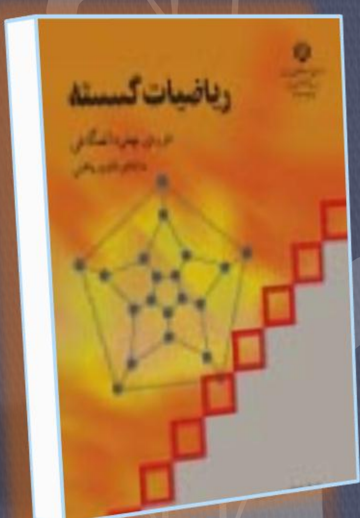
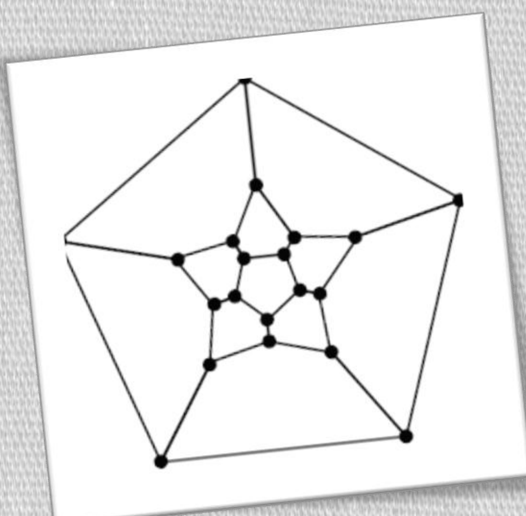
ریاضیات گسسته

سال چهارم آموزش متوسطه

رشته ی ریاضی و فیزیک





- آموزش جامع و کامل مباحث
- به همراه تمرین های آموزشی و جواب

مولف:استاد جابر عامری


بوکلتس
www.Booklets.ir
مرجع دانلود کتب و جزوات درسی و دانشگاهی

فهرست مباحث

نظریه ی گراف

پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان باوی

www.mathtower.org

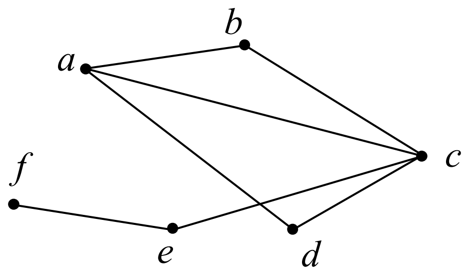
اردیبهشت ۱۳۸۵

فصل اول : نظریه ی گراف

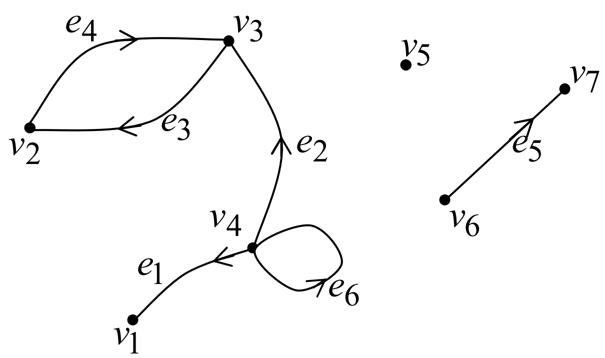
☑ مقدمه

قبل از ورود به نظریه ی گراف و ارائه ی تعاریف و مفاهیم مربوط به آن ، دو مثال زیر را به عنوان مقدمه ارائه می کنیم.

مثال۱) سازمانی برای انجام تبادل اطلاعات داخلی کارشناسی های زیر مجموعه ی آن، مطابق شکل زیر یک شبکه ی کامپیوتری تشکیل داده است.



مثال۲) شکل زیر نمودار مربوط به مسابقات داخلی و بین تیمی صورت گرفته بین چند تیم ورزشی را نشان می دهد.



نمودار های فوق دو نمونه از ***گراف*** ها را نشان می دهند. در مورد اول گراف غیر جهت دار ولی در مورد دوم گراف جهت دار است.در هر گراف هر نقطه را رأس (گره) و هر پاره خط یا منحنی که دو رأس را به هم متصل می کند را یال می نامند. همانطور که از نمودار ها ی فوق پیدا است، ممکن است دو یال یکدیگر را در یک نقطه که رأس نباشد، قطع کنند.

توجه داشته باشید که مجموعه ی رأس ها و مجموعه ی یال ها گراف را تشکیل می دهند و هر گراف را می توان با یک نمودار موسوم به نمودار گراف نمایش داد.

تذکر:

۱: هر یال می تواند به صورت خط راست یا منحنی باشد که از یک رأس به رأس دیگر و در گراف جهت دار از یک رأس به خود آن رأس وصل شود. یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل می کند، حلقه یا طوقه نامیده می شود.

۲: دو رأس که بوسیله ی یک یال به هم متصل شده باشند را دو رأس مجاور می گویند.

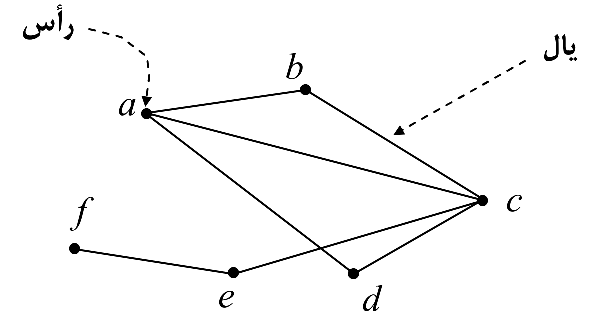
۳: هر رأس را با یک حرف کوچک لاتین مانند(a و b و c و ...) یا (v_1 و v_2 و v_3 و ...) و هر یال را با دو رأس آن یعنی (ab و bc و ac و ...) یا (e_1 و e_2 و e_3 و ...) نامگذاری می کنند.

٤: در گراف جهت دار دو یال که ابتدا و انتهای یکسان داشته باشند، را یال های موازی گویند.

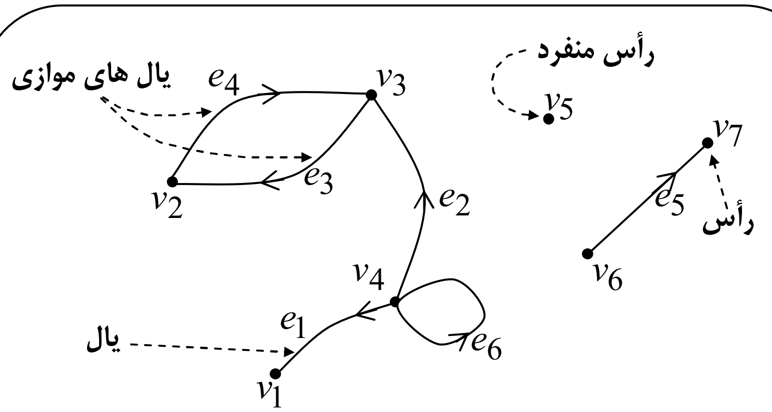
۵: بدیهی است که گراف غیر جهت دار نمی تواند طوقه یا یال های موازی داشته باشد.

٦ : در هر گراف رأسی که شامل هیچ یالی نباشد را رأس منفرد[1] می نامند.

۷ : ممکن است گراف هیچ یال نداشته باشد. چنین گرافی را گراف تهی می نامند.گرافی که حداقل یک یال داشته باشد را گراف غیر تهی گویند.



گراف مثال ۱



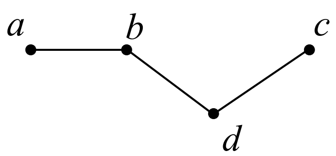
گراف مثال ۲

[1] – رأس منفرد را رأس م

☑ گراف غیر جهت دار

تعریف: یک مجموعه ی متناهی و نا تهی از رأس ها و یک مجموعه از یال ها بطوری که یالها رأس های مجزا را بـه هـم متصل کنند، ساختاری را به وجود می آورند که به آن یک گراف غیر جهت دار می گویند. بـه عبـارت دیگـر $G=(V,E)$ ساختاری مرکب از یک مجموعه ی متناهی و نا تهی مانند V و مجموعه ای شامل زیر مجموعه های دو عـضوی از عناصـر Vمانند E می باشد. عناصر V را رئوس و اعضای E را یال های گراف می نامند.

مثال: اگر $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{\{a,b\},\{c,d\},\{b,d\}\}$ آنگاه $G=(V,E)$ گرافی اسـت کـه چهـار رأس و سه یال دارد. این گراف دارای نمودار به شکل زیر است.



اگر b و a دو رأس از یک گراف غیر جهت دار باشند.یالی که این دو رأس را به هم متصل می کند را به صورت $\{a,b\}$ یا به اختصار ab و گاهی e_i نامگـذاری مـی کنند.

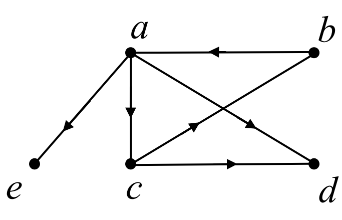
***

☑ گراف جهت دار

تعریف: گراف جهت دار $G=(V,E)$ ساختاری است مرکب از یک مجموعـه ی متنـاهی و نـا تهـی V و مجموعـه ای شامل زوج های مرتبی از اعضای V مانند E می باشد.

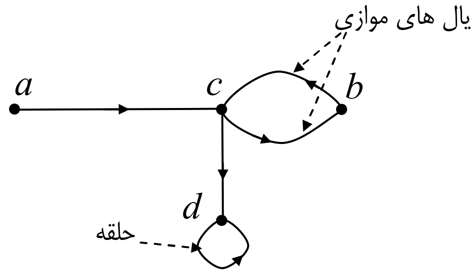
در گراف جهت دار یالها به صورت پاره خط جهت دار یا پیکان می باشند.

مثـال : اگـر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{(a,d),(a,c),(a,e),(b,a),(c,d),(c,b)\}$ آنگـاه $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و شش یال دارد. این گراف دارای نمودار به شکل زیـر است.



در یک گراف جهت دار دو یال مجزا با مجموعه ی یکسان از نقاط پایانی را موازی می نامند.

در یک گراف جهت دار یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند (ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند) را حلقه یا طوقه می نامند.



***

☑ معرفی چند مفهوم

۱: دو رأس که بوسیله ی یک یال به هم متصل شده باشند را دو رأس مجاور می گویند.

۲: رأسی که شامل هیچ یالی نباشد را رأس منفرد می گویند.

۳: ممکن است گراف شامل هیچ یالی نباشد.چنین گرافی را گراف تهی می نامند و گرافی که حداقل یک یال داشته باشد را گراف غیر تهی می گویند.

۴: در گراف جهت دار دو یال که ابتدا و انتهای یکسان داشته باشند را یالها ی موازی گویند.

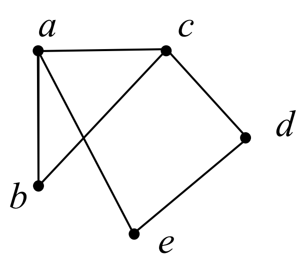
۵: بنابر تعریف گراف غیر جهت دار چنین گراف هایی نمی توانند،حلقه یا یالهای موازی داشته باشند.

تمرین: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bc,cd,de\}$ در این صورت:

الف: نمودار گراف را رسم کنید.

ب: رأس های مجاور رأس a را مشخص کنید.

حل:

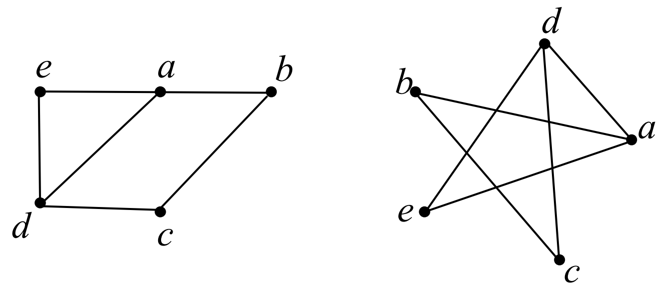


رأس های مجاور a عبارتند از: e و c و b

***

☑ گراف های مساوی

تعریف: دو گراف $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را مساوی گویند، هرگاه $V_1=V_2$ و $E_1=E_2$ مانند دو گراف زیر

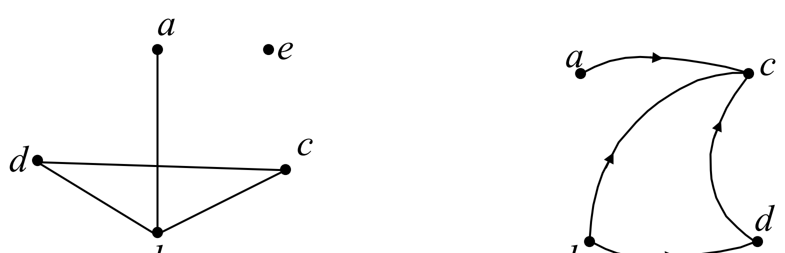


***

☑ گراف ساده

تعریف: گراف ساده گرافی (جهت دار یا غیر جهت دار)است که هیچ حلقه یا یالهای موازی نداشته باشد.

نتیجه: تمام گراف های غیر جهت دار ساده هستند.

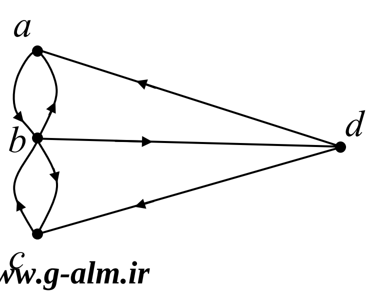


***

☑ گراف چندگانه

تعریف: اگر گراف جهت دار شامل یالهای موازی یا شامل حلقه باشد، به آن گراف چندگانه می گویند.

نتیجه: هر گراف که ساده نباشد،چندگانه است.



توجه: از اینجا به بعد هر جا کلمه ی گراف آورده شود. منظور گراف ساده است مگر اینکه خلاف آن گفته شود.

***

☑ نحوه ی تعیین تعداد گراف های ساده

در ابتدا چند تذکر جهت ورود به بحث مطرح می گردد.

تذکر۱: بدیهی است که با n نقطه ی متمایز غیر واقع بر یک خط راست حداکثر $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ پاره خط می توان رسم کرد.

تمرین: با ۵ نقطه ی متمایز غیر واقع بر یک راستا چند پاره خط می توان ایجاد کرد.

حل: $\binom{5}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$

تذکر۲: بدیهی است که هر مجموعه ی n عضوی دارای حداکثر $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ زیر مجموعه ی دو عضوی است.

تمرین: تعداد کل زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه ی $V = \{a,b,c,d,e,f\}$ را بدست آورید.

حل: $\binom{6}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$

تمرین: یک گراف غیر جهت دار با ۷ رأس حداکثر چند یال می تواند داشته باشد.

حل: $\binom{7}{2} = \frac{7(7-1)}{2} = 21$

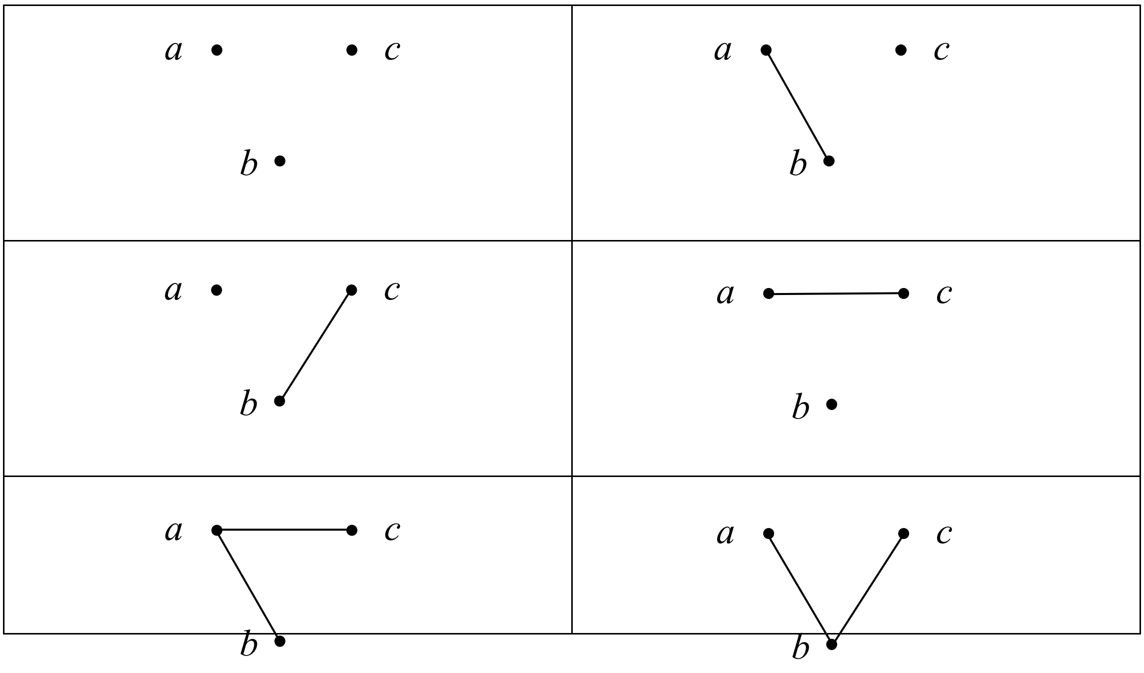
نکته: تعداد گراف های ساده[2] که با n رأس می توان تشکیل داد برابر $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ می باشد.

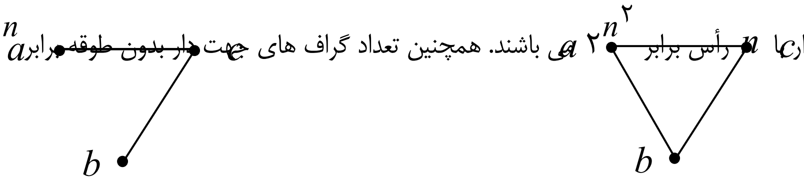
اثبات: اگر مجموعه ی V دارای n عضو باشد، پس دارای n رأس می باشد.حال چون مجموعه ی یالها متشکل از زیر مجموعه های دو عضوی از اعضای متمایز V است.در نتیجه حداکثر تعداد یالها با تعداد زیر مجموعه های دو عضوی V یعنی $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ برابر است. از طرفی در گراف های مختلف با n رأس ممکن است صفر یا یک یا دو یا سه و ... و یا $\binom{n}{2}$ یال داشته باشیم. بنابراین تعداد گراف های مختلف با n رأس با تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $\binom{n}{2}$ عضوی یعنی با $2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$ برابر است.

تمرین: اگر $V = \{a,b,c\}$. تعداد کل گراف های ساده که با رأس های مجموعه ی V تشکیل می شوند، را بدست آورید و سپس آنها را رسم کنید.

حل:

$$\text{تعداد گراف های ساده} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{3(3-1)}{2}} = 2^3 = 8$$





2. تعداد گراف های جهت دار با n رأس برابر 2^{n^2} می باشند. همچنین تعداد گراف های جهت دار بدون طوقه برابر 2^{n^2-n} می باشد.

تمرین: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$. تعداد گراف های ساده را بدست آورید که اعضای مجموعه ی V رأس های آنها باشند.

حل:

$$\text{تعداد گراف های ساده} = ۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = ۲^{\frac{۵(۵-۱)}{۲}} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

تمرین: با توجه به تمرین فوق، بیشترین تعداد یال های ممکن گراف ساده را بیابید.

حل:

$$\text{بیشترین تعداد یال های گراف ساده با ۵ رأس} = \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۵(۵-۱)}{۲} = ۱۰$$

تمرین: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$. حساب کنید که چند گراف ساده ی مختلف با سه رأس می توان رسم کرد که رئوس آن از مجموعه ی V انتخاب شده باشند.

۱) ۸ ۲)۳۲ ۳)۸۰ ۴)۶۴

حل:

$$\text{تعداد زیر مجموعه های سه عضوی} \binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!\times ۲!} = ۱۰$$

$$\text{تعداد گراف های ساده با ۳ رأس} = ۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = ۲^{\frac{۳(۳-۱)}{۲}} = ۲^{۳} = ۸$$

لذا طبق اصل ضرب تعداد کل گراف های مطلوب برابر $۱۰\times ۸ = ۸۰$ می شود.

نکته : اگر مجموعه ی V دارای n عضو باشد.در این صورت تعداد گراف های ساده که با r رأس از n رأس مجموعه ی V، تشکیل می شوند. برابراست با

$\binom{n}{r}\times ۲^{\frac{r(r-۱)}{۲}}=$ تعداد گراف های ساده که با r رأس از n ایجاد می شوند.

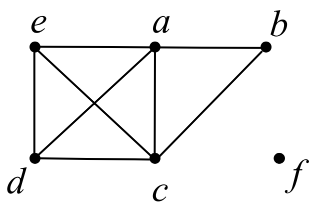
***

☑ مرتبه و اندازه ی گراف

تعریف: اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد، تعداد رئوس G (تعداد اعضای V) را مرتبه ی G می نامند و آنرا با $p(G)$ یا به اختصار p نمایش می دهند. واضح است که در هر گراف باید $p\in N$ باشد.

تعریف: اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد، تعداد یالهای G (تعداد اعضای E) را اندازه ی G می نامند و آنرا با $q(G)$ یا به اختصار q نمایش می دهند. واضح است که در هر گراف باید $q\in W$ باشد.

برای مثال مرتبه گراف زیر ۶ و اندازه ی آن ۸ می باشد.



نکته: در هر گراف ساده مانند G اگر p مرتبه و q اندازه ی آن باشند[3]، همواره داریم:

$$۰\le q\le\binom{p}{۲}$$

تمرین: اگر اندازه ی یک گراف ساده برابر ۴۳ باشد، حساب کنید این گراف حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

حل:

$$۰\le q\le\binom{p}{۲}\rightarrow ۰\le ۴۳\le\frac{p(p-۱)}{۲}\rightarrow ۸۶\le p(p-۱)\rightarrow p=۱۰$$

توجه کنید که این جواب با توجه به گزینه ها بدست آمد ولی می توان با حل نامعادله ی درجه ی دوم به کمک تعیین علامت نیز آنرا حل کرد.

---

3 – در گراف چندگانه داریم: $۰\le q\le ۲\binom{p}{۲}+p$

تمرین: اگر G گرافی ساده و غیر تهی باشد که تعداد یالهای آن دو برابر تعداد رأس هایش می باشد.حساب کنید که G حداقل چند رأس دارد؟

۱)۴ ۲)۳ ۳)۵ ۴)۷

حل:

$$\cdot \le q \le \binom{p}{۲} \to \cdot \le ۲p \le \binom{p}{۲}$$

$$\to ۲p \le \frac{p(p-۱)}{۲} \to ۴p \le p(p-۱) \xrightarrow{p>\cdot} ۴ \le p-۱ \to p \ge ۵$$

***

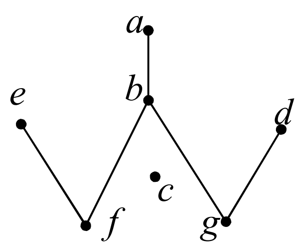
☑ درجه ی رأس

تعریف: تعداد یالهایی که از هر رأس می گذرند، را درجه ی آن رأس می نامند. درجه ی رأس v در گراف G را به صورت $\deg(v)$ نمایش می دهند. واضح است که برای هر رأس v داریم: $\deg(v) \in W$

نتیجه: طبق تعریف بدیهی است که درجه ی هر رأس منفرد برابر صفر است.

تمرین : در گراف زیر درجات رئوس را تعیین و سپس به صورت یک دنباله ی غیر صعودی بنویسید.

حل :



$\deg(a)=۱$ و $\deg(b)=۳$ و $\deg(c)=\cdot$ و $\deg(d)=۱$ و $\deg(e)=۱$ و $\deg(f)=۲$ و $\deg(g)=۲$

۰ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ دنباله ی درجات رئوس

تذکر:

۱: در یک گراف جهت دار اگر یک یال به صورت حلقه باشد، درجه ی رأس متناظر آن دو بار شمارش می شود.

۲ : در یک گراف ساده از مرتبه ی p درجه ی هر رأس، حداکثر $p-۱$ است.

تمرین: آیا گرافی وجود دارد که دنباله ی درجات رئوس آن ۰ و۱ و۲ و ۴ و ۵ باشد؟ چرا؟

حل : خیر، زیرا در این صورت درجه ی یک رأس برابر مرتبه ی گراف می شود، در حالی که درجه ی هر رأس باید حداکثر $p-۱$ باشد.

***

☑ درجه ی گراف

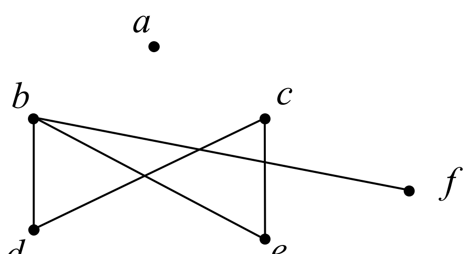
تعریف: درجه ی یک گراف را با مجموع درجه ی همه ی رأس های آن تعریف می کنند.

درجه ی کل گراف $D=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\deg(v_3)+\ldots+\deg(v_p)=\sum_{i=۱}^{p}\deg(v_i)$

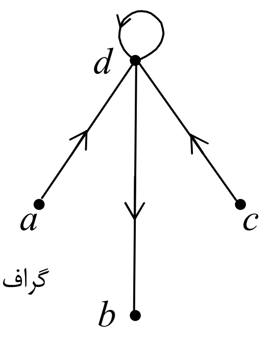
***

☑ رأس فرد – رأس زوج

تعریف: در یک گراف یک رأس را فرد می نامند، هرگاه درجه ی آن فرد باشد. همچنین یک رأس را زوج می نامند، هرگاه درجه ی آن زوج باشد.



گراف ۱



گراف ۲

تمرین: گراف های مقابل را در نظر گرفته و سپس

الف) درجه ی هر رأس و درجه ی کل گراف را بدست آورید.

ب)رأس های زوج و فرد را مشخص کنید.

ج) درجه ی رأس ها را به صورت دنباله ی غیر صعودی بنویسید.

د)درجه ی کل گراف را با تعداد یالهای آن مقایسه کنید.

حل:

گراف ۱: درجات رأ س ها

$\deg(a)=۰$ و $\deg(b)=۳$ و $\deg(c)=۲$ و $\deg(d)=۲$ و $\deg(e)=۲$ و $\deg(f)=۱$

مرتبه گراف $p=۶$ اندازه ی گراف $q=۵$

درجه ی کل گراف $D=۰+۳+۲+۲+۲+۱=۱۰$

b و f : رئوس فرد

a و c و d و e : رئوس زوج

۰و۱و۲و۲و۳ : دنباله ی غیر صعودی درجات

درجه ی کل گراف دو برابر تعداد یالهای آن است.

گراف ۲: درجات رأ س ها

$$\deg(a) = ۱ \text{ و } \deg(b) = ۱ \text{ و } \deg(c) = ۱ \text{ و } \deg(d) = ۵$$

$p = ۴$ مرتبه گراف

$q = ۴$ اندازه ی گراف

$D = ۱ + ۱ + ۱ + ۵ = ۸$ درجه ی کل گراف

a و b و c و d : رئوس فرد

گراف رأس زوج ندارد.

۱و۱و۱و۵ : دنباله ی غیر صعودی درجات

درجه ی کل گراف دو برابر تعداد یالهای آن است.

قضیه: در هر گراف درجه ی کل گراف (مجموع درجات رئوس) دو برابر اندازه ی گراف(تعداد یالها) است.یعنی:

$$D = ۲q$$

اثبات: فرض کنیم $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G با اندازه ی q باشد.چون هر یال دقیقاً از دو رأس آن می گذرد،لذا در محاسبه ی مجموع درجات رئوس، هر یال دو بار شمرده می شود.در نتیجه:

$$D = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) + ... + \deg(v_p) = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۲q$$

نتیجه۱: درجه ی کل گراف یعنی D همیشه زوج است.

نتیجه۲: تعداد رأس های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات: اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت.

$$D = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = A + B$$

بنابر نتیجه ی ۱ مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است.از طرفی عدد B نیز زوج است(چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید.) در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه ی فرد، همیشه زوج است.

تمرین: آیا گرافی وجود دارد که دنباله ی درجات رئوس آن ۰ و۱ و۱ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵ باشد؟ چرا؟

حل : خیر، زیرا این گراف ۵ رأس درجه ی فرد دارد، در حالی تعداد رئوس درجه ی فرد باید زوج باشد.

تمرین: در یک گراف با ۳۵ رأس که درجه ی هر رأس آن حداکثر ۵ باشد، بیشترین تعداد یال کدام است؟

۱) ۷۰   ۲) ۷۸   ۳) ۸۷   ۴) ۸۸

حل: اگر $V = \{v_۱, v_۲, v_۳, ..., v_{۳۵}\}$ مجموعه ی رئوس این گراف باشد. در این صورت :

$$\left.\begin{array}{r} \deg(v_۱) \le ۵ \\ \deg(v_۲) \le ۵ \\ \deg(v_۳) \le ۵ \\ .... \\ \deg(v_{۳۵}) \le ۵ \end{array}\right\} \to \deg(v_۱) + \deg(v_۲) + \deg(v_۳) + ... + \deg(v_{۳۵}) \le \sum_{i=۱}^{۳۵} ۵$$

$$\to D \le ۵ \times ۳۵ \to ۲q \le ۵ \times ۳۵ \to q \le \frac{۵ \times ۳۵}{۲} \to q \le ۸۷/۵ \xrightarrow{q \in W} q = ۸۷$$

تمرین: اگر G گرافی از مرتبه ی ۸ و اندازه ی ۱۱ طوری در نظر گرفته شود که درجه ی هر رأس آن فقط ۲ یا ۳ می باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه ی ۲ و چند رأس از درجه ی ۳ دارد؟

حل: گیریم که این گراف x رأس از درجه ی ۲ و y از درجه ی ۳ دارد، پس:

تعداد کل رئوس $x + y = p$

مجموع درجات رئوس $D = ۲x + ۳y = ۲q$

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۲q \\ x + y = p \end{cases} \to \begin{cases} ۲x + ۳y = ۲۲ \\ x + y = ۸ \end{cases} \to x = ۲ \quad , \quad y = ۶$$

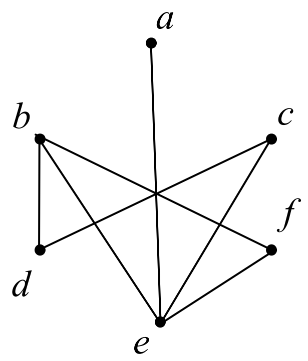
***

☑ ماکسیمم و می نیمم درجه ی رأس ها

تعریف: بزرگترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را ماکسیمم درجه ی G می نامند و آن را با $\Delta(G)$ یا به اختصار با Δ نمایش می دهند.

تعریف: کوچکترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را می نیمم درجه ی G می نامند و آن را با $\delta(G)$ یا به اختصار δ نمایش می دهند.

تمرین: در گراف زیر ماکسیمم و می نیمم درجه ی رأس ها را مشخص کنید.



حل:

$$\Delta = \deg(e) = ۴ \quad , \quad \delta = \deg(a) = ۱$$

تمرین: ثابت کنید در هر گراف از مرتبه ی p و اندازه ی q رابطه ی $\delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta$ برقرار است.

حل: گیریم که $V = \{v_۱, v_۲, ..., v_p\}$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} \delta \le \deg(v_۱) \le \Delta \\ \delta \le \deg(v_۲) \le \Delta \\ \delta \le \deg(v_۳) \le \Delta \\ \quad .... \\ \delta \le \deg(v_p) \le \Delta \end{array}\right\} \to \sum_{i=۱}^{p} \delta \le \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) \le \sum_{i=۱}^{p} \Delta$$

$$\to p\delta \le D \le p\Delta \to p\delta \le ۲q \le p\Delta \xrightarrow{\div p \ne ۰} \delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta$$

تمرین: اگر در یک گراف داشته باشیم: $\Delta = ۳$ و $\delta = ۱$ و $q = ۵$ و $p = ۳n$ تعیین کنید که n چه مقداری را می توانـد داشته باشد؟ $(n \in N)$

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۷

حل:

$$\delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta \rightarrow ۱ \le \frac{۲\times ۵}{۳n} \le ۳ \rightarrow \frac{۱}{۳} \le \frac{۳n}{۱۰} \le ۱ \rightarrow \frac{۱۰}{۳} \le ۳n \le ۱۰ \rightarrow \frac{۱۰}{۹} \le n \le \frac{۱۰}{۳}$$

$$\rightarrow ۱/۱ \le n \le ۳/۳ \xrightarrow{n\in N} n = ۲ \ , \ \ n = ۳$$

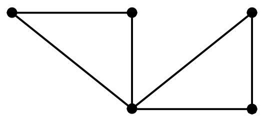
مقدار $n = ۳$ غیر قابل قبول است. زیرا با قبول این مقدار رأس با درجه ی صفر خواهیم داشت. درحالی که مینیمم درجات یک می باشد.

تمرین: در گراف ساده ی G با اندازه ی ۶ داریم $\Delta = ۴$ و $\delta = ۲$ در مورد مرتبه ی این گراف بحث کنید. سپس با بررسی حالت های مختلف p، نمودار گراف مورد نظر را رسم کنید.

حل:

$$\delta \le \frac{۲q}{p} \le \Delta \rightarrow ۲ \le \frac{۲\times ۶}{p} \le ۴ \rightarrow ۱ \le \frac{۶}{p} \le ۲ \rightarrow \frac{۱}{۲} \le \frac{p}{۶} \le ۱ \rightarrow ۳ \le p \le ۶$$

با بررسی حالت های مختلف برای $p = ۶$ و $p = ۵$ و $p = ۴$ و $p = ۳$ مشاهده می کنیم که فقط حالت $p = ۵$ قابل قبول است.



❋❋❋

فصل اول : نظریه ی گراف

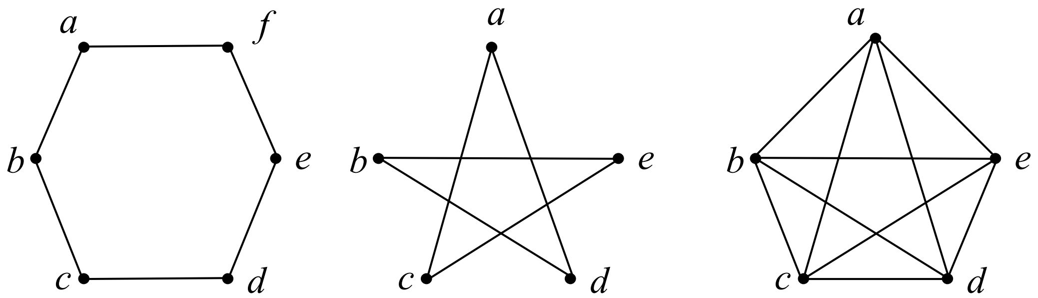
☑ گراف منتظم

تعریف: یک گراف را منتظم گویند، هرگاه

الف) درجه ی هر رأس آن برابر یک عدد صحیح و نا منفی باشد.

ب) تمام رأس های آن درجه ی مساوی داشته باشند.

اگر در یک گراف منتظم درجه ی هر رأس r باشد، آن گراف را $r-$ منتظم گویند.



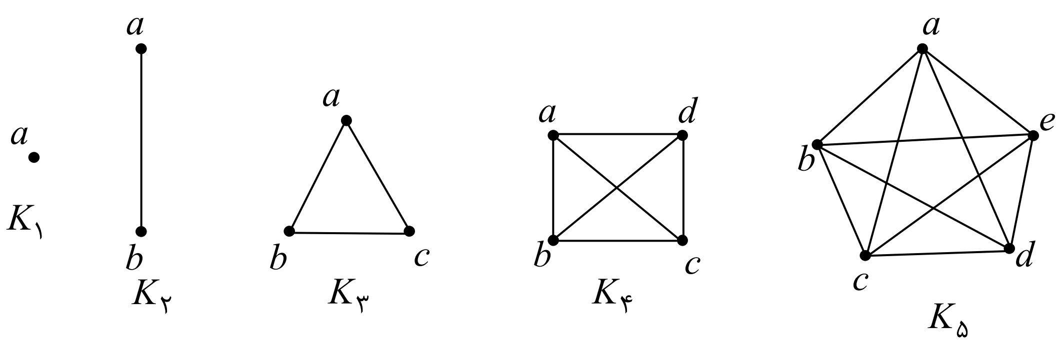
گراف ۲- منتظم   گراف ۲- منتظم   گراف ٤- منتظم

***

☑ گراف کامل

تعریف: یک گراف از مرتبه ی p را یک گراف کامل می گوییم، هرگاه درجه ی هر رأس آن $p-1$ باشد.

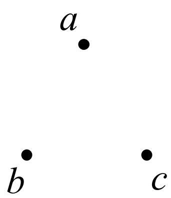
گراف کامل از مرتبه ی p را با K_p نمایش می دهند. در نمودار های زیر گراف های کامل از مرتبه ی ۱ تا ۵ رسم شده است.



***

☑ گراف تهی

تعریف: یک گراف از مرتبه ی p را تهی می گوییم، هرگاه هیچ یالی نداشته باشد. گراف تهی از مرتبـه ی p را بـا $\overline{K}_p$ نمایش می دهند. مانند گراف زیر:



$\overline{K}_۳$

چند نکته:

۱: تعداد یال های هر گراف $r-$ منتظم از مرتبه ی p برابر $\frac{pr}{۲}$ است. زیرا:

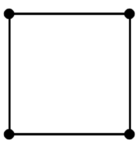
$$\begin{cases} D=۲q \\ D=pr \end{cases} \rightarrow ۲q=pr$$

یعنی در گراف منتظم pr زوج است. (پس در گراف منتظم p و r هر دو با هم فرد نیستند.)

۲: هر گراف کامل از مرتبه ی p یک گراف $(p-۱)-$ منتظم است و در نتیجه در هر گراف کامل از مرتبه ی p داریم:

$$r=p-۱ \quad و \quad q=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

۳: ممکن است گرافی منتظم باشد ولی کامل نباشد. مانند گراف زیر که ۲- منتظم است ولی کامل نیست.



۴: هر گراف تهی از مرتبه ی p یک گراف ۰- منتظم است.

۵: در هر گراف $r-$ منتظم همواره $\delta=\Delta=r$ است.

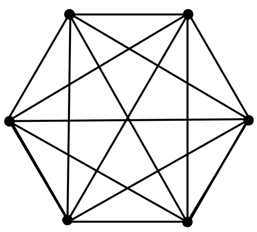
۶: اگر در یک گراف $\delta=\Delta$ باشد،آن گراف منتظم است.

۷: در هر گراف کامل تمام رئوس با هم مجاورند، یعنی بین هر دو رأس آن یک یال وجود دارد.

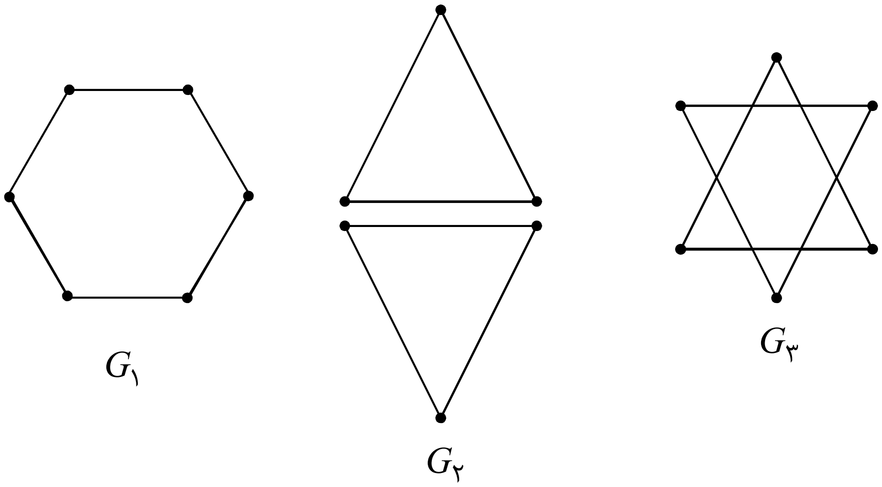
۸: در هر گراف $r-$ منتظم همواره $r \le p-۱$ است.

تمرین: گراف کامل $K_۶$ را رسم کنید.

حل:



تمرین: گراف هایی رسم کنید که ۲- منتظم بوده و از مرتبه ی ۶ باشند.



تمرین: تعداد یال های گراف کامل از مرتبه ی p از تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه ی $p-۲$ به تعداد ۱۳ واحد بیشتر است. مقدار p را پیدا کنید.

حل:

۱۳ + تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه ی $p-۲$ = تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه ی p

$$\Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{(p-۲)(p-۳)}{۲}+۱۳ \rightarrow p^۲-p=p^۲-۵p+۶+۲۶ \rightarrow ۴p=۳۲ \rightarrow p=۸$$

تمرین: گرافی ۳- منتظم از مرتبه ی p با اندازه ی q داده شده است.اگر $۲q=۵p-۸$ باشد. مقادیر p و q را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} ۲q=۵p-۸ \\ ۲q=۳p \end{cases} \rightarrow ۵p-۸=۳p \rightarrow p=۴ \quad , \quad q=۶$$

تمرین: آیا گراف تمرین قبل کامل است؟ چرا؟

حل: چون این گراف ۳- منتظم از مرتبه ی ۴ است پس کامل می باشد.

تمرین: اگر در یک گراف ۶- منتظم، داشته باشیم: $q-۲p=۱۶$ مقادیر p و q را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} q-۲p=۱۶ \\ ۲q=۶p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q-۲p=۱۶ \\ q=۳p \end{cases} \rightarrow ۳p-۲p=۱۶ \rightarrow p=۱۶ \quad , \quad q=۴۸$$

تمرین: ثابت کنید که گرافی ۵- منتظم از مرتبه ی ۱۷ وجود ندارد.

