حاصل از دوران همین بیضی حول محور z را بیابید. (ر.ک. مسئلهٔ ۴۶، صفحهٔ ۷۸۲.)

۷۹. معادلهٔ مخروط به رأس $(0, 0, 5)$ و مولدهای مماس بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را پیدا کنید.

۸۰. فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاطی در فضا باشد که مجموع فواصلشان تا دو نقطهٔ معین ثابت است. نشان دهید S یک کره‌گون کشیده می‌باشد.