حل: (اثبات به روش برهان خلف) گیریم که چنین گرافی وجود دارد و مرتبه ی آن p می باشد. پس:

$$۲q = pr \rightarrow ۲q = ۱۷ \times ۵$$

و این ممکن نیست زیرا $۲q$ زوج است ولی $۸۵ = ۵ \times ۱۷$ فرد است و نمی توانند برابر باشند.

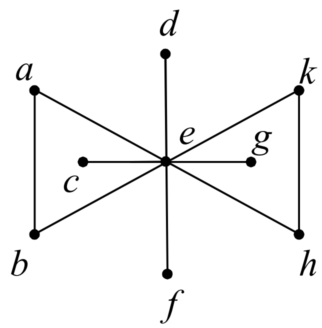
تمرین : پنج نفر به سفر می روند و قبل از سفر قرار می گذارند، هرکس به سه نفر دیگر نامه بفرستد.آیا امکان دارد، هرکس به آن سه نفری نامه بفرستد که از آنها نامه دریافت می کند، چرا؟

حل: اگر هر نفر را رأس و هر نامه را یال در نظر بگیریم. در این صورت

$$۲q = pr \rightarrow ۲q = ۵ \times ۳$$

و چنین چیزی ممکن نیست.

تمرین: به گراف مقابل چند یال اضافه شود ، تا به گراف کامل تبدیل شود.



حل: با توجه به گراف داریم: $q = ۱۰$ و $p = ۹$ حال اگر قرار است این گراف به یک گراف کامل تبدیل شود. باید $\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$ یال داشته باشیم.

لذا به تعداد ۲۶ =۱۰– ۳۶ یال به این گراف اضافه شود تا کامل شود.

تمرین: یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه ی هر رأس آن را بیابید.

حل:

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow ۵۵ = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow p(p-۱) = ۱۱۰ \rightarrow p = ۱۱$$
$$r = p - ۱ \rightarrow r = ۱۱ - ۱ = ۱۰$$

تمرین: مرتبه ی یک گراف برابر ۸ و اندازه ی آن ۲۷ می باشد. حساب کنید که درجه ی چند رأس آن ماکسیمم است.

حل: برای اینکه این گراف دارای تعداد یالهای بیشتری باشد، باید کامل از مرتبه ی ۸ باشد. لذا حداکثر تعداد یالهای آن برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$ خواهد شد. چون اندازه ی گراف ۲۷ است، لذا این گراف کامل $K_۸$ بوده و یک یال از آن حذف شده است. پس به جای اینکه ۸ رأس از درجه ۷ داشته باشد، دارای شش رأس از درجه ی ۷ و دو رأس از درجه ی ۶ می باشد. پس شش رأس آن درجه ی ماکزیمم دارند.

تمرین: یک گراف $r-$ منتظم از مرتبه ی ۹ وجود دارد. عدد r کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

حل:

$$۲q=pr\rightarrow ۲q=۹r$$

لذا r باید زوج باشد. از طرفی $r\le p-۱$ پس $r\le ۹-۱=۸$ در نتیجه گزینه ی دو درست است.

تمرین: اگر در یک گراف داشته باشیم: $\delta=\Delta=۶$ و $\sum_{i=۱}^{p}\deg(v_i)=۴۲$. مرتبه ی این گراف را بیابید.

حل: چون $\delta=\Delta$ می باشد، این گراف $r-$ منتظم است و $r=۶$

$$D=\sum_{i=۱}^{p}\deg(v_i)=۲q\xrightarrow{۲q=pr}۲q=۶p\xrightarrow{D=۲q=۴۲}۶p=۴۲\rightarrow p=۷$$

تمرین: یک گراف کامل ۱۲۰ یال دارد. تعداد رأس های این گراف را به دست آورید.

حل:

$$q=\binom{p}{۲}\rightarrow ۱۲۰=\frac{p(p-۱)}{۲}\rightarrow p(p-۱)=۲۴۰\rightarrow p(p-۱)=۱۶\times۱۵\rightarrow p=۱۶$$

تمرین: در کدام گراف کامل، تعداد رأس ها، نصف تعداد یال ها است؟

۱) $K_۴$ ۲) $K_۵$ ۳) $K_۶$ ۴) $K_{۱۰}$

حل:

$$q=\binom{p}{۲}\xrightarrow{p=\frac{q}{۲}\to ۲p=q}۲p=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{p\neq ۰}p-۱=۴\to p=۵$$

تمرین: یک گراف ساده ۳۵ یال دارد. این گراف حداکثر چند رأس درجه ی ۸ دارد؟

۱)۲   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۵

حل: تعداد یال های گراف کامل $K_۹$ برابر $q=\binom{۹}{۲}=۳۶$ می باشد. حال اگر از این گراف یـک یـال کـم کنـیم. دو رأس درجه ی ۷ و هفت رأس درجه ۸ خواهیم داشت.

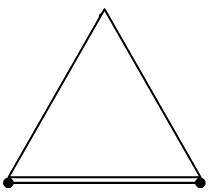
تمرین: در یک گراف $p=۱۰$ و $q=۴۰$ می باشد. مینیمم درجه ی رئوس چند است؟

حل: تعداد یال های گراف کامل $K_{۱۰}$ برابر $q=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$ می باشد. حال اگر فقط از یک رأس این گراف ۵ یـال حـذف کنیم. درجه ی آن رأس از ۹ به $۹-۵=۴$ تبدیل می شود. لذا $\delta=۴$.

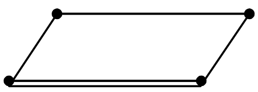
***

☑ گراف دور و گراف چرخ

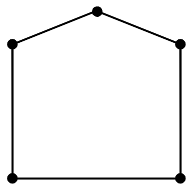
تعریف: هر گراف ۲- منتظم از مرتبه ی p را گراف دور می گویند و آن را با C_p نمایش می دهند.



$C_۳$



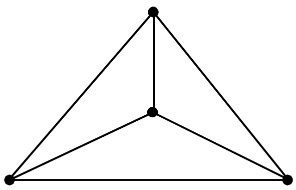
$C_۴$



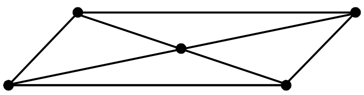
$C_۵$

***

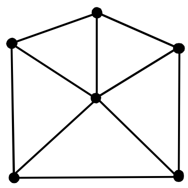
تعریف: اگر یک رأس به گراف دور اضافه شود و این رأس جدید به سایر رأس های گراف دور متصل شود. گـراف جدیـد را گراف چرخ می گویند و آن را با W_p نمایش می دهند.



$W_۴$



$W_۵$



$W_۶$

تذکر: هر گراف از مرتبه ی p که درجه ی یک رأس آن $p-۱$ و درجه ی بقیه ی رئوس برابر ۳ باشد. گراف چرخ می باشد.

☑ مکمل گراف

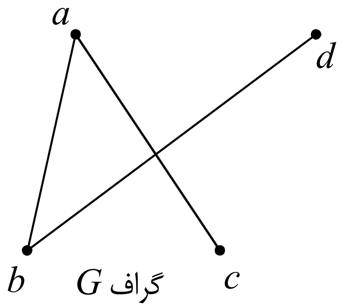
دو گراف $G_1(V_1, E_1)$ و $G_2(V_2, E_2)$ را مکمل گویند، هرگاه:

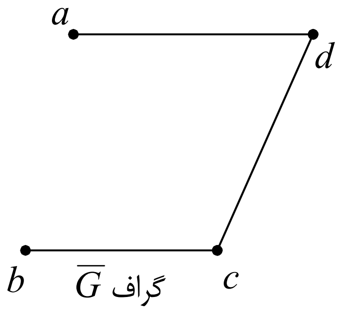
الف: $V_1 = V_2 = V$ ب: $E_1 \bigcup E_2 = E$

ج: $E_1 \bigcap E_2 = \Phi$ د: $G = (V, E)$ کامل باشد.

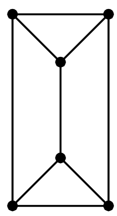
به عبارت دیگر دو گراف با رأس های یکسان و یال های متفاوت را مکمل همدیگر می نامند، هرگاه از اجتماع آنها یک گراف کامل حاصل شود.

اگر G یک گراف باشد، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش می دهند.

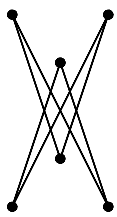




تمرین: مکمل گراف زیر را رسم کنید.



حل:

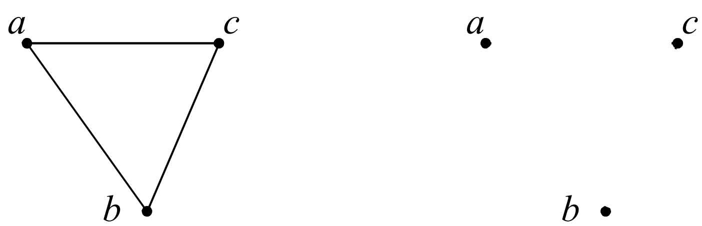


نتیجه :

۱: اگر بین دو رأس از یک گراف، یالی وجود داشته باشد، در گراف مکمل آن، بین این دو رأس یال وجود ندارد و برعکس

۲: اجتماع دو گراف مکمل همواره یک گراف کامل است.

۳: مکمل هر گراف تهی، یک گراف کامل و مکمل هر گراف کامل یک گراف تهی است.



٤: مکمل یک گراف ساده با p رأس و q یال، دارای p رأس ولی $\binom{p}{۲}-q$ یال است.

تمرین: یک گراف ساده مانند G از مرتبه ی ۸ دارای ۲۰ یال می باشد. حساب کنید مکمل آن یعنی $\overline{G}$ چند یال دارد.

حل :

$$\binom{p}{۲}-q=\binom{۸}{۲}-۲۰=\frac{۸(۸-۱)}{۲}-۲۰=۲۸-۲۰=۸$$

❋❋❋

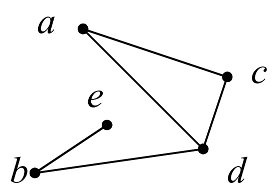
فصل اول : نظریه ی گراف

☑ مسیر گراف

تعریف: در یک گراف هر دنباله از یال که برای ارتباط بین دو رأس متفاوت (یا غیر متفاوت) بکار می رود، را مسیر می نامند.

توجه: اگر u و v دو رأس متفاوت از یک گراف مانند G باشند، یک مسیر از u به v در گراف G دنباله ای است شامل $m+1$ رأس دو به دو متفاوت که از u آغاز و به v ختم می شود. بطوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در گراف G مجاور باشند.(مگر اینکه احتمالاً ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.)

توجه داشته باشید که در نامگذاری مسیر ها از رأس ها استفاده می کنیم. مانند: مسیر $acdb$ در گراف زیر



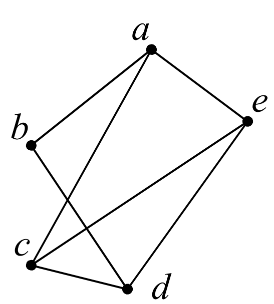
تعداد یالهای هر مسیر (عدد m) را طول مسیر می نامند. اگر دنباله ای فقط شامل یک رأس مانند v باشد، طول آن مسیر را صفر از v به v می گویند.

تمرین: با توجه به گراف فوق یک مسیر به طول صفر، یک مسیر به طول یک، یک مسیر به طول دو، یک مسیر به طول سه ، یک مسیر به طول چهار و همچنین یک مسیر به طول پنج بنویسید.

حل:

مسیر به طول صفر	dd
مسیر به طول ۱	be
مسیر به طول۲	cdb
مسیر به طول۳	$adbe$
مسیر به طول۴	$acdbe$
مسیر به طول۵	وجود ندارد.

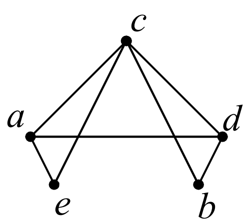
تمرین: در گراف مقابل تمام مسیر های از a به b را بنویسید.



حل:

	مسیر	طول مسیر
مسیر اول	ab	۱
مسیر دوم	$acdb$	۳
مسیر سوم	$acedb$	۴
مسیر چهارم	$aedb$	۳
مسیر پنجم	$aecdb$	۴

تمرین: در گراف مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟



۱)۵ ۲)۴ ۳)۳ ۴)۲

حل: از a به b فقط سه مسیر به طول ۳ وجود دارد. این مسیر ها عبارتند از

$adcb$ و $aecb$ و $acdb$

نکته : تعداد همه ی مسیر های متفاوت[1] به طول m در گراف K_p برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{p!}{(p-(m+۱))!}\right)$$

تمرین : در گراف $K_۵$ تعداد همه ی مسیر های متفاوت به طول ۳ را بنویسید.

حل :

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{p!}{(p-(m+۱))!}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۵!}{(۵-(۳+۱))!}\right)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵!}{۱!}=۶۰$$

نکته : تعداد مسیر های متفاوت[2] در گراف K_p برابراست با :

$$\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{p-۱}\frac{p!}{(p-(m+۱))!}\right)+\frac{p}{۲}$$

---

[1] – مسیر های متفاوت به مسیر هایی گویند که یا طول آنها یا ابتدا و انتهای آنها متفاوت باشد.

2 – تعداد مسیر های متفاوت در گراف K_p برابراست با : $p+\binom{p}{۲}[(p-۲)!e]$

برای مثال در گراف $k_۴$ داریم.

$$p+\binom{p}{۲}[(p-۲)!e]=۴+\binom{۴}{۲}[(۴-۲)!(۲/۷۱)]=۴+۶[۲\times ۲/۷۱]=۴+۶[۵/۴۲]=۴+۶(۵)=۳۴$$

تمرین : در یک گراف کامل مرتبه ی ۴ چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

$$\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{۳}\frac{۴!}{(۴-(m+۱))!}\right)+\frac{۴}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{۳}\frac{۴!}{(۳-m)!}\right)+۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴!}{۳!}+\frac{۴!}{۲!}+\frac{۴!}{۱!}+\frac{۴!}{۰!}\right)+۲$$
$$=\frac{۱}{۲}(۴+۱۲+۲۴+۲۴)+۲=۳۲+۲=۳۴$$

***

نکته : تعداد مسیر های متفاوت در گراف K_p به غیر از مسیر های به طول صفر (مسیر هایی که به شکل uu) ، برابراست با :

$$\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{p-۱}\frac{p!}{(p-(m+۱))!}\right)-\frac{p}{۲}$$

تمرین : در یک گراف کامل مرتبه ی ۴ چند مسیر متفاوت به طول های غیر صفر وجود دارد؟

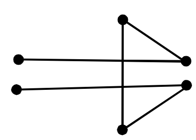
$$\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{۳}\frac{۴!}{(۴-(m+۱))!}\right)-\frac{۴}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\sum_{m=۰}^{۳}\frac{۴!}{(۳-m)!}\right)-۲=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۴!}{۳!}+\frac{۴!}{۲!}+\frac{۴!}{۱!}+\frac{۴!}{۰!}\right)-۲$$
$$=\frac{۱}{۲}(۴+۱۲+۲۴+۲۴)-۲=۳۲-۲=۳۰$$

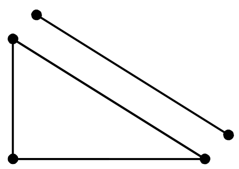
***

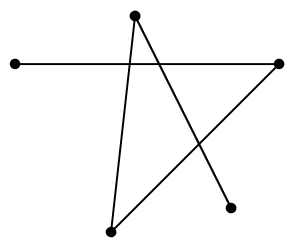
☑ گراف همبند و گراف ناهمبند

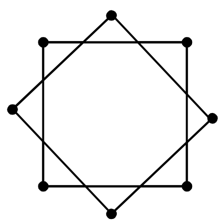
تعریف: یک گراف را همبند می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر یک گراف همبند نباشد،آن را ناهمبند می نامند.

در مثال های زیر گراف های۱و۳ همبند و گراف های۲و۴ ناهمبند می باشند.


گراف۱


گراف۲


گراف۳


گراف۴

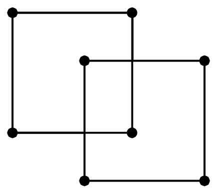
نتیجه:

۱: در گراف ساده از مرتبه ی p ، اگر درجه ی یکی از رأس ها $p-۱$ باشد. این گراف همبند است.

۲: هر گراف کامل همبند است.

۳: در یک گراف همبند با بیش از یک رأس درجه ی هر رأس حداقل یک می باشد.

۴: هر گراف تهی با بیش از یک رأس نا همبند است.



تمرین: آیا هر گراف $r-$ منتظم همبند است؟ چرا؟

حل: خیر، گراف زیر ۲- منتظم است ولی همبند نیست.

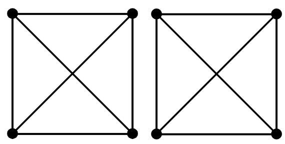
تمرین: در یک گراف ۳- منتظم از مرتبه ی p داریم: $q+۴=۲p$

الف) مقدار p و q را بدست آورید.

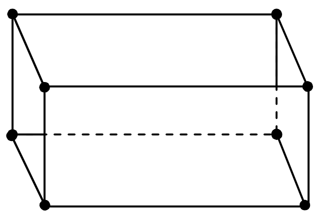
ب) یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند با این شرایط رسم کنید.

حل:

$$q+۴=۲p \to q=۲p-۴ \xrightarrow{۲q=rp} ۲(۲p-۴)=۳p \to p=۸$$
$$q=۲p-۴=۱۲$$



گراف نا همبند



گراف همبند

تمرین: یک گراف همبند از مرتبه ی ۲۰ داده شده است،حداقل و حداکثر اندازه ی این گراف را بیابید.

حل: واضح است که در هر گراف همبند داریم.

$$p-۱ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲} \to ۲۰-۱ \le q \le \frac{۲۰(۲۰-۱)}{۲} \to ۱۹ \le q \le ۱۹۰$$

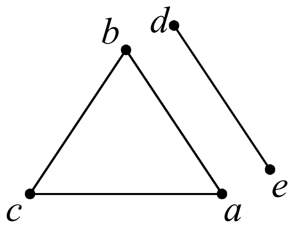
تمرین: گراف $G=(V,E)$ که در آن $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,bc,de\}$ داده شده است.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) درجه ی همه ی رأس ها را به صورت دنباله ی غیر صعودی بنویسید.

ج) آیا این گراف همبند است؟چرا؟

حل:



۱و۱و۲و۲و۲ دنباله ی درجات

گراف همبند نیست ، زیرا مثلاً از a به d مسیر وجود ندارد.

نکته :

۱ : اگر گراف G ناهمبند باشد، آنگاه تعداد یال های آن حداکثر $\binom{p-۱}{۲}$ می باشد.

۲ : اگر گراف G از مرتبه ی p حداقل $۱+\binom{p-۱}{۲}$ یال داشته باشد، آنگاه این گراف حتماً همبند است.

تمرین : گراف ناهمبند G از مرتبه ی ۵ داده شده است. حداکثر تعداد یال های آن را به دست آورید.

حل :

$$\binom{p-۱}{۲}=\binom{۵-۱}{۲}=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

تمرین : حداقل تعداد یال های گراف همبند از مرتبه ی ۵ را تعیین کنید.

حل :

$$\binom{p-۱}{۲}+۱=\binom{۵-۱}{۲}+۱=\binom{۴}{۲}+۱=\frac{۴\times ۳}{۲}+۱=۶+۱=۷$$

توجه : اگر در یک گراف $\delta\geq\frac{p-۱}{۲}$ باشد. آنگاه آن گراف همبند است.

تمرین : در یک گراف از مرتبه ی ۸ حداقل مقدار δ را طوری بیابید که این گراف همبند شود.

حل:

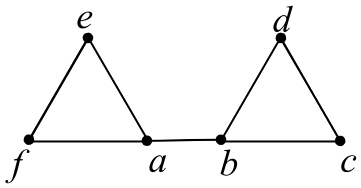
$$\delta \geq \frac{p-۱}{۲} \rightarrow \delta \geq \frac{۸-۱}{۲} \rightarrow \delta \geq ۳/۵ \rightarrow \delta = ۴$$

توجه :

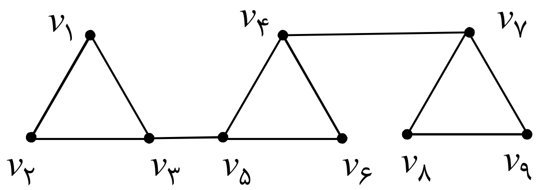
۱ : اگر G گرافی ناهمبند باشد.آنگاه مکمل آن یعنی $\overline{G}$ همبند است.

۲ : اگر $\overline{G}$ گرافی ناهمبند باشد.آنگاه مکمل آن یعنی G همبند است.

توجه: در یک گراف همبند، یک یال را پل می نامند، هرگاه با حذف آن یال (بدون حذف رئوس انتهای آن) گراف مفـروض ناهمبند شود. مانند یال ab در گراف زیر



تمرین : گراف مقابل چند پل دارد.

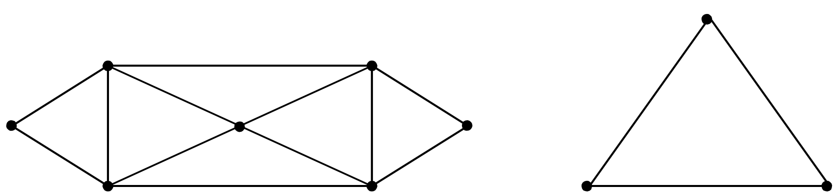


حل : این گراف دو پل دارد. $v_۳v_۵$ و $v_۴v_۷$. زیرا با حذف یکی از آنها گراف حاصل ناهمبند می شود.

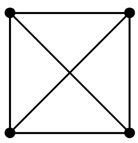
***

☑ گراف اویلری

تعریف: یک گراف غیر تهی را اویلری می گویند، هرگاه درجه ی تمام رأس های آن عدد طبیعی زوج باشد. مانند گراف هـای زیر



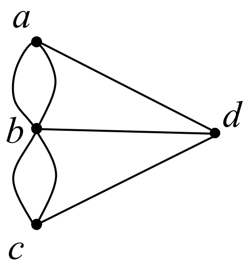
ولی گراف زیر اویلری نیست.



نتیجه:

۱: در هر گراف اویلری می توان روی تمام یالها حرکت کرد بطوری که از کلیه ی یالهای گراف فقط یک بار گذشت.

۲: اگر گراف G اویلری باشد،آنگاه تمام رأس های آن درجه ی زوج دارند.



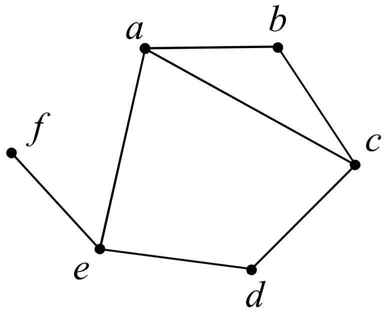
۳: طبق تعریف گراف اویلری، گراف مربوط به پل کونیگسبرگ اویلری نیست.

۴: هر گراف کامل K_p که در آن p عددی فرد باشد، اویلری است.

***

☑ دور گراف

تعریف: در یک گراف هر مسیر را که رأس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشند را یک دور می نامند. طول مسیر هر دور گراف را طول آن دور می گویند.



مثلاً: در گراف مقابل مسیر های $abcdea$ و $acdea$ و $abca$ دور هستند که به ترتیب دارای طولی برابر۵ و۴و۳ می باشند. توجه داشته باشیم که در هر دور رأس تکراری بجز ابتدا و انتها نداریم.

نتیجه:

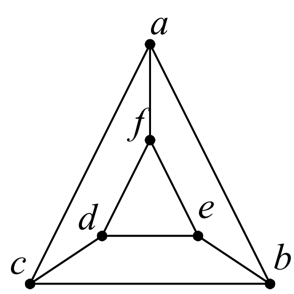
۱- طول هر دور نمی تواند کمتر از ۳ باشد.

۲- هر دور از یک گراف متشکل از m ($m \geq ۴$) رأس دارای طولی برابر $m-۱$ است.

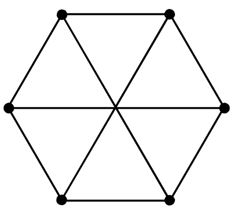
تمرین: گرافی ۳- منتظم رسم کنید که:

الف) شامل دوری به طول ۳ باشد. ب) دوری به طول ۳ نداشته باشد.

حل:



دور های به طول ۳: $abca$ و $fdef$



دور به طول ۳ ندارد.

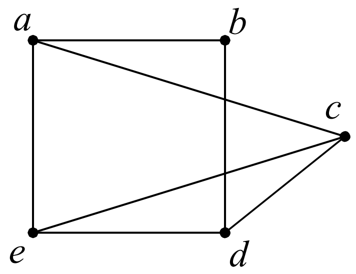
تمرین: در یک گراف داریم: $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,ce,cd,de\}$

الف) این گراف را رسم کنید.

ب) یک دور به طول ۴ و یک دور به طول ۵ در این گراف را بنویسید.

ج) نام یالهایی را بنویسید که اگر به این گراف اضافه شوند،گراف حاصل کامل می شود.

حل:



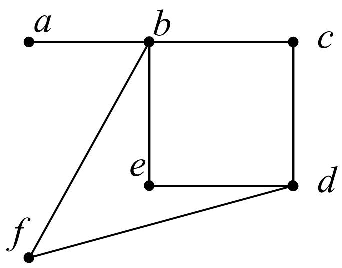
دور به طول ۴ : $abdea$

دور به طول ۵ : $abdcea$

اگر قرار است این گراف کامل شود، پس باید $\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$ یال داشته باشد. ولی اکنون گراف دارای فقط ۷ یال است لذا به تعداد $۱۰-۷=۳$ یال باید اضافه شود.این یالها عبارتند از: ad و be و bc

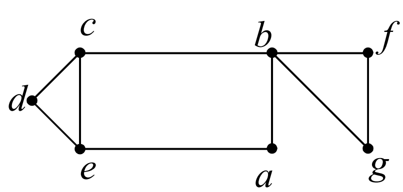
تمرین: در یک گراف همبند، درجه ی رأس ها به ترتیب ۱و۲و۲و۳و۳و۴ می باشند. اگر در این گراف دو رأس با درجه های بزرگتر مجاور نباشند، تعداد دور های به طول ۳ در این گراف را بیابید.

حل: چون رئوس به درجه های ۳و۴ مجاور نیستند، پس نمودار این گراف به شکل زیر می باشد. بدیهی است که این گراف دوری به طول ۳ ندارد.



تمرین: بزرگترین دور در گراف زیر از چند رأس متفاوت تشکیل شده است؟

حل: در این گراف دور $abcdea$ بزرگترین دور است، پس دارای ۵ رأس می باشد.



نکته:

۱: گراف تهی مسیر به طول یک یا بیشتر ندارد.

۲: هر گراف تهی ($\overline{K}_p$) دور ندارد.

۳: هر گراف که تعداد رأس های آن کمتر از ۳ باشد، نمی تواند دور داشته باشد.

۴: تعداد همه ی دور های متفاوت[3] به طول m در گراف K_p با مرتبه ی بیشتر از ۳ ، برابر است با:

$$\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}$$

۵ : تعداد همه ی دور های متفاوت در گراف K_p با مرتبه ی بیشتر از ۳ ، برابر است با:

$$\sum_{m=3}^{p}\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}$$

تمرین : تعداد همه ی دور های متفاوت به طول ۳ در گراف K_4 را تعیین کنید.

حل :

$$\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}=\binom{4}{3}\times\frac{(3-1)!}{2}=4\times1=4$$

تمرین : تعداد همه ی دور های متفاوت در گراف K_6 را تعیین کنید.

حل :

$$\sum_{m=3}^{p}\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}=\binom{6}{3}\times\frac{(3-1)!}{2}+\binom{6}{4}\times\frac{(4-1)!}{2}+\binom{6}{5}\times\frac{(5-1)!}{2}+\binom{6}{6}\times\frac{(6-1)!}{2}$$

$$=20+45+72+60=197$$

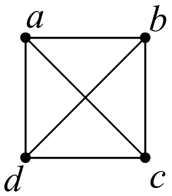
***

[3] – دور های متفاوت به دور هایی گویند که یا طول آنها یا ابتدا و انتهای آنها متفاوت باشد.

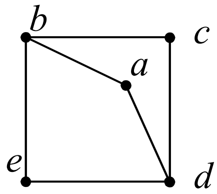
☑ گراف هامیلتونی

تعریف: اگر در یک گراف از مرتبه ی p ($p \geq 3$) دوری به طول p وجود داشته باشد.آن گراف را هامیلتونی می نامند. در هر گراف هامیلتونی دور به طول p را دور هامیلتونی می نامند.

توجه: دور هامیلتونی دوری است که از تمام رئوس گراف می گذرد.



مثال: گراف مقابل یک گراف هامیلتونی از مرتبه ۴ است و دور $abcda$ یک دور هامیلتونی به طول ۴ است.



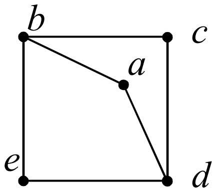
مثال: گراف زیر هامیلتونی نیست، زیرا در آن دوری وجود ندارد که از همه ی رأس ها بگذرد.

تمرین: نشان دهید که هر گراف هامیلتونی همبند است.

اگر گراف G هامیلتونی باشد، در این صورت شامل دوری است که از تمام رئوس می گذرد، بنابراین درجه هر رأس آن حداقل دو است و تمام رئوس به هم متصلند، یعنی بین هر دو رأس آن مسیر وجود دارد، پس همبند است.

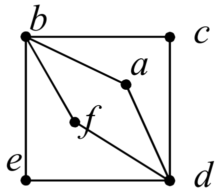
تمرین: آیا هر گراف همبند، هامیلتونی است؟چرا؟

حل: خیر، گراف زیر همبند است ولی هامیلتونی نیست.



تمرین : گرافی رسم کنید که اویلری باشد و هامیلتونی نباشد.

حل :



تمرین : ثابت کنید که در گراف هامیلتنی درجه ی هر رأس حداقل ۲ است.

حل : چون گراف هامیلتنی همبند است، پس هر رأس باید حداقل با دو رأس دیگر مجاور باشد. لذا درجه ی آن رأس حداقل ۲ می باشد.

توجه : در یک گراف از مرتبه ی $p \geq 3$ ، اگر داشته باشیم $\delta \geq \frac{p}{2}$ آنگاه آن گراف هامیلتونی است.

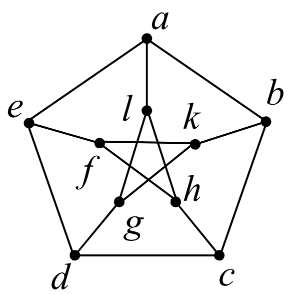
نکته : تعداد دور های هامیلتونی در یک گراف کامل K_p برابر $\frac{۱}{۲}(p-۱)!$

تمرین : در گراف کامل $K_۴$ چند دور هامیلتونی وجود دارد؟

حل :

$$\frac{۱}{۲}(p-۱)!=\frac{۱}{۲}(۴-۱)!=\frac{۱}{۲}\times ۳!=۳$$

تمرین: گراف مقابل را گراف پِتِرسِن می نامند. دور های این گـراف را بنویـسید و نـشان دهید که این گراف هامیلتونی نیست.



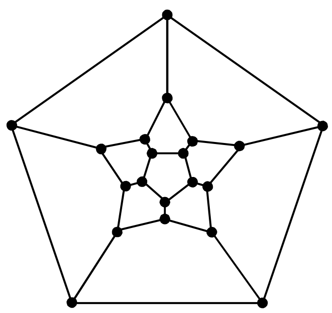
حل:

دور به طول۵ : $abcdea$ دور به طول۶ : $abcdgla$

دور به طول۸ : $bcdglhfkb$ دور به طول۹ : $fhl\,gkbcdef$

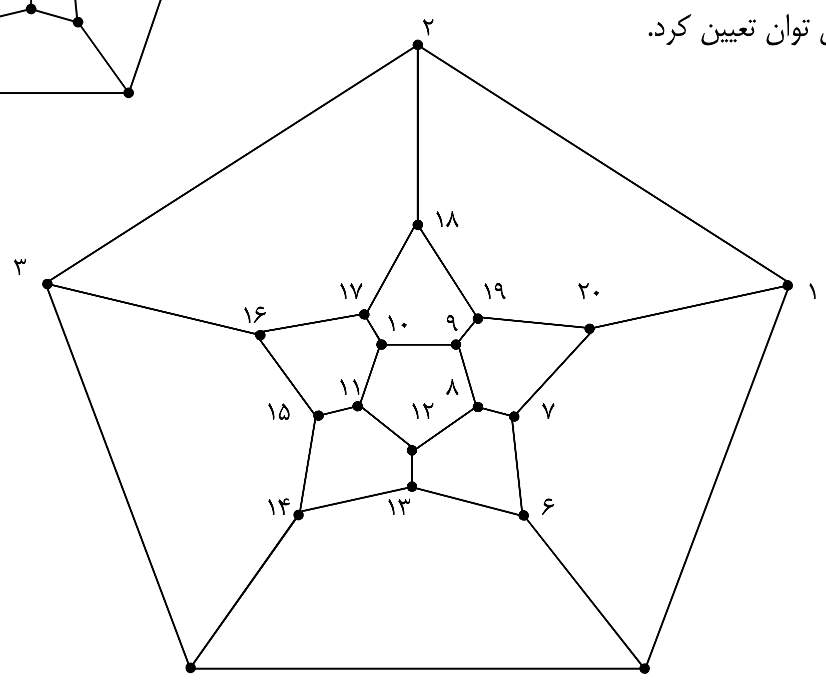
مرتبه این گراف ۱۰ است و چون این گراف دوری به طول ۱۰ ندارد، پس هامیلتونی نیست.

توجه: گراف پترسن گرافی همبند و ۳− منتظم است. این گراف از مرتبه ی ۱۰ و اندازه ی ۱۵ می باشد.



تمرین : آیا گراف زیر هامیلتونی است، چرا؟

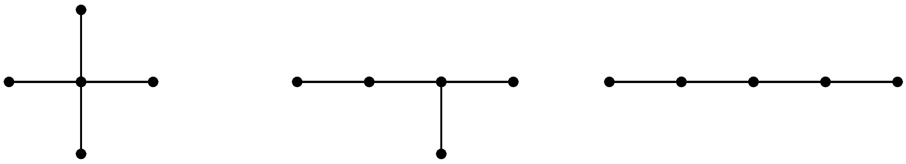
حل: این گراف هامیلتونی است. چون دوری دارد که از تمام رئوس می گذرد. این دور را با توجه با شماره ها می توان تعیین کرد.



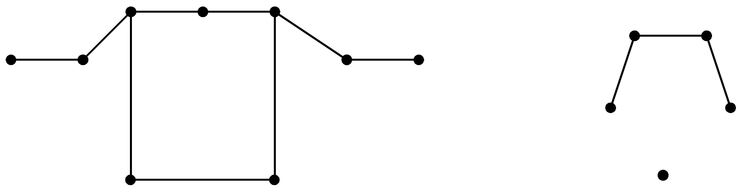
☑ درخت

تعریف: هر گراف همبند که شامل هیچ دوری نباشد را درخت می نامند. هر درخت از مرتبه ی p را با T_p نمایش می دهند.

مثال: گراف های زیر درخت از مرتبه ۵ می باشند.



ولی گراف های زیر درخت نیستند.



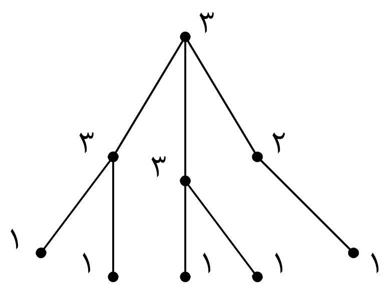
همبند نیست.

دور دارد.

تمرین : دنباله ی درجات رئوس یک درخت به شکل زیر است. این درخت را رسم کنید.

۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳

حل :



تمرین: ثابت کنید که بین هر دو رأس هر درخت دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

حل: چون هر درخت یک گراف همبند است، لذا بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد. این مسیر یکتا است، زیرا اگر چنین نباشد گراف دارای دور خواهد شد که با تعریف درخت متناقض است.

توجه: گرافی که بین هر دو رأس متفاوت آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد، یک درخت است. زیرا در این صورت همبند بوده و دور نخواهد داشت.

نتیجه:

۱: تعداد مسیر های متفاوت (به طول حداقل یک) در هر درخت از مرتبه ی p برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است.

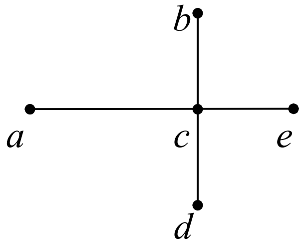
اثبات: چون بین هر دو رأس متمایز در هر درخت دقیقاً یک مسیر وجود دارد،پس تعداد کل مسیر ها بـا تعـداد انتخابهـای دو رأس از p رأس برابر است و این تعداد برابر $\frac{p(p-۱)}{۲}=\binom{p}{۲}$ می باشد.

۲: تعداد کل مسیر های متفاوت (به طول حداقل صفر) در هر درخت برابر $\frac{p(p+۱)}{۲}$ است.

اثبات: تعداد مسیر های متفاوت به طول حداقل صفر برابر تعداد رأس های درخت است. پس تعداد کل مسیر های می شود:

$$\binom{p}{۲}+p=\frac{p(p-۱)}{۲}+p=\frac{p(p-۱)+۲p}{۲}=\frac{p(p-۱+۲)}{۲}=\frac{p(p+۱)}{۲}$$

تمرین: درستی نتایج فوق را در درخت زیر بررسی کنید.



حل:

مسیر های به طول صفر: ee و dd و cc و bb و aa

مسیر های به طول یک: ce و cd و bc و ac

مسیر های به طول دو: bcd و ecb و ecd و acb و acd و ace

تمرین: یک درخت از مرتبه ی ۱۰ را در نظر بگیرید. سپس

الف: تعداد مسیر های متفاوت به طول حداقل یک در این درخت را بدست آورید.

ب: تعداد مسیر های متفاوت به طول حداقل صفر در این درخت را بدست آورید.

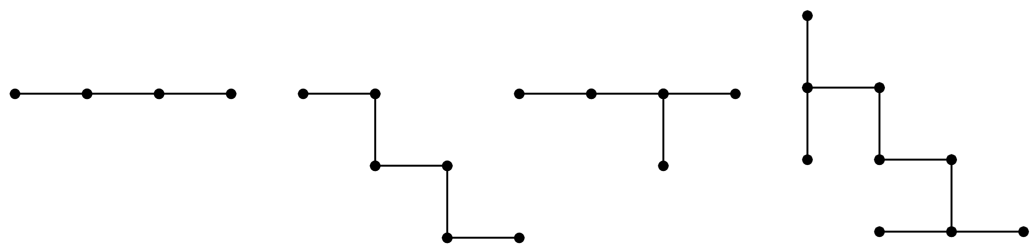
حل:

الف: $\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲}=۴۵$

ب: $\frac{p(p+۱)}{۲}=\frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲}=۵۵$

تمرین: ثابت کنید که هر درخت که بیش از یک رأس داشته باشد، حداقل دو رأس از درجه ی یک دارد.

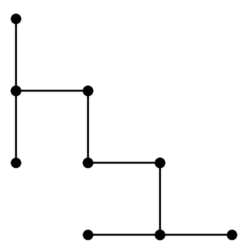
حل: واضح است که درخت دور ندارد. پس بزرگترین مسیر آن یک ابتدا و انتها دارد که ابتدا و انتهای آن از درجه ی یک مـی باشند. به درخت های زیر توجه کنید.



تمرین: اگر در یک گراف از مرتبه ی $p \geq ۲$ درجه ی همه ی رأس ها زوج باشد،ثابت کنید که این گراف درخت نیست.

حل: بنا به تمرین قبل اگر این گراف درخت باشد،پس باید حداقل دو رأس از درجه ی یک داشته باشد،ولی چـون تمـام رأس های آن زوج هستند،لذا این گراف رأس درجه ی یک ندارد،پس این گراف نباید درخت باشد.

توجه: در هر درخت با p رأس و q یال همواره $p = q + ۱$ است. به درخت زیر توجه کنید.



$p = ۹$ و $q = ۸$

نتیجه:

۱ : در هر درخت مجموع مرتبه و اندازه ی آن همواره عددی فرد است. زیرا:

$$p + q = (q + ۱) + q = ۲q + ۱$$

۲ : درجه ی کل هر درخت عددی زوج است. زیرا :

$$D = ۲q \xrightarrow{q = p - ۱} D = ۲(p - ۱)$$

تمرین: یک گراف همبند فاقد دور است. مجموع مرتبه و اندازه ی آن کدام است؟

۱)۱۲ ۲)۱۵ ۳)۱۸ ۴)۲۰

حل: این گراف همبند و فاقد دور است پس یک درخت می باشد و لذا با توجه به تمرین قبل مجموع مرتبه و اندازه ی آن عددی فرد می باشد و گزینه ی ۲ درست است.

***

تمرین: در یک گراف بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این گراف دارای ۷ رأس از درجه ی یک و ۵ رأس از درجه ی ۲ و k رأس از درجه ی ۳ باشد. عدد k را به دست آورید؟

حل: این گراف یک درخت است.پس:

درجه ی کل گراف

$$D = ۲q \rightarrow ۷(۱) + ۵(۲) + ۳(k) = ۲q \rightarrow ۷ + ۱۰ + ۳k = ۲q \rightarrow q = \frac{۱۷ + ۳k}{۲}$$

تعداد کل رئوس

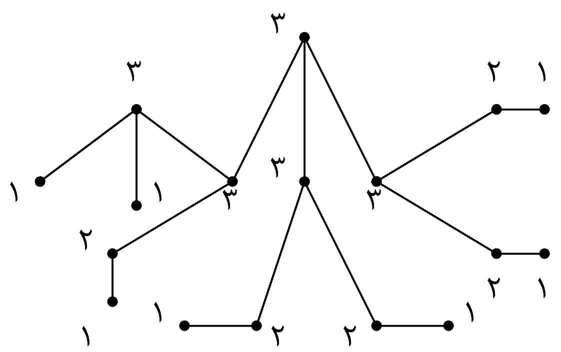
$$p = ۷ + ۵ + k \rightarrow p = ۱۲ + k$$

با توجه به اینکه این گراف یک درخت است پس:

$$p = q + ۱ \rightarrow ۱۲ + k = \frac{۱۷ + ۳k}{۲} + ۱ \rightarrow ۲۴ + ۲k = ۱۷ + ۳k + ۲ \rightarrow k = ۵$$

تمرین : نمودار درخت تمرین قبل را رسم کنید.

حل :



***

تمرین: دنباله ی غیر صعودی زیر دنباله ی درجات رأس های یک درخت است.

۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۲ ,۱ , ... ,۱

الف: تعداد رئوس درجه ی یک در این درخت را پیدا کنید.

ب: نمودار این درخت را رسم کنید.

حل: گیریم که این درخت k رأس از درجه ی یک دارد. پس:

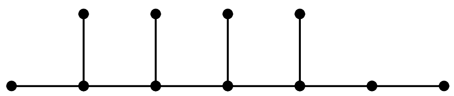
$$۳,۳,۳,۳,۲,\underbrace{۱,...,۱}_{k}$$

حل: درجه ی کل گراف

$$D=۲q \rightarrow ۴(۳)+۱(۲)+k(۱)=۲q \rightarrow ۱۴+k=۲q \rightarrow q=\frac{۱۴+k}{۲}$$

تعداد کل رئوس $p=۵+k$

با توجه به اینکه این گراف یک درخت است.پس: $p=q+۱ \rightarrow ۵+k=\frac{۱۴+k}{۲}+۱ \rightarrow k=۶$



تمرین: درختی ۲ رأس از درجه ی ۵ و ۳ رأس از درجه ی ۳ دارد و رأس از درجه ی ۴ ندارد و ماکسیمم درجه ی رئوس آن ۵ است. اگر مرتبه ی این درخت ۲۵ باشد،حساب کنید که این درخت چند رأس از درجه ی ۲ و چند رأس از درجه ی ۱ دارد؟

حل: گیریم که این درخت m رأس درجه ی ۲ و n رأس درجه ی یک دارد، پس می توان نوشت:

۲ رأس درجه ی ۵

۳ رأس درجه ی ۳

۰ رأس درجه ی ۴

m رأس درجه ی ۲

n رأس درجه ی ۱

بر این اساس داریم:

$$p=q+۱ \rightarrow ۲۵=q+۱ \rightarrow q=۲۴$$

درجه ی کل گراف

$$D=۲q \rightarrow ۲(۵)+۳(۳)+۰(۴)+m(۲)+n(۱)=۲(۲۴) \rightarrow ۲m+n=۲۹$$

تعداد کل رئوس

$$p = ۲ + ۳ + ۰ + m + n \xrightarrow{p=۲۵} ۲۵ = ۵ + m + n \to m + n = ۲۰$$

در نهایت می توان نوشت:

$$\therefore \begin{cases} ۲m + n = ۲۹ \\ m + n = ۲۰ \end{cases} \to m = ۹ \quad , \quad n = ۱۱$$

***

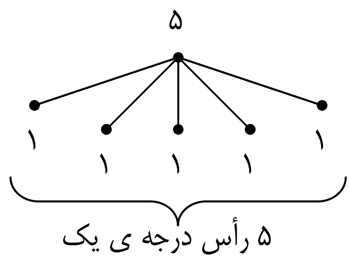
تمرین : درخت مربوط به تمرین قبل را رسم کنید.

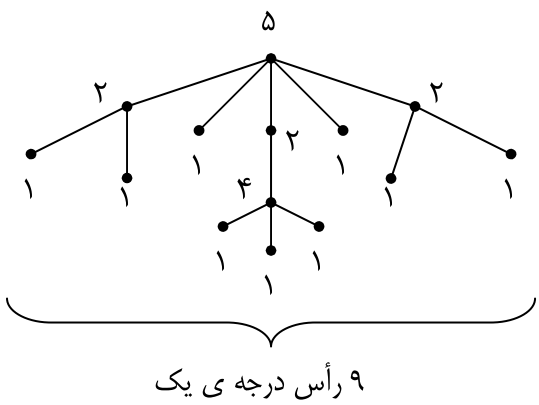
***

تمرین : اگر در یک درخت، ماگزیمم درجات k باشد. ثابت کنید که این درخت حداقل k رأس درجه یک دارد.

حل : فرض کنید که در درخت T ماگزیمم درجات k باشد. حال اگر از رأسی که درجه ی آن k باشد، حرکتی را شروع کنیم. از هر کدام از k یال متصل به آن می توان خارج شد. چون درخت T فاقد دور است، رأسی که از آن خارج شده ایم نمی توان به آن برگشت. یعنی از هر مسیر که خارج شویم، به یک رأس از درجه یک می رسیم. در نتیجه حداقل k رأس از درجه ی یک در این درخت وجود دارد.

به درخت های زیر توجه کنید.

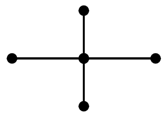


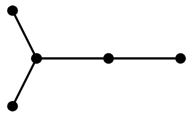


حداقل۵ رأس درجه ی یک

تمرین : تمام درخت های متفاوت[4] از مرتبه ی ۵ را رسم کنید.

حل :

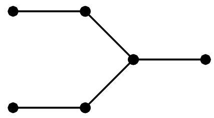

۱و۱و۱و۴


۱و۱و۲و۳

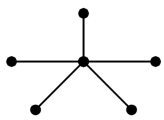
۱و۱و۲و۲

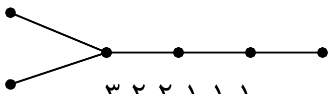
تمرین : تمام درخت های متفاوت[5] از مرتبه ی ۶ را رسم کنید.

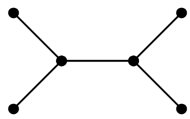
حل :

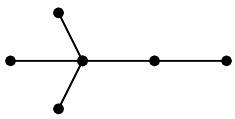

۱و۱و۲و۲و۳

۱و۱و۲و۲و۲


۱و۱و۱و۱و۵


۱و۱و۲و۲و۳


۱و۱و۱و۳و۳


۱و۱و۱و۲و۴

***

4 . درخت های متفاوت از مرتبه ی p به درخت هایی گویند که یا دنباله ی غیر صعودی درجات رئوس آنها متفاوت بوده یا مجاور بودن رئوس متفاوت باشد.

5 . تعداد درخت های متفاوت از مرتبه ی ۵ و۶ برابر است با : $۲^{p-۴} + (p-۴)$

برای مثال تعداد همه ی درخت های متفاوت از مرتبه ی ۶ برابر:

$$۲^{p-۴} + (p-۴) = ۲^{۶-۴} + (۶-۴) = ۴ + ۲ = ۶$$

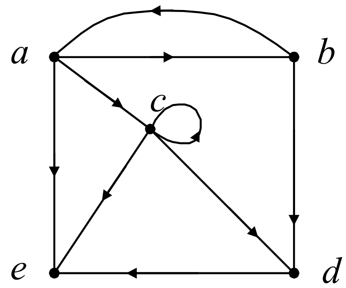
فصل اول : نظریه ی گراف

☑ ماتریس مجاورت یک گراف

تعریف: ماتریس مجاورت یک گراف جهت دار، ماتریسی مربعی از مرتبه ی $p \times p$ است که درایه های آن تعداد یالهای از رأس a به رأس b را نشان می دهند.

تمرین: اگر $V = \{a,b,c,d,e\}$ و $E = \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,d),(c,e),(c,d),(d,e),(b,a),(c,c)\}$ ماتریس مجاورت گراف $G = (V,E)$ را بنویسید.

حل: ابتدا نمودار این گراف را رسم می کنیم:



لذا ماتریس مجاورت این گراف به صورت زیر خواهد شد.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} \end{array}$$

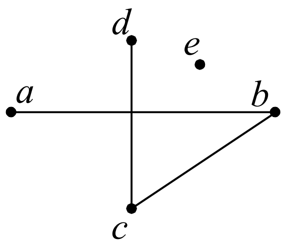
***

☑ ماتریس مجاورت یک گراف ساده

تعریف: اگر $G = (V,E)$ یک گراف ساده از مرتبه ی p باشد، در این صورت ماتریس مربعی $A(G) = [a_{ij}]_{p\times p}$ را ماتریس مجاورت گراف G می نامند، به شرط اینکه:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

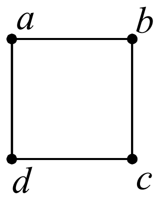
تمرین: ماتریس مجاورت گراف مقابل را بدست آورید.



حل:

$$A=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{5\times 5}\end{array}$$

تمرین: ماتریس مجاورت گراف ۲- منتظم از مرتبه ی ۴ را بنویسید.

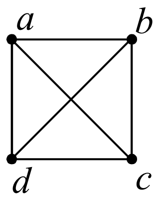


حل:

$$A=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{4\times 4}\end{array}$$

تمرین : ماتریس مجاورت گراف K_4 را رسم کنید.

حل:



$$A=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}_{4\times 4}\end{array}$$

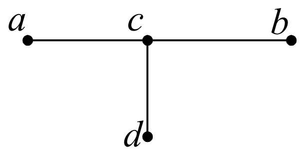
تمرین: متناظر با ماتریس مقابل یک گراف رسم کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

حل: بدیهی است که $p=۴$ پس داریم:

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۴} \end{array}$$

لذا:



***

☑ ویژگی های ماتریس مجاورت گراف ساده

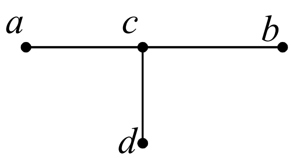
۱: ماتریس مجاورت، یک ماتریس مربعی از مرتبه ی p است.

۲: ماتریس مجاورت، متقارن است. (زیرا با ترانهاده اش برابر است.)

۳: درایه های روی قطر اصلی ماتریس مجاورت، صفر هستند. (زیرا گراف ساده طوقه ندارد.)

۴: هر درایه ی ماتریس مجاورت، صفر یا یک است. (زیرا گراف ساده یالهای موازی ندارد.)

۵ : مجموع درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مجاورت یک گراف ، برابر درجه ی رأس مربوط به آن سطر (یا ستون) است. برای مثال در گراف مقابل



$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۴} \end{array} \qquad \deg(c)=۱+۱+۰+۱=۳$$

۶ : مجموع درایه های ماتریس مجاورت یک گراف ، با مجموع درجات رأس های آن گراف برابر است. پس مجموع درایه های ماتریس مجاورت یک گراف برابر $۲q$ است. برای مثال در ماتریس فوق

$$D=۲q=۶$$

۷ : تعداد یال های یک گراف با نصف مجموع درایه های ماتریس مجاورت آن برابر است. یعنی $q=\frac{D}{۲}$

تمرین : ماتریس مجاورت زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۴} \end{array}$$

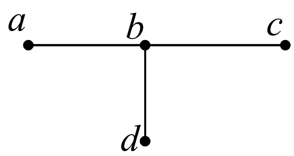
الف : مرتبه و اندازه ی گراف مربوطه را به دست آورید.

ب : دنباله ی درجات را به صورت غیر صعودی بنویسید.

ج : گراف را رسم کنید.

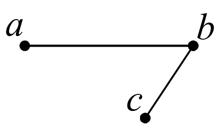
حل :

$$p=۴ \quad و \quad q=\frac{۶}{۲}=۳ \quad و \quad A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} ۱ & ۳ & ۱ & ۱ \end{array}\ {}_{۴\times۴} \end{array} \quad \rightarrow ۳,۱,۱,۱$$



توجه: اگر A ماتریس مجاورت گراف G و $V(G)=\{v_۱,v_۲,...,v_p\}$ باشد،آنگاه درایه ی واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A^۲$ (درایه های روی قطر اصلی) برابر با درجه ی رأس v_i در گراف G است. (یعنی اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده ی Gباشد،آنگاه درایه های روی قطر اصلی $A^۲$ درجه ی رأس های متناظر را نشان می دهد.)

تمرین: با توجه به گراف زیر درستی گزاره ی قبل را بررسی کنید.



حل:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \end{array}$$

$$A^{۲} = A\times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \deg(a) = ۱, \deg(b) = ۲, \deg(c) = ۱$$

نتیجه ی ۱: اگر A ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه ی p و اندازه ی q باشد،آنگاه مجموع درایه های روی قطر اصلی $A^{۲}$ برابر $۲q$ است.

$$A^{۲} \text{ مجموع درایه های روی قطر اصلی } = D = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۲q$$

تمرین: اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده ی G و $A^{۲}$ به صورت زیر باشد.

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۴\times۴}$$

الف: دنباله ی درجات رأس ها را به ترتیب غیر صعودی بنویسید.

ب: مرتبه و اندازه ی گراف را مشخص کنید.

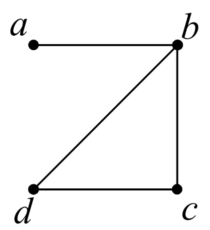
ج: نمودار این گراف را رسم کنید.

حل:

$$A^{۲}=\begin{array}{c|cccc|} & a & b & c & d \\ a & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ b & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ \\ c & ۱ & ۱ & ۲ & ۲ \\ d & ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \end{array}_{۴\times۴} \rightarrow \deg(a)=۱\ ,\ \deg(b)=۳\ ,\ \deg(c)=۲\ ,\ \deg(d)=۲$$

لذا دنباله ی درجه ی رئوس به صورت ۱و۲و۲و۳ می باشد.

ماتریس $A^{۲}$ یک ماتریس مربعی ۴×۴ است، لذا مرتبه ی G برابر ۴ می باشد.



$$p=۴$$

از طرفی $D=\sum_{i=۱}^{۴}\deg(v_i)=۳+۲+۲+۱=۲q \rightarrow q=۴$

تمرین: هرگاه $A^{۲}$ مربع ماتریس مجاورت درخت G باشد. مقدار x را بیابید.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} x & m & ۰ \\ m & ۱ & n \\ ۰ & n & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

حل: ماتریس $A^{۲}$ از مرتبه ی ۳×۳ می باشد.پس $p=۳$ از طرفی در هر درخت داریم:

$$p=q+۱ \rightarrow q=۲$$

همچنین $x+۱+۱=۲q \rightarrow x+۱+۱=۲(۲) \rightarrow x=۲$

تمرین: اگر A ماتریس مجاورت گراف ساده ی G و مجموع درایه های قطر اصلی $A^{۲}$ عددی اول باشد.اندازه ی گراف G را بیابید.

حل:

عدد اول = $۲q$ = مجموع درایه های قطر اصلی $A^{۲}$

و چون تنها عدد اول و زوج عدد ۲ است پس:

$$۲q=۲ \rightarrow q=۱$$

نتیجه ی ۲ : اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد. در این صورت :

الف : هر درایه ی قطر اصلی $M^۲$ برابر $p-۱$ می باشد.

ب : مجموع درایه های هر سطر یا ستون $M^۲$ برابر $(p-۱)^۲$ می باشد.

***

تمرین : اگر M ماتریس مجاورت گراف $K_{۱۰}$ باشد.

الف : مجموع درایه های هر سطر $M^۲$ را بیابید.

ب : مجموع تمام درایه ی های $M^۲$ را به دست آورید.

حل :

الف:

$$(p-۱)^۲ = (۱۰-۱)^۲ = ۸۱$$

ب :

$$p(p-۱)^۲ = (۱۰)(۱۰-۱)^۲ = ۱۰ \times ۸۱ = ۸۱۰$$

***

نتیجه ی ۳: چون تعداد «یک» های ماتریس مجاورت هر گراف برابر مجموع درجات رئوس آن گراف است. لذا در هر ماتریس مجاورت گراف از مرتبه ی p و اندازه ی q داریم :

تعداد صفر های ماتریس مجاورت $= p^۲ - ۲q$

تعداد یک های ماتریس مجاورت $= ۲q$

همچنین چون در هر درخت رابطه ی $p = q+۱$ بین مرتبه و اندازه ی آن وجود دارد. لذا در ماتریس مجاورت هر درخت داریم :

تعداد صفر های ماتریس مجاورت $= p^۲ - ۲q = (q+۱)^۲ - ۲q = q^۲ + ۱$

تعداد یک های ماتریس مجاورت $= ۲q$

تمرین : تعداد صفر و یک های موجود در ماتریس مجاورت درخت از مرتبه ی ۸ را به دست آورید.

حل :

اندازه ی درخت $q = p - ۱ = ۸ - ۱ = ۷$

تعداد صفر های ماتریس مجاورت $= q^{۲} + ۱ = ۴۹ + ۱ = ۵۰$

تعداد یک های ماتریس مجاورت $= ۲q = ۱۴$

***

فصل اول : نظریه ی گراف

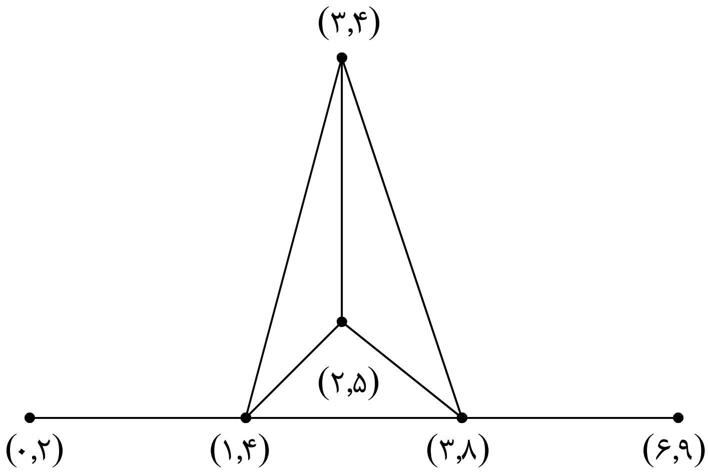
☑ گراف بازه ها

اگر رئوس یک گراف را بازه های باز از اعداد حقیقی در نظر بگیریم و دو رأس را وقتی با یک یال متصل کنیم که دو بـازه ی آن دو رأس اشتراک داشته باشند. در این صورت گراف حاصل را گراف بازه ای می نامند.

به عبارت دیگر : یک گراف که رئوس آن بازه هایی از اعداد حقیقی بوده، به طوری دو رأس آن در صورتی مجاور خواهند شد که بین بازه های وابسته به آنها اشتراک وجود داشته باشد. چنین گراف هایی را گراف بازه ها می گوییم.

تمرین: گراف بازه های (۱,۴)و (۶,۹)و (۳,۸)و (۳,۴)و (۲,۵)و (۰,۲) را رسم کنید.

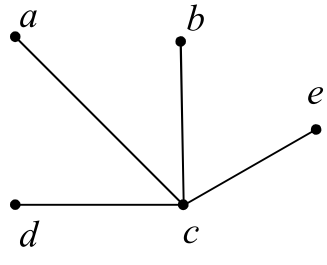
حل: رأس های گراف را بازه هـا ی فـوق در نظر می گیریم. دو رأس مجاورنـد هرگـاه دو بازه ی متناظر آنها اشتراک داشته باشند.



چون بازه ها باز می باشند، پس (۲,۵)و (۰,۲) اشتراکی نداشته و بنابراین یالی بین آنها وجود ندارد.

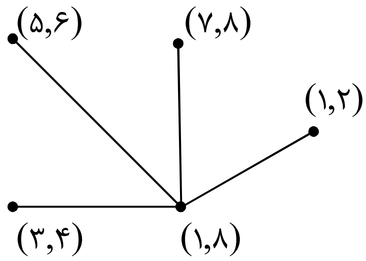
تذکر : برای اثبات بازه ای بودن یک گراف، کافی است بازه هایی را متناظر با رئوس آن پیدا کنیم که با توجه به یال های گراف اشتراک داشته باشند.[1]

تمرین: نشان دهید که گراف مقابل یک گراف بازه ای است.

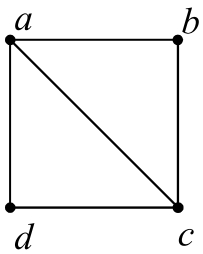


[1] . در چنین حالتی پیشنهاد می شود که از رأسی که بالترین درجه را داشته باشد،شروع کنید و طول بازه ی آن رأس را بزرگ بگیرید.

حل : گراف مقابل یک گراف بازه ای است. زیرا متناظر با هر رأس آن می توان بازه ای در نظر گرفت که با توجه به یال ها اشتراک داشته باشند.



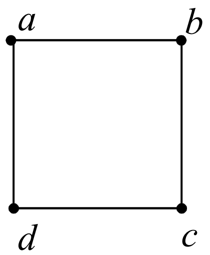
***



تمرین: نشان دهید که گراف مقابل یک گراف بازه ای است.

حل: کافی است بازه هایی متناظر با رئوس گراف در نظر بگیریم.

$d=(1,2)$ و $c=(1,6)$ و $b=(3,4)$ و $a=(1,5)$



تمرین: نشان دهید که گراف مقابل گراف بازه ای نیست.

حل: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که گراف فوق گراف بازه ای است. پس چهار بازه از اعداد حقیقی به صورت (a_4,b_4) و (a_3,b_3) و (a_2,b_2) و (a_1,b_1) وجود دارد به طوری که $d=(a_4,b_4)$ و $c=(a_3,b_3)$ و $b=(a_2,b_2)$ و $a=(a_1,b_1)$ داشته باشیم: $a_1\le a_2\le a_3\le a_4$.

$a_1\le a_4\le b_1 \rightarrow (a_1,b_1)\bigcap(a_4,b_4)\neq\phi \rightarrow a$ به d متصل است.

$a_1\le b_1\le a_3 \rightarrow (a_1,b_1)\bigcap(a_3,b_3)=\phi \rightarrow a$ به c متصل نیست.

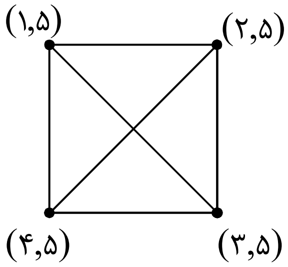
لذا داریم: $a_4\le b_1\le a_3$

یعنی $a_4\le a_3$ که خلاف فرض است. پس گراف مزبور گراف بازه ها نیست.

***

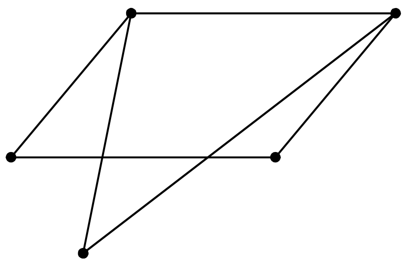
نتیجه:

۱: هر گراف کامل K_p گراف بازه ای است. مانند، گراف زیر



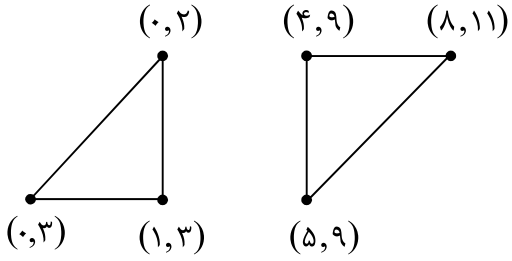
۲: اگر گرافی شامل یک n ضلعی($n \geq ۴$) بدون قطر باشد ، آن گراف بازه ای نیست.

مانند : گراف زیر که شامل یک چهارضلعی بدون قطر می باشد.. این گراف بازه ای نیست.



تمرین : نشان دهید که نمودار گراف متناظر با بازه های (۰,۲) و (۱,۳) و (۴,۹) و (۵,۹) و (۸,۱۱) و (۰,۳) یک گراف ۲- منتظم و ناهمبند است.

حل : با تعیین اشتراک دو به دوی بازه های داده شده ، گراف زیر به دست می آید. این گراف ۲- منتظم و ناهمبند است.



***

☑ الگوریتم هاول – حکیمی برای تشخیص گرافی بودن یک دنباله

اگر در یک دنباله ی غیر صعودی از اعداد حسابی، اولین عدد را از سمت چپ حذف کنیم و به تعداد آن از اعداد بعدی یک واحد کم کنیم و با رعایت نزولی بودن دنباله، این روش را تا آن قدر ادامه دهیم تا صفر و یک ظاهر شود. در این صورت می گوییم این دنباله گرافی است. دنباله ی گرافی ، دنباله ای است که بتوان متناظر با آن یک گراف رسم کرد.

مثال : آیا دنباله ی زیر ، یک دنباله ی گرافی است.

۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵

حل : ابتدا ۵ را حذف کرده، سپس از ۵ عدد بعدی ، یک واحد، یک واحد کم می کنیم و پس از مرتب کردن اعداد دنباله (در صورت لزوم) این عمل را ادامه می دهیم.

۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵

⇐ ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲

⇐ ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲

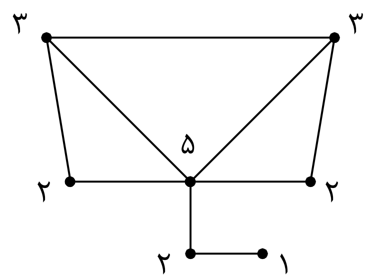
⇐ ۱ و ۱ و ۰ و ۱

⇐ ۰ و ۱ و ۱ و ۱

لذا دنباله ی حاصل گرافی است.

تمرین : گراف متناظر با دنباله ی مثال فوق را رسم کنید.

حل :



تمرین : آیا دنباله ی (۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵) دنباله ی گرافی است؟

حل :

(۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱) ← (۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۰) ← (۱ و ۰ و ۱- و ۰)

چون رأس درجه ی ۱- وجود ندارد. پس دنباله ی داده شده گرافی نیست.

توجه : اگر در استفاده از الگوریتم هاول – حکیمی روی یک دنباله ی غیر صعودی از اعداد، به هر یک از موارد زیر، برخورد کنیم. دنباله ی داده شده گرافی نیست.

الف : اگر عدد بزرگتر ، از تعداد اعداد دیگر ، بیشتر باشد.

مثلاً : (۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۷)

ب : اگر تعداد رئوس فرد، فرد باشد.

مثلاً : (۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۴ و ۵)

ج : اگر عدد ۱- پیدا شود.

مثلاً : (۱- و۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵)

توجه : اگر همه ی اعداد صفر شوند ، دنباله ی داده شده گرافی است.

***

تمرین : کدام یک از دنباله های زیر گرافی است. گراف متناظر را رسم کنید.

۱) (۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴)

۲) (۰ و ۲ و ۳ و ۳ و۴ و ۵)

۳) (۲ و ۲ و ۲ و ۴ و ۴ و ۴ و ۶)

۴) (۰ و ۱ و ۱و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و۴ و ۷)

۵) (۱ و ۲ و ۳ و ۳ و۴ و ۷)

۶) (۱ و۲ و ۲ و۳ و ۳)

***

موفق باشید.

عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

نظریه ی اعداد

پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان باوی

www.mathtower.org

اردیبهشت ۱۳۸۵

فصل دوم : گذری بر نظریه ی اعداد

نظریه ی اعداد شاخه ای از ریاضیات است که بیشتر به خواص اعداد صحیح یا به طور جزئی تر اعداد طبیعی می پردازد.

☑ **عضو ابتدا و عضو انتهای یک مجموعه**

تعریف: اگر Z مجموعه ی اعداد صحیح و $A \subset Z$ در این صورت عضو $a_\circ \in A$ را عضو ابتدای مجموعه ی A می نامند، هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم: $a_\circ \le a$

عضو ابتدای مجموعه ی A را با $a_\circ = Min(A)$ نشان می دهیم و آن را کوچکترین عضو A نیز می نامیم.

تعریف: اگر Z مجموعه ی اعداد صحیح و $A \subset Z$ در این صورت عضو $b_\circ \in A$ را عضو انتهای مجموعه ی A می نامند، هرگاه به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم: $b_\circ \ge a$

عضو انتهای مجموعه ی A را با $b_\circ = Max(A)$ نشان می دهیم و آن را بزرگترین عضو A نیز می نامیم.

تمرین: در هر مورد عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه ی داده شده را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $A = \{x \in Z \mid -۳ < x \le ۵\}$ ب) $B = \{x \in Z \mid ۰ < x \le ۱\}$

ج) $C = \{x \in Z \mid x < ۳\}$ د) $D = \{x \in Z \mid x \ge ۳\}$

هـ) $E = \{x \in Z \mid x < \sqrt{۲}\}$ و) $F = \{x \in Z \mid \log^x > ۱\}$

حل:

الف)

$$A = \{x \in Z \mid -۳ < x \le ۵\} = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$
$$\therefore Min(A) = -۲ \quad , \quad Max(A) = ۵$$

ب)

$$B = \{x \in Z \mid ۰ < x \le ۱\} = \{۱\} \Rightarrow Min(B) = Max(B) = ۱$$

ج)

$$C = \{x \in Z \mid x \le ۲\} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$$

$Min(C) =$ وجود ندارد. و $Max(C) = ۲$

د)

$D=\{x\in Z \mid x\geq ۳\}=\{۳,۴,۵,۶,\cdots\}$

$Min(D)=۳$ و $Max(D)=$ وجود ندارد.

هـ)

$E=\{x\in Z \mid x<\sqrt{۲}\}=\{۱,۰,-۱,-۲,-۳,....\}$

$Min(E)=$ وجود ندارد. و $Max(E)=۱$

و)

$\log^{x}>۱\rightarrow x>۱۰^{۱}\rightarrow x>۱۰^{۱}\rightarrow x\geq ۱۱$

$F=\{x\in Z \mid \log^{x}>۱\}=\{۱۱,۱۲,۱۳,...\}$

$Min(F)=۱۱$ و $Max(F)=$ وجود ندارد.

تمرین : زیر مجموعه ای از اعداد صحیح مثال بزنید که کوچکترین عضو نداشته باشد.

حل :

$$\{x \mid x\in Z, x\leq ۲\}=\{....,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

***

☑ **مجموعه های کراندار**

تعریف: اگر Zمجموعه ی اعداد صحیح و $A\subset Z$ در این صورت عضو $n\in Z$ را یک کران بالای A گوییم، هرگاه به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم: $n\geq a$

اگر $A\subset Z$ دارای کران بالا باشد،آنگاه مجموعه ی A را از بالا کراندار گویند.

تعریف: اگر Zمجموعه ی اعداد صحیح و $A\subset Z$ در این صورت عضو $n\in Z$ را یک کران پایین A گوییم، هرگاه به ازای هر $a\in A$ داشته باشیم: $n\leq a$

اگر $A\subset Z$ دارای کران پایین باشد،آنگاه مجموعه ی A را از پایین کراندار گویند.

تعریف: مجموعه ی $A\subset Z$ را کراندار گوییم، هرگاه هم دارای کران بالا و هم دارای کران پایین باشد.

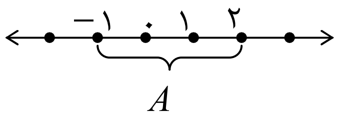
تمرین: مجموعه ی $A=\{x\in Z \mid -۲<x\leq ۲\}$ داده شده است. عضو ابتدا و عضو انتها و همچنین کران بالا و کران پایین این مجموعه را در صورت وجود مشخص کنید.

حل:

$$A=\{x\in Z \mid -۲<x\leq ۲\}=\{-۱,۰,۱,۲\}$$

$Max(A)=۲$

$Min(A)=-۱$



تمام اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ = کران بالا

تمام اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی ۱- = کران پایین

تمرین: کران بالا و کران پایین مجموعه ی $B=\{x\in Z \mid x>۲\}$ درصورت وجود ، را بنویسید.

حل:

$$B=\{x\in Z \mid x>۲\}=\{۳,۴,۵,....\}$$

این مجموعه کران بالا ندارد.

تمام اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی ۳ کران پایین این مجموعه هستند.

تذکر۱: عضو ابتدا و عضو انتهای مجموعه ی $A\subset Z$ در صورت وجود منحصر بفرد هستند و عضو مجموعه نیز می باشند، ولی کران بالا و کران پایین آن در صورت وجود منحصر بفرد نیستند و از مجموعه ی Z انتخاب می شوند و لزوماً عضو مجموعه ی A نیستند.

تذکر۲:

الف) مجموعه ی تهی کراندار است.

ب) مجموعه ی اعداد طبیعی از پایین کراندار است ولی کران بالا ندارد.

ج) مجموعه ی اعداد صحیح کراندار نیست. (زیرا کران بالا و کران پایین ندارد.)

***

تعریف: مجموعه ی $A \subset Z$ را خوش ترتیب گوییم، هرگاه هر زیر مجموعه ی ناتهی از آن عضو ابتدا داشته باشد.

برای مثال مجموعه ی اعداد حسابی خوش ترتیب است، زیرا هر زیر مجموعه ی ناتهی از آن دارای عضو ابتدا است.

تمرین: کدام یک از مجموعه های زیر خوش ترتیب است.

الف) $A = \{x \in Z \mid x \le ۱\}$ ب) $B = \{x \in Z \mid x \ge ۲\}$

حل:

الف)

$$A = \{x \in Z \mid x \le ۱\} = \{۱, ۰, -۱, -۲, -۳, ...\}$$

این مجموعه خوش ترتیب نیست، زیرا مجموعه ی $\{-۱, -۲, -۳, ...\}$ زیر مجموعه ی ناتهی از آن است ولی عضو ابتدا ندارد.

ب)

$$B = \{x \in Z \mid x \ge ۲\} = \{۲, ۳, ۴, ۵, ...\}$$

این مجموعه خوش ترتیب است، زیرا هر زیر مجموعه ی ناتهی از آن دارای عضو ابتدا است.

***

☑ اصل خوش ترتیبی

مجموعه ی اعداد طبیعی خوش ترتیب است.

به عبارت دیگر اگر $A \subset N$ و $A \neq \Phi$، آنگاه A دارای کوچکترین عضو است.

نتیجه:

۱: مجموعه ی اعداد طبیعی خوش ترتیب است، زیرا هر زیر مجموعه ی ناتهی از آن دارای عضو ابتدا است.

۲: هر زیر مجموعه ی ناتهی از اعداد طبیعی نیز خوش ترتیب است.

۳: هر زیر مجموعه ی ناتهی از اعداد صحیح که از پایین کراندار باشد،خوش ترتیب است.

***

☑ اصل استقراء ریاضی

اگر $A \subset N$ دارای ویژگی های زیر باشد،آنگاه $A = N$

الف) $۱ \in A$

ب) هرگاه $n \in A$ آنگاه $(n+۱) \in A$

به عبارت دیگر هر زیر مجموعه ی N که شامل ۱ باشد و نیز هر عضوی که در آن باشد،عدد ما بعد آن نیز در مجموعه باشد، با مجموعه ی N برابر است.

***

قضیه: اصل استقرای ریاضی و اصل خوش ترتیبی معادلند.

« یعنی با پذیرفتن یکی به عنوان اصل، دیگری را می توان به عنوان قضیه ثابت کرد. »

اثبات:

الف) اصل استقرای ریاضی از اصل خوش ترتیبی نتیجه می شود.

اصل خوش ترتیبی $\Leftarrow$ اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم $A \subset N$ و $1 \in A$ به ازای هر $n \in N$ اگر $n \in A$ آنگاه $(n+1) \in A$ ثابت می کنیم: $A = N$

گیریم که $A \neq N$ (برهان خلف) در نتیجه عضوی مانند $n_0 \in N$ وجود دارد که $n_0 \notin A$ در نتیجه $n_0 \in A' = N - A$ لذا $A' \subset N$ و $A' \neq \Phi$ پس بنا بر اصل خوش ترتیبی A' دارای عضو ابتدا است. فرض کنیم که این عضو a_0 باشد($Min(A') = a_0$). چون $1 \in A$ لذا $1 \notin A'$ پس $a_0 \neq 1$ در نتیجه $(a_0 - 1) \in N$ و چون $(a_0 - 1) < a_0$ پس $(a_0 - 1) \notin A'$ لذا $(a_0 - 1) \in A$ در نتیجه $a_0 = (a_0 - 1) + 1 \in A$ و چون $a_0 \in A'$ این تناقض است. پس فرض $A \neq N$ باطل است.

ب) اصل خوش ترتیبی از اصل استقرای ریاضی نتیجه می شود.

اصل استقرای ریاضی $\Leftarrow$ اصل خوش ترتیبی

فرض کنیم که $A \subset N$ و $A \neq \Phi$ اگر $1 \in A$ در این صورت ۱ عضو ابتدای A و حکم ثابت می شود.

اگر $1 \notin A$ مجموعه ی کران های پایین A را مجموعه ی B می نامیم.یعنی تعریف می کنیم:

$$B = \{n \in N \mid \forall n \in B, n \leq a\}$$

لذا $1 \in B$ و چون $A \neq \Phi$ پس عضوی مانند a موجود است که $a \in A$. فرض کنیم c عدد طبیعی بزرگتر از a باشد.در این صورت $c \notin B$ در نتیجه $B \neq N$ بنا بر اصل استقرای ریاضی عدد طبیعی m موجود است بطوری که $m \in B$ و $(m+1) \in B$.

ثابت می کنیم که این m عضو ابتدای A است.یعنی $Min(A) = m$

چون $m \in B$ لذا به ازای هر $a \in A$ داریم: $m \le a$ حال کافی است که نشان دهیم $m \in A$. گیریم که $m \notin A$ و a عـضو دلخواهی از A باشد. لذا $a \ne m$ در نتیجه $m < a$ پس $m + ۱ \le a$ لذا $(m+۱) \in B$ که متناقض با انتخاب m است. لـذا $Min(A) = m$

***

☑ **معادل های اصل استقرای ریاضی**

۱: اصل استقرای معمولی

اگر p خاصیتی برای اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم:

الف) عدد« ۱ » خاصیت p را داشته باشد.یعنی $p(۱)$ درست باشد.

ب) به ازای هر عدد طبیعی n اگر $p(n)$ آنگاه $p(n+۱)$

در این صورت هر عدد طبیعی خاصیت p را دارد.

۲: اصل استقرای تعمیم یافته

اگر p خاصیتی برای اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم:

الف) به ازاء یک $m \in Z$ عبارت $p(m)$ درست باشد.

ب) به ازای هر عدد صحیح $n \ge m$ از درستی $p(n)$ درستی $p(n+۱)$ نتیجه شود.

در این صورت $p(n)$ به ازاء هر عدد صحیح $n \ge m$ درست است.

۳: اصل استقرای قوی

اگر p خاصیتی برای اعداد طبیعی باشد و داشته باشیم:

الف) اگر $p(۱)$ درست باشد.

ب) به ازای هر عدد طبیعی n اگر تمام اعداد طبیعی کوچکتر از n خاصیت p را داشته باشند.آنگاه $p(n)$ نیز درست است.

در این صورت هر عدد طبیعی خاصیت p را دارد.

***

تمرین : اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که :

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{n}{۲}=\binom{n+۱}{۳}$$

حل : می دانیم که $\binom{۱}{۲}=۰$ لذا می توان نوشت:

$$P(n):\binom{۱}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{n}{۲}=\binom{n+۱}{۳} \qquad n\geq ۲$$

$$P(۲):\binom{۱}{۲}+\binom{۲}{۲}=\binom{۲+۱}{۳}\rightarrow ۰+۱=۱$$ $P(۲)$ درست است.

$$P(k):\binom{۱}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{k}{۲}=\binom{k+۱}{۳}$$ فرض استقرا

$$P(k+۱):\binom{۱}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{k}{۲}+\binom{k+۱}{۲}=\binom{k+۲}{۳}$$ حکم استقرا

طرف اول حکم $$\underbrace{\binom{۱}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\dots+\binom{k}{۲}}_{\binom{k+۱}{۳}}+\binom{k+۱}{۲}=$$

$$\binom{k+۱}{۳}+\binom{k+۱}{۲}=\frac{(k+۱)!}{۳!\,(k-۲)!}+\frac{(k+۱)!}{۲!\,(k-۱)!}$$

$$=\frac{(k-۱)(k+۱)!+۳(k+۱)!}{۳!\,(k-۱)!}=\frac{(k+۱)!\,(k-۱+۳)}{۳!\,(k-۱)!}=\frac{(k+۱)!\,(k+۲)}{۳!\,(k-۱)!}=\frac{(k+۲)!}{۳!\,(k-۱)!}=\binom{k+۲}{۳}$$

***

تمرین : اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، در این صورت ثابت کنید که :

$$۲\binom{n}{۲}+n=n^{۲}$$

حل :

$$۲\binom{n}{۲}+n=۲\left(\frac{n(n-۱)}{۲}\right)+n=n^{۲}-n+n=n^{۲}$$

تمرین : اگر برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید که :

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=1+(2\binom{2}{2}+2)+(2\binom{3}{2}+3)+\dots+(2\binom{n}{2}+n)^2$$

$$=(1+2+3+\dots+n)+2(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n}{2})=\frac{n(n+1)}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+2\times\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}=\frac{n(n+1)}{2}+2\times\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3}=\frac{3n(n+1)+2(n+1)(n)(n-1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(3+2n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

***

تمرین: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

حل:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}=\frac{n!(n-k+1)+n!k}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}$$

$$=\frac{n\times n!-k\times n!+n!+k\times n!}{k!(n-k+1)!}=\frac{n\times n!+n!}{k!(n+1-k)!}=\frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

***

تمرین: ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n و عدد حسابی $0\le k\le n$ همواره $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ یک عدد طبیعی است.

اثبات : به کمک اصل استقرای ریاضی

اگر $n=۱$ در این صورت چون $۰\le k\le ۱$ لذا $k=۰$ یا $k=۱$ در هر صورت

$$\binom{n}{k}=\binom{۱}{۰}=\binom{۱}{۱}=۱\in N$$

حال فرض می کنیم که حکم برای اعداد طبیعی n و عدد حسابی $۰\le k\le n$ برقرار باشد.(فرض استقرا) ثابت می کنیم کـه بـرای

هر $۰\le k\le n+۱$ حاصل $\binom{n+۱}{k}$همواره عدد طبیعی است.(حکم استقرا)

چون $\binom{n+۱}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}$ بنابراین اگر $k=n+۱$ آنگاه $\binom{n+۱}{k}=\binom{n+۱}{n+۱}=۱\in N$

و اگر $k=۰$ آنگاه $\binom{n+۱}{k}=\binom{n+۱}{۰}=۱\in N$

حال اگر $۰<k<n+۱$آنگاه $۱\le k\le n$ پس $۰\le k-۱<n$ و بنابر فرض استقرا $\binom{n}{k}\in N$ و $\binom{n}{k-۱}\in N$

در نتیجه:

$$\forall k\in W \ni ۰\le k\le n+۱:\binom{n+۱}{k}=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\in N}+\underbrace{\binom{n}{k-۱}}_{\in N}\in N$$

***

تمرین: چند جمله ی اول دنباله ی زیر موسوم به دنباله ی **اعداد لوکا** عبارتند از:

۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ۲۹, ۴۷, ...

اگر جمله ی nام را با L_n نمایش دهیم، این دنباله با شرایط اولیه ی $L_۱=۱$ و $L_۲=۳$ و برای هر $n>۳$ ، دیگر جملات آن ، از رابطه ی به اصطلاح بازگشتی زیر

$$L_n=L_{n-۱}+L_{n-۲}$$

بدست می آیند. با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$L_n<(\frac{۷}{۴})^n$$

اثبات:

اگر $S=\{n\in N \mid L_n<(\frac{۷}{۴})^n\}$ چون $L_۱=۱<(\frac{۷}{۴})^۱$ و $L_۲=۳<(\frac{۷}{۴})^۲$ آنگاه $۱\in S$ و $۲\in S$

حال اگر $n\geq ۳$ و به ازاء هر k وقتی که $k<n$ و $k\in S$ آنگاه $L_{n-۱}<(\frac{۷}{۴})^{n-۱}$ و $L_{n-۲}<(\frac{۷}{۴})^{n-۲}$ پس:

$$L_n=L_{n-۱}+L_{n-۲}<(\frac{۷}{۴})^{n-۱}+(\frac{۷}{۴})^{n-۲}=(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴}+۱)<(\frac{۷}{۴})^n$$

یعنی $n\in S$ پس $S=N$ لذا برای هر عدد طبیعی n داریم: $L_n<(\frac{۷}{۴})^n$

توجه:

$$\frac{۴۴}{۱۶}<\frac{۴۹}{۱۶}\rightarrow\frac{۱۱}{۴}<\frac{۴۹}{۱۶}\rightarrow\frac{۷}{۴}+۱<\frac{۴۹}{۱۶}$$

$$n\geq ۳:(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴}+۱)<(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۴۹}{۱۶})$$

$$\rightarrow(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴}+۱)<(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴})^۲\rightarrow(\frac{۷}{۴})^{n-۲}(\frac{۷}{۴}+۱)<(\frac{۷}{۴})^n$$

***

تمرین: ثابت کنید، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند،آنگاه یک عدد طبیعی n وجود دارد، بطوری که $na\geq b$

(خاصیت ارشمیدسی اعداد صحیح)

حل:

اگر $a\geq b$ آنگاه به ازاء هر $n\in N$ واضح است که $na\geq b$ و حکم برقرار است و اگر $a=۱$ در این صورت $n=b$ می شود.

اگر $a<b$ و $a\neq ۱$ و هیچ $n\in N$ یافت نشود به قسمی که $na\geq b$ (برهان خلف) پس به ازای هر عدد طبیعی n داریم $na<b$.

چون $a<b$ لذا $b-a>۰$ همچنین $b-a\geq ۱$ پس عدد $b-a+۱$ یک عدد طبیعی است. لذا بنابر فرض داریم:

$$(b-a+۱)a<b\rightarrow ba-a^۲+a<b\rightarrow ba-b<a^۲-a\rightarrow b(a-۱)<a(a-۱)\xrightarrow{a\neq ۱}b<a$$

و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

تمرین : ثابت کنید که هر مجموعه ی ناتهی از اعداد صحیح و از پایین کراندار، دارای کوچکترین عضو و هر مجموعه ی ناتهی از اعداد صحیح و از بالا کراندار دارای بزرگترین عضو است.

حل : فرض کنیم $A \subseteq Z$ ناتهی و از پایین کراندار باشد. بنابراین عدد صحیح n موجود است، به قسمی که به ازای هر $a \in A$ داریم $n \le a$. اگر $n \in A$ که حکم بدیهی است، زیرا $Min(A) = n$

فرض کنیم $n \notin A$ در این صورت به ازای هر $a \in A$ داریم $n < a$ و در نتیجه $a - n > 0$ و لذا $a - n \in N$ (❋). حال مجموعه ی $B = \{a - n \mid a \in A\}$ را در نظر می گیریم. بدیهی است که اعضای B همه ی اعداد طبیعی هستند. بنا بر (❋) و اینکه B ناتهی است. پس بنا به اصل خوش ترتیبی B دارای عضو ابتدا است. فرض کنیم $Min(B) = r_0$ در نتیجه:

$\forall a \in A : r_0 \le a - n$ رابطه ی (۱)

و بنابر تعریف عضو ابتدای یک مجموعه

$\exists a_0 \in A : r_0 = a_0 - n$ رابطه ی (۲)

بنابر این روابط (۱) و (۲) داریم:

به ازای هر $a \in A$ عددی مانند $a_0 \in A$ موجود است، به قسمی که $r_0 = a_0 - n \le a - n \to a_0 \le a$

و در نتیجه $Min(A) = a_0$

به همین ترتیب می توان نشان داد، هر زیر مجموعه ی ناتهی از اعداد صحیح که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتها است.

❋❋❋

☑ تقسیم پذیری

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq 0$ گوییم a بر b بخشپذیر است،هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = bq$

(یعنی باقی مانده ی تقسیم a بر b برابر صفر باشد.)

اگر a بر b بخشپذیر باشد، می نویسند $b \mid a$ و می خوانند b عدد a را عاد می کند.

همچنین اگر a بر b بخشپذیر نباشد، می نویسند $b \nmid a$

مثال:

1: عدد صحیح 24 بر 6 بخش پذیر است، پس: $6 \mid 24$

2: عدد صحیح 50- بر 5 بخش پذیر است، پس: $5 \mid -50$

3: عدد صحیح 12 بر 3- بخش پذیر است، پس: $-3 \mid 12$

4: عدد صحیح 30- بر 10- بخش پذیر است، پس: $-10 \mid -30$

5: عدد صحیح 25 بر 6 بخش پذیر نیست، پس: $6 \nmid 25$

نتیجه: به ازاء هر عدد صحیح a همواره داریم:

1: $a \mid a$

2: $\pm 1 \mid a$

3: $a \mid 0$ $(a \neq 0)$

توجه: مجموعه ی اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است. یعنی مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب هر دو عدد صحیح ، عددی صحیح می باشد.

تمرین: ثابت کنید که اگر $a \mid b$ و $b \mid c$ آنگاه $a \mid c$ (خاصیت تراگذری بخش پذیری)

حل:

$$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ b \mid c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = bq_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow c = (aq_1)q_2 \rightarrow c = a(q_1 q_2) \xrightarrow{q = q_1 q_2} c = aq \rightarrow a \mid c$$

تمرین: اگر $a|b$ و $a|c$ در این صورت ثابت کنید که:

الف: $a|-b$ ب: $a|b+c$ ج: $a|bc$

حل:

الف:

$$a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \to -b=-aq_1 \to -b=a(-q_1) \xrightarrow{-q_1=q} -b=aq \to a|-b$$

ب:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ a|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c=aq_2 \end{cases}$$

$$\to b+c=aq_1+aq_2 \to b+c=a(q_1+q_2) \xrightarrow{q=q_1+q_2} b+c=aq \to a|b+c$$

ج:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ a|c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c=aq_2 \end{cases}$$

$$\to bc=(aq_1)(aq_2) \to bc=a(aq_1q_2) \xrightarrow{q=aq_1q_2} bc=aq \to a|bc$$

تمرین: اگر $a|b$ و $c|d$ در این صورت ثابت کنید که: $ac|bd$

حل :

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \\ c|d \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} d=cq_2 \end{cases}$$

$$\to bd=(aq_1)(cq_2) \to bd=ac(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} bd=acq \to ac|bd$$

تمرین: اگر $a|b$ و $c \neq 0$ در این صورت ثابت کنید که: $ac|bc$

حل :

$$a|b \xrightarrow{\exists q \in Z} b=aq \xrightarrow{\times c} bc=acq \to ac|bc$$

نتیجه:

۱ : اگر $a|b$ آنگاه $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \to mb=maq_1 \to mb=a(mq_1) \xrightarrow{mq_1=q} mb=aq \to a|mb$$

۲ : اگر $a|b$ آنگاه $|a|\le|b|$ (که در آن $b\neq 0$ است.)

۳ : اگر $a|1$ آنگاه $a=\pm 1$

۴ : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $|a|=|b|$

۵ : اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb+nc$ که در آن n و m عدد صحیح می باشند.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \to a|mb \\ a|c \to a|nc \end{cases} \to a|mb+nc$$

توجه کنید که این نتیجه را می توان به شکل زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases} a|b_1 \to a|m_1b_1 \\ a|b_2 \to a|m_2b_2 \\ a|b_3 \to a|m_3b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a|b_n \to a|m_nb_n \end{cases} \to a|m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3+\dots+m_nb_n$$

۶ : اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^n$ $(n\in N)$

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b=aq_1 \to (b)^n=(aq_1)^n \to b^n=a^n{q_1}^n \xrightarrow{{q_1}^n=q\in Z} b^n=a^nq \to a^n|b^n$$

توجه: اگر $a|b^n$ $(n\in N)$ آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a|b$

برای مثال واضح است که $4|100$ یعنی $4|10^2$ ولی $4\nmid 10$

تمرین : ثابت کنید که اگر $a^n \mid b^n$ ، آنگاه $a \mid b$ $(n \in N)$

حل:

$$a^n \mid b^n \xrightarrow{\exists q \in Z} b^n = a^n q \to q = (\frac{b}{a})^n$$

حال چون $q \in Z$ لذا باید $\frac{b}{a}$ نیز عضو Z باشد. لذا

$$\frac{b}{a} = k \to b = ak \to a \mid b$$

***

تمرین: نشان دهید که $۶^{۵۰۲}$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$۶^{۵۰۲} = ۶ \times ۶ \times ۶^{۵۰۰} = ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰} = (۳ \times ۳) \times \underbrace{(۲ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰})}_{q} = ۹q \to ۹|۶^{۵۰۲}$$

تمرین: نشان دهید که هر عدد به شکل $\overline{abcabc}$ بر ۷و۱۱و۱۳ بخش پذیر است.

حل:

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= ۱۰۰۰۰۰a + ۱۰۰۰۰b + ۱۰۰۰c + ۱۰۰a + ۱۰b + c \\ &= ۱۰۰a(۱۰۰۰ + ۱) + ۱۰b(۱۰۰۰ + ۱) + c(۱۰۰۰ + ۱) = ۱۰۰۱ \times (۱۰۰a + ۱۰b + c) \\ &= ۱۰۰۱ \times \overline{abc} = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times \overline{abc}\end{aligned}$$

تمرین: نشان دهید که هر عدد به شکل $\overline{ababab}$ بر ۳و۷و۱۳و۳۷ بخش پذیر است.

حل:

$$\begin{aligned}\overline{ababab} &= ۱۰۰۰۰۰a + ۱۰۰۰۰b + ۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰a + b \\ &= ۱۰a(۱۰۰۰۰ + ۱۰۰ + ۱) + b(۱۰۰۰۰ + ۱۰۰ + ۱) = ۱۰۱۰۱ \times (۱۰a + b) \\ &= ۱۰۱۰۱ \times \overline{ab} = ۳ \times ۷ \times ۱۳ \times ۳۷ \times \overline{ab}\end{aligned}$$

تمرین: ثابت کنید که تفاضل هر عدد و مقلوب آن بر ۹ بخش پذیر است.

اثبات: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که عدد مورد نظر ۵ رقمی باشد.در این صورت:

$$\overline{abcde}-\overline{edcba}$$
$$=(10000a+1000b+100c+10d+e)-(10000e+1000d+100c+10b+a)$$
$$=10000a-a+1000b-10b+100c-100c+10d-1000d+e-10000e$$
$$=9999a+990b-990d-9999e=9(\underbrace{1111a+110b-110d+e-1111e}_{q})=9q$$

***

یادآوری:

۱) می دانیم که به ازاء هر عدد طبیعی n رابطه ی زیر برقرار است.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$$

لذا

$$a^n-b^n=(a-b)q\rightarrow a-b\,|\,a^n-b^n$$

مثال:

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$$
$$\rightarrow x^5-y^5=(x-y)q\rightarrow x-y\,|\,x^5-y^5$$

۲) اگر n عدد طبیعی فرد باشد،آنگاه $a+b\,|\,a^n+b^n$ و اگر n عدد طبیعی زوج باشد،آنگاه $a+b\,|\,a^n-b^n$

تمرین: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که $3|2^{3n}-5^n$

حل:

$$2^{3n}-5^n=8^n-5^n=(8-5)q=3q\rightarrow 3|2^{3n}-5^n$$

تمرین: ثابت کنید $3^{52}-2^{39}$ که بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل:

$$3^{52}-2^{39}=(3^4)^{13}-(2^3)^{13}=(81)^{13}-(8)^{13}=(81-8)q=73q\rightarrow 73\,|\,3^{52}-2^{39}$$

***

تمرین: هر یک از موارد زیر را ثابت کنید. ($n \in N$)

الف) $۲۴|۵^{۲n}+۲۳$ ب) $۱۷|۳^{۸n+۴}+۴^{۲n+۱}$

حل:

الف)

$$۵^{۲n}+۲۳=(۵^{۲n}-۱)+۲۴=(۲۵^{n}-۱^{n})+۲۴=(۲۵-۱)k+۲۴=۲۴k+۲۴=۲۴(k+۱)=۲۴q$$
$$\rightarrow ۲۴\,|\,۵^{۲n}+۲۳$$

ب)

$$۳^{۸n+۴}+۴^{۲n+۱}=۳^{۴(۲n+۱)}+۴^{۲n+۱}=۸۱^{۲n+۱}+۴^{۲n+۱}=(۸۱+۴)k=۸۵k$$
$$=(۱۷\times ۵)k=۱۷(۵k)=۱۷q\rightarrow ۱۷|۳^{۸n+۴}+۴^{۲n+۱}$$

تمرین: اگر $a|۳n-۲$ و $a|-۴n+۳$ نشان دهید که $a=\pm ۱$

حل:

$$\begin{cases} a|۳n-۲ \\ a|-۴n+۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a|۴(۳n-۲) \\ a|۳(-۴n+۳) \end{cases}$$
$$\rightarrow a\,|\,۴(۳n-۲)+۳(-۴n+۳)\rightarrow a\,|\,۱۲n-۸-۱۲n+۹\rightarrow a\,|\,۱\rightarrow a=\pm ۱$$

❋❋❋

☑ **قضیه ی الگوریتم تقسیم**

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq 0$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند، بطوری که:

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < b$$

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cdots & \\ \hline r & \end{array}$$

عدد a را مقسوم و عدد b را مقسوم علیه ، q خارج قسمت و r را باقی مانده گویند.

اثبات:

الف) ثابت می کنیم که qو r وجود دارند.

گیریم که $q = [\frac{a}{b}]$(جزء صحیح خارج قسمت تقسیم a بر b) می دانیم که به ازاء هر $x \in R$ همواره $[x] \leq x < [x]+1$ لـذا خواهیم داشت $q \leq \frac{a}{b} < q+1$ در نتیجه $bq \leq a < bq + b$ لذا $0 \leq a - bq < b$ و اگر قرار دهیم $r = a - bq$ خـواهیم داشت $0 \leq r < b$

ب) ثابت می کنیم که q و r یکتا هستند.

گیریم که q و r یکتا نباشند(برهان خلف) پس:

$$a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

$$a = bq_2 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < b$$

و لذا

$$bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \qquad -b \leq r_1 - r_2 < b$$
$$\rightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \qquad |r_1 - r_2| < b \quad *$$

پس می توان نوشت $b \mid r_2 - r_1$ و چون $r_1 - r_2 \neq 0$ لذا $b \leq |r_1 - r_2|$ که این با نتیجه * تناقض دارد. لذا باید $q_1 = q_2$ و $r_1 = r_2$ باشند.

تمرین: نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $2k$ یا $2k+1$ نوشت.

حل: بنابر قضیه ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = 2q + r \quad , \quad 0 \le r < 2$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r = 0 \\ a = 2q + r \end{cases} \to a = 2q$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ a = 2q + r \end{cases} \to a = 2q + 1$$

توجه : اگر $k \in Z$ در این صورت همه ی اعداد صحیح، به شکل $x = 2k$ را زوج و همه ی اعداد صحیح، به شکل $y = 2k+1$ یا $y = 2k-1$ را فرد می نامند.

تمرین: نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ نوشت.

حل: بنابر قضیه ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = 3q + r \quad , \quad 0 \le r < 3$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ یا $r=2$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r = 0 \\ a = 3q + r \end{cases} \to a = 3q$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ a = 3q + r \end{cases} \to a = 3q + 1$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ a = 3q + r \end{cases} \to a = 3q + 2$$

نتیجه: تعداد مضرب های طبیعی عدد b که کوچکتر یا مساوی با a هستند برابر $[\frac{a}{b}]$ است.

اثبات:

$$a = bq + r \qquad 0 \le r < b$$

$$\xrightarrow{b \neq 0} \frac{a}{b} = \frac{bq}{b} + \frac{r}{b} \to \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \to [\frac{a}{b}] = [q + \frac{r}{b}] \xrightarrow{q \in Z} [\frac{a}{b}] = q + \underbrace{[\frac{r}{b}]}_{0} \to [\frac{a}{b}] = q$$

تمرین: تعداد مضربهای طبیعی عدد ۶ که کوچکتر یا مساوی ۲۹ باشند، را بدست آورید.

حل:

$a = ۲۹$

$b = ۶$

$[\frac{۲۹}{۶}] = [۴/۸] = ۴ \to \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴\}$

تمرین: در هر مورد باقی مانده و خارج قسمت تقسیم a بر b را بدست آورید.

۱) $a = ۵۳$ و $b = ۱۳$

۲) $a = -۴۳$ و $b = ۷$

حل:

۱)

خارج قسمت $q = [\frac{a}{b}] = [\frac{۵۳}{۱۳}] = ۴$

باقی مانده $a = bq + r \to r = a - bq = ۵۳ - ۱۳ \times ۴ = ۱$

۲)

خارج قسمت $q = [\frac{a}{b}] = [\frac{-۴۳}{۷}] = -۷$

باقی مانده $r = a - bq = -۴۳ - ۷(-۷) = ۶$

تمرین: ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم که

$a = n + ۱$

$b = n + ۲$

$c = n + ۳$

لذا

$$abc=(n+1)(n+2)(n+3)=\frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}$$

$$=\frac{(n+3)!}{n!}=\frac{(n+3)!}{n!}\times\frac{3!}{3!}=\frac{(n+3)!}{n!\times 3!}\times 3!=\frac{(n+3)!}{3!\times[(n+3)-3]!}\times 3!=\binom{n+3}{3}\times 3!=k\times 6=6k$$

توجه: تمرین فوق برای هر سه عدد صحیح متوالی نیز قابل اثبات است. برای مثال اگر هر سه عدد a و b و c منفی باشند در این صورت:

$$abc=-6k=6k'$$

تمرین: ثابت کنید که اگر n عدد صحیح زوج باشد، آنگاه $48\,|\,n^3-4n$

حل: چون n عدد صحیح زوج است پس $n=2k$ از طرفی

$$n^3-4n=(2k)^3-4(2k)=8k^3-8k=8k(k^2-1)=8k(k+1)(k-1)$$

و چون حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است پس:

$$n^3-4n=8(6q)=48q$$

***

تمرین: ثابت کنید که حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است ولی حاصل ضرب آنها فرد است.

حل: بدیهی است که وجود دارد $m,n\in Z$ بطوری که :

$$a=2m+1$$
$$b=2n+1$$

لذا:

$$a+b=(2m+1)+(2n+1)=2n+2m+2=2(m+n+1)=2k$$

$$ab=(2m+1)(2n+1)=4mn+2n+2m+1=2(2mn+m+n)+1=2k+1$$

تمرین: ثابت کنید که مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است. ($q\in Z$)

حل: چون a عدد فرد است پس: $a=2k+1$ در نتیجه

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

$k(k+1)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است لذا: $k(k+1) = 2q$

و در نهایت داریم:

$$a^2 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

تمرین (*): ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل $4k+1$ به صورت $4q+1$ است.

حل :

$$a = 4k_1 + 1 \quad \text{و} \quad b = 4k_2 + 1$$

$$a \times b = (4k_1+1)(4k_2+1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = 4(\underbrace{4k_1k_2 + k_1 + k_2}_{q}) + 1 = 4q + 1$$

تمرین : ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل $4k+3$ به صورت $4q+1$ است.

حل :

$$a = 4k_1 + 3 \quad \text{و} \quad b = 4k_2 + 3$$

$$a \times b = (4k_1+3)(4k_2+3) = 16k_1k_2 + 12k_1 + 12k_2 + 9 = 16k_1k_2 + 12k_1 + 12k_2 + 8 + 1$$
$$= 4(\underbrace{4k_1k_2 + 3k_1 + 3k_2 + 2}_{q}) + 1 = 4q + 1$$

تمرین : ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح به شکل $6k+5$ به صورت $6q+1$ است.

حل :

$$a = 4k_1 + 5 \quad \text{و} \quad b = 4k_2 + 5$$

$$a \times b = (6k_1+5)(6k_2+5) = 36k_1k_2 + 30k_1 + 30k_2 + 25 = 36k_1k_2 + 30k_1 + 30k_2 + 24 + 1 =$$
$$= 6(\underbrace{6k_1k_2 + 5k_1 + 5k_2 + 4}_{q}) + 1 = 6q + 1$$

***

تمرین : در یک تقسیم خارج قسمت برابر ۷ و باقی مانده برابر ۵۱ می باشد. اگر مقسوم علیه ثابت باشد، حداکثر چند واحد باید به مقسوم علیه اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند.

حل :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} & ۷ \\ \cdots & \\ \hline ۵۱ & \end{array} \quad a = ۷b + ۵۱ \qquad , \qquad ۰ \le ۵۱ < b$$

حال فرض می کنیم که مقدار اضافه شده به مقسوم علیه x باشد. لذا می توان نوشت.

$$\begin{array}{l|l} a & b + x \\ \cline{2-2} & ۷ \\ \cdots & \\ \hline r' & \end{array} \quad a = ۷(b + x) + r' \qquad , \qquad ۰ \le r' < b + x$$

از دو معادله ی فوق داریم:

$$۷b + ۵۱ = ۷b + ۷x + r' \rightarrow ۵۱ - ۷x = r' \xrightarrow{r' \ge ۰} ۵۱ - ۷x \ge ۰ \rightarrow x \ge \frac{۵۱}{۷}$$

لذا مقدار ماگزیمم x را به شکل زیر داریم.

$$\Rightarrow Max(x) = [\frac{۵۱}{۷}] = ۷$$

***

تمرین: ثابت کنید که باقی مانده ی تقسیم مجموع هر دو عدد صحیح بر عدد طبیعی $a > ۰$ با مجموع باقی مانده های تقسیم آن دو عدد بر a برابراست.

حل:

$$\begin{array}{l|l} m & a \\ \cline{2-2} & q_۱ \\ \cdots & \\ \hline r_۱ & \end{array} \quad \Rightarrow m = aq_۱ + r_۱$$

$$\begin{array}{l|l} n & a \\ \cline{2-2} & q_۲ \\ \cdots & \\ \hline r_۲ & \end{array} \quad \Rightarrow n = aq_۲ + r_۲$$

$$\Rightarrow m + n = (aq_۱ + r_۱) + (aq_۲ + r_۲) = a(\underbrace{q_۱ + q_۲}_{q}) + (\underbrace{r_۱ + r_۲}_{r})$$

تمرین: ثابت کنید که باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر۳ (یا ۹) با باقی مانده ی مجموع ارقام آن عدد برابر است.

حل: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که عدد مورد نظر ۵ رقمی باشد. پس:

$$\begin{aligned}\overline{abcde} &= ۱۰۰۰۰a + ۱۰۰۰b + ۱۰۰c + ۱۰d + e\\ &= (۹۹۹۹+۱)a + (۹۹۹+۱)b + (۹۹+۱)c + (۹+۱)d + e\\ &= ۹۹۹۹a + ۱a + ۹۹۹b + ۱b + ۹۹c + ۱c + ۹d + ۱d + e\end{aligned}$$

حال اگر عدد داده شده را بر ۳ (یا ۹) تقسیم کنیم. داریم:

$$r = ۰ + a + ۰ + b + ۰ + c + ۰ + d + e = a + b + c + d + e$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۵۷۴ بر ۳ را بدست آورید.

نتیجه: عددی بر ۳ (یا ۹) بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ (یا۹) بخش پذیر باشد.

تمرین: ثابت کنید که اگر ارقام عددی را یک در میان مثبت ومنفی علامت گذاری کنیم (بطوری که اولین رقم از سمت راست مثبت در نظر گرفته شود.) و سپس آنها را جمع جبری کنیم، باقی مانده ی تقسیم آن عدد بر ۱۱ بدست می آید.

حل: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که عدد مورد نظر ۵ رقمی باشد. پس:

$$\begin{aligned}\overline{abcde} &= ۱۰۰۰۰a + ۱۰۰۰b + ۱۰۰c + ۱۰d + e\\ &= (۹۹۹۹+۱)a + (۱۰۰۱-۱)b + (۹۹+۱)c + (۱۱-۱)d + e\\ &= ۹۹۹۹a + ۱a + ۱۰۰۱b - ۱b + ۹۹c + ۱c + ۱۱d - ۱d + e\end{aligned}$$

حال اگر عدد داده شده را بر ۱۱ تقسیم کنیم. داریم:

$$r = ۰ + a + ۰ - b + ۰ + c + ۰ - d + e = a - b + c - d + e$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم عدد ۱۵۷۴۳ بر ۱۱ را بدست آورید.

حل:

$$a = \overset{+}{۱}\,\overset{-}{۵}\,\overset{+}{۷}\,\overset{-}{۴}\,\overset{+}{۳} \Rightarrow r = ۱ - ۵ + ۷ - ۴ + ۳ = ۲$$

نتیجه: عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که اگر ارقام آن عدد را یک در میان مثبت و منفی علامت گذاری کنیم (بطوری که اولین رقم از سمت راست مثبت در نظر گرفته شود.) و سپس آنها را جمع جبری کنیم ، حاصل صفر شود.

تمرین: ثابت کنید که باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر ۸ با باقی مانده ی مجموع عدد یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن برابر است.

حل: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که عدد مورد نظر ۵ رقمی باشد. پس:

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$
$$= 10000a + 1000b + (96+4)c + (8+2)d + e = 10000a + 1000b + 96c + 4c + 8d + 2d + e$$

حال اگر عدد داده شده را بر ۸ تقسیم کنیم. داریم:

$$r = 0 + 0 + 0 + 4c + 0 + 2d + e = 4c + 2d + e$$

نتیجه:

۱: عددی بر ۸ بخش پذیر است که مجموع یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن بر ۸ بخش پذیر باشد.

۲: عددی بر ۴ بخش پذیر است که مجموع یکان و دو برابر دهگان آن بر ۴ بخش پذیر باشد.

۳: عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم سمت راست آن بر ۲ بخش پذیر باشد.

توجه: باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر ۱۰ با یکان آن عدد برابر است و لذا عدد ی بر ۱۰ بخش پذیر است که یکان آن صفر باشد.

تمرین: ثابت کنید که باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر ۸ با باقی مانده ی تقسیم سه رقم سمت راست آن بر ۸ برابر است.

حل: بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که عدد مورد نظر ۵ رقمی باشد. پس:

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$

حال اگر عدد داده شده را بر ۸ تقسیم کنیم. داریم:

$$r = 0 + 0 + 100c + 10d + e = 100c + 10d + e = \overline{cda}$$

نتیجه:

۱: عددی بر ۸ بخش پذیر است که سه عدد سمت راست آن بر ۸ بخش پذیر باشد.

۲: عددی بر ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد.

۳: عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم سمت راست آن بر ۲ بخش پذیر باشد.

☑ **قاعده ی بخش پذیری بر۷** (جهت مطالعه)

عددی بر ۷ بخش پذیر است اگر و فقط اگر تفاضل عددی که با حذف رقم یکان آن عدد به دست می آید و دو برابر رقم یکان آن عدد بر ۷ بخش پذیر باشد.

مثلاً عدد ۶۵۱ بر۷ بخش پذیر است. زیرا ۶۳ = ۲(۱) − ۶۵ بر ۷ بخش پذیر است.

***

☑ نمایش اعداد صحیح در مبنا های مختلف

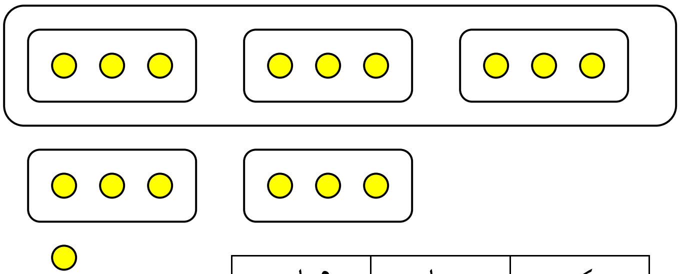
یک صورت متداول نمایش اعداد صحیح ، استفاده از دستگاه اعشاری (دهدهی) می باشد. مثلاً عدد ۵۲۹۴

واضح است که هر عدد طبیعی را می توان به صورت توانهایی از ۱۰ نوشت.

$$۵۲۹۴ = ۵\times ۱۰۰۰ + ۲\times ۱۰۰ + ۹\times ۱۰ + ۴\times ۱$$
$$\to ۵۲۹۴ = ۵\times ۱۰^{۳} + ۲\times ۱۰^{۲} + ۹\times ۱۰^{۱} + ۴\times ۱۰^{\circ}$$

بدیهی است که هر عدد صحیح را می توان بر حسب توانهایی از عدد طبیعی a بزرگتر از یک نوشت. نمایش یک عدد صحیح بر حسب توانهای a را عدد نویسی در مبنای a گویند.

مثال: عدد ۱۶ را در مبنای ۳ بنویسید.



یکی	سه تایی	۹ تایی
۱	۲	۱

$$۱۶ = (۱۲۱)_{۳}$$

نتیجه: ارقامی که در یک مبنای عدد نویسی مانند a نوشته می شوند، از a کوچکترند، ولی منفی نیستند.

تمرین: عدد ۱۳ را در مبنای ۲ بنویسید.

***

قضیه: هر عدد طبیعی مانند n را می توان به صورت یکتایی از توانهای طبیعی عدد b بزرگتر از یک نوشت. یعنی:

$$n = a_k b^k + a_{k-۱} b^{k-۱} + a_{k-۲} b^{k-۲} + \ldots + a_۱ b^۱ + a_\circ b^\circ$$
$$= (a_k a_{k-۱} a_{k-۲} \ldots a_۱ a_\circ)_b$$

که در آن k یک عدد حسابی است و

$$\forall i \qquad ۰ \le i \le k \;,\; ۰ \le a_i < b \quad , \quad a_k \neq ۰$$

اثبات: الگوریتم تقسیم را متوالیاً به صورت زیر بکار می بریم.

$$n = bq_0 + a_0 \qquad 0 \le a_0 \le b-1$$
$$q_0 = bq_1 + a_1 \qquad 0 \le a_1 \le b-1$$
$$q_1 = bq_2 + a_2 \qquad 0 \le a_2 \le b-1$$

....

$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} \qquad 0 \le a_{j+1} \le b-1$$

....

در این صورت بدیهی است که

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots > 0$$

لذا

$$n = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0)_b$$

توجه: اگر مبنای عدد نویسی بزرگتر از ۱۰ باشد، در این صورت قرار می دهیم:

$A = 10$

$B = 11$

$C = 12$

....

تمرین: عدد ۵۱۲ را در مبنای ۷ بنویسید.

تمرین: عدد۹۲۱۳ را در مبنای۱۶ بنویسید.

تمرین: عدد ۱۶۰۹ را در مبنای۱۲ بنویسید.

تمرین: عدد۷۸۶۷ را در مبنای۱۴ بنویسید.

تمرین: عدد $(10210)_3$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

تمرین: عدد $(1AC)_{13}$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

تمرین: عدد $(3210)_4$ را در مبنای ۱۶ بنویسید.

حل:

$$(3210)_4 = 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 228 = (E4)_{16}$$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $(1221)_3 + (1210)_3 =$

ب) $(15)_6 + (1210)_3 =$

تمرین: حاصل عبارت مقابل را در مبنای ۱۶ بنویسید.

$(۱۷)_۸ + (۲۸۳)_۹ =$

تمرین: اگر $(۲۱k۱)_۳ = (۱۰۱۲)_۴$. مقدار k را بیابید.

تمرین: عدد۱۳۲ در مبنای k بصورت ۲۴۶ نمایش داده می شود. مقدار k را بیابید.

حل:

$$۱۳۲ = (۲۴۶)_k \qquad \Rightarrow ۱۳۲ = ۲k^۲ + ۴k + ۶ \rightarrow \begin{cases} k = ۷ \\ k = -۹ \end{cases}$$

چون $k > ۱$ (در این تمرین $k \geq ۷$) می باشد، در این صورت حالت $k = -۹$ غیر قابل قبول است.

تمرین: ثابت کنید، اگر $k > ۳$ آنگاه $n = (۱۲۳۲۱)_k$ مربع کامل است.

حل:

$$n = (۱۲۳۲۱)_k$$
$$\Rightarrow n = k^۴ + ۲k^۳ + ۳k^۲ + ۲k + ۱ \rightarrow n = k^۴ + k^۲ + ۱ + ۲k^۳ + ۲k^۲ + ۲k = (k^۲ + k + ۱)^۲$$

تمرین: ثابت کنید، اگر $k > ۳$ آنگاه $n = (۱۳۳۱)_k$ مکعب کامل است.

حل:

$$n = (۱۳۳۱)_k \qquad \Rightarrow n = k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ \rightarrow n = (k + ۱)^۳$$

***

☑ **اعداد اول**

تعریف: هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را اول گویند، هرگاه فقط بر یک و خودش بخشپذیر باشد.

مانند: .... و ۱۳ و ۱۱ و ۷ و ۵ و۳ و۲

تعریف: هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که اول نباشد را مرکب گویند.

مانند: .... و ۱۲ و۱۰ و ۹ و ۸ و ۶ و ۴

نتیجه:

۱: تنها عدد زوج و اول ۲ است.(زیرا هر عدد طبیعی و زوج دیگر بر ۲ بخش پذیر است.)

۲: طبق تعریف، عدد یک نه اول است و نه مرکب

قضیه: هر عدد طبیعی بزرگتر از یک ، عاملی اول دارد. (یعنی بر یک عدد اول بخشپذیر است.)

اثبات: اگر $n=۲$ باشد، چون ۲ مقسوم علیه اول دارد،حکم بدیهی است.

اگر حکم برای $n\geq ۲$ درست باشد، ثابت می کنیم که برای $n+۱$ نیز درست است.

اگر $n+۱$ اول باشد،حکم ثابت است. فرض کنیم که $n+۱$ اول نباشد،پس مرکب است و لذا عاملی کوچکتر از خودش و بزرگتر از یک دارد. گیریم که $n+۱=ab$ پس $a\,|\,n+۱$ یعنی a عامل $n+۱$ است و حکم ثابت است.

قضیه: اگر n یک عدد مرکب باشد،آنگاه n حداقل یک مقسوم علیه اول کوچکتر از $\sqrt{n}$ یا مساوی با آن دارد.

اثبات: فرض کنیم n مرکب است، لذا اعداد طبیعی a و b موجودند بطوری که $n=ab$ و $۱<a\leq b<n$ در نتیجه $a^۲\leq ab=n$ از طرفی طبق قضیه ی قبل a عامل اولی مانند p دارد. لذا $p\leq a$ و در نتیجه $p^۲\leq a^۲$ و در مقایسه با رابطه ی قبل داریم $p^۲\leq n$ لذا $p\leq\sqrt{n}$.

چون $a\,|\,n$ و $p\,|\,a$ لذا $p\,|\,n$ یعنی p یک عامل اول n است که $p\leq\sqrt{n}$ و حکم ثابت است.

توجه: عکس نقیض قضیه فوق به صورت زیر است.

اگر n بر هیچکدام از اعداد اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ بخش پذیر نباشد،آنگاه n اول است.

به عبارت دیگر اگر عدد طبیعی $n>۱$ بر اعداد اول p که $p\leq\sqrt{n}$ بخشپذیر نباشد،آنگاه n اول است.

مثال: عدد طبیعی و مرکب ۳۰ دارای مقسوم علیه اول کوچکتر از $\sqrt{۳۰}$ است. این مقسوم علیه ها عبارتند از ۵و۳و۲

$\sqrt{۳۰} = ۵/۲$

مقسوم علیه های ۳۰ = $\{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰\}$

تمرین: ثابت کنید که ۱۴۳ مرکب است.

حل: واضح است که $\sqrt{۱۴۳} < ۱۲$ و مقسوم علیه ها ی ۱۴۳ که از ۱۲ کمتر باشند عبارتند از: ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ حال چون ۱۴۳ بر ۱۱ بخش پذیر است، لذا مرکب است.

تمرین: ثابت کنید که عدد ۷۳ اول است.

حل: واضح است که $\sqrt{۷۳} < ۹$ و مقسوم علیه ها ی ۷۳ که از ۹ کمتر باشند عبارتند از: ۷ و ۵ و ۳ و ۲ حال چون ۷۳ بر هیچکدام از این مقسوم علیه ها بخش پذیر نیست، لذا اول است.

تمرین : تعیین کنید کدام یک از اعداد زیر اول و کدام یک مرکب است.

د) ۵۸۳ ج) ۲۵۷ ب) ۵۹۳ الف) ۵۳۳

تمرین: تمام اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ را بنویسید.

حل: ابتدا تمام اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را نوشته و به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: از عدد ۱۰۰ جذر می گیریم ($\sqrt{۱۰۰} < ۱۰$) و تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی ۱۰ (یعنی ۷ و ۵ و ۳ و ۲) را تعیین می کنیم.

۲: تمام مضربهای اعداد اول کوچکتر $\sqrt{۱۰۰}$ چون اول نیستند را حذف می کنیم.

۳: عدد یک عدد اول نیست و باید حذف شود.

روش فوق به روش **غربال اِراتُستِن** معروف است.

~~۱~~	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~
۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	~~۴۹~~	~~۵۰~~
~~۵۱~~	~~۵۲~~	۵۳	~~۵۴~~	~~۵۵~~	~~۵۶~~	~~۵۷~~	~~۵۸~~	۵۹	~~۶۰~~
۶۱	~~۶۲~~	~~۶۳~~	~~۶۴~~	~~۶۵~~	~~۶۶~~	۶۷	~~۶۸~~	~~۶۹~~	~~۷۰~~
۷۱	~~۷۲~~	۷۳	~~۷۴~~	~~۷۵~~	~~۷۶~~	~~۷۷~~	~~۷۸~~	۷۹	~~۸۰~~
~~۸۱~~	~~۸۲~~	۸۳	~~۸۴~~	~~۸۵~~	~~۸۶~~	~~۸۷~~	~~۸۸~~	۸۹	~~۹۰~~
~~۹۱~~	~~۹۲~~	~~۹۳~~	~~۹۴~~	~~۹۵~~	~~۹۶~~	۹۷	~~۹۸~~	~~۹۹~~	~~۱۰۰~~

لذا اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ عبارتند از:

۲	۳	۵	۷	۱۱
۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹
۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷
۵۳	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱
۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷

قضیه: مجموعه ی اعداد اول نامتناهی است.

اثبات: فرض کنیم که $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ تنها اعداد اول باشند (برهان خلف)

پس عدد $k = p_1.p_2.p_3 \dots p_n + 1$ را در نظر می گیریم. چون $k \in N$ و $k > 1$ و به ازای هر $1 \le i \le n$ داریم $k \ne P_i$ لذا k مرکب است. در نتیجه بنابر قضیه های قبل k دارای عامل اولی مانند p است و $p \in \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ می باشد.

پس : $p \mid p_1.p_2.p_3 \dots p_n$ و $p \mid k$ در نتیجه $p \mid \underbrace{k - (p_1.p_2.p_3 \dots p_n)}_{1}$ پس $p \mid 1$ یعنی $p = \pm 1$ و این متناقض با اول بودن p است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

تمرین : ثابت کنید که بی نهایت عدد اول به صورت $۴q+۳$ وجود دارد.

حل : فرض کنیم عدد طبیعی a به صورت $۴q+۳$ باشد. پس $a>۱$. لذا اگر $a=p_۱.p_۲.p_۳...p_n$ تجزیه ی a به عوامل اول باشد. چون a فرد است، لذا p_i ها، همگی اعداد فرد و اولند. پس هر یک از آنها به صورت $۴q+۱$ یا $۴q+۳$ می باشند. (زیرا در حالت های $۴q+۲$و $۴q+۰$ عدد aزوج می باشد.)

اگر همه ی p_i ها، به صورت $۴q+۱$ باشند. طبق تمرین (*) صفحه ی ۲۲ همین جزوه، حاصل ضرب آنها یعنی a نیز به صورت $۴q+۱$ خواهد بود که متناقض با با فرض است. لذا حداقل یکی از p_i ها به صورت $۴q+۳$ است و حکم ثابت است.

حال نشان می دهیم که بی نهایت عدد اول به صورت $۴q+۳$ یافت می شود.

فرض کنیم فقط n عدد اول $q_۱$ و $q_۲$ و... وq_n $(\forall ۱\le i\le n\ ,\ q_i\ne ۳)$ به صورت $۴q+۳$ موجود باشد.(فرض خلف) عدد $a=۴q_۱.q_۲...q_n+۳$ را که به صورت $۴q+۳$ می باشد، را در نظر می گیریم. بنابر مطلب فوق a عامل اولی مانند q' به همین صورت دارد و q' با هر کدام از q_i ها متمایز است. این مطلب با متناهی بودن q_i ها تناقض دارد و لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

***

☑ **بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب. م. م)**

تعریف: عدد صحیح c را مقسوم علیه (شمارنده ی) مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم a و هم b بـر آن بخـش پذیر باشند. یعنی $c|b$ و $c|a$

مثلاً عدد ۴ مقسوم علیه مشترک ۱۶ و ۱۲ است، زیرا ۴|۱۶و ۴|۱۲

تعریف: عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است، گوییم، هرگاه:

الف: d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد.

ب: هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b از d کوچکتر باشد.

به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد a و b ، بزرگترین عدد طبیعی است که هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) یا d یا $a\prod b$ نمایش می دهند.

تمرین: مجموعه ی مقسوم علیه های دو عدد ۱۸و۱۲را نوشته و سپس ب.م.م این دو عدد را مشخص کنید.

حل:

مجموعه ی مقسوم علیه های ۱۸ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶,\pm ۹,\pm ۱۸\}$

مجموعه ی مقسوم علیه های ۱۲ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۶,\pm ۱۲\}$

مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶\}$

ب.م.م $d=(۱۲,۱۸)=۶$

نتیجه: عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b گویند، اگر وتنها اگر

۱: $d|a$ و $d|b$

۲: هرگاه $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c|d$

قضیه: اگر a و b دو عدد صحیح باشند که هر دو صفر نیستند،آنگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها همواره وجود دارد و منحصر بفرد است.

اثبات: گیریم که A مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک a و b باشد. یعنی $A=\{n\in Z \mid n\mid a, n\mid b\}$ بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می کنیم که $|a|<|b|$ و چون $۱\in A$ پس واضح است که $A\neq\Phi$ و A از پایین کراندار است زیرا:

$$\forall n\in A \quad n\geq b \vee n\geq -b$$

لذا A یک زیر مجموعه ی ناتهی و از پایین کراندار Z است.پس بنابه اصل خوش ترتیبی A دارای عضو ابتدا است. فرض کنیم که $Min(A)=d$ در این صورت $(a,b)=d$

حال نشان می دهیم که d یکتا است. فرض کنیم که عدد d' بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b باشد. در این صورت $d'\mid d$ از طرفی $d\mid d'$ لذا $d=\pm d'$ و چون d و d' اعداد طبیعی هستند. لذا $d=d'$

قضیه: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که لااقل یکی از آنها ناصفر است برابر با کوچکترین عضو مجموعه ی $A=\{ma+nb \mid m,n\in Z, ma+nb>۰\}$ است.

اثبات لازم نیست.

نتیجه: اگر a و b دو عدد صحیح که لااقل یکی از آنها صفر نباشد و $(a,b)=d$ در این صورت اعداد صحیح m و n موجودند به قسمی که $ma+nb=d$ یعنی ب.م.م دو عدد را می توان به صورت ترکیب خطی از آن دو عدد نوشت.

مثال: با توجه به تمرین قبل می دانیم که ب.م.م دو عدد ۱۸و۱۲ برابر۶ است.پس:

$$ma+nb=d$$
$$(-۱)(۱۲)+(۱)(۱۸)=۶$$

توجه : اگر $a=bq+r$ در این صورت $(a,b)=(bq+r,b)=(r,b)$

پس برای محاسبه ی بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a کافی است، عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر تقسیم نموده و سپس بزرگترین مقسوم علیه مشترک عدد کوچکتر و باقی مانده را بدست آوریم. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا یکی از اعداد صفر شود. در این صورت عدد دیگر ب . م .م است.

تمرین: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۷۲ و ۳۰ را بیابید.

حل:

$$(۳۰,۷۲) = (۳۰,۲ \times ۳۰ + ۱۲) = (۳۰,۱۲)$$
$$= (۲ \times ۱۲ + ۶,۱۲) = (۶,۱۲) = (۶,۲ \times ۶ + ۰) = (۶,۰) = ۶$$

بطور خلاصه این روش را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{array}{r|l} ۷۲ & ۳۰ \\ \cline{2-2} ۶۰ & ۲ \\ \cline{1-1} ۱۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۰ & ۱۲ \\ \cline{2-2} ۲۴ & ۲ \\ \cline{1-1} ۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۱۲ & ۶ \\ \cline{2-2} ۱۲ & ۲ \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array} \longleftarrow \text{ب.م.م}$$

این روش را روش تقسیمات متوالی معروف است. تقسیمات را می توان توسط یک جدول بصورت نردبانی نشان داد.

خارج قسمت	----	۲	۲	۲
اعداد (اول عدد بزرگتر نوشته می شود .)	۷۲	۳۰	۱۲	۶
	۶۰	۲۴	۱۲	
باقی مانده	۱۲	۶	۰	

$$(۳۰,۷۲) = ۶$$

تعریف: دو عدد صحیح a و b را متباین (نسبت به هم اول) گویند، هرگاه ب.م.م آنها برابر یک باشد.

$$(a,b) = ۱$$

نتیجه:اعداد صحیح a و b نسبت به هم اولند ،اگر وتنها اگر اعداد صحیح m و n موجود باشند، به طوری که

$$ma + nb = ۱$$

تمرین: نشان دهید که دو عدد ۷ و ۱۲ نسبت به هم اولند.

حل :

$$ma + nb = ۱ \rightarrow -۴(۱۲) + ۷(۷) = ۱$$

تمرین: نشان دهید که اعداد ۲۵ و۴۲ نسبت به هم اولند.

حل:

$$(۴۲,۲۵) = (۱(۲۵) + ۱۷,۲۵) = (۱۷,۲۵) = (۱۷,۱(۱۷) + ۸) = (۱۷,۸) = (۲(۸) + ۱,۸)$$
$$= (۱,۸) = (۱,۸(۱) + ۰) = (۱,۰) = ۱$$

به جدول زیر توجه کنید:

----	۱	۱	۲	۸
۴۲	۲۵	۱۷	۸	۱
۲۵	۱۷	۱۶	۸	
۱۷	۸	۱	۰	

$$(۲۵,۴۲)=۱$$

تمرین: نشان دهید که به ازاء هر $n \in Z$ داریم:

$$(۳n+۴,۴n+۵)=۱$$

حل: با توجه به قضیه ی قبل و نتیجه ی آن واضح است که دو عدد a و b نسبت به هم اولند، هرگاه اعداد صحیح s و r وجود داشته باشند، بطوری که

$$ra+sb=۱$$

در اینجا نیز واضح است که

$$۴(۳n+۴)+(-۳)(۴n+۵)=۱۲n+۱۶-۱۲n-۱۵=۱$$

پس حکم ثابت است.

تمرین: نشان دهید که به ازاء هر عدد طبیعی n ، اعداد $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اولند.

تمرین: نشان دهید که اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $(a,b)=d$ در این صورت $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$

حل: چون $(a,b)=d$ پس دو عدد صحیح m و n موجودند به طوری که

$$ma+nb=d$$

$$\xrightarrow{d\in N \to d\neq ۰} \frac{ma}{d}+\frac{nb}{d}=\frac{d}{d} \to m(\frac{a}{d})+n(\frac{b}{d})=۱ \to (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

***

قضیه (لم اقلیدس): اگر $a\,|\,bc$ و $(a,b)=۱$ آنگاه $a\,|\,c$

اثبات: چون $(a,b)=۱$ لذا اعداد صحیح m و n موجودند بطوری که $ma+nb=۱$ لذا با ضرب طرفین در عدد c خواهیم داشت $cma+cnb=c$. از طرفی چون $a\,|\,bc$ پس عدد صحیح q وجود دارد بطوریکه $bc=aq$ پس می توان نوشت:

$$cma+cnb=c \to cma+aqn=c \to a(\underbrace{cm+nq}_{q'})=c \to aq'=c \to a\,|\,c$$

تمرین: اگر $m \in Z$ و $۵ | ۷m$ در این صورت ثابت کنید که $۵ | m$.

حل : چون $(۵,۷) = ۱$ پس طبق لم اقلیدس $۵ | m$

قضیه: اگر p یک عدد اول باشد و $p | ab$ در این صورت $p | a$ یا $p | b$

اثبات: اگر $p | a$ حکم ثابت است. اگر $p \nmid a$ در این صورت $(p,a) = ۱$ لذا طبق لـم اقلیـدس چـون $p | ab$ و $(p,a) = ۱$ پس $p | b$

نتیجه: اگر p عدد اول و $a \in Z$ و $n \in N$ و $p | a^n$ آنگاه $p | a$

تمرین: اگر $(a,b) = ۱$. ثابت کنید که $(ab, a+b) = ۱$

حل: (به روش برهان خلف)

فرض کنیم که $(ab, a+b) \neq ۱$ باشد، پس $(ab, a+b) = d$ که $d > ۱$ یعنی $d | a+b$ و $d | ab$

از طرفی d باید عاملی اول مانند p داشته باشد($p | d$)

در نتیجه $p | a+b$ و $p | ab$ چون $p | ab$ لذا $p | a$ و $p | b$

اگر $p | a$ پس $p | (a+b) - a = b$ یعنی $p | a$ و $p | b$ در نتیجه $(a,b) \neq ۱$ و این تناقض است.

اگر $p | b$ پس $p | (a+b) - b = a$ یعنی $p | a$ و $p | b$ در نتیجه $(a,b) \neq ۱$ و این تناقض است.

تمرین: ثابت کنید که اگر a نسبت به c و b اول باشد، نسبت به bc نیز اول خواهد بود.

حل:

$$(a,b) = ۱ \xrightarrow{\exists m_۱, n_۱ \in Z} m_۱ a + n_۱ b = ۱$$

$$(a,c) = ۱ \xrightarrow{\exists m_۲, n_۲ \in Z} m_۲ a + n_۲ c = ۱$$

$$\to (m_۱ a + n_۱ b)(m_۲ a + n_۲ c) = ۱ \to m_۱ m_۲ a^۲ + m_۱ n_۲ ac + n_۱ m_۲ ab + n_۱ n_۲ bc = ۱$$
$$\to (\underbrace{m_۱ m_۲ a + m_۱ n_۲ c + n_۱ m_۲ b}_{r})a + (\underbrace{n_۱ n_۲}_{s})bc = ۱ \to ra + sbc = ۱ \to (a,bc) = ۱$$

نتیجه : اگر a نسبت به b_n... و $b_۳$ و $b_۲$ و $b_۱$ اول باشد، نسبت به $b_۱ b_۲ b_۳ \ldots b_n$ نیز اول خواهد بود. یعنی :

$$(a, b_۱ b_۲ b_۳ \ldots b_n) = ۱$$

همچنین اگر $b_۱ = b_۲ = b_۳ = \ldots = b_n = b$ آنگاه

$$(a,b^n)=۱$$

تمرین: ثابت کنید که اگر a نسبت به b اول بوده و $c\mid a+b$ باشد، آنگاه c نسبت به b و a نیز اول خواهد بود.

حل:

$$\begin{cases}(a,b)=۱\xrightarrow{\exists m,n\in Z}ma+nb=۱\\ c\mid a+b\to a+b=cq\to a=cq-b\end{cases}\to m(cq-b)+nb=۱\to mcq-mb+nb=۱$$
$$\to(mq)c+(n-m)b=۱\to(b,c)=۱$$

$$\begin{cases}(a,b)=۱\xrightarrow{\exists m,n\in Z}ma+nb=۱\\ c\mid a+b\to a+b=cq\to b=cq-a\end{cases}\to ma+n(cq-a)=۱\to ma-ncq-na=۱$$
$$\to(m-n)a+(nq)c=۱\to(a,c)=۱$$

تمرین: ثابت کنید که اگر a نسبت به b اول باشد، آنگاه برای هر n و m طبیعی ، b^m و a^n نسبت به هم اولند.

حل:

$$(a,b)=۱\to(a,b^m)=۱\to(b^m,a)=۱\to(b^m,a^n)=۱\to(a^n,b^m)=۱$$

***

قضیه (قضیه ی بنیادی حساب): هر عدد طبیعی مرکب تجزیه پذیر است و تنها به یک صورت تجزیه می شود.

$$n=p_۱.p_۲.p_۳\ldots p_k \quad (\text{عدد اول است. } p_i)$$

اثبات لازم نیست.

تذکر: در تجزیه ی اعداد طبیعی، اگر چند عدد اول مساوی وجود داشته باشد، می توان تجزیه را بصورت توانی نوشت.

$$n=p_۱^{\alpha_۱}.p_۲^{\alpha_۲}.p_۳^{\alpha_۳}\ldots p_r^{\alpha_r}=\prod_{i=۱}^{r}p_i^{\alpha_i}\qquad \alpha_i\in W$$

مثلاً: $۷۲۰=۲^۴\times۳^۲\times۵$

قضیه: اگر a و b دو عدد صحیح که حداقل یکی از آنها صفر نباشد، پس:

$$|a|=p_۱^{\alpha_۱}.p_۲^{\alpha_۲}.p_۳^{\alpha_۳}\ldots p_n^{\alpha_n}$$
$$|b|=p_۱^{\beta_۱}.p_۲^{\beta_۲}.p_۳^{\beta_۳}\ldots p_n^{\beta_n}$$
$$\alpha_i,\beta_i\in W$$

آنگاه

$d=(a,b)=p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2}.p_3^{\gamma_3}\dots p_n^{\gamma_n}$

که در آن γ_i کمترین مقدار متناظر α_i و β_i است. یعنی $\gamma_i=Min\{\alpha_i,\beta_i\}$

به عبارتی دیگر ب.م.م دو عدد تجزیه شده ی a و b با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر برابر است.

اثبات لازم نیست.

تمرین: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۷۲۰ و ۲۱۰۰ را بدست آورید.

حل:

$۲۱۰۰=۲^۲\times ۵^۲\times ۳\times ۷$

$۷۲۰=۲^۴\times ۳^۲\times ۵$

$\Rightarrow (۲۱۰۰,۷۲۰)=۲^۲\times ۳^۱\times ۵^۱=۶۰$

تمرین: در هر مورد بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد داده شده را بدست آورید.

الف) ۲۱۰۰ و ۳۶۰۰ ب) ۲۰۰و۳۰۰ ج) ۸۴ و ۱۵۶۸ و ۱۶۸

***

☑ کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

تعریف: عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد صحیح غیرصفر a و b می نامیم ، هرگاه

۱: c مضرب مشترک a و b باشد. یعنی $a|c$ و $b|c$

۲: اگر m یک مضرب طبیعی مشترک دیگر a و b باشد،آنگاه $c\le m$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $[a,b]$ یا c یا $a\coprod b$ نشان می دهیم.

تذکر: ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که هم بر a و هم بر b بخشپذیر باشد.

تمرین: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴ و۶ را بدست آورید.

حل:

مضرب های ۴ $=\{۰,\pm ۴,\pm ۸,\pm ۱۲,\pm ۱۶,\pm ۲۰,\pm ۲۴,\pm ۲۸,\pm ۳۲,\pm ۳۶,\pm ۴۰,\dots\}$

مضربهای ۶ $=\{۰,\pm ۶,\pm ۱۲,\pm ۱۸,\pm ۲۴,\pm ۳۰,\pm ۳۶,\pm ۴۲,\dots\}$

مضربهای مشترک $=\{۰,\pm ۱۲,\pm ۲۴,\pm ۳۶,\dots\}$

ک.م.م $c=[۶,۴]=۱۲$

***

قضیه: اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند،آنگاه ک.م.م a و b همواره موجود و منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه ی مضارب مشترک مثبت a و b باشد. یعنی $A=\{L \mid L>۰, a\mid L, b\mid L\}$ در این صورت $A\neq\Phi$ زیرا $|ab|\in A$ و $A\subset N$ در نتیجه بنابه اصل خوش ترتیبی A عضو ابتدا دارد. فرض کنیم که $Min(A)=c$ در این صورت $[a,b]=c$ و چون عضو ابتدای مجموعه یکتا است، لذا حکم ثابت است.

قضیه: اگر a و b دو عدد صحیح که حداقل یکی از آنها صفر نباشد، پس:

$$|a| = p_۱^{\alpha_۱}.p_۲^{\alpha_۲}.p_۳^{\alpha_۳}\dots p_n^{\alpha_n}$$
$$|b| = p_۱^{\beta_۱}.p_۲^{\beta_۲}.p_۳^{\beta_۳}\dots p_n^{\beta_n}$$
$$\alpha_i,\beta_i\in W$$

آنگاه

$$c=[a,b]=p_۱^{\theta_۱}.p_۲^{\theta_۲}.p_۳^{\theta_۳}\dots p_n^{\theta_n}$$

که در آن θ_i بیشترین مقدار متناظر α_i و β_i است. یعنی $\theta_i = Max\{\alpha_i,\beta_i\}$

به عبارتی دیگر ک.م.م دو عدد تجزیه شده ی a و b با حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر برابر است.

اثبات لازم نیست.

تمرین: اگر $۹۸۰=۲^۲\times۵\times۷^۲$ و $۴۵۰=۲\times۳\times۵^۲$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک این دو عدد را بدست آورید.

حل:

ب.م.م $=(۹۸۰,۴۵۰)=۲^۱\times۵^۱$

ک.م.م $=[۹۸۰,۴۵۰]=۲^۲\times۳^۱\times۵^۲\times۷^۲$

تمرین: به ازاء هر دو عدد صحیح a و b ثابت کنید که $(a,b)\times[a,b]=|ab|$

اثبات: گیریم که

$$|a| = p_۱^{\alpha_۱}.p_۲^{\alpha_۲}.p_۳^{\alpha_۳}\dots p_n^{\alpha_n}$$
$$|b| = p_۱^{\beta_۱}.p_۲^{\beta_۲}.p_۳^{\beta_۳}\dots p_n^{\beta_n}$$
$$\alpha_i,\beta_i\in W$$

و $\gamma_i = Min\{\alpha_i,\beta_i\}$ و $\theta_i = Max\{\alpha_i,\beta_i\}$

آنگاه

$$d=(a,b)=p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2}.p_3^{\gamma_3}...p_n^{\gamma_n}$$

$$c=[a,b]=p_1^{\theta_1}.p_2^{\theta_2}.p_3^{\theta_3}...p_n^{\theta_n}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
d\times c &= (a,b)\times[a,b] \\
&= (p_1^{\gamma_1}.p_2^{\gamma_2}.p_3^{\gamma_3}...p_n^{\gamma_n})\times(p_1^{\theta_1}.p_2^{\theta_2}.p_3^{\theta_3}...p_n^{\theta_n}) \\
&= p_1^{\gamma_1+\theta_1}.p_2^{\gamma_2+\theta_2}.p_3^{\gamma_3+\theta_3}...p_n^{\gamma_n+\theta_n} \\
&= p_1^{\alpha_1+\beta_1}.p_2^{\alpha_2+\beta_2}.p_3^{\alpha_3+\beta_3}...p_n^{\alpha_n+\beta_n} \\
&= (p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}...p_n^{\alpha_n})\times(p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.p_3^{\beta_3}...p_n^{\beta_n}) = |ab|
\end{aligned}$$

نتیجه:

۱: اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند، در این صورت: $[a,b]=\dfrac{|ab|}{(a,b)}$

۲: اگر $(a,b)=1$ آنگاه $[a,b]=|ab|$

تمرین: اگر a و b دو عدد صحیح ناصفر باشند ثابت کنید که

الف) $(ka,kb)=|k|(a,b)$ ب) $[ka,kb]=|k|[a,b]$

حل:

الف:

$$(ka,kb)=d \xrightarrow{\exists m,n\in Z} m(ka)+n(kb)=d \rightarrow k(\underbrace{ma+nb}_{d'})=d$$

$$\rightarrow |k|(a,b)=(ka,kb)$$

ب:

$$[ka,kb]=\frac{|(ka)(kb)|}{(ka,kb)}=\frac{|k|^2|ab|}{|k|(a,b)}=|k|\frac{|ab|}{(a,b)}=|k|[a,b]$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $[12,18]=$ ب) $[-9,17]=$

توجه: اگر a و b دو عدد صحیح مثبت باشند، در این صورت:

$$(a,b)=d \to (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=۱$$

$$\frac{a}{d}=a' \to a=a'd$$

$$\frac{b}{d}=b' \to b=b'd$$

$$\Rightarrow c\times d=(a,b)\times[a,b] \xrightarrow{(a,b)\times[a,b]=a\times b} c\times d=a\times b \to c\times d=a'd\times b'd \to c=a'b'd$$

تمرین: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح مثبت۶ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۳۶ است.

الف) حاصل ضرب آن دو عدد را بدست آورید.

ب) آن دو عدد را بیابید.

حل:

الف:

$$ab=(a,b)\times[a,b]=۶\times ۳۶=۲۱۶$$

ب:

$$c=a'b'd \to ۳۶=a'b'\times ۶ \to a'b'=۶ \xrightarrow{(a',b')=۱} a'b'=۶\times ۱=۲\times ۳$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \to \begin{cases} a'=۶ \to a=a'd=۶\times ۶=۳۶ \\ b'=۱ \to b=b'd=۱\times ۶=۶ \end{cases} \\ \to \begin{cases} a'=۲ \to a=a'd=۲\times ۶=۱۲ \\ b'=۳ \to b=b'd=۳\times ۶=۱۸ \end{cases} \end{array} \right.$$

تمرین: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد مثبت۲۳ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۲۰۹۳ است.آن دو عدد را بیابید.

حل:

$$c=a'b'd \to ۲۰۹۳=a'b'\times ۲۳ \to a'b'=۹۱ \xrightarrow{(a',b')=۱} a'b'=۹۱\times ۱=۷\times ۱۳$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \to \begin{cases} a'=۹۱ \to a=a'd=۹۱\times ۲۳=۲۰۹۳ \\ b'=۱ \to b=b'd=۱\times ۲۳=۲۳ \end{cases} \\ \to \begin{cases} a'=۷ \to a=a'd=۷\times ۲۳=۱۶۱ \\ b'=۱۳ \to b=b'd=۱۳\times ۲۳=۲۹۹ \end{cases} \end{array} \right.$$

***

☑ **همنهشتی اعداد صحیح**

تعریف: فرض کنیم که m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را به پیمانه ی m همنهشت گویند، هرگاه در تقسیم بر m هم باقی مانده باشند. در این صورت می نویسند.

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \text{یا} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

مثلاً: دو عدد ۱۶ و ۹ به پیمانه ی ۷ هم باقی مانده اند. پس: $۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۹$

$$\begin{array}{r|l} ۱۶ & ۷ \\ \hline ۱۴ & ۲ \\ \hline ۲ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۹ & ۷ \\ \hline ۷ & ۱ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

تمرین: نشان دهید که ۱۳و۱۷− به پیمانه ی ۳ همنهشت هستند.

تمرین: نشان دهید که ۳۲ و۱۸ به پیمانه ی ۵ همنهشت هستند.

قضیه (قضیه ی اصلی همنشهتی): برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $m \mid a-b$ و برعکس

اثبات:

حالت اول : $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{?} m \mid a-b$

$$\begin{array}{r|l} a & m \\ \hline & q_۱ \\ \hline r_۱ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} b & m \\ \hline & q_۲ \\ \hline r_۲ & \end{array}$$

$$\begin{cases} a = mq_۱ + r_۱ \\ b = mq_۲ + r_۲ \end{cases} \xrightarrow{a \overset{m}{\equiv} b \to r_۱ = r_۲} a - mq_۱ = b - mq_۲$$

$$\to a-b = mq_۱ - mq_۲ \to a-b = m(q_۱ - q_۲) \to a-b = mq \to m \mid a-b$$

حالت دوم : $m \mid a-b \xrightarrow{?} a \overset{m}{\equiv} b$

چون $m \mid a-b$ لذا عدد صحیح q_1 وجود دارد که $a-b=mq_1$ پس $a=b+mq_1$ (۱)

حال فرض می کنیم که باقی مانده ی تقسیم عدد a بر m برابر r باشد. آنگاه عدد صحیح q_2 وجود دارد که :

$$(2)\ a=mq_2+r \ , \ 0\le r<m$$

از روابط ۱ و ۲ داریم :

$$b+mq_1=mq_2+r \to b=m(q_1-q_2)+r \to b=mq+r \ , 0\le r<m$$

یعنی باقی مانده ی تقسیم b بر m نیز برابر r می باشد. یعنی $a\overset{m}{\equiv}b$

❋❋❋

تمرین : به کمک قضیه ی فوق درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را بررسی کنید.

الف) $31\overset{7}{\equiv}10$

ب) $18\overset{4}{\equiv}15$

❋❋❋

☑ **ویژگی های همنهشتی اعداد صحیح**

اگر m و n اعداد طبیعی و a و b و c و d اعداد صحیح دلخواهی باشند،آنگاه

$$1)\ a\overset{m}{\equiv}a$$

اثبات:

$$m\mid 0 \to m\mid a-a \to a\overset{m}{\equiv}a$$

....

$$2)\ a\overset{m}{\equiv}b \to b\overset{m}{\equiv}a$$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m\mid a-b \to m\mid b-a \to b\overset{m}{\equiv}a$$

....

۳) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow a-b = mq_1 \\ b \overset{m}{\equiv} c \rightarrow m \mid b-c \rightarrow b-c = mq_2 \end{cases}$$

$$(a-b)+(b-c) = mq_1 + mq_2 \rightarrow a-c = m(q_1+q_2) \rightarrow a-c = mq \rightarrow m \mid a-c \rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

....

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in Z} a+c \overset{m}{\equiv} b+c$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow a-b = mq \rightarrow a-b+c-c = mq$$

$$\rightarrow (a+c)-(b+c) = mq \rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+c$$

....

۵) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in Z} ac \overset{m}{\equiv} bc$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow a-b = mq \rightarrow (a-b)c = mqc \rightarrow ac-bc = mq' \rightarrow m \mid ac-bc \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

....

۶) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d$

اثبات:

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \to m\mid a-b \to a-b=mq_۱ \\ c\overset{m}{\equiv}d \to m\mid c-d \to c-d=mq_۲ \end{cases}$$

$$(a-b)+(c-d)=mq_۱+mq_۲ \to (a+c)-(b+d)=m(q_۱+q_۲)$$

$$(a+c)-(b+d)=mq \to m\mid (a+c)-(b+d) \to a+c\overset{m}{\equiv}b+d$$

....

۷) $\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ c\overset{m}{\equiv}d \end{cases} \to ac\overset{m}{\equiv}bd$

اثبات:

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{\times c} ac\overset{m}{\equiv}bc \\ c\overset{m}{\equiv}d \xrightarrow{\times b} bc\overset{m}{\equiv}bd \end{cases} \to ac\overset{m}{\equiv}bd$$

۸) $a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{n\in N} a^n\overset{m}{\equiv}b^n$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m\mid a-b \to a-b=mq \to a^n-b^n=mq' \to m\mid a^n-b^n \to a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

....

۹) $a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{n\in N} na\overset{m}{\equiv}nb$

اثبات:

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m\mid a-b \to n(a-b)=n(mq) \to na-nb=mq' \to m\mid na-nb \to na\overset{m}{\equiv}nb$$

....

۱۰) $\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ n\mid m \end{cases} \to a\overset{n}{\equiv}b$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m \mid a-b \to a-b=mq \xrightarrow{n|m \to m=nq'} a-b=nq'q \to a-b=nq'' \to n \mid a-b \to a \overset{n}{\equiv} b$$

....

۱۱) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \to a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

اثبات:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \to m \mid a-b \to a-b=mq_۱ \\ a \overset{n}{\equiv} b \to n \mid a-b \to a-b=nq_۲ \end{cases}$$

لذا $a-b$ عامل مشترک دو عدد صحیح n و m پس $a-b \geq [m,n]$ و $a-b \mid [m,n]$ یعنی $a-b=[m,n]k$ در

نتیجه $a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

نتیجه:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \\ (m,n)=۱ \end{cases} \to a \overset{[m,n]}{\equiv} b \xrightarrow{[m,n]=mn} a \overset{mn}{\equiv} b$$

....

۱۲) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{k \in Z} a \overset{m}{\equiv} b+mk$

اثبات:

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m \mid a-b \to a-b=mq \to a-b-mk=mq-mk$$

$$\to a-(b+mk)=m(q-k) \to a-(b+mk)=mq' \to m \mid a-(b+mk) \to a \overset{m}{\equiv} b+mk$$

....

۱۳) $a \overset{m}{\equiv} b \to (a,m)=(b,m)$

اثبات:

$$(a,m)=d \xrightarrow{\exists \alpha,\beta\in Z} a\alpha+m\beta=d \xrightarrow{a\overset{m}{\equiv}b \to a=b+mk} (b+mk)\alpha+m\beta=d$$
$$\to b\alpha+mk\alpha+m\beta=d \to b\alpha+m(k\alpha+\beta)=d \xrightarrow{k\alpha+\beta=\beta'\in Z} b\alpha+m\beta'=d$$
$$\to (b,m)=d$$

....

تمرین : ثابت کنید که اگر $a+b\overset{m}{\equiv}c$ آنگاه $a\overset{m}{\equiv}c-b$

حل :

$$a+b\overset{m}{\equiv}c \to m\mid(a+b)-c \to m\mid a+(b-c) \to m\mid a-(c-b) \to a\overset{m}{\equiv}c-b$$

❋❋❋

توجه: رابطه ی همنهشتی به پیمانه ی m یک رابطه ی هم ارزی است. زیرا:

۱: این رابطه انعکاسی است.

$$a\overset{m}{\equiv}a$$

۲: این رابطه تقارنی است.

$$a\overset{m}{\equiv}b \to b\overset{m}{\equiv}a$$

۳: این رابطه تراگذری است.

$$\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ b\overset{m}{\equiv}c \end{cases} \to a\overset{m}{\equiv}c$$

❋❋❋

☑ **دسته ی همنهشتی یک عدد صحیح**

دسته ی همنهشتی عدد صحیح a به پیمانه ی عدد طبیعی m را که با $[a]$ یا $\overline{a}$ نمایش داده می شود. مجموعه ی اعداد صحیحی است که با عدد a به پیمانه ی m هم باقی مانده باشند. یعنی

$$[a]=\{x\in Z \mid x\overset{m}{\equiv}a\}$$

مجموعه ی $[a]$ را کلاس یا رده ی هم ارزی a می گویند و عدد a را نماینده ی کلاس می نامند.

نتیجه:

$$[a]=\{x\in Z \mid x\overset{m}{\equiv}a\}=\{x\in Z \mid x-a=mq\}=\{x\in Z \mid x=a+mq\}$$

تمرین: در همنهشتی به پیمانه ی ۳ کلاس هم ارزی ۵ را بنویسید.

حل:

$$[۵]=\{x\in Z \mid x\overset{۳}{\equiv}۵\}=\{x\in Z \mid x-۵=۳q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۵+۳q\}=\{\dots,-۷,-۴,-۱,۲,۵,۸,۱۱,۱۴,\dots\}$$

توجه: با توجه به این تمرین داریم:

$$[۵]=\{x\in Z \mid x\overset{۳}{\equiv}۵\}=\{x\in Z \mid x-۵=۳q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۵+۳q\}=\{x\in Z \mid x=۲+۳+۳q\}=\{x\in Z \mid x=۲+۳(۱+q)\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۲+۳q'\}=\{x\in Z \mid x-۲=۳q'\}=\{x\in Z \mid x\overset{۳}{\equiv}۲\}=[۲]$$

$$\therefore [۵]=[۲]$$

تمرین: در همنهشتی به پیمانه ی ۴ تمام کلاسهای هم ارزی را بنویسید.

$$[۰]=\{x\in Z \mid x\overset{۴}{\equiv}۰\}=\{x\in Z \mid x-۰=۴q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۰+۴q\}=\{\dots,-۸,-۴,۰,۴,۸,۱۲,\dots\}$$

$$[۱]=\{x\in Z \mid x\overset{۴}{\equiv}۱\}=\{x\in Z \mid x-۱=۴q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۱+۴q\}=\{\dots,-۷,-۳,۱,۵,۹\dots\}$$

$$[۲]=\{x\in Z \mid x\overset{۴}{\equiv}۲\}=\{x\in Z \mid x-۲=۴q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۲+۴q\}=\{\dots,-۶,-۲,\ ۲,۶,۱۰,۱۴,\dots\}$$

$$[۳]=\{x\in Z \mid x\overset{۴}{\equiv}۳\}=\{x\in Z \mid x-۳=۴q\}$$
$$=\{x\in Z \mid x=۳+۴q\}=\{\dots,-۵,\ -۱,۳,۷,۱۱,۱۵,\dots\}$$

نتیجه : رابطه ی هم ارزی به پیمانه ی m مجموعه ی اعداد صحیح را به m کلاس هم ارزی افراز می کند.

$$[a]=\{x\in Z \mid x\overset{m}{\equiv}a\}=\{x\in Z \mid x-a=mq\}=\{x\in Z \mid x=a+mq\}$$

تمرین: ثابت کنید که $a\overset{m}{\equiv}b$ اگر و فقط اگر $[a]=[b]$

حل:

$$a\overset{m}{\equiv}b\rightarrow[a]=[b]$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\in[a]\rightarrow x\overset{m}{\equiv}a\xrightarrow{a\overset{m}{\equiv}b}x\overset{m}{\equiv}b\rightarrow x\in[b]\Rightarrow[a]\subseteq[b] \\ x\in[b]\rightarrow x\overset{m}{\equiv}b\xrightarrow{a\overset{m}{\equiv}b}x\overset{m}{\equiv}a\rightarrow x\in[a]\Rightarrow[b]\subseteq[a] \end{array}\right.\rightarrow[a]=[b]$$

$$[a]=[b]\rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

$$[a]=[b]\xrightarrow{a\in[a]}a\in[b]\rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

تمرین: در همنهشتی به پیمانه ی ۵ ثابت کنید که $[۷]=[۲]$

حل: چون $۷\overset{۵}{\equiv}۲$ پس طبق تمرین قبل داریم $[۷]=[۲]$

تمرین: عدد ۲۱۰- به کدام یک از کلاس های هم ارزی در همنهشتی به پیمانه ی ۸ تعلق دارد؟

۱) $[۶]$ ۲) $[۲]$ ۳) $[۳]$ ۴) $[۱]$

حل:

$$\begin{array}{r|l} ۲۱۰ & ۸ \\ \hline \dots & ۲۶ \\ ۲ & \end{array}$$

$$۲۱۰=۲۶\times۸+۲\rightarrow-۲۱۰=-۲۶\times۸-۲$$
$$\rightarrow-۲۱۰=-۲۶\times۸-۲-۸+۸\rightarrow-۲۱۰=-۲۷\times۸+۶$$
$$\therefore\quad[-۲۱۰]=[۶]$$

توجه: باقی مانده اصلی هر تقسیم باید عدد حسابی باشد.

تمرین : دو عدد b و a به صورت های زیر نوشته شده اند.

$$a = ۷k_۱ + ۵ \quad \text{و} \quad b = ۷k_۲ - ۲$$

دسته ی همنهشتی $a + ۲b$ را به پیمانه ی ۷ مشخص کنید.

حل :

$$[a+۲b] = \{x \mid x \overset{۷}{\equiv} a + ۲b\} = \{x \mid x \overset{۷}{\equiv} (۷k_۱ + ۵) + ۲(۷k_۲ - ۲)\} = \{x \mid x \overset{۷}{\equiv} (۷k_۱ + ۱۴k_۲) + (۵ - ۴)\}$$
$$= \{x \mid x \overset{۷}{\equiv} ۷(k_۱ + ۲k_۲) + ۱\} = \{x \mid x \overset{۷}{\equiv} ۷k + ۱\} = [۱]$$

تمرین: مجموعه ی همه ی دسته های هم ارزی به پیمانه ی ۵ چنین است.

$$\{[۰],[a],[a^۲],[a^۳],[a^۴]\}$$

عدد a کدام است؟

۱(۱ ۲(۲ ۵(۳ ۴(۴

حل: مجموعه ی دسته های هم ارزی به پیمانه ی ۵ بصورت زیر می باشد.

$$\{[۰],[۱],[۲],[۳],[۴]\}$$

حال به جای a در مجموعه ی داده شده عددی قرار دهیم که این دو مجموعه مساوی شوند. قرار می دهیم.

$a = ۲$

$$\Rightarrow \begin{cases} [۰] = [۰] \\ [a] = [۲] \\ [a^۲] = [۲^۲] = [۴] \\ [a^۳] = [۲^۳] = [۸] = [۳] \\ [a^۴] = [۲^۴] = [۱۶] = [۱] \end{cases}$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم $۲^{۱۳۸۰}$ بر ۷ بدست آورید.

حل:

$$۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \to ۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۱ \to (۲^۳)^{۴۶۰} \overset{۷}{\equiv} (۱)^{۴۶۰} \to ۲^{۱۳۸۰} \overset{۷}{\equiv} ۱$$

❋❋❋

تمرین: باقی مانده ی تقسیم 2^{1385} بر ۹ بدست آورید.

حل:

$$8\overset{9}{\equiv}-1 \rightarrow 2^{3}\overset{9}{\equiv}-1 \rightarrow (2^{3})^{461}\overset{9}{\equiv}(-1)^{461} \rightarrow 2^{1383}\overset{9}{\equiv}-1 \rightarrow 2^{1383}\times 2^{2}\overset{9}{\equiv}-1\times 2^{2}$$

$$\rightarrow 2^{1385}\overset{9}{\equiv}-4 \xrightarrow{a\overset{m}{\equiv}b+mk} 2^{1385}\overset{9}{\equiv}-4+9(1) \rightarrow 2^{1385}\overset{9}{\equiv}5$$

تمرین: آخرین رقم سمت راست عدد 7^{103} را بدست آورید.

حل: باقی مانده ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰ برابر آخرین رقم سمت راست آن است.

$$49\overset{10}{\equiv}-1 \rightarrow 7^{2}\overset{10}{\equiv}-1 \rightarrow (7^{2})^{50}\overset{10}{\equiv}(-1)^{50} \rightarrow 7^{100}\overset{10}{\equiv}1 \rightarrow 7^{100}\times 7^{3}\overset{10}{\equiv}1\times 7^{3}$$

$$\rightarrow 7^{103}\overset{10}{\equiv}7^{3} \xrightarrow{7^{2}\overset{10}{\equiv}-1\rightarrow 7^{2}\times 7\overset{10}{\equiv}-1\times 7\rightarrow 7^{3}\overset{10}{\equiv}-7\rightarrow 7^{3}\overset{10}{\equiv}-7+10(1)\rightarrow 7^{3}\overset{10}{\equiv}3} 7^{103}\overset{10}{\equiv}3$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم $3^{2000}+2^{1380}$ بر ۷ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می کنیم.

$$8\overset{7}{\equiv}1 \rightarrow 2^{3}\overset{7}{\equiv}1 \rightarrow (2^{3})^{460}\overset{7}{\equiv}(1)^{460} \rightarrow 2^{1380}\overset{7}{\equiv}1$$

$$27\overset{7}{\equiv}-1 \rightarrow 3^{3}\overset{7}{\equiv}-1 \rightarrow (3^{3})^{666}\overset{7}{\equiv}(-1)^{666} \rightarrow 3^{1998}\overset{7}{\equiv}1 \rightarrow 3^{1998}\times 3^{2}\overset{7}{\equiv}1\times 3^{2}$$

$$\rightarrow 3^{2000}\overset{7}{\equiv}9 \xrightarrow{9\overset{7}{\equiv}2} 3^{2000}\overset{7}{\equiv}2$$

$$\therefore \begin{cases} 2^{1380}\overset{7}{\equiv}1 \\ 3^{2000}\overset{7}{\equiv}2 \end{cases} \rightarrow 2^{1380}+3^{2000}\overset{7}{\equiv}1+2 \rightarrow 2^{1380}+3^{2000}\overset{7}{\equiv}3$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم $8^{12}+7^{12}+6^{12}+5^{12}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل: ابتدا باقی مانده های هر یک از این اعداد را جداگانه تعیین می کنیم.

$$25\overset{13}{\equiv}-1 \rightarrow 5^{2}\overset{13}{\equiv}-1 \rightarrow (5^{2})^{6}\overset{13}{\equiv}(-1)^{6} \rightarrow 5^{12}\overset{13}{\equiv}1$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۳۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to ۶^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to (۶^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^{۶} \to ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۳^{۶} \\ ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to ۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to (۳^{۳})^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۲} \to ۳^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right. \to ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۴۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰ \to (۷^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (۱۰)^{۶} \to ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} (۱۰)^{۶} \\ ۱۰ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \to (۱۰)^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^{۶} \to (۱۰)^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۳^{۶} \quad \to ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to ۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \to (۳^{۲})^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۳} \to ۳^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right.$$

$$۶۴ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to ۸^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to (۸^{۲})^{۶} \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^{۶} \to ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۵^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۷^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right. \to (۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲}) \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۱+۱+۱ \to (۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲}) \overset{۱۳}{\equiv} ۴$$

روش دوم :

$$۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + (-۶)^{۱۲} + (-۵)^{۱۲}$$

$$\to ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۵^{۱۲}$$

$$\to ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۲(۵^{۱۲} + ۶^{۱۲})$$

$$\xrightarrow{\to ۵^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \, , \, \to ۶^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱} ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۲(۱+۱) \to ۵^{۱۲} + ۶^{۱۲} + ۷^{۱۲} + ۸^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۴$$

تمرین: باقی مانده ی تقسیم $۸^{۱۷} + ۷^{۱۷} + ۶^{۱۷} + ۵^{۱۷}$ بر ۱۳ بدست آورید.

حل :

$$۵^{۱۷} + ۶^{۱۷} + ۷^{۱۷} + ۸^{۱۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۵^{۱۷} + ۶^{۱۷} + (-۶)^{۱۷} + (-۵)^{۱۷} \to ۵^{۱۷} + ۶^{۱۷} + ۷^{۱۷} + ۸^{۱۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

تمرین: دو رقم سمت راست عدد $۷^{۱۰۳}$ را بدست آورید.

حل: باقی مانده ی تقسیم هر عدد طبیعی بر ۱۰۰ برابر دو رقم سمت راست آن است.

$$۴۹\overset{۱۰۰}{\equiv}-۵۱\rightarrow ۷^۲\overset{۱۰۰}{\equiv}-۵۱\rightarrow (۷^۲)^۲\overset{۱۰۰}{\equiv}(-۵۱)^۲\xrightarrow{(-۵۱)^۲=۲۶۰۱\overset{۱۰۰}{\equiv}۱}۷^۴\overset{۱۰۰}{\equiv}۱\rightarrow (۷^۴)^{۲۵}\overset{۱۰۰}{\equiv}۱^{۲۵}$$

$$\rightarrow ۷^{۱۰۰}\overset{۱۰۰}{\equiv}۱\rightarrow ۷^{۱۰۰}\times ۷^۳\overset{۱۰۰}{\equiv}۱\times ۷^۳\xrightarrow{۷^۳=۳۴۳\overset{۱۰۰}{\equiv}۴۳}۷^{۱۰۳}\overset{۱۰۰}{\equiv}۴۳$$

تمرین : باقی مانده ی تقسیم $\sum_{n=۱}^{۱۰۰} n!$ بر ۸ را تعیین کنید.

تمرین : یکان عدد $۳^{۴۲۴}+۷^{۱۰۱}$ را تعیین کنید.

تمرین : باقی مانده ی تقسیم $(۲۵۱)^{۱۶۱}+\ldots+(۲۴۳)^{۱۶۱}+(۲۴۲)^{۱۶۱}+(۲۴۱)^{۱۶۱}$ بر ۱۲ بدست آورید.

تمرین : نشان دهید که $۲^{۱۱}-۱$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

تمرین : باقی مانده ی تقسیم $۲^{۱۳۸۱}+۵$ بر ۷ را به دست آورید.

تمرین: اگر $۸^۹+a$ بر ۱۱ بخش پذیر باشد، آنگاه کوچکترین مقدار طبیعی برای a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

حل: ابتدا باقی مانده ی تقسیم عدد $۸^۹$ بر ۱۱ را تعیین می کنیم.

$$۶۴\overset{۱۱}{\equiv}-۲\rightarrow (۸^۲)^۴\overset{۱۱}{\equiv}(-۲)^۴\rightarrow ۸^۸\overset{۱۱}{\equiv}۱۶\rightarrow ۸^۸\times ۸\overset{۱۱}{\equiv}۱۶\times ۸\rightarrow ۸^۹\overset{۱۱}{\equiv}۱۲۸$$

$$\xrightarrow{۱۲۸\overset{۱۱}{\equiv}۷}۸^۹\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

$$۸^۹\overset{۱۱}{\equiv}۷\rightarrow ۸^۹+a\overset{۱۱}{\equiv}۷+a\xrightarrow{۸^۹+a\overset{۱۱}{\equiv}۰}۷+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$۷+a\overset{۱۱}{\equiv}۰\rightarrow ۷+a=۰+۱۱k\rightarrow a=-۷+۱۱k$$

حال برای تعیین کمترین مقدار طبیعی a لازم است. مقدار k را برابر ۱ قرار دهیم. در این صورت:

$$a=-۷+۱۱k\rightarrow \xrightarrow{k=۱}a=۴$$

تمرین : اگر $a\overset{۶}{\equiv}۳$ و $a\overset{۸}{\equiv}۵$. باقی مانده ی تقسیم a بر ۲۴ چند است؟

حل :

$$a\overset{۶}{\equiv}۳\rightarrow a-۳=۶k_۱\rightarrow a=۳+۶k_۱\xrightarrow{\times ۴}۴a=۲۴k_۱+۱۲$$

$$a\overset{۸}{\equiv}۵\rightarrow a-۵=۸k_{۲}\rightarrow a=۵+۸k_{۲}\xrightarrow{\times ۳}۳a=۲۴k_{۲}+۱۵$$

$$\Rightarrow ۴a-۳a=۲۴(k_{۱}-k_{۲})-۳\rightarrow a=۲۴k-۳\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}-۳\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}-۳+۱(۲۴)\rightarrow a\overset{۲۴}{\equiv}۲۱$$

***

تمرین : برای هر دو عدد صحیح b و a ثابت کنید که :

الف) $(a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۲}+b^{۲}$ ب) $(a\pm b)^{۳}\overset{ab}{\equiv}a^{۳}\pm b^{۳}$

حل :

الف :

$$(a\pm b)^{۲}=a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}$$

$$(a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۲}\pm ۲ab+b^{۲}\rightarrow (a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۲}+b^{۲}\pm ۲(ab)\rightarrow (a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۲}+b^{۲}$$

ب :

$$(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳ab^{۲}\pm b^{۳}$$

$$(a\pm b)^{۳}\overset{ab}{\equiv}a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳ab^{۲}\pm b^{۳}\rightarrow (a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۳}\pm b^{۳}+۳ab(b\pm a)\rightarrow (a\pm b)^{۲}\overset{ab}{\equiv}a^{۳}\pm b^{۳}$$

***

تمرین : باقی مانده ی تقسیم $۳۷^{۲n+۱}$ بر ۸ را به ازای هر عدد طبیعی n به دست آورید.

حل :

$$۳۷\overset{۸}{\equiv}۵\rightarrow (۳۷)^{۲}\overset{۸}{\equiv}(۵)^{۲}\xrightarrow{۲۵\overset{۸}{\equiv}۱}(۳۷)^{۲}\overset{۸}{\equiv}۱\rightarrow (۳۷)^{۲n}\overset{۸}{\equiv}(۱)^{n}$$

$$\rightarrow (۳۷)^{۲n}\times ۳۷\overset{۸}{\equiv}۱\times ۳۷\rightarrow (۳۷)^{۲n+۱}\overset{۸}{\equiv}۷\xrightarrow{۳۷\overset{۸}{\equiv}۵}(۳۷)^{۲n+۱}\overset{۸}{\equiv}۵$$

***

تمرین : نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $۶^{n+۲}+۷^{۲n+۱}$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

حل :

$$۶^{n}\overset{۴۳}{\equiv}۶^{n}\xrightarrow{\times ۳۶}۶^{n}\times ۳۶\overset{۴۳}{\equiv}۶^{n}\times ۳۶\rightarrow ۶^{n+۲}\overset{۴۳}{\equiv}۶^{n}\times ۳۶$$

$$۷^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \to (۷^۲)^n \overset{۴۳}{\equiv} (۶)^n \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^n \times ۷$$

حال موارد بالا را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^n \times ۳۶ + ۶^n \times ۷$$

$$\to ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^n(۳۶+۷) \to ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۶^n(۴۳) \to\to ۶^{n+۲} + ۷^{۲n+۱} \overset{۴۳}{\equiv} ۰$$

***

تمرین : نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $۱۱^{۳n-۱} - ۷$ بر ۱۹ بخش پذیر است.

حل :

$$۱۱^{۳n-۱} - ۷ = ۱۱^{۳(n-۱)+۲} - ۷ = (۱۱^۳)^{n-۱} \times ۱۱^۲ - ۷$$

اما :

$$۱۱^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \to (۱۱^۳)^{n-۱} \overset{۱۹}{\equiv} (۱)^{n-۱} \to ۱۱^{۳n-۳} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۷} ۱۱^{۳n-۳} \times ۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \times ۷ \to ۱۱^{۳n-۱} \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \xrightarrow{-۷} ۱۱^{۳n-۱} - ۷ \equiv ۷ - ۷ \to ۱۱^{۳n-۱} - ۷ \overset{۱۹}{\equiv} ۰$$

***

قضیه: اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m) = d$ آنگاه $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

اثبات:

اگر $c = ۰$ باشد. پس $d = (c,m) = (۰,m) = m$ و حکم ثابت است. زیرا

$$a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \to a \overset{\frac{m}{m}}{\equiv} b \to a \overset{۱}{\equiv} b$$

اگر $c \neq ۰$ در این صورت اعداد صحیح m' و c' موجودند، بطوری که $m = m'd$ و $c = c'd$ و $(c',m') = ۱$.

از طرفی

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \to m \mid ac - bc \to m'd \mid ac'd - bc'd \xrightarrow{k \in Z} ac'd - bc'd = m'dk$$

$$\to c'd(a-b) = m'dk \to c'(a-b) = m'k \to m' \mid c'(a-b)$$

و چون $(c',m')=۱$ پس بنابر لم اقلیدس داریم:

$$m' \mid a-b \rightarrow a \overset{m'}{\equiv} b \rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نتیجه: اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=۱$ آنگاه $a \overset{m}{\equiv} b$

***

تمرین: معادله ی همنهشتی $۳x \overset{۵}{\equiv} ۹$ را حل کنید.

حل:

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۹ \rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳\times ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \rightarrow x = ۵k+۳$$

تمرین: معادله ی همنهشتی $۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۲$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۲ \rightarrow ۴x \overset{۹}{\equiv} ۴\times ۳ \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۳ \rightarrow x = ۹k+۳$$

تمرین: معادله ی همنهشتی $۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۳$ را حل کنید.

حل:

$$۴x \overset{۹}{\equiv} ۱۳ \xrightarrow{۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴} ۴x \overset{۹}{\equiv} ۴ \rightarrow \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۹k+۱$$

تمرین : معادله های همنهشتی زیر را حل کنید.

الف) $۱۰x \overset{۱۵}{\equiv} ۴۰$ ب) $۹x \overset{۴}{\equiv} ۱۳$

حل :

الف :

$$۱۰x \overset{۱۵}{\equiv} ۴۰ \xrightarrow{(۱۰,۱۵)=۵} x \overset{۳}{\equiv} ۴ \xrightarrow{۴ \overset{۳}{\equiv} ۱} x \overset{۳}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۳k+۱$$

ب :

$$۹x \overset{۴}{\equiv} ۱۳ \xrightarrow{۱۳ \overset{۴}{\equiv} ۹} ۹x \overset{۴}{\equiv} ۹ \rightarrow \xrightarrow{(۹,۴)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۴k+۱$$

***

☑ معادله ی سیاله

تعریف: هر معادله ی دو یا چند متغیره که دامنه ی متغیر های آن مجموعه ی اعداد صحیح باشند، را معادله ی سیاله (دیوفانتی) می گویند. اگر متغیر های معادله ی سیاله از درجه ی یک باشند،آنرا معادله ی سیاله ی خطی می نامند.

مثلاً معادله ی $ax+by=c$ یک معادله ی سیاله ی خطی است که در آن $a,b,c\in Z$ و $a^۲+b^۲\neq ۰$

منظور از حل یک معادله ی سیاله ، یافتن جواب های صحیح معادله است. یعنی زوج مرتب $(x_۰,y_۰)$ از اعداد صحیح را یک جوا ب معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ می نامند، هرگاه $ax_۰+by_۰=c$

مثال: زوج مرتب $(۲,-۳)$ یک جواب معادله ی $۳x-۲y=۱۲$ است. زیرا $۳(۲)-۲(-۳)=۱۲$

قضیه: معادله ی سیاله ی خطی $ax+by=c$ دارای جواب است، اگر وفقط اگر $(a,b)=d\mid c$

اثبات: اگر معادله ی $ax+by=c$ دارای جواب است. آنگاه $ax_۰+by_۰=c$ قرار می دهیم: $x_۰=km$ و $y_۰=kn$ پس آنگاه $akm+bkn=c$

$$akm+bkn=c\rightarrow k(\underbrace{am+bn}_{d})=c\rightarrow kd=c\rightarrow d\mid c$$

اگر $(a,b)=d\mid c$ لذا عدد صحیح q موجود است که $c=dq$ و چون $(a,b)=d$ پس وجود دارند، اعداد صحیح s و r بطوری که

$$ar+bs=d\xrightarrow{c=dq}c=(ar+bs)q\rightarrow c=a(rq)+b(sq)$$

یعنی (rq,sq) یک جواب معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ است.

نتیجه۱: اگر $(a,b)=d$ و $d\nmid c$ آنگاه معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ دارای جواب صحیح نیست.

مثلاً: معادله ی سیاله ی $۴x+۶y=۷$ دارای جواب صحیح نیست.

نتیجه۲: اگر $(a,b)=۱$ چون $۱\mid c$ آنگاه معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ همواره دارای جواب صحیح است.

تمرین: ثابت کنید که معادله ی $(۷n+۹)x+(۳n+۴)y=۵$ به ازاء هر عدد صحیح n دارای جواب است.

حل: گیریم که $(۷n+۹,۳n+۴)=d$

$$(۷n+۹,۳n+۴)=d \rightarrow \begin{cases} d\,|\,۷n+۹ \rightarrow d\,|\,-۳(۷n+۹) \\ d\,|\,۳n+۴ \rightarrow d\,|\,۷(۳n+۴) \end{cases}$$

$$\rightarrow d\,|\,-۳(۷n+۹)+۷(۳n+۴) \rightarrow d\,|\,۱ \xrightarrow{d\in N} d=۱$$

نتیجه۳: معادله ی همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)=d\,|\,b$

اثبات: معادله ی $ax \overset{m}{\equiv} b$ را به صورت معادله ی سیاله ی خطی می نویسیم:

$$ax \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m\,|\,ax-b \rightarrow ax-b=mq \rightarrow ax-mq=b \rightarrow ax+mq'=b$$

و طبق قضیه ی قبل حکم ثابت است.

مثلاً: معادله ی همنشتی سیاله ی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۷$ دارای جواب نیست. زیرا $(۴,۶)=۲$ و $۲\nmid ۷$

قضیه: اگر $(x_\circ,y_\circ)$ یک جوا ب معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ باشد،آنگاه کلیه ی جوابهای معادله عبارتند از :

$$\boxed{\begin{cases} x=x_\circ+\dfrac{b}{d}k \\ y=y_\circ-\dfrac{a}{d}k \end{cases}}$$

که در آن $(a,b)=d$ و $k\in Z$

اثبات : ابتدا نشان می دهیم که هر x و y به شکل فوق جوابی از معادله ی سیاله است.

$$ax+by=a(x_\circ+\frac{b}{d}k)+b(y_\circ-\frac{a}{d}k)=ax_\circ+\frac{ab}{d}k+by_\circ-\frac{ab}{d}k=ax_\circ+by_\circ=c$$

حال فرض می کنیم که اگر $(x_\circ,y_\circ)$ یک جواب معادله است. در این صورت :

$$ax+by=ax_\circ+by_\circ=c \rightarrow a(x-x_\circ)=b(y_\circ-y) \rightarrow \frac{a}{d}(x-x_\circ)=\frac{b}{d}(y_\circ-y) \rightarrow \frac{b}{d}\,|\,\frac{a}{d}(x-x_\circ)$$

$$\xrightarrow{(\frac{b}{d},\frac{a}{d})=۱} \frac{b}{d}\,|\,(x-x_\circ) \rightarrow x-x_\circ=\frac{b}{d}k \rightarrow x=x_\circ+\frac{b}{d}k$$

و در نهایت مقدار x را در معادله ی سیاله قرار می دهیم.

$$a(x-x_{\circ})=b(y_{\circ}-y)\xrightarrow{x-x_{\circ}=\frac{b}{d}k}a(\frac{b}{d}k)=b(y_{\circ}-y)\rightarrow y=y_{\circ}-\frac{a}{d}k$$

نتیجه: طبق این قضیه بدیهی است که اگر معادله ی سیاله ی $ax+by=c$ دارای جوابی به صورت $(x_{\circ},y_{\circ})$ باشد، در حقیقت بی شمار جواب دارد که از رابطه ی فوق بدست می آیند.

تمرین: معادله ی $۲x+۳y=۸$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۳)=۱$ و $۱|۸$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(۱,۲)$ می رسیم. پس کلیه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+\frac{b}{d}k=۱+\frac{۳}{۱}k=۱+۳k \\ y=y_{\circ}-\frac{a}{d}k=۲-\frac{۲}{۱}k=۲-۲k \end{cases}$$

تمرین: معادله ی $۴x+۶y=۱۰$ را حل کنید.

حل: چون $(۴,۶)=۲$ و $۲|۱۰$ ، لذا معادله دارای جواب است. با جستجو به جواب $(۱,۱)$ می رسیم. پس کلیه ی جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+\frac{b}{d}k=۱+\frac{۶}{۲}k=۱+۳k \\ y=y_{\circ}-\frac{a}{d}k=۱-\frac{۴}{۲}k=۱-۲k \end{cases}$$

تمرین: معادله ی $۴x+۶y=۷$ را حل کنید.

حل: چون $(۴,۶)=۲$ و $۲\nmid ۷$ ، لذا معادله دارای جواب نیست.

***

☑ حل معادله ی سیاله به روش اویلر

در این روش مجهولی را که ضریب آن از لحاظ قدرمطلق کمتر از ضریب دیگری است،برحسب بقیه ی عناصر معادله حساب می کنیم که یک عبارت کسری به دست آید. این عبارت را تا حد امکان تفکیک می نماییم و کسر جدیدی که حاصل می شود را برابر عدد صحیحی مانند k قرار داده و از آنجا x و y را بر حسب k بدست می آوریم.

تمرین: معادله ی $۲x + ۳y = ۸$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۳) = ۱$ و $۱|۸$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x = \frac{۸ - ۳y}{۲} = \frac{۸ - ۲y - y}{۲} = \frac{۸ - ۲y}{۲} + \frac{-y}{۲} = ۴ - y + \frac{-y}{۲}$$

حال $\frac{-y}{۲}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{-y}{۲} = k \rightarrow y = -۲k$$

پس:

$$x = ۴ - y + \frac{-y}{۲} \rightarrow x = ۴ + ۲k + k = ۴ + ۳k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = ۴ + ۳k \\ y = -۲k \end{cases}$$

تمرین: معادله ی $۲x + ۵y = ۱۱$ را حل کنید.

حل: چون $(۲,۵) = ۱$ و $۱|۱۱$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب x دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$x = \frac{۱۱ - ۵y}{۲} = \frac{۱۰ + ۱ - ۴y - y}{۲} = ۵ - ۲y + \frac{۱ - y}{۲}$$

حال $\frac{۱ - y}{۲}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۱ - y}{۲} = k \rightarrow y = ۱ - ۲k$$

پس:

$$x = ۵ - ۲y + \frac{۱ - y}{۲} \rightarrow x = ۵ - ۲(۱ - ۲k) + k = ۳ + ۵k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = ۳ + ۵k \\ y = ۱ - ۲k \end{cases}$$

تمرین: معادله ی $۵x - ۳y = ۱۱$ را حل کنید.

حل: چون $(۵,-۳) = ۱$ و $۱|۱۱$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب x است پس:

$$y = \frac{۱۱ - ۵x}{-۳} = \frac{۹ + ۲ - ۶x + x}{-۳} = -۳ + ۲x + \frac{۲ + x}{-۳}$$

حال $\frac{۲ + x}{-۳}$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۲ + x}{-۳} = k \rightarrow x = -۲ - ۳k$$

پس:

$$y = -۳ + ۲x + \frac{۲ + x}{-۳} = -۳ + ۲(-۲ - ۳k) + k = -۷ - ۵k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = -۲ - ۳k \\ y = -۷ - ۵k \end{cases}$$

تمرین: جوابهای طبیعی[1] معادله ی $۲x + ۵y = ۱۱$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را حل می کنیم. با توجه به تمرین های قبل داریم.

$$\begin{cases} x = ۳ + ۵k \\ y = ۱ - ۲k \end{cases}$$

حال جدولی مانند جدول زیر تشکیل می دهیم و جوابهای طبیعی معادله را به کمک آن تعیین می کنیم.

k	....	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	....
x	....	-۱۷	-۱۲	-۷	-۲	۳	۸	۱۳	....
y	....	۹	۷	۵	۳	۱	-۱	-۳	....

با توجه به این جدول بدیهی است که معادله دارای یک جواب طبیعی $(۳,۱)$ است.

***

[1] . منظور از جواب طبیعی، جوابی است مانند $(x_۰ , y_۰)$ که در آن $x_۰$ و $y_۰$ هر دو عدد طبیعی باشند.

تمرین : در یک دفتر پستی فقط تمبر های۹۰ و۵۰ ریالی موجود است. برای چسباندن تمبر روی یک بسته ی پستی که نیاز به۸۵۰ ریال تمبر دارد، از هر کدام از تمبر های فوق به چه مقدار لازم است؟

حل : تعداد تمبر های ۹۰ و ۵۰ ریالی را به ترتیب x و y در نظر بگیریم. معادله ی سیاله ی $۹۰x + ۵۰y = ۸۵۰$ حاصل می شود.

$$۹۰x + ۵۰y = ۸۵۰ \xrightarrow{\div ۱۰} ۹x + ۵y = ۸۵$$

هدف تعیین جواب های طبیعی y و x است که در معادله ی $۹x + ۵y = ۸۵$ صدق کند.

چون $(۹,۵) = ۱$ و $۱|۸۵$ ، لذا معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدرمطلق کوچکتر از ضریب x است پس:

$$y = \frac{۸۵ - ۹x}{۵} = \frac{۸۵ - ۱۰x + x}{۵} = ۱۷ - ۲x + \frac{۱}{۵}x$$

حال $\frac{۱}{۵}x$ را برابر عدد صحیح k قرار می دهیم.

$$\frac{۱}{۵}x = k \to x = ۵k$$

پس:

$$y = ۱۷ - ۲x + \frac{۱}{۵}x = ۱۷ - ۱۰k + k = ۱۷ - ۹k$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} x = ۵k \\ y = ۱۷ - ۹k \end{cases}$$

حال جدولی مانند جدول زیر تشکیل می دهیم و جوابهای طبیعی معادله را به کمک آن تعیین می کنیم.

k	....	-۱	۰	۱	۲	....
x	....	-۵	۰	۵	۱۰	....
y	....	۲۶	۱۷	۸	-۱	....

پس دو جواب زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۷ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۸ \end{cases}$$

***

نکته: اگر $(k \in N)$ تعداد جوابهای طبیعی معادله ی سیاله ی $x + y = k$ برابر $k - ۱$ است.

مثال: تعداد جوابهای طبیعی معادله ی $x + y = ۱۱$ برابر ۱۰ جواب است.

موفق باشید. جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

ترکیبیات

پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان باوی

www.mathtower.org

اردیبهشت ۱۳۸۵

فصل سوم : ترکیبیات

در اینجا در پی آن هستیم که چند مدل شهودی و تجسمی در مورد ترکیبیات معرفی نماییم.

☑ رابطه و گراف

تعریف: اگر A یک مجموعه متناهی و گسسته باشد. در این صورت مجموعه ی R را یک رابطه روی مجموعه ی A گویند، هرگاه $R \subseteq A \times A$. یعنی $R = \{(x,y) \mid x, y \in A\}$

توجه: اگر $(x,y) \in R$ در این صورت می نویسند: xRy

تعریف: رابطه ی R را بازتابی(انعکاسی) گویند، هرگاه به ازای هر a عضو A داریم: $(a,a) \in R$

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ آنگاه رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۳,۳)\}$ بازتابی است.

تعریف: رابطه ی R را تقارنی گویند، هرگاه اگر $(a,b) \in R$ آنگاه $(b,a) \in R$

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ آنگاه رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$ تقارنی است.

تعریف: رابطه ی R را تراگذری (تعدی یا ترایایی) گویند، هرگاه اگر $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ آنگاه $(a,c) \in R$

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ آنگاه رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۱,۳)\}$ تراگذری است.

تعریف: رابطه ی R را پاد متقارن گویند، هرگاه به ازای هر زوج مرتب (a,b) اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ آنگاه $a = b$

به عبارتی دیگر، اگر $a,b \in A$ و $a \neq b$ آنگاه یا $(a,b) \notin R$ یا $(b,a) \notin R$

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ آنگاه رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۱,۳)\}$ پادتقارنی است.

تعریف: رابطه ی R را هم ارزی گویند، هرگاه بازتابی ، تقارنی و تراگذری باشد.

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ آنگاه رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۱,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$ هم ارزی است.

تمرین: مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ را در نظر بگیرید.

الف: رابطه ای روی A بنویسید که بازتابی باشد.

ب: رابطه ای روی A بنویسید که تقارنی باشد.

ج: رابطه ای روی A بنویسید که تراگذری باشد.

د: رابطه ای روی A بنویسید که پادمتقارن باشد.

هـ: رابطه ای روی A بنویسید که هم ارزی باشد.

حل:

الف: $R_1 = \{\underline{(۱,۱)}, (۱,۲), (۲,۳), (۱,۴), \underline{(۲,۲)}, \underline{(۳,۳)}, \underline{(۴,۴)}\}$

ب: $R_2 = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۱,۴), (۴,۱)\}$

ج: $R_3 = \{(۱,۲), (۲,۱), (۱,۱)\}$

د: $R_4 = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۱), (۱,۳), (۱,۱), (۳,۳)\}$

هـ: $R_۵ = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۱), (۱,۳), (۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۳,۲), (۲,۱)\}$

تمرین: مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ را در نظر بگیرید.

الف: رابطه ای روی A بنویسید که فقط خاصیت پادتقارنی داشته باشد.

ب : رابطه ای روی A بنویسید که متقارن و بازتابی باشد ولی ترایایی نباشد.

ج : رابطه ای روی A بنویسید که نه متقارن و نه پادمتقارن باشد.

حل:

الف:

$R_1 = \{(۱,۳)\}$

ب:

$R_2 = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۱,۲), (۲,۱), (۳,۱), (۱,۳)\}$

$(۲,۱) \in R_2, (۱,۳) \in R_2 \to (۲,۳) \notin R_2$

ج:

$R_3 = \{(۱,۲), (۲,۱), (۳,۲)\}$

اگر R یک رابطه روی مجموعه ی متناهی A باشد، می توان به این رابطه یک گراف جهت دار مانند G نسبت داد. بطوری که رأس های G اعضای مجموعه ی A و هر یال G عضوی از R باشد. همچنین رأس a از گراف G به رأس b متصل خواهد بود، اگر aRb باشد.

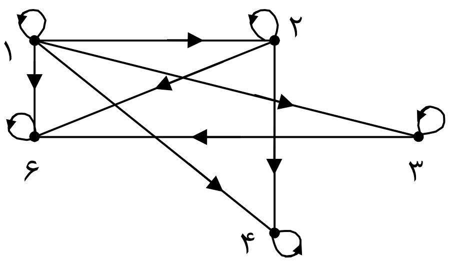
توجه: اگر aRa آنگاه گراف G در رأس a دارای یک طوقه خواهد بود.

تمرین: مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۶\}$ داده شده است. اگر به ازاء $a,b \in A$ تعریف کنیم. $aRb \Leftrightarrow a \mid b$

الف: رابطه ی R را بنویسید. ب: گراف متناظر با رابطه ی R را رسم کنید.

حل:

$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۶),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴),(۶,۶)\}$

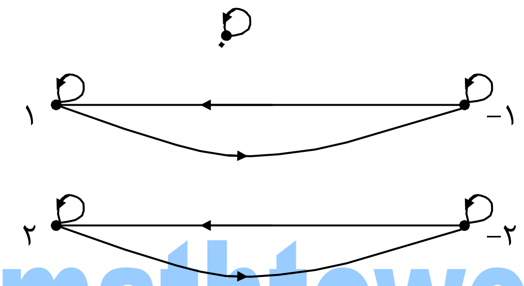


تمرین: رابطه ی R روی مجموعه ی $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ به صورت زیر تعریف شده است. گراف متناظر با آن را رسم کنید.

$$xRy \Leftrightarrow |x|=|y|$$

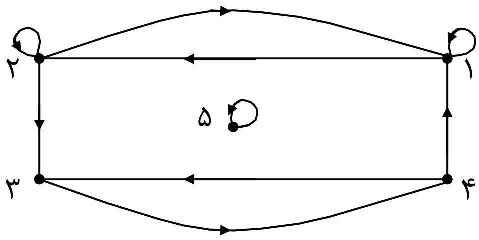
حل:

$R=\{(۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,-۱),(۲,۲),(-۲,۲),(۲,-۲),(-۲,-۲),(۰,۰)\}$



تمرین: فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و گراف جهت دار زیر نمایشگر رابطه ی R روی A باشد. اعضای رابطه ی R را بنویسید.

حل:



$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۱),(۵,۵)\}$

نتیجه:

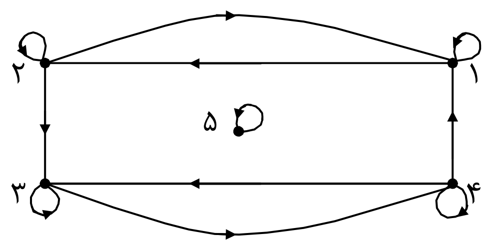
۱: یک رابطه بازتابی است، اگر و فقط اگر هر رأس گراف متناظر آن طوقه داشته باشد.

۲: یک رابطه متقارن است، هرگاه از هر رأس a به b دو یال در جهت متقارن موجود باشد.

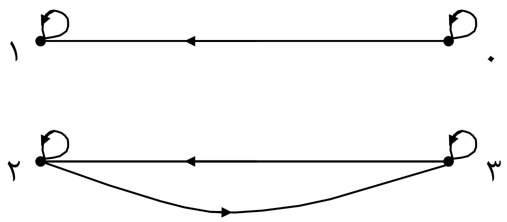
۳: یک رابطه تراگذری است، اگر از رأس a به b و از رأس b به c یال وجود داشته باشد،آنگاه از رأس a به c نیز یال موجود باشد.

۴: یک رابطه پاد متقارن است، اگر و فقط اگر از رأس a به b یال موجود باشد ولی از b به a یال موجود نباشد.

تمرین : با توجه به گراف زیر خواص رابطه ی R را بررسی کنید.



تمرین : با توجه به گراف زیر خواص رابطه ی R را بررسی کنید.



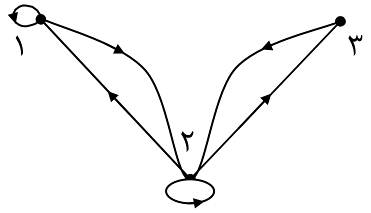
***

☑ رابطه و ماتریس

اگر R یک رابطه روی مجموعه ی A باشد. می توان ماتریس مجاورت برای گراف جهت دار G متناظر رابطه ی R نوشت. این ماتریس را **ماتریس مجاورت گراف جهت دار** می نامند.

تمرین: ماتریس مجاورت رابطه ی زیر روی مجموعه ی $A = \{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

حل:



$R = \{(۱,۱), (۲,۲), (۱,۲), (۲,۱), (۲, ۳), (۳,۲)\}$

$$M(R) = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

☑ **ترکیب رابطه ها**

تعریف: اگر R رابطه ای از مجموعه ی A بـه مجموعـه ی B و S رابطـه ی دیگـری از مجموعـه ی B بـه مجموعـه ی C باشد،آنگاه **ترکیب دو رابطه ی** R و S را با SOR نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$xRy, ySz \to x(SOR)z$$

یا

$$(x,y)\in R,(y,z)\in S \to (x,z)\in SoR$$

تمرین: اگر $A=\{۲,۵,۷,۸\}$ و داشته باشیم:

$$aRb \Leftrightarrow a\overset{۳}{\equiv}b, a\neq b$$
$$aSb \Leftrightarrow a<b$$

الف: رابطه های R و S را با اعضایشان مشخص کنید.

ب: رابطه های ROS و SOR و ROR و SOS را بنویسید.

حل:

$$R=\{(۲,۵),(۵,۲),(۲,۸),(۸,۲),(۵,۸),(۸,۵)\}$$

$$S=\{(۲,۵),(۲,۷),(۲,۸),(۵,۷),(۵,۸),(۷,۸)\}$$

حال اعضای رابطه ی ROS را بصورت زیر تعیین می کنیم.

$$(۲,۵)\in S,\left\langle\begin{array}{l}(۵,۲)\in R\Rightarrow(۲,۲)\in ROS\\(۵,۸)\in R\Rightarrow(۲,۸)\in ROS\end{array}\right.$$
$$(۲,۷)\in S,---$$
$$(۲,۸)\in S,\left\langle\begin{array}{l}(۸,۲)\in R\Rightarrow(۲,۲)\in ROS\\(۸,۵)\in R\Rightarrow(۲,۵)\in ROS\end{array}\right.$$
$$(۵,۷)\in S,---$$
$$(۵,۸)\in S,\left\langle\begin{array}{l}(۸,۲)\in R\Rightarrow(۵,۲)\in ROS\\(۸,۵)\in R\Rightarrow(۵,۵)\in ROS\end{array}\right.$$
$$(۷,۸)\in S,\left\langle\begin{array}{l}(۸,۲)\in R\Rightarrow(۷,۲)\in ROS\\(۸,۵)\in R\Rightarrow(۷,۵)\in ROS\end{array}\right.$$

$$\therefore\quad ROS=\{(۲,۲),(۲,۸),(۲,۲),(۲,۵),(۵,۲),(۵,۵),(۷,۲),(۷,۵)\}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت.

$$\therefore\quad SOR=\{(۲,۷),(۲,۸),(۵,۵),(۵,۷),(۵,۸),(۸,۵),(۸,۷),(۸,۸)\}$$

$\therefore \quad ROR=\{(۲,۲),(۲,۸),(۵,۸),(۲,۵),(۸,۵),(۸,۸),(۵,۵),(۵,۲),(۸,۲)\}$

اعضای رابطه ی SOS را نیز به شکل زیر تعیین می کنیم.

$$(۲,۵)\in S,\left\langle \begin{array}{l}(۵,۷)\in S\Rightarrow(۲,۷)\in SOS\\(۵,۸)\in S\Rightarrow(۲,۸)\in SOS\end{array}\right.$$

$$(۲,۷)\in S,(۷,۸)\in S\Rightarrow(۲,۸)\in SOS$$

$$(۲,۸)\in S,---$$

$$(۵,۷)\in S,(۷,۸)\in S\Rightarrow(۵,۸)\in SOS$$

$$(۵,۸)\in S,---$$

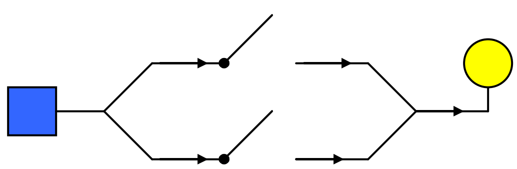
$$(۷,۸)\in S,---$$

$\therefore \quad SOS=\{(۲,۸),(۲,۷),(۵,۸)\}$

تعریف: در مجموعه ی $\{۰,۱\}$ دو عمل $\oplus$ و $\otimes$ را به صورت زیر تعریف می کنیم. این اعمال به اعمال بولی معروفند.

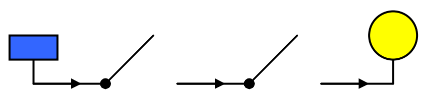
$\oplus$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

جمع بولی



$\otimes$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

ضرب بولی



تمرین: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$(۱\otimes ۱)\oplus(۱\otimes ۱)\oplus(۱\otimes ۰)=$$

حل:

$$(۱\otimes ۱)\oplus(۱\otimes ۱)\oplus(۱\otimes ۰)=\underbrace{۱\oplus ۱}_{۱}\oplus ۰=۱\oplus ۰=۱$$

توان دوم ماتریس مجاورت رابطه ی R ماتریس مجاورت رابطه ی ROR را نشان می دهد.

$$[M(R)]^{۲}=M(R)\otimes M(R)$$

توجه داشته باشید که هر درایه ی a_{ij} ماتریس $[M(R)]^{۲}$ به صورت جمع بولی از ضـرب بـولی درایـه هـای متنـاظر سـطر i و ستون j ماتریس $M(R)$ به دست می آید.این موضوع می تواند روش مناسبی برای تعیین اعضای رابطه ی ROR باشد.

تمرین: تساوی مقابل را کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=$$

حل:

$$\boxed{\begin{array}{r} ۱\quad ۱ \\ ۱\quad ۰ \\ \otimes)\ ---- \\ ۱\oplus ۰=۱=a_{11} \end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{r} ۱\quad ۱ \\ ۱\quad ۱ \\ \otimes)\ ---- \\ ۱\oplus ۱=۱=a_{12} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} ۰\quad ۱ \\ ۱\quad ۰ \\ \otimes)\ ---- \\ ۰\oplus ۰=۰=a_{21} \end{array}}\qquad\boxed{\begin{array}{r} ۰\quad ۱ \\ ۱\quad ۱ \\ \otimes)\ ---- \\ ۰\oplus ۱=۱=a_{22} \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}\otimes\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

تمرین: مجموعه ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و رابطه ی R روی A به صورت زیر است.

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴)\}$$

با استفاده از ماتریس مجاورت رابطه ی R رابطه ی ROR را بنویسید.

حل:

$$M(R)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow [M(R)]^۲=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$ROR=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴)\}$$

تمرین: رابطه ی R در مجموعه ی $A=\{a,b,c,d\}$ به صورت زیر تعریف شده است.

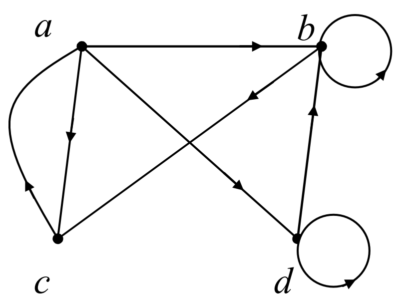
$$R=\{(b,b),(a,b),(b,c),(a,c),(c,a),(b,d),(a,d),(d,d)\}$$

اولاً : گراف متناظر رابطه ی R را رسم کنید.

ثانیاً: ماتریس مجاورت گراف متناظر رابطه ی R را بنویسید.

ثالثاً: ماتریس $[M(R)]^۲$ را بدست آورید و به کمک آن رابطه ی ROR را بنویسید.

حل:



$$M(R)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow [M(R)]^{۲}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

$$ROR=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

***

تعریف : اگر B و A دو ماتریس هم مرتبه (با درایه های صفر و یک) باشند. در این صورت گویند A کوچکتر یا مساوی B است (و می نویسند $A\langle\langle B$)، هرگاه تمام درایه های A کوچکتر یا مساوی درایه های نظیر از B باشند.

مثال :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A\langle\langle B$$

***

نتیجه ی ۱ : فرض کنید A یک مجموعه ی n عضوی و R یک رابطه روی A باشد و $M(R)$ ماتریس متناظر با R باشد.

در این صورت :

الف : $M(R)=[۰]_{n\times n}$ (همه ی درایه های $M(R)$ صفرند) اگر و فقط اگر $R=\Phi$

ب : $M(R)=[۱]_{n\times n}$ (همه ی درایه های $M(R)$ یک اند) اگر و فقط اگر $R=A\times A$

ج : $M(ROR)=[M(R)]^{۲}$

***

نتیجه ی۲ : اگر $R_۲$ و $R_۱$ دو رابطه روی مجموعه ی n عضوی A (n طبیعی باشد.) باشد. در این صورت اگر $R_۱\subseteq R_۲$ آنگاه $M(R_۱)\langle\langle M(R_۲)$ و برعکس

***

تذکر : اگر رابطه ی R روی مجموعه ی n عضوی A (n طبیعی باشد) و M ماتریس متناظر با این رابطه باشند.در این صورت :

الف : رابطه ی R بازتابی است، اگر و فقط اگر $I_n \langle\langle M$ (I ماتریس واحد است.)

ب : رابطه ی R تقارنی است، اگر و فقط اگر $M = M^t$

ج : رابطه ی R تراگذری است، اگر و فقط اگر $M^۲ \langle\langle M$

د : رابطه ی R پادتقارنی است، اگر و فقط اگر $M \wedge M^t \langle\langle I_n$

***

توجه : اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه (با درایه های صفر و یک) باشند. ماتریس $A \wedge B$ ماتریسی است که از ضرب درایه های نظیر به نظیر A و B به دست می آید.

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A \wedge B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

***

تمرین : رابطه ی $R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۱),(۱,۳)\}$ روی مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ داده شده است. خواص این رابطه را به روش فوق بررسی کنید.

***

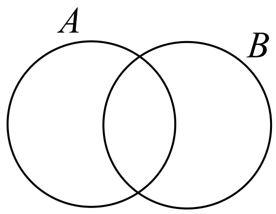
تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

فصل سوم : ترکیبیات

☑ اصل شمول و عدم شمول

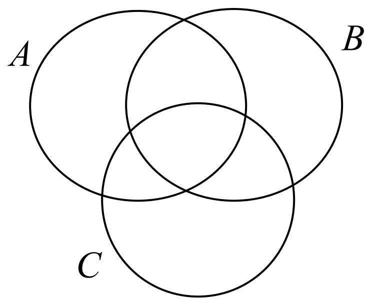
اگر B و A دو مجموعه ی متناهی و گسسته باشند. در این صورت داریم.



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

همچنین برای سه مجموعه ی متناهی و گسسته ی C و B و A داریم:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



توجه: اگر A مجموعه ی اعداد صحیح و بخشپذیر بر k باشد و a اولین (کوچکترین) و b آخرین (بزرگترین) عضو مجموعه ی A باشند. در این صورت:

$$|A| = \frac{b-a}{k} + ۱$$

تمرین: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را تعیین کنید.

حل:

$$A = \{۱۴, ۲۱, ۲۸, ..., ۹۸\} \rightarrow |A| = \frac{۹۸ - ۱۴}{۷} + ۱ = ۱۳$$

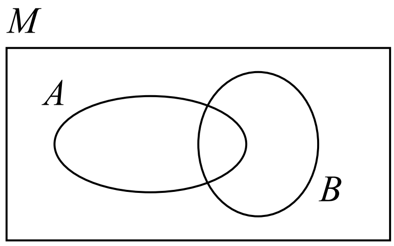
تمرین: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی را پیدا کنید که:

الف) مضرب ۳ باشند. ب) مضرب ۵ باشند.

ج) مضرب ۳ و مضرب ۵ باشند. د) یا مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشند.

هـ) نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ باشند.

حل:



$M=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۹۹\}\rightarrow$

$|M|=۹۹-۱۰+۱=۹۰$

$A=\{۱۲,۱۵,۱۸,...,۹۹\}$ مجموعه ی مضرب های ۳

$$|A|=\frac{۹۹-۱۲}{۳}+۱=۳۰$$

$B=\{۱۰,۱۵,۲۰,...,۹۵\}$ مجموعه ی مضرب های ۵

$$|B|=\frac{۹۵-۱۰}{۵}+۱=۱۸$$

$A\bigcap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,...,۹۰\}$ مجموعه ی مضرب های ۳ و ۵

(مجموعه ی مضرب های ۱۵چون ۳و۵ متباین هستند.)

$$|A\bigcap B|=\frac{۹۰-۱۵}{۱۵}+۱=۶$$

$|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=۳۰+۱۸-۶=۴۲$ تعداد اعداد مضرب ۳ یا مضرب ۵

$|\overline{A\bigcup B}|=|M|-|A\bigcup B|=۹۰-۴۲=۴۸$ تعداد اعداد نه مضرب۳ و نه مضرب ۵

توجه کنید که برای تعیین تعداد اعدادی که نه مضرب۳ و نه مضرب ۵ باشند، می توان به شکل زیر نیز عمل کرد:

$$|\overline{A\bigcup B}|=|M|-|A\bigcup B|=|M|-(|A|+|B|-|A\bigcap B|)$$
$$=|M|-|A|-|B|+|A\bigcap B|=۹۰-۳۰-۱۸+۶=۴۸$$

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اولند را محاسبه کنید.

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,...,۵۰۰\}\rightarrow|S|=۵۰۰-۱+۱=۵۰۰$$

$$۵۰۰=۵^{۳}\times۲^{۲}$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه ی Sرا بدست می آوریم که بر۲ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A| = \{۲, ۴, ۶, ..., ۵۰۰\} \to |A| = \frac{۵۰۰ - ۲}{۲} + ۱ = ۲۵۰$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|B| = \{۵, ۱۰, ۱۵, ..., ۵۰۰\} \to |B| = \frac{۵۰۰ - ۵}{۵} + ۱ = ۱۰۰$$

اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر باشند. (۲و۵ نسبت به هم اولند.)

$$A \cap B = \{۱۰, ۲۰, ۳۰, ..., ۵۰۰\} \to |A \cap B| = \frac{۵۰۰ - ۱۰}{۱۰} + ۱ = ۵۰$$

تعداد اعضای S که نه بر۲ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A \cup B}| = |M| - |A \cup B| = |M| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$
$$= |M| - |A| - |B| + |A \cap B| = ۵۰۰ - ۲۵۰ - ۱۰۰ + ۵۰ = ۲۰۰$$

***

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۱۱۲۵ که نسبت به ۱۱۲۵ اولند را محاسبه کنید.

***

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۰ که نسبت به ۳۰ اولند را محاسبه کنید.

حل:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ..., ۳۰\} \to |S| = ۳۰ - ۱ + ۱ = ۳۰$$

$$۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه ی S را بدست می آوریم که بر۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A| = \{۲, ۴, ۶, ..., ۳۰\} \to |A| = \frac{۳۰ - ۲}{۲} + ۱ = ۱۵$$

اعضای S که بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|B| = \{۳, ۶, ..., ۳۰\} \to |B| = \frac{۳۰ - ۳}{۳} + ۱ = ۱۰$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|C|=\{۵,۱۰,۱۵,...,۳۰\}\to|B|=\frac{۳۰-۵}{۵}+۱=۶$$

اعضای S که بر۶ بخش پذیر باشند. (۲و۳ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap B=\{۶,۱۲,\ ...,۳۰\}\to|A\bigcap B|=\frac{۳۰-۶}{۶}+۱=۵$$

اعضای S که بر۱۰ بخش پذیر باشند. (۲و۵ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap C=\{۱۰,۲۰,۳۰\}\to|A\bigcap C|=۳$$

اعضای S که بر۱۵ بخش پذیر باشند. (۳و۵ نسبت به هم اولند.)

$$B\bigcap C=\{۱۵,۳۰\}\to|B\bigcap C|=۲$$

اعضای S که بر۳۰ بخش پذیر باشند. (۲و۳و۵ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap B\bigcap C=\{۳۰\}\to|A\bigcap B\bigcap C|=۱$$

تعداد اعضای S که نه بر۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$\begin{aligned}|\overline{A\bigcup B\bigcup C}|&=|M|-|A\bigcup B\bigcup C|\\&=|M|-|A|-|B|-|C|+|A\bigcap B|+|A\bigcap C|+|B\bigcap C|-|A\bigcap B\bigcap C|\\&=۳۰-۱۵-۱۰-۶+۵+۳+۲-۱=۸\end{aligned}$$

***

تمرین: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی B به یک مجموعه ی ۳ عضوی A را پیدا کنید.

حل:

گیریم که $f:B\to A$

$$A=\{a_1,a_2,a_3\}\qquad(n=۳)$$

$$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}\qquad(m=۴)$$

اگر مجموعه ی S مجموعه ی توابعی باشد که از B به A تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S|=n^m=۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$$

حال فرض کنید که A_i مجموعه ی توابعی باشند که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی دهند.(غیر پوشا)

$$A_i = \{f \in S \mid a_i \notin f(B)\} \qquad i = 1,2,3$$

$$A_1 = \{f \in S \mid a_1 \notin f(B)\} \to |A_1| = (n-۱)^m = ۲^۴$$

$$A_2 = \{f \in S \mid a_2 \notin f(B)\} \to |A_2| = (n-۱)^m = ۲^۴$$

$$A_3 = \{f \in S \mid a_3 \notin f(B)\} \to |A_3| = (n-۱)^m = ۲^۴$$

همچنین

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = (n-۲)^m = ۱^۴ = ۱$$

و

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-۳)^m = ۰^۴ = ۰$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ۲^۴ + ۲^۴ + ۲^۴ - ۱^۴ - ۱^۴ - ۱^۴ + ۰^۴ = ۴۵$$

تعداد توابع پوشا از B به A

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |M| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۸۱ - ۴۵ = ۳۶$$

***

تمرین: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۵ عضوی B به یک مجموعه ی ۳ عضوی A را پیدا کنید.

حل: اگر مجموعه ی S مجموعه ی توابعی باشد که از B به A تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S| = n^m = ۳^۵ = ۲۴۳$$

تعداد توابع غیر پوشا از B به A

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = (n-۱)^m = ۲^۵ = ۳۲$$

همچنین

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = (n-۲)^m = ۱^۵ = ۱$$

و

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-۳)^m = ۰^۵ = ۰$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ۲^۵ + ۲^۵ + ۲^۵ - ۱^۵ - ۱^۵ - ۱^۵ + ۰^۵ = ۹۳$$

تعداد توابع پوشا از B به A

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |M| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۲۴۳ - ۹۳ = ۱۵۰$$

***

☑ **چند نکته ی مهم**

نکته ی اول: اگر n یک عدد طبیعی فرض شود، در این صورت:

۱: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_r = n$ برابر $\binom{n+r-۱}{r-۱}$ است.

۲: تعداد جوابهای طبیعی معادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_r = n$ برابر $\binom{n-۱}{r-۱}$ است.

تمرین: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی $x + y + z = ۴$ را بدست آورید.

حل:

$$\binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$$

تمرین: تعداد جوابهای طبیعی معادله ی $x + y + z + t = ۱۲$ را تعیین کنید.

حل:

$$\binom{n-۱}{r-۱} = \binom{۱۲-۱}{۴-۱} = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{۳!\times۸!} = ۱۶۵$$

***

تمرین : در یک خوابگاه دانشجویی ، دانشجویان سال های اول تا چهارم اسکان داده شده اند.

الف : به چند طریق می توان یک دسته ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگاه را برای نمایندگی خوابگاه انتخاب کرد.

ب : به چند طریق می توان، یک دسته ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگاه را برای نمایندگی انتخاب کرد، به شرط اینکه حداقل شامل یک دانشجوی سال اول ، یک دانشجوی سال دوم و دو دانشجوی سال سوم و دو دانشجوی سال چهارم باشد.

حل :

الف : تعریف می کنیم که :

$x_i =$ تعداد دانشجویان سال i ام در بین ۱۰ نفر انتخابی ($۱ \le i \le ۴$)

لذا کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را تعیین کنیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۳}{۳} = ۲۸۶$

ب : $x_۱ > ۰$ و $x_۱ > ۰$ و $x_۳ > ۱$ و $x_۴ > ۱$

$$x_۱ = y_۱ + ۱$$
$$x_۲ = y_۲ + ۱$$
$$x_۳ = y_۳ + ۲$$
$$x_۴ = y_۴ + ۲$$

$$\to x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰ \to y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + ۶ = ۱۰ \to y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۴$$

حال کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را تعیین کنیم.

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۴$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۴+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$

***

تمرین : معادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط اینکه $x_۱ > ۴$ و $x_۲ > ۰$

حل :

$x_۱ = y_۱ + ۵$

$x_۲ = y_۲ + ۱$

$x_۳ = y_۳$

$\rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۵ \rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + ۶ = ۱۵ \rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۹$

حال کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را تعیین کنیم.

$y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۹$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۹+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۱}{۲} = ۵۵$

***

تمرین : هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه ی متمایز قرار گیرند، به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

حل :

روش اول : هفت کبوتر در ۳ لانه قرار می گیرند به طوری که در هر لانه لااقل یک کبوتر قرار گیرد. برای این منظور در هر خانه الزاماً یک کبوتر قرار می گیرد. و $۷ - ۳ = ۴$ کبوتر باقی مانده می توانند، به طور دلخواه در هر خانه ای قرار گیرند. پس تعداد طریق ممکن ، برابر است با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ که ساده شده ی معادله ی

$$(x_۱ + ۱) + (x_۲ + ۱) + (x_۳ + ۱) = ۷$$

می باشد. تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی فوق برابر است با $\binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$

روش دوم : چون قرار است که هیچ لانه ای خالی نماند. لذا کافی است که تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ را تعیین کرد.

$$\binom{n-۱}{r-۱} = \binom{۷-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

***

تمرین : تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $۸ \leq x_۱ + x_۲ + x_۳ < ۱۲$ را به دست آورید.

حل : کافی است که تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \rightarrow \binom{۸+۳-۱}{۳-۱} = ۴۵$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹ \rightarrow \binom{۹+۳-۱}{۳-۱} = ۵۵$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \rightarrow \binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱} = ۶۶$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۱ \rightarrow \binom{۱۱+۳-۱}{۳-۱} = ۷۸$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= ۴۵ + ۵۵ + ۶۶ + ۷۸ = ۲۴۴$

***

تمرین : تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۱۰$ را به دست آورید.

حل : t را عددی فرض می کنیم که

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + t = ۱۰$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۳}{۳} = ۲۸۶$

***

تمرین : تعداد جواب های طبیعی نامعادله ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۱۰$ را به دست آورید.

حل :

روش اول : کافی است تعداد جواب های طبیعی هر یک از معادلات زیر را جداگانه به دست آورده وسپس با هم جمع کنیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱ \rightarrow \binom{۱-۱}{۳-۱} = ۰$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \rightarrow \binom{۲-۱}{۳-۱} = ۰$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳ \rightarrow \binom{۳-۱}{۳-۱} = ۱$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴ \rightarrow \binom{۴-۱}{۳-۱} = ۳$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \rightarrow \binom{۵-۱}{۳-۱} = ۶$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶ \rightarrow \binom{۶-۱}{۳-۱} = ۱۰$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷ \rightarrow \binom{۷-۱}{۳-۱} = ۱۵$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \rightarrow \binom{۸-۱}{۳-۱} = ۲۱$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۹ \rightarrow \binom{۹-۱}{۳-۱} = ۲۸$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \rightarrow \binom{۱۰-۱}{۳-۱} = ۳۶$$

لذا تعداد جواب های طبیعی می شود.

$$۰ + ۰ + ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ۲۱ + ۲۸ + ۳۶ = ۱۲۰$$

روش دوم : $t \geq ۰$ را عددی فرض می کنیم که

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + t = ۱۰ \xrightarrow{t=y-۱} x_۱ + x_۲ + x_۳ + y - ۱ = ۱۰ \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ + y = ۱۱$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n-۱}{r-۱} = \binom{۱۱-۱}{۴-۱} = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

***

تمرین : تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را با شرط $۰ \leq x_i \leq ۲$ برای $۱ \leq i \leq ۳$ تعین کنید.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵$$

حل :

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \rightarrow |S| = \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$ تعداد کل جواب ها

$A_i = \{$جواب هایی از معادله که در آنها $x_i \geq ۳$است.$\}$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{x_۱ \geq ۳ \to x_۱ = x'_۱ + ۳ \geq ۲} x'_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$$

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = \binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{x_۱ \geq ۳ \;,\; x_۲ \geq ۳} x'_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰$ چنین جوابی وجود ندارد.

$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳| - |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$
$$= ۶ + ۶ + ۶ - ۰ - ۰ - ۰ + ۰ = ۱۸$$

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |M| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۲۱ - ۱۸ = ۳$$

***

نکته ی دوم: اگر A یک مجموعه ی n عضوی باشد، در این صورت:

۱: تعداد رابطه های بازتابی روی مجموعه ی A

$$۲^{n^۲ - n}$$

۲: تعداد رابطه های متقارن روی مجموعه ی A

$$۲^{\frac{n^۲ + n}{۲}}$$

۳: تعداد رابطه های پادمتقارن روی مجموعه ی A

$$۲^n \times ۳^{\frac{n^۲ - n}{۲}}$$

تمرین: اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ تعداد رابطه های بازتاب ، تقارنی و پادتقارنی را به دست آورید.

حل :

۱: تعداد رابطه های بازتابی روی مجموعه ی A

$$۲^{n^۲ - n} = ۲^{۳^۲ - ۳} = ۲^۶ = ۶۴$$

۲: تعداد رابطه های متقارن روی مجموعه ی A

$$2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{\frac{3^2+3}{2}} = 2^6 = 64$$

۳: تعداد رابطه های پادمتقارن روی مجموعه ی A

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^3 \times 3^{\frac{3^2-3}{2}} = 8 \times 27 = 216$$

***

نکته ی سوم: در این بخش تابع فی – اویلر[1] را معرفی می کنیم.

تعریف : به ازای هر عدد طبیعی n ، تابع $\Phi(n)$ را تابع فی – اویلر می نامند و به صورت زیر تعریف می کنند.

$\Phi(n) =$ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n که نسبت به n اول می باشند.

مثال : اعداد طبیعی کوچکتر از ۸ که نسبت به ۸ اولند، عبارتند از ۷ و ۵ و ۳ و ۱ لذا

$$\Phi(8) = 4$$

تذکر ۱ : اگر p عدد اول باشد. در این صورت :

$$\Phi(p) = p - 1$$

مثال : $\Phi(13) = 13 - 1 = 12$

تذکر ۲ : اگر p عدد اول و k یک عدد طبیعی باشد. در این صورت :

$$\Phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

مثال : $\Phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$

تذکر ۳ : تابع فی – اویلر ، ضربی است. یعنی برای دو عدد طبیعی n و m به طوری که $(m,n) = 1$ داریم[2]:

$$\Phi(m \times n) = \Phi(m) \times \Phi(n)$$

---

[1] . تابع Φ را تابع حسابی اویلر نیز می نامند.

[2] . اگر $(m,n) = d$ در این صورت $\Phi(m \times n) = \Phi(m) \times \Phi(n) \times \dfrac{d}{\Phi(d)}$

مثال : $\Phi(۴۵)=\Phi(۹\times ۵)\overset{(۹,۵)=۱}{=}\Phi(۹)\times\Phi(۵)=۶\times ۴=۲۴$

قضیه: اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، به طوری که تجزیه ی استاندارد آن به صورت زیر باشد.

$$n=p_۱^{\alpha_۱}.p_۲^{\alpha_۲}...p_k^{\alpha_k}$$

در این صورت داریم:

$$\Phi(n)=n(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})...(۱-\frac{۱}{p_k})$$

مثال :

$۳۶۰=۲^۳\times ۳^۲\times ۵$

$\Phi(۳۶۰)=۳۶۰(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۵})=۹۶$

نتیجه :

الف : اگر p عدد اول و k یک عدد طبیعی باشد. در این صورت :

$$\Phi(p)=p(۱-\frac{۱}{p})=p-۱$$

$$\Phi(p^k)=p^k(۱-\frac{۱}{p^k})=p^k-۱$$

ب : اگر عدد n به صورت زیر تجزیه شود. در این صورت داریم:

$$n=p_۱.p_۲...p_k$$

$$\Phi(n)=n\times(۱-\frac{۱}{p_۱})\times(۱-\frac{۱}{p_۲})\times...\times(۱-\frac{۱}{p_k})$$
$$=p_۱\times p_۲\times...\times p_k\times(۱-\frac{۱}{p_۱})\times(۱-\frac{۱}{p_۲})\times...\times(۱-\frac{۱}{p_k})=(p_۱-۱)\times(p_۲-۱)\times...\times(p_k-۱)$$

مثال :

$۱۱۵۵=۳\times ۵\times ۷\times ۱۱$

$\Phi(۱۱۵۵)=(۳-۱)(۵-۱)(۷-۱)(۱۱-۱)=۴۸۰$

قضیه ی اویلر : اگر m یک عدد طبیعی و a عدد صحیحی باشد، به طوری که $(a,m)=۱$ در این صورت :

$$a^{\Phi(m)} \overset{m}{\equiv} ۱$$

مثال : دو رقم سمت راست عدد $۳^{۲۴۴}$ را به دست آورید.

$$(۳,۱۰۰) = ۱$$

$$۱۰۰ = ۲^{۲} \times ۵^{۲}$$

$$\Phi(۱۰۰) = ۱۰۰(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۵}) = ۴۰$$

$$۳^{\Phi(۱۰۰)} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \to ۳^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \to (۳^{۴۰})^{۶} \overset{۱۰۰}{\equiv} (۱)^{۶} \to ۳^{۲۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳^{۴}} ۳^{۲۴۰} \times ۳^{۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \times ۳^{۴} \to ۳^{۲۴۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۱$$

قضیه ی ویلسون : اگر p عددی اول باشد. در این صورت :

$$(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

مثال : باقی مانده ی تقسیم !۱۲ را بر ۱۳ به دست آورید.

چون ۱۳ عدد اول است، پس طبق قضیه ی ویلسون داریم.

$$(۱۳-۱)! \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to ۱۲! \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \to ۱۲! \overset{۱۳}{\equiv} -۱ + ۱(۱۳) \to ۱۲! \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲$$

***

قضیه ی فرما : اگر p عددی اول و a یک عدد صحیح باشد. در این صورت :

$$a^{p} \overset{p}{\equiv} a$$

مثال: ثابت کنید که $۱^{۱۳} + ۲^{۱۳} + ۳^{۱۳} + ... + ۱۲^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۰$

چون ۱۳ عدد اول است ، پس طبق قضیه ی فرما داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{13} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 2^{13} \overset{13}{\equiv} 2 \\ \\ 12^{13} \overset{13}{\equiv} 12 \end{array}\right\} \to 1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots+12^{13} \overset{13}{\equiv} 1+2+3+\ldots+12 \to 1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots+12^{13} \overset{13}{\equiv} 78$$

$$\xrightarrow{78 \overset{13}{\equiv} 0} 1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots+12^{13} \overset{13}{\equiv} 0$$

***

در ادامه حالت خاصی از تابع فی – اویلر را به کمک اصل شمول و عدم شمول اثبات می کنیم.

قضیه : اگر عدد طبیعی n فقط به سه عدد طبیعی متمایز تجزیه شود. می توان تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از عدد طبیعی n که با n متباین باشند، را به شکل زیر بدست آورد. فرض کنید که این تجزیه به شکل زیر باشد.

$$n = p_1 \times p_2 \times p_3$$

در این صورت:

$$\Phi(n) = n \times (1-\frac{1}{p_1}) \times (1-\frac{1}{p_2}) \times (1-\frac{1}{p_3})$$

$$= p_1 \times p_2 \times p_3 \times (1-\frac{1}{p_1}) \times (1-\frac{1}{p_2}) \times (1-\frac{1}{p_3}) = (p_1-1)\times(p_2-1)\times(p_3-1)$$

توجه: این رابطه را فقط برای اعدادی بکار بگیرید که به سه عدد اول متفاوت تجزیه شود.

اثبات : مجموعه های A_i را به ترتیب زیر تعریف می کنیم.

$$A_i = \{m \mid 1 \le m \le n \ , p_i \mid m\} \ , \ i = 1,2,3$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه های A_i می نویسیم. در این صورت داریم:

$$A_i = \{p_i, 2p_i, 3p_i, \ldots, (\frac{n}{p_i})p_i\} \quad , \quad i = 1,2,3$$

پس

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

به همین ترتیب

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i \cdot p_j} \ , \ i \neq j$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \frac{n}{p_۱ \cdot p_۲ \cdot p_۳}$$

$$\Phi(n) = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}|$$

$$n - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = n - \left(\frac{n}{p_۱} + \frac{n}{p_۲} + \frac{n}{p_۳} - \frac{n}{p_۱ \cdot p_۲} - \frac{n}{p_۱ \cdot p_۳} - \frac{n}{p_۲ \cdot p_۳} + \frac{n}{p_۱ \cdot p_۲ \cdot p_۳}\right)$$

$$n - \Phi(n) = n - \frac{n}{p_۱} - \frac{n}{p_۲} - \frac{n}{p_۳} + \frac{n}{p_۱ \cdot p_۲} + \frac{n}{p_۱ \cdot p_۳} + \frac{n}{p_۲ \cdot p_۳} - \frac{n}{p_۱ \cdot p_۲ \cdot p_۳}$$

$$\Phi(n) = n \times (۱ - \frac{۱}{p_۱}) \times (۱ - \frac{۱}{p_۲}) \times (۱ - \frac{۱}{p_۳})$$

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کمتر از ۴۲ که نسبت به آن اولند را بیابید.

حل:

$$۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۷$$

$$\Phi(۴۲) = (۲ - ۱) \times (۳ - ۱) \times (۷ - ۱) = ۱ \times ۲ \times ۶ = ۱۲$$

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کمتر از ۱۰۲ که نسبت به آن اولند را بیابید.

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کمتر از ۳۰ که نسبت به آن اولند را بیابید.

***

نکته ی چهارم : تعداد و مجموع مقسوم علیه های مثبت یک عدد طبیعی

اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، به طوری که تجزیه ی استاندارد آن به صورت زیر باشد.

$$n = {p_۱}^{\alpha_۱} . {p_۲}^{\alpha_۲} \ldots {p_k}^{\alpha_k}$$

در این صورت :

الف : تعداد مقسوم علیه های مثبت n از دستور زیر به دست می آید.

$$\Gamma(n) = (\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱) \ldots (\alpha_k + ۱)$$

مثال: برای تعیین تعداد مقسوم علیه های مثبت ۱۴۰۰ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$۱۴۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷$$

$$\Gamma(۱۴۰۰)=(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱)=۲۴$$

ب : مجموع مقسوم علیه های مثبت n از دستور زیر به دست می آید.

$$\Sigma(n)=\frac{{p_۱}^{\alpha_۱+۱}-۱}{p_۱-۱}\times\frac{{p_۲}^{\alpha_۲+۱}-۱}{p_۲-۱}\times\ldots\times\frac{{p_k}^{\alpha_k+۱}-۱}{p_k-۱}$$

مثال : برای تعیین مجموع مقسوم علیه های مثبت ۱۴۰۰ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$\Sigma(۱۴۰۰)=\frac{۲^{۳+۱}-۱}{۲-۱}\times\frac{۵^{۲+۱}-۱}{۵-۱}\times\frac{۷^{۱+۱}-۱}{۷-۱}=\frac{۱۶}{۱}\times\frac{۱۲۴}{۴}\times\frac{۴۸}{۶}=۱۶\times۳۱\times۸=۳۹۶۸$$

تذکر: اگر p عددی اول باشد. در این صورت :

$$\Sigma(p)=p+۱$$

همچنین :

$$\Sigma(p^{\alpha})=۱+p+p^۲+p^۳+\ldots+p^{\alpha}=\frac{p^{\alpha+۱}-۱}{p-۱}$$

قضیه : تابع Σ تابع ضربی است. یعنی اگر $(m,n)=۱$ آنگاه

$$\Sigma(m\times n)=\Sigma(m)\times\Sigma(n)$$

مثال: مجموع مقسوم علیه های ۲۰۰ را به دست آورید.

$$۲۰۰=۲^۳\times۵^۲$$

$$\Sigma(۲۰۰)=\Sigma(۲^۳\times۵^۲)=\Sigma(۲^۳)\times\Sigma(۵^۲)=\frac{۲^۴-۱}{۲-۱}\times\frac{۵^۳-۱}{۵-۱}=۱۵\times۳۱=۴۶۵$$

ج : حاصل ضرب مقسوم علیه های مثبت n از دستور زیر به دست می آید.

$$\mathrm{P}(n)=\sqrt{n^{\Gamma(n)}}$$

مثال: حاصل ضرب مقسوم علیه های ۲۸ را به دست آورید.

$$۲۸=۲^۲\times۷$$

$$\Gamma(۲۸)=(۲+۱)(۱+۱)=۶$$

$$\mathrm{P}(۲۸)=\sqrt{۲۸^۶}=۲۸^۳$$

***

نکته ی پنجم : بزرگترین توان عدد اول p در $n!$

اگر p عددی اول و n یک عدد صحیح و مثبتی باشد، در این صورت تعداد عوامل p در حاصل ضرب $n!$ برابر است با :

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^{۲}}\right]+\left[\frac{n}{p^{۳}}\right]+\left[\frac{n}{p^{۴}}\right]+....$$

تمرین : تعداد عوامل عدد ۷ در $۵۰!$ را پیدا کنید.

حل : تعداد مورد نظر از مجموع زیر به دست می آید.

$$\left[\frac{۵۰}{۷}\right]+\left[\frac{۵۰}{۷^{۲}}\right]+\left[\frac{۵۰}{۷^{۳}}\right]+....=۷+۱+۰+...=۸$$

تمرین : حاصل $۱۰!$ را به عوامل اول تجزیه کنید.

حل : $۱۰!$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$۱۰!=۲^{\alpha_۱}\times ۳^{\alpha_۲}\times ۵^{\alpha_۳}\times ۷^{\alpha_۴}$$

برای محاسبه ی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$\alpha_۱=\left[\frac{۱۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰}{۴}\right]+\left[\frac{۱۰}{۸}\right]+\left[\frac{۱۰}{۱۶}\right]+...=۵+۲+۱+۰+...=۸$$

$$\alpha_۲=\left[\frac{۱۰}{۳}\right]+\left[\frac{۱۰}{۹}\right]+\left[\frac{۱۰}{۲۷}\right]+...=۳+۱+۰+...=۴$$

$$\alpha_۳=\left[\frac{۱۰}{۵}\right]+\left[\frac{۱۰}{۲۵}\right]+...=۲+۰+...=۲$$

$$\alpha_۴=\left[\frac{۱۰}{۷}\right]+\left[\frac{۱۰}{۴۹}\right]+...=۱+۰+...=۱$$

بنابراین :

$$۱۰!=۲^{۸}\times ۳^{۴}\times ۵^{۲}\times ۷^{۱}$$

تمرین : عدد $75!$ به چند صفر ختم می شود.

حل : تعداد صفر های واقع سمت راست $n!$ ، برابر عوامل ۵ در آن عدد است[3]. بنابراین کافی است تعداد عوامل ۵ در $75!$ را بدست آوریم. لذا داریم:

$$\left[\frac{75}{5}\right]+\left[\frac{75}{25}\right]+\left[\frac{75}{125}\right]+....=15+3+0+...=18$$

یعنی $75!$ به ۱۸ صفر ختم می شود.

تمرین : حاصل $47!$ به چند صفر ختم می شود.

حل :

$$\left[\frac{47}{5}\right]+\left[\frac{47}{25}\right]+\left[\frac{47}{125}\right]+....=9+1+0+...=10$$

***

[3]. زیرا حاصل ضرب هر عدد زوج در ۵ به صفر ختم می شود و چون $5\times 2=10$ و عامل ۵ از ۲ بزرگتر است. لذا تعداد صفر های واقع سمت راست $n!$ ، برابر عوامل ۵ در آن عدد است.

نظریه ی احتمال

پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان باوی

www.mathtower.org

اردیبهشت ۱۳۸۵

فصل چهارم : نظریه ی احتمال

☑ تعریف احتمال

اگر S فضای نمونه ای گسسته(شمارا) برای یک آزمایش تصادفی باشد و $E \subseteq S$ یک پیشامد از آن باشد. در این صورت،احتمال وقوع E را با $P(E)$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند.

$$P(E)=\frac{|E|}{|S|}$$

تمرین: یک تاس را پرتاب می کنیم، احتمال آنرا بدست آورید که عدد اول بیاید.

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$
$$E=\{۲,۳,۵\}$$
$$P(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین : از بین اعداد طبیعی کمتر یا مساوی ۴۲ یک عدد به تصادف انتخاب شده است، احتمال آن را به دست آورید که این عدد با ۴۲ متباین باشد.

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,...,۴۲\}\rightarrow |S|=۴۲-۱+۱=۴۲$$
$$E=\{x\in N \mid x\leq ۴۲,(x,۴۲)=۱\}\xrightarrow{۴۲=۲\times۳\times۷}|E|=\Phi(۴۲)=۱\times۲\times۶=۱۲$$
$$P(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{۱۲}{۴۲}=\frac{۲}{۷}$$

تمرین : یک تاس را پرتاب می کنیم، اگر A پیشامد آمدن عدد فرد و B پیشامد آمدن عدد اول باشد، احتمال هر یک از پیشامد های زیر را بدست آورید.

الف) A ج) $A\cup B$ هـ) $A-B$ ز) A^c

ب) B د) $A\cap B$ و) $A\Delta B$

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$A=\{۱,۳,۵\}\rightarrow P(A)=\frac{|A|}{|S|}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\{۲,۳,۵\}\rightarrow P(B)=\frac{|B|}{|S|}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۵\}\rightarrow P(A\bigcup B)=\frac{|A\bigcup B|}{|S|}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$A\bigcap B=\{۳,۵\}\rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{|A\bigcap B|}{|S|}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$A-B=\{۱\}\rightarrow P(A-B)=\frac{|A-B|}{|S|}=\frac{۱}{۶}$$

$$A\Delta B=\{۱,۲\}\rightarrow P(A\Delta B)=\frac{|A\Delta B|}{|S|}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$A^c=\{۲,۴,۶\}\rightarrow P(A^c)=\frac{|A^c|}{|S|}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

***

☑ **اصول موضوعه ی احتمال**

اگر Bو A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، در این صورت:

۱) $P(\Phi)=۰\ ,\ \ P(S)=۱$

۲) $۰\le P(A)\le ۱ , ۰\le P(B)\le ۱$

۳) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

۴) $P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$

۵) $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\bigcap B)$

۶) $P(A^c)=۱-P(A)$

نتیجه: اگر $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$ یک پیشامد تصادفی باشد. در این صورت همواره داریم:

$$P(E)=P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_k)=\sum_{i=1}^{k}P(e_i)$$

همچنین اگر $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$ فضای نمونه ای باشد، در این صورت:

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)=1$$

تمرین : در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه ای $S=\{a,b,c\}$ می باشد. اگر داشته باشیم:

$$P(a)=3P(b)=\frac{3}{2}P(c)$$

احتمال وقوع پیشامد $\{b,c\}$ را بدست آورید.

حل:

برآمد	a	b	c	جمع
احتمال	$3(\frac{1}{2}x)$	$\frac{1}{2}x$	x	۱

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x+x=1\rightarrow 3x=1\rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$p(b)=\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}$$

$$P(c)=x=\frac{1}{3}$$

$$P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{1}{2}$$

تمرین: جدول مقابل چگونگی توزیع کارمندان یک اداره را نشان می دهد.کارمندی به تصادف از این اداره انتخاب می شود.احتمال اینکه این کارمند، مرد یا لیسانس باشد، را بدست آورید.

–	فوق دیپلم	لیسانس	جمع
زن	۱۵	۵	۲۰
مرد	۱۰	۲۰	۳۰
جمع	۲۵	۲۵	۵۰

حل: ابتدا تعریف می کنیم که

B = فرد انتخاب شده لیسانس باشد.

A =فرد انتخاب شده مرد باشد.

پس می توان نوشت:

$$n(A)=۳۰ \rightarrow P(A)=\frac{۳۰}{۵۰}$$

$$n(B)=۲۵ \rightarrow P(B)=\frac{۲۵}{۵۰}$$

$$n(A\bigcap B)=۲۰ \rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۲۰}{۵۰}$$

$$\Rightarrow P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۳۰}{۵۰}+\frac{۲۵}{۵۰}-\frac{۲۰}{۵۰}=\frac{۳۵}{۵۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

***

☑ احتمال شرطی

فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B)>۰$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B(یعنی B قبل از A رخ داده باشد.) می گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$$

نتیجه : فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $B\neq\Phi$ در این صورت طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\bigcap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}}=\frac{|A\bigcap B|}{|B|}$$

تمرین : دو تاس پرتاب می شوند، اگر مجموع شماره ها ۶ باشد، احتمال آنکه اقلاً یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

حل:

$A=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$ اقلاً یکی از دو عدد ۲ باشد.

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$ مجموع دو عدد ۶ باشد.

$$A\bigcap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$$

$$P(A|B)=\frac{|A\bigcap B|}{|B|}=\frac{۲}{۵}$$

تمرین :احتمال حضور معلم در کلاس ۰/۸۰ است. احتمال برگزاری آزمون توسط معلم ۰/۵۰ است. احتمال برگـزاری آزمـون بـه شـرط حضور معلم را حساب کنید.

حل: ابتدا تعریف می کنیم که

A =برگزاری آزمون B = حضور معلم

$P(B) = ۰/۸۰$

$P(A \cap B) = ۰/۵۰$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۵۰}{۰/۸۰} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین: اگر $S = \{a,b,c,d\}$ و $P(a) = P(b) = \frac{۱}{۳}$ و $P(c) = P(d) = \frac{۱}{۶}$ مطلوبست محاسبه ی

الف) $P(\{a,b,c\})$ ب) $P(\{a,b,c\} | \{b,c,d\})$

جواب :

برآمد	a	b	c	d	جمع
احتمال	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	۱

$$A = \{a,b,c\} \to P(A) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

$$B = \{b,c,d\} \to P(B) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

$$A \cap B = \{b,c\} \to P(A \cap B) = P(b) + P(c) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

تمرین: در امتحانات پایانی ، ۲۰٪ دانش آموزان یک کلاس از درس ریاضی و ۱۵٪ از فیزیک و ۱۰٪ از هر دو درس تجدید شده اند.

الف) احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس حداقل از یکی از این دو درس تجدید شده باشد، را محاسبه کنید.

ب) احتمال اینکه دانش آموزی فقط از درس فیزیک تجدید شده باشد، را بیابید.

ج) احتمال آن را حساب کنید که این دانش آموز فقط از یکی از این دو درس تجدید شده باشد.

د) احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس از درس فیزیک تجدید شده باشد، مشروط به اینکه از درس ریاضی تجدید شـده اسـت را بدست آورید.

حل:

$$P(F\bigcup R)=P(F)+P(R)-P(F\bigcap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(F-R)=P(F)-P(F\bigcap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}-\frac{۱۰}{۱۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(F\Delta R)=P(E)+p(R)-۲P(F\bigcap R)=\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-۲(\frac{۱۰}{۱۰۰})=\frac{۱۵}{۱۰۰}$$

$$P(F|R)=\frac{P(F\bigcap R)}{P(R)}=\frac{\frac{۱۰}{۱۰۰}}{\frac{۲۰}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین : اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ باشد. مقدار $P(B|A)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}-P(A\bigcap B)\rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین : اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ باشد. $P(A\bigcup B)$ را بدست آورید.

حل:

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{P(A\bigcap B)}{\frac{۱}{۶}}\rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

***

تمرین : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A|A)=۱$ ب) $P(A|A')=۰$

***

توجه: می دانیم که $P(A|B)=\dfrac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$ پس می توان نوشت:

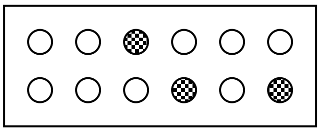
$$P(A\bigcap B)=P(B).P(A|B)$$

این رابطه را ***قاعده ی ضرب احتمالات*** می نامند.

***

تمرین: جعبه ای محتوی ۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:



$A=$ پیشامد لامپ اول معیوب

$B=$ پیشامد لامپ دوم معیوب

بنابراین $A\bigcap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است.

واضح است که $P(A)=\dfrac{۳}{۱۲}=\dfrac{۱}{۴}$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آنها معیوب است، بر می داریم. یعنی $P(B|A)=\dfrac{۲}{۱۱}$ احتمال لامپ دوم معیوب به شرط اینکه لامپ اول معیوب است.

در نهایت احتمال هر دو لامپ معیوب (اول و دوم) به صورت زیر بدست می آید.

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B|A)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

***

☑ **پیشامد های وابسته و مستقل**

اگر فرض کنید B و A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، بطوری که $P(A),P(B)>0$ آنگاه این دو پیشامد را مستقل گوییم ، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر دو پیشامد B و A مستقل نباشند، آنها را وابسته می گوییم.

نتیجه :

۱) اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

۲) اگر B و A دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A).P(B|A)\\&=P(B).P(A|B)\end{aligned}$$

تمرین: جعبه ای محتوی ۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:

$A=$ پیشامد لامپ اول معیوب

$B=$ پیشامد لامپ دوم معیوب

چون معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ اول هیچ تأثیری بر معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ دوم ندارد، پس دو پیشامد B و A مستقل هستند.در این صورت:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

تمرین: کیسه ای شامل ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اولی سیاه و دومی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر دو سیاه باشند،چقدر است؟

حل: واضح است که دو پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس

الف: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۵۶}$ ب: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۲۰}{۵۶}$

تمرین: کیسه ای شامل ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اولی سیاه و دومی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر دو سیاه باشند،چقدر است؟

حل: واضح است که دو پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس

الف: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۵}{۶۴}$ ب: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۵}{۶۴}$

تمرین: درکیسه ای ۷ مهره سیاه و ۳ مهره سفید وجود دارد. سه مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی از این کیسه بیرون می آوریم.

الف) احتمال آنکه اولی سیاه و دومی سیاه و سومی سفید باشد،چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هر سه سیاه باشند،چقدر است؟

حل: واضح است که سه پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس

الف: $\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۲۶}{۷۲۰}$ ب: $\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۲۱۰}{۷۲۰}$

تمرین: درکیسه ای ۷ مهره سیاه و ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی از این کیسه بیرون می آوریم.احتمال آنکه اولی سیاه و دومی سفید و سومی قرمز باشد،چقدر است؟

حل: واضح است که سه پیشامد استخراج مهره مستقل هستند. پس $\frac{۷}{۱۵}\times\frac{۳}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱۰۵}{۲۷۳۰}$

تمرین: درکیسه ای ۱۰۰ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آن را حساب کنید که اولی زوج و دومی فرد و سومی زوج باشند.

***

تمرین: درکیسه ای ۱۰۰ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. از این کیسه ۴ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم.

الف : احتمال آن را حساب کنید که اولی و دومی فرد و سومی و چهارمی زوج باشند.

ب : احتمال آن را حساب کنید که اولی و دومی و سومی فرد و چهارمی زوج باشند.

***

تمرین: درکیسه ای ۹ مهره با شماره های منحصر بفرد از ۱ تا ۹ وجود دارد. از این کیسه ۲ مهره بطور متوالی و بدون جایگزینی به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره های بیرون آمده زوج باشد.

حل : در این کیسه ۵ مهره فرد و ۴ مهره زوج قرار دارد. از طرفی وقتی مجموع شماره های بیرون آمده زوج است که هر دو مهره ی استخراج شده فرد یا هر دو زوج باشند. لذا

$$P(A)=\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۲۰}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲}=\frac{۳۲}{۷۲}=\frac{۴}{۹}$$

***

تمرین : اگر $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ و دو پیشامد B و A مستقل باشند. $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A|B)=P(A)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

***

تمرین: ۷۵ درصد افراد جامعه ای چشم میشی و ۴۰ درصد گروه خونی A دارند، یک فرد به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال آنکه این فرد چشم میشی یا گروه خونی A داشته باشند، کدام است؟

۱)۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

حل: دو پیشامد چشم میشی بودن و گروه خونی A داشتن مستقل هستند،پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵}-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

***

تمرین: اگر دو پیشامد B و A مستقل باشند، نشان هید که:

الف) دو پیشامد B' و A' نیز مستقل هستند. ب) دو پیشامد B و A' نیز مستقل هستند.

ج) دو پیشامد B' و A نیز مستقل هستند.

حل:

الف:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B') &= P(A\cup B)' = ۱-P(A\cup B) = ۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))\\ &= ۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = ۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)\\ &= (۱-P(A))-P(B)(۱-P(A)) = P(A')-P(B).P(A')\\ &= P(A')(۱-P(B)) = P(A').P(B')\end{aligned}$$

ب:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B) &= P(B-A) = P(B)-P(A\cap B)\\ &= P(B)-P(A).P(B) = P(B)(۱-P(A))\\ &= P(B).P(A')\end{aligned}$$

ج: مانند ب حل می شود.

***

تمرین : اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید که : $P(A\cup B) = ۱-P(A').P(B')$

حل :

$$P(A\cup B) = ۱-P(A\cup B)' = ۱-P(A'\cap B') = ۱-P(A').P(B')$$

***

تمرین : هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

۱) $P((A-B)|A) = ۱-P(B-A)$

۲) $P(A'|B) = ۱-P(A|B)$

۳) $P((A\cup B)|C) = P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$

۴) $P((A-B)|C) = P(A|C)-P((A\cap B)|C)$

اثبات :

۱ :

$$P((A-B)|A) = \frac{P((A-B)\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A-B)}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)} = ۱-P(B|A)$$

۲ :

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=۱-P(A|B)$$

۳ :

$$P((A\cup B)|C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}$$
$$=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P((A\cap C)\cap(B\cap C))}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}-\frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}$$
$$=P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$$

۴ :

$$P(A|C)-P((A\cap B)|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}-\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}-\frac{P((A\cap C)\cap B)}{P(C)}$$
$$=\frac{P((A\cap C)-B)}{P(C)}=\frac{P((A\cap C)\cap B')}{P(C)}=\frac{P((A\cap B')\cap C)}{P(C)}=\frac{P((A-B)\cap C)}{P(C)}=P((A-B)|C)$$

***

تمرین : اگر A و B و C سه پیشامد دو به دو مستقل باشند. ثابت کنید که $P(A\cup B\cup C)=۱-P(A').P(B')P(C')$

حل :

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A\cup B\cup C)'=۱-P(A'\cap B'\cap C')=۱-P(A').P(B')P(C')$$

***

تمرین : احتمال موفقیت فاطمه و مریم و حدیث در امتحانات پایان ترم به ترتیب ۰/۸ و ۰/۷ و ۰/۹ است. احتمال آنکه حداقل یکی از این سه نفر در امتحان موفق شوند، را محاسبه کنید.

حل :

$$P(A\cup B\cup C)=۱-P(A').P(B')P(C')=۱-(۰/۲)(۰/۳)(۰/۱)=۱-۰/۰۰۶=۰/۹۹۴$$

***

تمرین : اگر دو پیشامد A و B ناتهی و مستقل باشند. ثابت کنید که سازگارند.

حل :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\xrightarrow{A,B\neq\Phi\to P(A),P(B)\neq ۰}P(A\cap B)\neq ۰\to A\cap B\neq\Phi$$

یعنی دو پیشامد A و B سازگار هستند.

***

تمرین : اگر حداقل یکی دو پیشامد A و B تهی باشد. ثابت کنید که این دو پیشامد مستقل هستند.

حل :

$$A \cap B = \Phi$$

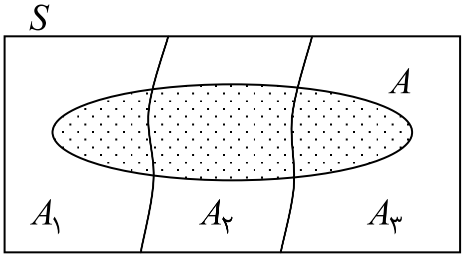
$$\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A=\Phi} \begin{cases} P(A \cap B) = P(\Phi \cap B) = P(\Phi) = 0 \\ P(A).P(B) = P(\Phi).P(B) = 0 \times P(B) = 0 \end{cases} \rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \\ \xrightarrow{B=\Phi} \begin{cases} P(A \cap B) = P(A \cap \Phi) = P(\Phi) = 0 \\ P(A).P(B) = P(A).P(\Phi) = P(A) \times 0 = 0 \end{cases} \rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \\ \xrightarrow{A=\Phi, B=\Phi} \begin{cases} P(A \cap B) = P(\Phi \cap \Phi) = P(\Phi) = 0 \\ P(A).P(B) = P(\Phi).P(\Phi) = 0 \times 0 = 0 \end{cases} \rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \end{cases}$$

پی در هر حالت $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ یعنی دو پیشامد A و B مستقل هستند.

***

☑ احتمال کل

اگر A_3 و A_2 و A_1 یک افراز از S و A یک پیشامد از S باشد. در این صورت:



$$A \subseteq S$$
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

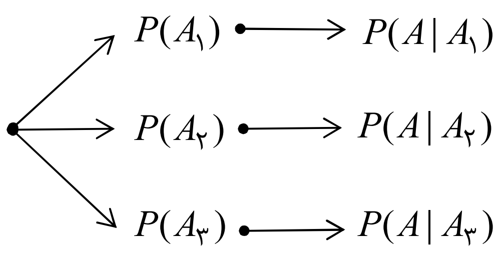
$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3)$$
$$= P(A_1).P(A \mid A_1) + P(A_2).P(A \mid A_2) + P(A_3).P(A \mid A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(A \mid A_i)$$

تذکر: این تساوی را می توان برای تعداد محدودی پیشامد ناسازگار تعمیم داد.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A \mid A_i)$$

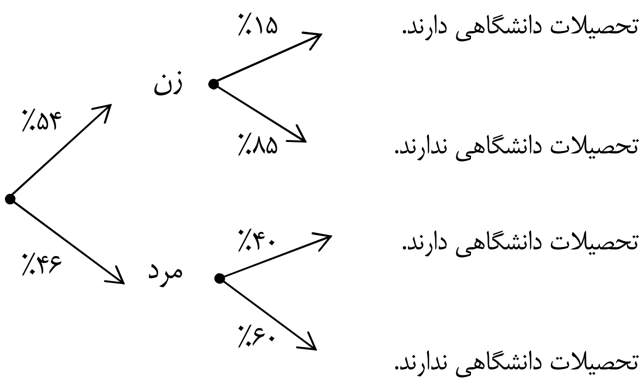
یادآوری: دو یا چند پیشامد را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد.

توجه: می توان متناظر فرمول فوق نمودار زیر را رسم نمود. این نمودار که به نمودار درختی موسوم است، حل مسائلی که به کمک فرمول فوق قابل حل هستند را آسانتر می کند.



تمرین: ۵۴٪ جمعیت کشوری را زنان و بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر ۱۵٪ زنان و۴۰٪ مردان این کشور تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و یک نفر از این کشور را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه فرد انتخاب شده دارای تحصیلات دانشگاهی باشد،چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه فرد انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی داشته باشد. برابر است با:

$$P(A) = (۰/۵۴ \times ۰/۱۵) + (۰/۴۶ \times ۰/۴۰) = ۰/۲۶۵$$

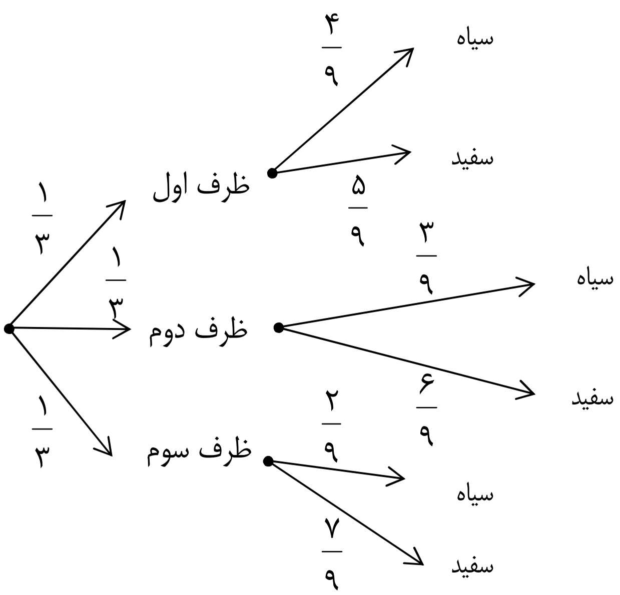
تمرین: با توجه به تمرین قبل احتمال اینکه فرد انتخاب شده تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد،چقدر است؟

حل:

$$P(B) = (۰/۵۴ \times ۰/۸۵) + (۰/۴۶ \times ۰/۶۰) = ۰/۷۳۵$$

تمرین: سه ظرف داریم. ظرف اول شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل ۳ مهره سیاه و ۶ مهره سفید و ظرف سوم شامل ۲ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



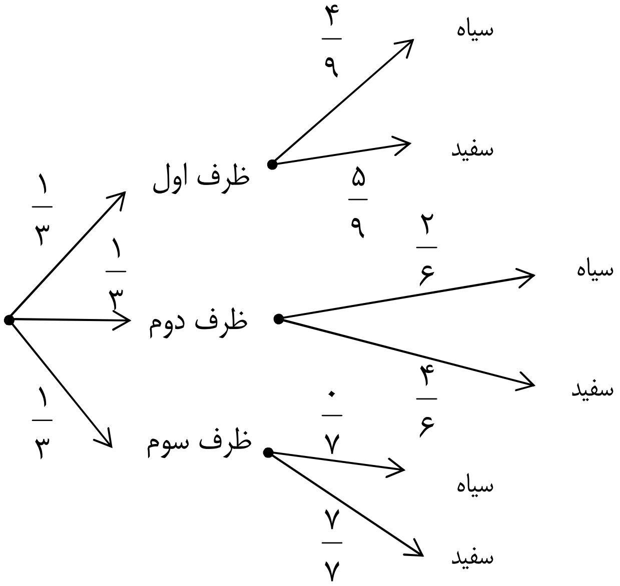
لذا احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۹})=\frac{۵}{۲۷}+\frac{۶}{۲۷}+\frac{۷}{۲۷}=\frac{۱۸}{۲۷}=\frac{۲}{۳}$$

***

تمرین: سه ظرف داریم. ظرف اول شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل۲ مهره سیاه و۴ مهره سفید و ظرف سوم فقط شامل ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



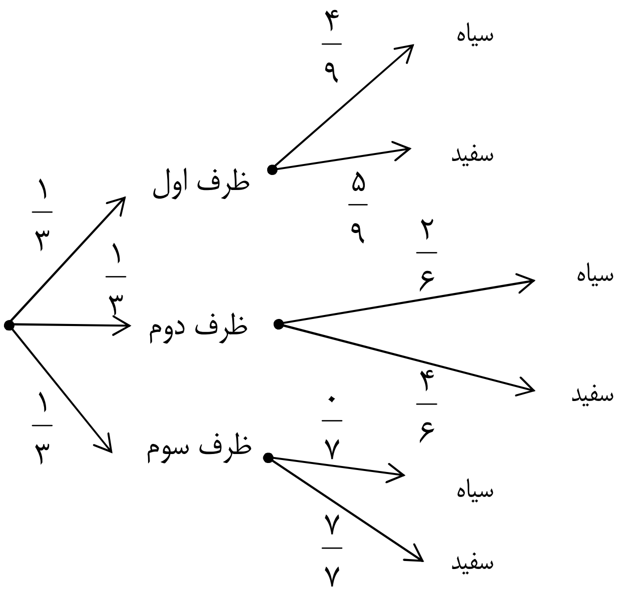
لذا احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۶})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۷}{۷})=\frac{۵}{۲۷}+\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۳}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

***

تمرین: سه ظرف داریم. ظرف اول شامل۴ مهره سیاه و۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل۲ مهره سیاه و۴ مهره سفید و ظرف سوم فقط شامل ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم.احتمال سیاه بودن آن چقدر است؟

حل: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده سیاه باشد. برابر است با:

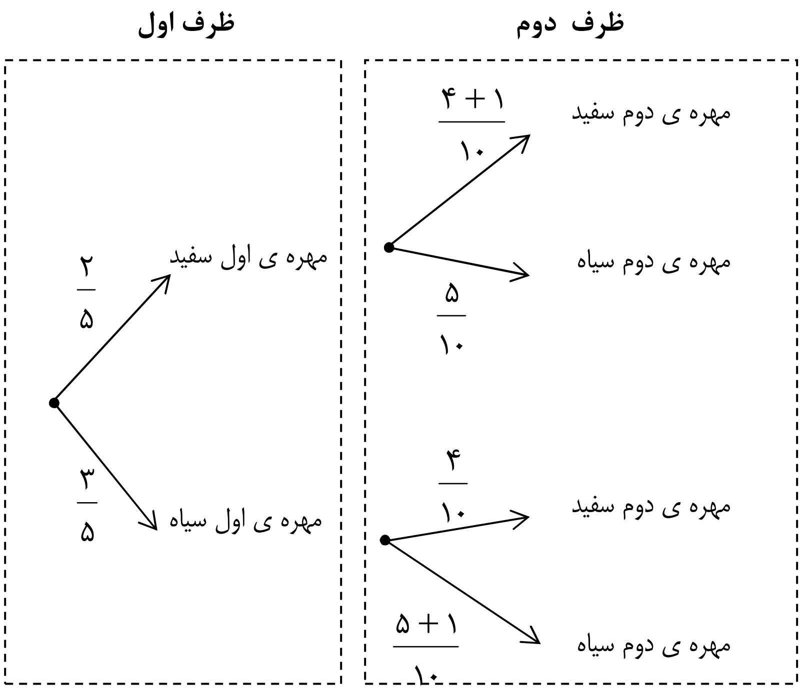
$$P(A)=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۶})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۰}{۷})=\frac{۴}{۲۷}+\frac{۱}{۹}=\frac{۷}{۲۷}$$

***

تمرین: دو ظرف داریم، اولی شامل ۲ مهره سفید و۳ مهره سیاه و دومی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است.از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم.احتمال آنرا حساب کنید که این مهره سفید است.

حل:

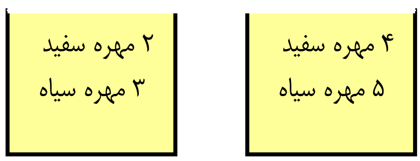
روش اول: ابتدا نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره ی انتخاب شده سفید باشد. برابر است با:

$$P(A)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۱}{۲۵}$$

روش دوم: ابتدا تعریف می کنیم که:



ظرف اول ظرف دوم

مهره ی اول سفید: A مهره ی اول سیاه: B مهره ی دوم سفید: C

$$P(C)=P(A).P(C\mid A)+P(B).P(C\mid B)$$
$$=\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۲۵}$$

***

☑ **قاعده ی بیز**

اگر B و A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. در این صورت:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\rightarrow P(A\cap B)=P(B).P(A\mid B)$$

با توجه به این تساوی می توان نوشت:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B).P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A\mid B)$$

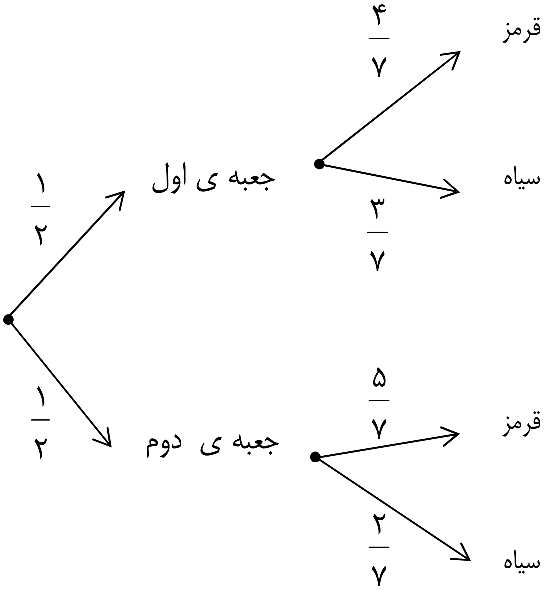
این رابطه را **قاعده ی بیز** می نامند.

تمرین: دو جعبه داریم. در جعبه ی اول ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه و در جعبه ی دوم ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه وجود دارد. یکی از جعبه ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می آوریم. اگر مهره ی انتخاب شده قرمز باشد، احتمال اینکه این مهره از جعبه ی اول انتخاب شده است ، چقدر است؟

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$B=$ جعبه ی اول $\qquad\qquad A=$ مهره قرمز

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه مهره قرمز باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۷})=\frac{۹}{۱۴}$$

احتمال اینکه مهره قرمز به شرط اینکه از جعبه ی اول باشد.برابراست با:

$$P(A|B)=\frac{۴}{۷}$$

همچنین احتمال اینکه مهره از جعبه ی اول ، به شرط اینکه قرمز باشد، برابر است با:

$$P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A|B)=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۹}{۱۴}}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۴}{۹}$$

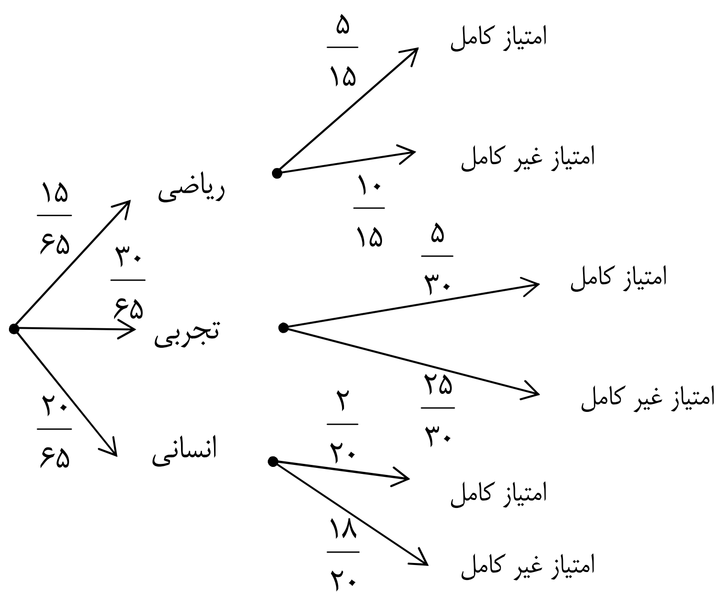
***

تمرین: در یک مسابقه ی اطلاعات عمومی ۱۰۰ امتیازی، ۱۵ نفر دانش آموز رشته ی ریاضی ، ۳۰ نفر دانش آموز رشته ی تجربی، و ۲۰ نفر دانش آموز رشته ی انسانی شرکت می کنند. از بین دانش آموزان ریاضی و تجربی هر کدام ۵ نفر و از بین دانش آموزان رشته ی انسانی ۲ نفر امتیاز کامل (۱۰۰) می گیرند. یک نفر را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که امتیاز او کامل است. احتمال اینکه این دانش آموز رشته ی ریاضی باشد،چقدر است.

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$B=$ رشته ی ریاضی $A=$ امتیاز کامل

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه این دانش آموز امتیاز کامل دریافت کرده باشد. برابر است با:

$$P(A)=(\frac{۱۵}{۶۵}\times\frac{۵}{۱۵})+(\frac{۳۰}{۶۵}\times\frac{۵}{۳۰})+(\frac{۲۰}{۶۵}\times\frac{۲}{۲۰})=\frac{۱۲}{۶۵}$$

احتمال اینکه دانش آموز امتیاز کامل آورده به شرط اینکه رشته ی ریاضی باشد.برابراست با:

$$P(A\mid B)=\frac{۵}{۱۵}$$

همچنین احتمال اینکه دانش آموزی رشته ی ریاضی ، به شرط اینکه امتیاز کامل آورده باشد، برابر است با:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)}{P(A)}\times P(A\mid B)=\frac{\frac{۱۵}{۶۵}}{\frac{۱۲}{۶۵}}\times\frac{۵}{۱۵}=\frac{۵}{۱۲}$$

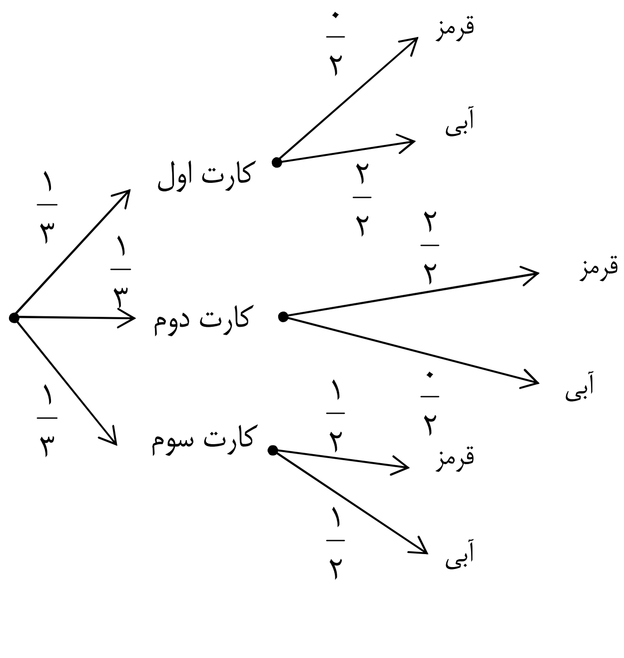
***

تمرین: سه کارت هم شکل را در نظر می گیریم. هر دو طرف کارت اول آبی و هر دو طرف کارت دوم قرمز است ولی در کارت سوم یک طرف قرمز و یک طرف آبی است. یکی از این کارت ها را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که یک طرف آن قرمز است. احتمال اینکه طرف دیگر آن آبی باشد، چقدر است؟

حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$A =$ یک طرف قرمز $\qquad$ $B =$ یک طرف آبی

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



لذا احتمال اینکه یک طرف کارت قرمزباشد. برابر است با:

$$P(A) = (\frac{۱}{۳} \times \frac{۰}{۲}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۲}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

احتمال اینکه یک طرف کارت قرمز به شرط اینکه طرف دیگر آبی باشد.برابراست با:

$$P(A | B) = \frac{۱}{۲}$$

همچنین احتمال اینکه یک طرف کارت آبی ، به شرط اینکه طرف دیگر قرمز باشد، برابر است با:

$$P(B | A) = \frac{P(B)}{P(A)} \times P(A | B) = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$$

***

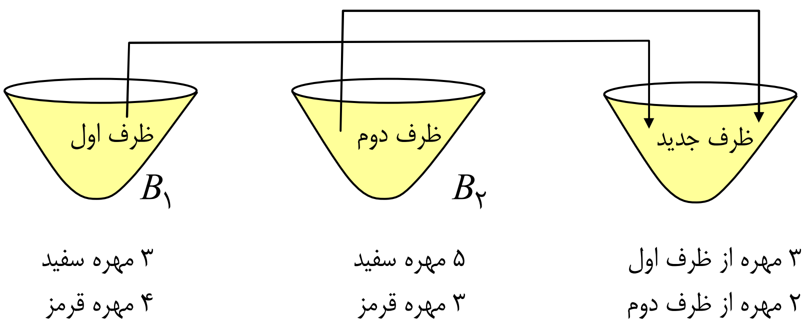
تمرین: دو ظرف همانند داریم.اولی شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. از ظرف اول ۳ مهره و از ظرف دوم ۲ مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف جدیدی قرار می دهیم.اگر از ظرف جدید مهره ای بـه تـصادف خـارج کنیم.

الف) احتمال اینکه مهره سفید باشد،چقدر است؟

ب) اگر مهره ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد، احتمال اینکه از ظرف دوم باشد،چقدر است؟

حل:

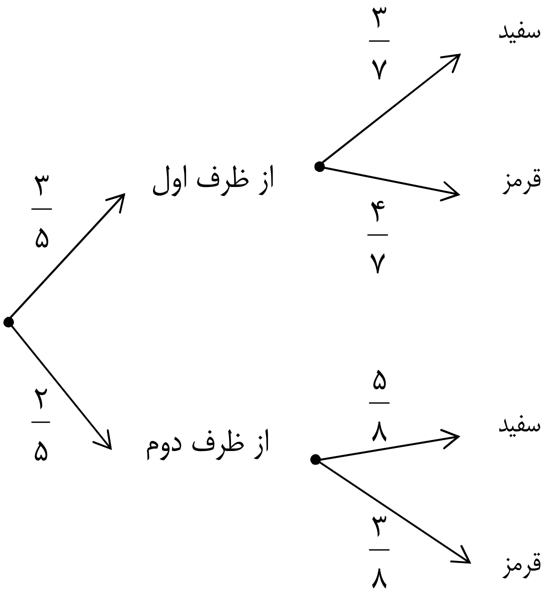
روش اول:



حل: ابتدا تعریف می کنیم:

$A =$ مهره سفید $\qquad B_۲ =$ یک طرف آبی

حال نمودار درختی را رسم می کنیم.



$$P(A)=(\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۷})+(\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۸})=\frac{۷۱}{۱۴۰}$$

$$P(B_۲\mid A)=\frac{P(B_۲)}{P(A)}\times P(A\mid B_۲)=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۷۱}{۱۴۰}}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۳۵}{۷۱}$$

روش دوم: ابتدا تعریف می کنیم:

$A=$ مهره ی خارج شده از ظرف جدید سفید باشد.

$B_۱=$ مهره ی خارج شده از ظرف جدید مربوط به ظرف اول باشد.

$B_۲=$ مهره ی خارج شده از ظرف جدید مربوط به ظرف دوم باشد.

$$P(B_۱)=\frac{۳}{۵}\quad,\quad P(A\mid B_۱)=\frac{۳}{۷}$$

$$P(B_۲)=\frac{۲}{۵}\quad,\quad P(A\mid B_۲)=\frac{۵}{۸}$$

الف)

$$P(A)=P(B_۱).P(A\mid B_۱)+P(B_۲).P(A\mid B_۲)=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۷۱}{۱۴۰}$$

ب)

$$P(B_۲\mid A)=\frac{P(B_۲)}{P(A)}\times P(A\mid B_۲)=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۷۱}{۱۴۰}}\times\frac{۵}{۸}=\frac{۳۵}{۷۱}$$

***

☑ **متغیر تصادفی**

اگر در آزمایشی به هر نتیجه ی آن عددی نسبت دهیم. این عدد را متغیر تصادفی می نامند و آنرا با یکی از حروف بزرگ لاتین مانند X و Y و Z و ... نمایش می دهند.

به عبارت دیگر تابع

$$X : S \to R$$
$$X(s_i) = X_i$$

به هر عضو فضای نمونه ای S عدد حقیقی را نسبت می دهد که آنرا متغیر تصادفی می نامند.

مثال: در پرتاب یک سکه می دانیم که $S=\{R,P\}$ اگر رو را با صفر و پشت را با یک نمایش دهیم ، پس متغیر تصادفی X به صورت زیر در می آید.

$X(R)=۰$ و $X(P)=۱$

برآمد (s)	R	P
متغیر تصادفی (X)	۰	۱

تمرین : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم و متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$X_i =$ تعداد دفعاتی که R آمده باشد.

جدول مربوط به این متغیر تصادفی را تشکیل دهید.

حل:

برآمد (s)	RRR	RRP	RPR	PRR	PPR	PRP	RPP	PPP
متغیر تصادفی (X)	۳	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۰

☑ تابع جرم احتمال

اگر مجموعه ی مقادیر متغیر تصادفی گسسته X برابر $A=\{X_۱,X_۲,X_۳,...,X_n\}$ باشد، تابع

$$P:A\to[۰,۱]$$
$$P(X_i)=P_i$$

را تابع احتمال (جرم احتمال) می نامند و جدول زیر را جدول توزیع احتمال می گویند.

X_i	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	....	X_n
$P(X_i)$	$P(X_۱)$	$P(X_۲)$	$P(X_۳)$	....	$P(X_n)$

نتیجه: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته ، دارای ویژگی های زیر است.

۱) $۰\le P(X_i)\le ۱$ و ۲) $\sum_{i=۱}^{n}P(X_i)=۱$

تمرین : جدول توزیع احتمال مربوط به تعداد پسران را برای خانواده های فقط دارای سه فرزند را تشکیل دهید.

حل:

برآمد (s_i)	PPP	PPD	PDP	DPP	DDP	DPD	PDD	DDD
متغیر تصادفی (X_i)	۳	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۰
احتمال $P(X_i)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

لذا

متغیر تصادفی (X_i)	۰	۱	۲	۳	جمع
احتمال $P(X_i)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۱

توجه: می توان تابع احتمال مربوط به جدول تمرین قبل را به صورت تابع دو ضابطه ای بیان کرد.

$$P(X=X_i)=\begin{cases}\frac{۱}{۸} & X_i=۰,۳\\ \frac{۳}{۸} & X_i=۱,۲\end{cases}$$

تمرین : در پرتاب دو تاس متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می کنیم. جدول توزیع احتمال را نوشته و آنرا نیز به شکل تابع جبری بیان کنید.

$X_i =$ مجموع دو عدد ظاهر شده در دو تاس

حل: واضح است که فضای نمونه ای پرتاب دو تاس به شکل زیر است.

۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶

حال پس از تعیین مجموع دو عدد بدست آمده،جدول زیر را تشکیل می دهیم.

جمع	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	حاصل جمع دو عدد X_i
۱	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	احتمال $P(X_i)$

$$\Rightarrow P(X = X_i) = \begin{cases} \dfrac{X_i - ۱}{۳۶} & X_i = ۲,۳,۴,۵,۶,۷ \\ \dfrac{-X_i + ۱۳}{۳۶} & X_i = ۸,۹,۱۰\ ,۱۱,۱۲ \end{cases}$$

تمرین : در پرتاب دو تاس متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف می کنیم. جدول توزیع احتمال را نوشته و آنرا نیز به شکل تابع جبری بیان کنید.

$X_i =$ بزرگترین عدد ظاهر شده در دو تاس

حل: واضح است که فضای نمونه ای پرتاب دو تاس به شکل زیر است.

بزرگترین عدد	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱
	۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۴۲	۴۱
	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳	۵۲	۵۱
	۶۶	۶۵	۶۴	۶۳	۶۲	۶۱

حال پس از تعیین مجموع دو عدد بدست آمده،جدول زیر را تشکیل می دهیم.

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
$P(X_i)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۷}{۳۶}$	$\frac{۹}{۳۶}$	$\frac{۱۱}{۳۶}$	۱

$$\Rightarrow P(X = X_i) = \frac{۲X_i - ۱}{۳۶} \qquad X_i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

تمرین: توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

الف) جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X را بنویسید. ب) مقدار $P(X \geq ۳)$ را بدست آورید.

ج) مقدار $P(X < ۴)$ را بدست آورید.

$$P(X = X_i) = \begin{cases} \frac{X_i}{{X_i}^{۲} + ۳} & X_i = ۱, ۲, ۳ \\ \frac{۱}{۱۴} & X_i = ۴, ۵, ۶ \end{cases}$$

حل:

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	جمع
$P(X = X_i)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۳}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۱۴}$	۱

$$P(X \geq ۳) = P(X = ۳) + P(X = ۴) + P(X = ۵) + P(X = ۶) = \frac{۳}{۱۲} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} = \frac{۱۳}{۲۸}$$

$$P(X < ۴) = P(X = ۳) + P(X = ۲) + P(X = ۱) = \frac{۳}{۱۲} + \frac{۲}{۷} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۱۴}$$

تمرین: ثابت کنید که تابع زیر یک تابع توزیع احتمال است.

$$P(X = X_i) = \begin{cases} \frac{۱}{{X_i}^{۲} + X_i} & X_i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \\ \frac{X_i - ۴}{۳۰} & X_i = ۶, ۷ \end{cases}$$

حل: کافی است که نشان می دهیم که

$$۱)\ ۰ \leq P(X_i) \leq ۱ \qquad \text{و} \qquad ۲)\ \sum_{i=۱}^{n} P(X_i) = ۱$$

با توجه به تابع داده شده داریم:

$$P(X=۱) = \frac{۱}{(۱)^۲ + ۱} = \frac{۱}{۲} \qquad P(X=۲) = \frac{۱}{(۲)^۲ + ۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$P(X=۳) = \frac{۱}{(۳)^۲ + ۳} = \frac{۱}{۱۲} \qquad P(X=۴) = \frac{۱}{(۴)^۲ + ۴} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$P(X=۵) = \frac{۱}{(۵)^۲ + ۵} = \frac{۱}{۳۰} \qquad P(X=۶) = \frac{۶-۴}{۳۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

$$P(X=۷) = \frac{۷-۴}{۳۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

لذا تمام احتمالات در بازه ی $[۰,۱]$ قرار می گیرند و چون

$$\sum_{i=۱}^{۷} P(X=X_i) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۰} = ۱$$

پس این تابع یک تابع توزیع احتمال است.

تمرین: اگر X متغیر تصادفی باشد، مقدار k را طوری بدست آورید که تابع زیر تابع توزیع احتمال باشد.

$$P(X=X_i) = \frac{X_i}{۲k+۱} \qquad X_i = ۱,۲,۳,۴,۵$$

حل:

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	جمع
$P(X=X_i)$	$\frac{۱}{۲k+۱}$	$\frac{۲}{۲k+۱}$	$\frac{۳}{۲k+۱}$	$\frac{۴}{۲k+۱}$	$\frac{۵}{۲k+۱}$	۱

$$\sum_{i=۱}^{۵} P(X=X_i) = ۱ \rightarrow \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۲}{۲k+۱} + \frac{۳}{۲k+۱} + \frac{۴}{۲k+۱} + \frac{۵}{۲k+۱} = ۱ \rightarrow \frac{۱۵}{۲k+۱} = ۱ \rightarrow k = ۷$$

تمرین: تحقیق کنید که آیا تابع زیر تابع احتمال است یا خیر؟ چرا؟

$$P(X=X_i)=\frac{۲X_i-۳}{k^۲} \qquad X_i=۱,۲,\dots,n$$

حل: خیر، زیرا

$$P(X=۱)=\frac{۲(۱)-۳}{k^۲}=\frac{-۱}{k^۲}<۰ \Rightarrow P(X=۱)\notin[۰,۱]$$

تمرین: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است.

الف) مقدار a را تعیین کنید. ب) $P(X=۴)$ را بدست آورید.

X_i	۱	۲	۳	۴	جمع
$P(X=X_i)$	$۶a^۲$	$\frac{۳}{۲}a$	$\frac{۱}{۴}$	$۲a$	۱

حل:

$$\sum_{i=۱}^{۴}P(X=X_i)=۱\rightarrow ۶a^۲+\frac{۳}{۲}a+\frac{۱}{۴}+۲a=۱\rightarrow ۲۴a^۲+۱۴a-۳=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=(۱۴)^۲+۴(۲)(۳)=۴۸۴}\rightarrow\left\langle\begin{array}{l} a=\frac{-۱۴+۲۲}{۴۸}=\frac{۱}{۶} \\ a=\frac{-۱۴-۲۲}{۴۸}=-\frac{۳}{۴}\ \text{غ ق ق}\end{array}\right.$$

مقدار $a=-\frac{۳}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن مقدار $P(X=۲)$ و $P(X=۴)$ منفی می شود.

$$P(X=۴)=۲a=۲(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۳}$$

☑ **بررسی برخی از توزیع های خاص برای متغیر های گسسته**

الف) توزیع یکنواخت

در بعضی از آزمایش ها تمام اعضا دارای احتمال وقوع یکسان هستند. چنین آزمایش هایی دارای توزیعی به شکل زیر می باشند. این توزیع را توزیع یکنواخت می نامند.

$$P(X=X_i)=\frac{۱}{k} \qquad X_i=۱,۲,...,n$$

مثال: پرتاب یک تاس دارای یک توزیع یکنواخت می باشد. معادله ی این تابع بصورت زیر است.

$$P(X=X_i)=\frac{۱}{۶} \qquad X_i=۱,۲,...,۶$$

❋❋❋

ب) توزیع برنولی

در بعضی از آزمایش ها فقط با دو پیشامد روبرو هستیم. یکی از این پیشامد ها را پیروزی (۱) و دیگری را شکست (۰) می نامیم.اگر احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با q نمایش دهیم، خواهیم داشت.

X_i	۰	۱	جمع
$P(X=X_i)$	q	p	۱

$$\Rightarrow p+q=۱$$

چنین آزمایش هایی را آزمایش برنولی می نامند. توزیع این آزمایش ها به شکل زیر می باشد که به توزیع برنولی موسوم است.

$$P(X=X_i)=p^{X_i}.q^{۱-X_i} \qquad X_i=۰,۱$$

تذکر: پیشامدی که مسئله به دنبال آن است را پیروزی و پیشامد دیگر را شکست بگیرید.

مثال:

۱) تولد فرزند دارای توزیع برنولی است.

۲) پرتاب سکه دارای توزیع برنولی است.

ج) توزیع دو جمله ای

اگر آزمایش برنولی را n بار به طور مستقل تکرار کنیم. نوع آزمایش را آزمایش دو جمله ای و متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی دو جمله ای می نامند. در این صورت تابع توزیع احتمال به شکل زیر در خواهد آمد که به توزیع دو جمله ای موسوم است.

$$P(X=X_i)=\binom{n}{X_i}p^{X_i}.q^{n-X_i} \qquad X_i=۰,۱,۲,....,n$$

که در آن p و q احتمال پیروزی و شکست در یک بار آزمایش برنولی است.

مثال: پرتاب n سکه با هم دارای توزیع دو جمله ای است.

تمرین : یک سکه طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو $\frac{۱}{۴}$ و پشت $\frac{۳}{۴}$ است. این سکه را ۸ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه سه بار رو آید را به دست آورید.

حل: آمدن رو را پیروزی و آمدن پشت را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۱}{۴}\rightarrow q=\frac{۳}{۴}$$

$$P(X=۳)=\binom{۸}{۳}\times(\frac{۱}{۴})^{۳}\times(\frac{۳}{۴})^{۵}=۰/۲۴$$

تمرین : خانواده ای دارای ۶ فرزند است. اگر احتمال تولد فرزند پسر و تولد فرزند دختر مساوی باشد. احتمال اینکه ۲ فرزند، پسر باشد را بدست آورید.

حل: تولد فرزند پسر را پیروزی و تولد فرزند دختر را شکست فرض می کنیم. پس:

$$p=\frac{۱}{۲}\rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X=۲)=\binom{۶}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۴}=\binom{۶}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{۶}=۰/۲۳$$

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها به تصادف پاسخ دهد. چقدر احتمال دارد که او ۷ سئوال را پاسخ صحیح دهد؟

حل: پاسخ صحیح را پیروزی و پاسخ غلط را شکست فرض می کنیم. پس:

$p=\frac{۱}{۴}\to q=\frac{۳}{۴}$

$p(X=۷)=\binom{۱۰}{۷}\times(\frac{۱}{۴})^{۷}\times(\frac{۳}{۴})^{۳}=$

تمرین : به دانش آموزی ۱۰ سئوال تستی چهار گزینه ای داده شده است و قرار شد که او به گزینه ها به تصادف پاسخ دهد. چقدر احتمال دارد که او ۴ سئوال را پاسخ غلط دهد؟

حل: پاسخ غلط را پیروزی و پاسخ صحیح را شکست فرض می کنیم. پس:

$p=\frac{۳}{۴}\to q=\frac{۱}{۴}$

$P(X=۴)=\binom{۱۰}{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{۴}\times(\frac{۱}{۴})^{۶}=$

تمرین : احتمال اینکه یک دانه ی ذرت رشد کند، ۰/۲۵ است. اگر ۱۰۰ دانه از این دانه ها کاشته شود.چقدر احتمال دارد که ۲۰ تای آنها رشد کند؟

حل: رشد دانه را پیروزی و و عدم رشد آن را شکست فرض می کنیم. پس:

$p=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}\to q=\frac{۳}{۴}$

$P(X=۲۰)=\binom{۱۰۰}{۲۰}\times(\frac{۱}{۴})^{۲۰}\times(\frac{۳}{۴})^{۸۰}=$

نتیجه: در پرتاب یک سکه به تعداد n بار اگر احتمال آمدن رو و پشت برابر باشند. احتمال k بار پیروزی به شکل زیر است. $(۰\le k\le n)$

$p=\frac{۱}{۲}\to q=\frac{۱}{۲}$

$p(X=k)=\binom{n}{k}\times(\frac{۱}{۲})^{k}\times(\frac{۱}{۲})^{n-k}=\binom{n}{k}\times(\frac{۱}{۲})^{n}=\binom{n}{k}\times\frac{۱}{۲^{n}}=\frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}$

تمرین: سکه ای را ۱۰۰ با ر انداخته ایم، احتمال آمدن ۶۰ بار پشت را بدست آورید.

حل:

$$p=q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(X=۶۰)=\frac{\binom{۱۰۰}{۶۰}}{۲^{۱۰۰}}$$

تمرین: سه وجه یک تاس سالم قرمز و سه وجه دیگر آن آبی می باشد. این تاس را ۱۰ بار انداخته ایم. احتمال آن را به دست آورید که ۴ بار قرمز بیاید.

حل:

$$p=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(X=۴)=\frac{\binom{۱۰}{۴}}{۲^{۱۰}}=\frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}$$

تمرین: یک تاس سالم را ۷ بار انداخته ایم. احتمال آن را حساب کنید که ۵ بار عدد زوج ظاهر شود.

حل:

$$p=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow q=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(X=۵)=\frac{\binom{۷}{۵}}{۲^{۷}}=\frac{۲۱}{۱۲۸}$$

***

موفق باشید. جابر عامری دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی