

Heat and Mass Transfer

سرفصل‌ها:

- Chapter(1): مقدمه
- Chapter(2): رسانش
- Chapter(3): رسانش یک بعدی در حالت پایا
- Chapter (4): معادله حرارتی حالت دو بعدی
- Chapter(5): رسانش گذرا
- Chapter(6): جابه‌جایی
- Chapter(7): جریان خارجی
- Chapter(8): جریان داخلی
- Chapter(11): مبدل‌های حرارتی

تفاوت ترمودینامیک با انتقال حرارت:

در ترمودینامیک در مورد سیستم‌های در حال تعادل بحث می‌کند و بحثی در مورد نرخ و یا مکانیزم را به ما نمی‌دهد. ولی در انتقال حرارت هم در مورد نرخ و هم در مورد مکانیزم بحث می‌شود.

چه موقع انتقال حرارت بوجود می‌آید؟

وقتی بین دو نقطه یا دو ماده اختلاف دمایی وجود داشته باشد یا اصطلاحاً گرادیان دما بوجود می‌آورند مثل اینکه در سیالات جریان در اختلاف فشار بوجود می‌آید.

انواع مکانیزم انتقال حرارت:

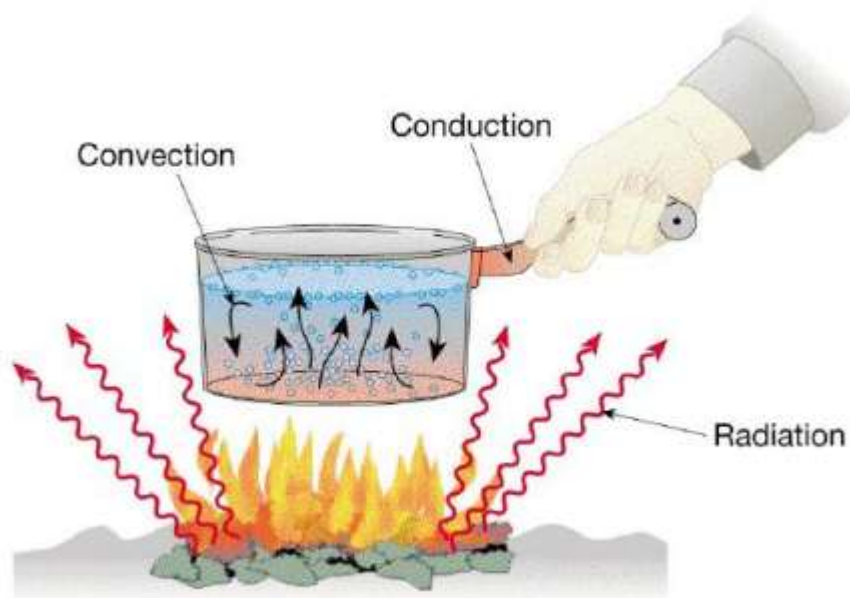
Heat transfer: {
Conduction هدایتی
Convection (هم رفتی) جابجایی
Radiation تشعشعی

Conduction: در جامدات و سیالات ساکن بوجود می‌آیند پس نیاز به محیط مادی دارد.

Convection: زمانی بوجود می‌آید که یک سیالی متحرکی روی یک سطحی حرکت کند.

و نیاز به محیط مادی دارد.

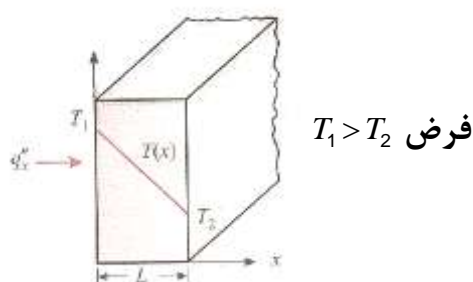
Radiation: بین هر دو سطح که اختلاف دما دارند همیشه تشعشع صورت می‌گیرد و نیاز به محیط مادی واسطه ندارد و مکانیزم آن به صورت امواج الکترومغناطیسی است یا photon.



Conduction

انتقال حرارتی هدایتی:

طبق قانون دوم ترمودینامیک (نظریه کلازیوس) که همیشه انتقال حرارت از دمای بیشتر به دمای کمتر اتفاق می‌افتد.



انتقال گرمای رسانشی یک بعدی (پخش انرژی)

$$\dot{q} = \alpha A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

A: cross sectional Area (سطح عمود بر جهت جریان) رابطه مستقیم

ΔT : با اختلاف دما رابطه مستقیم

Δx : با فاصله رابطه عکس:

K: Thermal conductivity ($w/m.k$)

k منفی بخاطر اینکه $\Delta T, \Delta x$ از نظر علامت مختلف علامت هستند می گذاریم:

$$q_x = -KA \frac{dT}{dx} \quad (\text{kw}) \quad \text{قانون فوریه}$$

\dot{q}_x = Rate of Heat transfer in x Direction x جهت در انتقال حرارت

$\frac{dT}{dx}$: گرادیان دما در جهت x

اگر عمود نباشد پس مؤلفه‌ای دارد که انتقال حرارت در آن از برهان خلف مؤلفه وجود ندارد پس همیشه انتقال حرارت عمود بر سطوح ایزوترم است.

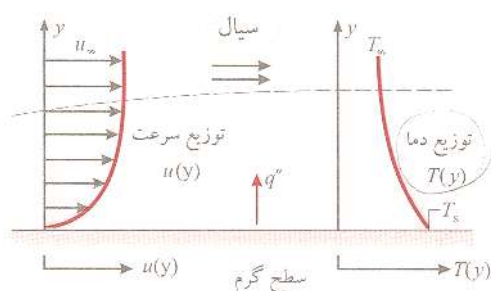
$$q'' = \frac{q_x}{A}, \quad q'' = \frac{q}{A} \left(\frac{kw}{m^2} \right) \quad q'': \text{Heat flux}$$

Assumption $k = \text{constant}$ با فرض $\Rightarrow q'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j + \frac{\partial T}{\partial z} k \right)$

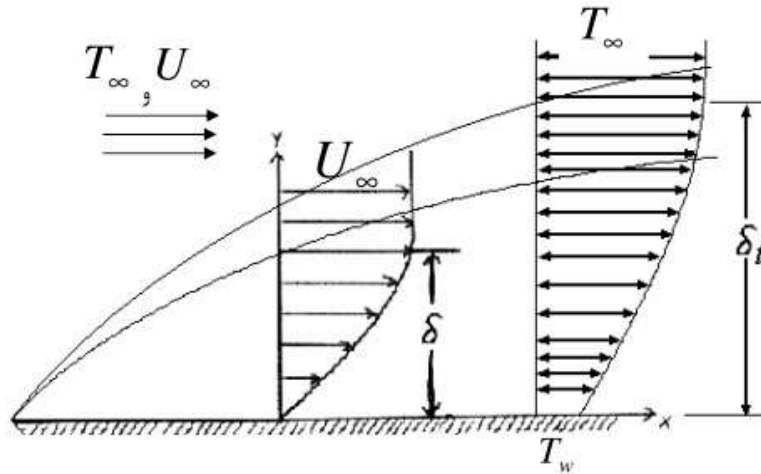
شکل سه بعدی قانون فوریه \uparrow

$$q'' = -k \vec{\nabla} T = -k \text{grad}(T)$$

جابجایی: Convection



گسترش لایه‌ی مرزی در انتقال گرمای جابه‌جایی



انتقال حرارت جابجایی

انواع جابه‌جایی:

- Convection: {
- Forced convection
 - Free (Natural) Convection

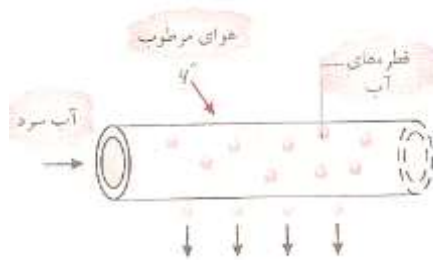
Forced convection: زمانی بوجود می‌آید که جابجایی توسط یک عامل خارجی مثل فن

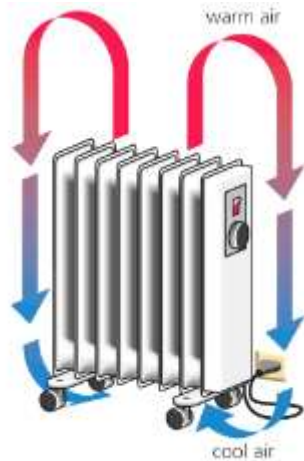
یا پمپ یا باد ایجاد شود مثل رادیاتور ماشین، خنک کردن تجهیزات کامپیوتر.

Free convection: انتقال به شکل طبیعی یا آزاد در اثر تغییرات چگالی و یا نیروی

شناوری بوجود می‌آید مثل شومافژ

وقتی یک سیال گرم می‌شود چگالی آن کم می‌شود و سبک می‌شود و بالا می‌رود.





گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جایابی آزاد)

اگر لباس را روی شوفاژ بگذاریم جلوی حرکت سیال را می‌گیرد و انتقال حرارت را پائین می‌آورد.



$T_1 > T_2$ *free convection* *condction* $T_2 > T_1$

چون $T_2 > T_1$ و سیال گرم تمایل دارد به سمت بالا برود در نتیجه به محفظه برخورد می‌کند.

چون $T_2 < T_1$ است سیال گرم پایین است و به راحتی به سمت بالا حرکت می‌کند.

همیشه انتقال حرارت Force به وسیله عامل خارجی از Free خیلی بیشتر است.

مثال: کولر گازی

نقطه شبنم: (dew point)

دمایی که تحت آن در طی یک فرآیند فشار ثابت سرد بشود اولین نقطه‌ای که آب چگالیده

می‌شود نقطه شبنم است.

انتقال حرارت در جوشش و چگالش به شدت بالاست.

انتقال حرارت توسط قانون سرمایش نیوتن بیان می شود (Newton's law of cooling)

$$q \propto A(T_w - T_\infty)$$

$$\dot{q} = hA(T_w - T_\infty) \text{ ضریب انتقال حرارت جابجایی}$$

h: {
 Geometry, Roughness به شکل هندسی و زبری سطح
 fluid properties خواص سیال مثل ρ, μ, C_p, K
 flow condition شرایط جریان

* مقدار h (ضریب جابه جایی) برای انتقال حرارت بوسیله عامل خارجی (force) در مقایسه با حالت آزاد (free) خیلی بیشتر است.

$$h_{forced\ conr} > h_{free\ conrec}$$

$$h_{Boiling, condensation} > h_{forced\ cew.}$$

h: film coefficient

Heat transfer

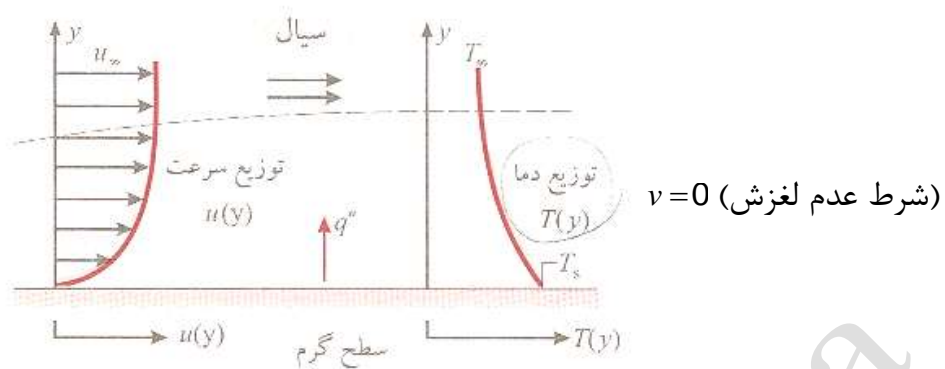
* conduction:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{gas \& fluid :} \\ \text{solid :} \end{array} \right.$	1. lattice vibration :	(ارتعاش شبکه ای)	(پخش مولکولی) Diffusion
	2. free electrons :	(سیالات ساکن)	

* اگر سیال روی سطحی حرکت کند لایه مرزی به وجود می آید.

* Convection:

* برای انتقال حرارت جا به جایی حتماً باید سیال متحرکی داشته باشیم.



* در نزدیک سطح سرعت صفر است و انتقال حرارت توسط مکانیزم رسانش است.

convection { Diffusion: $(v = 0)$ نزدیک سطح
Bulk motion (Advection): حرکت

نکات قانون فوریه:

(۱) قانون فوریه یک معادله برداری است و این معادله برای هر ماده‌ای صادق است حتی اگر شرایط مسئله غیر پایدار باشد.

$$q'' = -k \nabla T \text{ : قانون فوریه}$$

(۲) از مشاهده تجربی به دست آمده

(۳) حتی اگر منبع حرارتی وجود داشته باشد معادله صادق است.

* از لحاظ مکانیزم سرعت سریع‌ترین نوع انتقال حرارت Radiation می‌باشد. و این انرژی توسط امواج Electromagnetic (Photon) منتقل می‌شود.

قانون Stefan- Boltzmann: $Q''_{emit,max} = \sigma T_s^4$

* دما باید حتماً باید به صورت مطلق باشد یعنی کلوین یا رانکین:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

$Q'' = \varepsilon \sigma T_s^4$: انرژی یک سطح واقعی صادر می‌کند ε : emissivity of surface

ماده‌ای که ماکزیمم انرژی را از خود صادر کند. \Rightarrow (جسم سیاه) Black Body

$$\varepsilon = 1$$

به عبارت دیگر جسم سیاه جسمی است که تمام انرژی داده شده به آن را جذب می‌کند.

انرژی تشعشعی که از جسم ۱ به جسم ۲ می‌رسد: $q_{1-2} = \varepsilon A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$

F_{12} : shape(view) factor

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1} \iint_{A_2} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_2 dA_1$$

K: ضریب هدایت گرمایی:

$$q'' = -k \nabla T \quad k: \text{Thermal conductivity}$$

در حالت کلی: $K_{solid} > K_{liquid} > K_{gas}$

n : تعداد مولکول‌ها بر واحد حجم

C : سرعت متوسط مولکول‌های گاز

$$k_{gas} \propto n \bar{C} \lambda$$

λ : متوسط فاصله‌ای که مولکولها به هم برخورد می‌کنند.

$$c, \mu, k \propto \sqrt{T} \quad C = \sqrt{KRT}$$

(۱) k با جرم مولکولی نسبت عکس دارد.

$$K_{He} > K_{Air} > K_{R-12}$$

(۲) k_{gas} با فشار ارتباطی ندارد چون λ کم می‌شود و n بالا می‌رود و این دو اثر هم را خنثی

می‌کنند.

مقایسه k مربوط به بعضی از گازها:

۳) k مایعات مانند k گازها تحلیل می شوند.

۴) k گازها و مایعات با افزایش دما افزایش می یابد.

k: مواد جامد به ارتعاش شبکه مولکول و الکترون های آزاد بستگی دارد.

$$K_{solid} \begin{cases} lattice\ vib(k_l) \\ free\ elect : (k_e) \end{cases} k_{solid} = k_l + k_e$$

۵) هر چه شبکه مولکولی منظم تر باشد k بیشتری دارد. بالاترین k موجود k الماس است.

	$k(w/m.k)$
Diamond	2300
Copper	430
Iron	80.2
water	0.613
Air	0.02

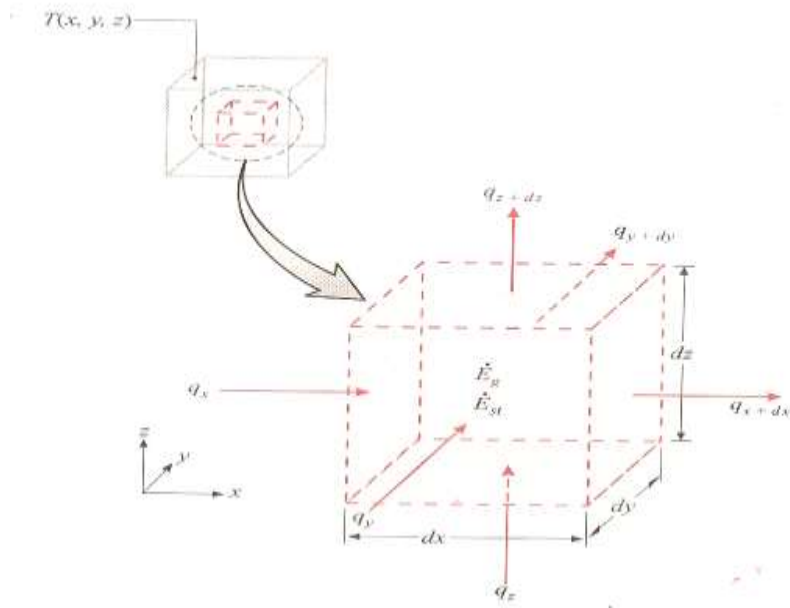
در حالت کلی $K_{crystal\ diamond} > K_{Pure\ metal} > K_{Alloy\ metal} > K_{liquid} > K_{insulation} > k_{gas}$

در مایعها: $k_{روغن} > k_{آب}$

مقایسه k مربوط به فلزها

$k_{copper} > k_{al\ min\ am} > k_{carbon\ steel} > k_{stan\ iles\ steel}$

Heat conduction Equation:



حجم کنترل دیفرانسیلی $dx dy dz$ برای تحلیل رسانش در مختصات کارتزین

\dot{E}_G : انرژی تولیدی بر واحد حجم مثلاً انرژی الکتریکی، شیمیایی یا هسته‌ای به انرژی حرارتی تبدیل شود.

* روش به دست آوردن معادله انتقال حرارت هدایتی

The first law of Thermodynamic (conservation of Energy principle):

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \Delta \dot{E}_{system} \quad (1)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z, \quad \dot{E}_{out} = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz}$$

$$= \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) + \left(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy \right) + \left(\dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz \right)$$

$$\dot{E}_G = \dot{q}_G \cdot d_x \cdot d_y \cdot d_z \quad \dot{q}_G = \text{Heat Generation : per unit volume}$$

$$\Delta \dot{E}_{sys} = m C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c_p d_x d_y d_z \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$C_v = C_p \quad (\text{جسم جامد})$$

$$\dot{q}_x = -k d_y d_z \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{q}_y = -k d_x d_z \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \dot{q}_z = -k d_x d_y \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz + \dot{q}_G \cdot d_x d_y d_z = \rho c_p dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله انتقال حرارت در مختصات دکارتی (با مشتقات جزئی)

Assumption: $K = \text{constant} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \left(\alpha \uparrow = \frac{k \uparrow}{(\rho C_p) \downarrow} \right)$$

α : Thermal diffusivity (پخشندگی گرمایی)

ρC_p : (ظرفیت گرمایی حجمی)

α بالا: یعنی گرما سریع در ماده پخش می شود و ماده سریع تحت تأثیر تغییر دما قرار

می گیرد.

* گازها برای ذخیره انرژی مواد مناسبی نیستند چون α آنها کم است.

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{Div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\text{Div } (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplasion(T): $\text{Div } [\vec{\text{grad}}(T)]$

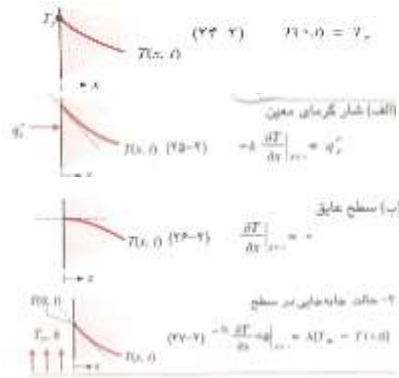
$$\Rightarrow \text{معادله انتقال گرما: } \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (k = \text{cte})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{q}_G = 0 \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{Fourier Equation (معادله فوره)} \\ \text{steady} \Rightarrow \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_G}{k} = 0 & \text{Poisson Equation (معادله پواسون)} \\ \text{steady, } \dot{q}_G = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0 & \text{(معادله لاپلاس)}$$

$$\text{One-Dimensional: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

{ 2 Boundary conditions :
1 Initial condition :

$$\text{Boundary condition : } \begin{cases} 1 = \text{Dirichlet Condition} \\ T(0, t) = T_1 \\ 2 = \text{Newmann condition} \\ q''_{(0,t)} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \text{special case :} \\ q'' = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$



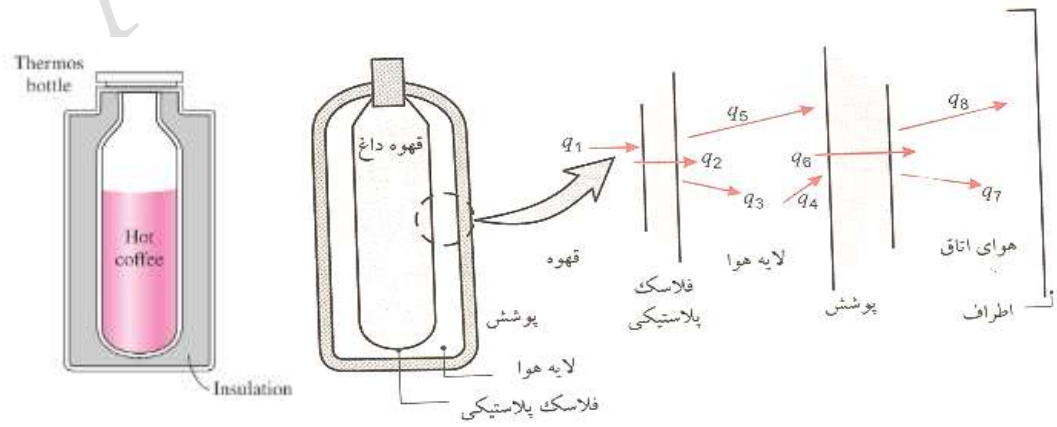
$$\begin{cases} 3 = \text{convection} \\ h(T_{\infty} - T_{conv,t}) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ 4 = \sigma \varepsilon [T_{\infty}^4 - T^4(Q,t)] = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

(۵) دو سطح در تماس با هم باشند.

$$\begin{cases} T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t) \\ -k_A \frac{\partial T(x_0, t)}{\alpha_x} = -k_B \frac{\partial T(x_0, t)}{\alpha_x} \end{cases}$$

یک سطح نمی تواند انرژی را در خود حفظ کند قدر انرژی وارد می شود خارج می شود.
 * اگر k_A و k_B با هم برابر باشند مشتق آنها با هم برابر است و مماس بر منحنی در نقطه مشترک آنها با هم برابرند.

مکانیزم انتقال حرارت از فلاسک چای به هوای بیرون:



جابه جایی $\dot{q}_1 = \text{natural Free convection (from tea to surface 1)}$

رسانش از سطح ۱ به سطح ۲

جابه جایی $\dot{q}_2 : \text{conduction (through surface 1 to 2)}$

تشعشع از سطح (۲) به سطح (۳)

جابه جایی $\dot{q}_3 : \text{Radiation (from surface 2 to surface 3)}$

جابه جایی از سطح (۲) به هوا (Air1)

جابه جایی $\dot{q}_4 : \text{natural convection (from surface 2 to Air 1)}$

جابه جایی از Air1 به سطح (۳)

جابه جایی $\dot{q}_5 : \text{natural convection (from Air 1 to Surface 3)}$

رسانش از سطح (۳) به سطح (۴)

جابه جایی $\dot{q}_6 = \text{Conduction (through surface 3 to 4)}$

تشعشع از سطح (۴) به سطح (۵)

جابه جایی $\dot{q}_7 : \text{Re diation from surface 4 to surface 5)}$

جابه جایی از سطح (۴) به Air2

جابه جایی $\dot{q}_8 : \text{Natural convection from surface 4 to Air 2}$

One-Dimensional: Heat conduction Equation:

$$\text{In Cartesian: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{In cylindrical: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{In spherical: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \begin{cases} r = x, n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

* (۱) هدف از حل معادلات انتقال گرما بدست آوردن توزیع دما در زمان و مکان‌های مختلف

است و توزیع دما به ما کمک می‌کند که نرخ انتقال حرارت را به دست آوریم. (\dot{q}, q'')

(۲) با به دست آمدن توزیع دما تنش‌های حرارتی نیز به دست می‌آیند (Thermal stress)

(۳) با توزیع دما جابه‌جایی‌ها و کمانش را می‌توان حساب کرد. Displacement,

Buckling

insulator: (۴) به دست آوردن عایق مناسب:

Coating: (۵) انتخاب چسب‌های صنعتی

* حل معادله انتقال حرارت در مختصات دکارتی (کارتزین):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{array}{l} \text{steady state} \\ \Rightarrow \\ \text{no heat generation} \end{array} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

فرضیات: (۱- یک بعدی، ۲- پایدار، ۳- بدون منبع حرارتی)

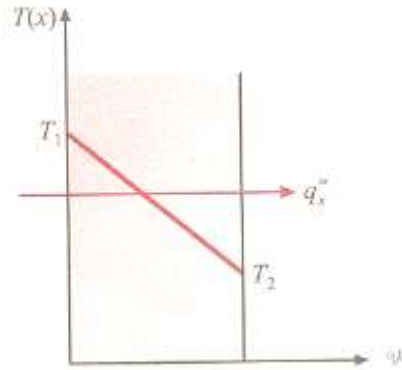
A: ثابت

K: ثابت

$$\frac{dT}{dx} = \text{constant} = C_1 \quad \dot{q}_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \text{constant} \Rightarrow \dot{q}_x'' = \frac{\dot{q}_x}{A} = \text{constant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$



رابطه بین دستگاه مختصات، جهت جریان گرما و شیب دما در یک بعد

$$\text{قانون اول: } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} = cte$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow T = C_1 x + C_2 \Rightarrow \text{توزیع دما خطی است}$$

$$\text{قانون فوریه: } \dot{q}_x = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow \dot{q}_x dx = -kAdT$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \dot{q}_x dx = \int_{T_1}^{T_2} -kAdT \Rightarrow \dot{q}_x (x_2 - x_1) = -kA(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \frac{kA(T_1 - T_2)}{\Delta x} \Rightarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l}{kA}}$$

* مقایسهٔ جریان الکتریکی با جریان حرارتی:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

R_t : Thermal Resistance

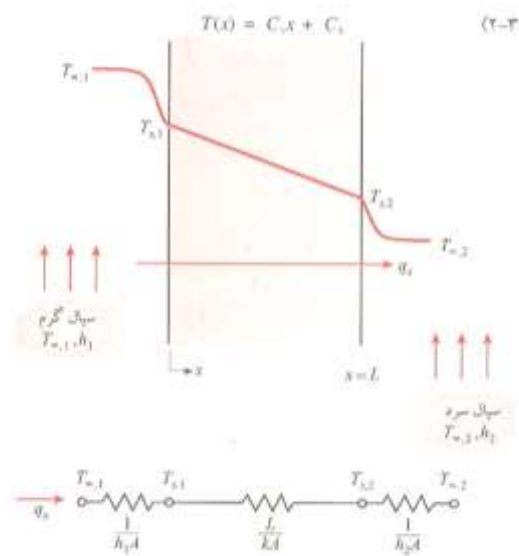
$$\begin{cases} \Delta V, I, R \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ \Delta T, q, R_t \end{cases} \quad R_{t,cond} = \frac{l}{KA}$$

Convection: $\dot{q} = hA\Delta T \rightarrow \dot{q} = \frac{\Delta T}{\left(\frac{1}{hA}\right)} \quad R_{t,conv} = \frac{1}{hA}$

Radiation: $q = \varepsilon\sigma A(T_{surr}^4 - T_s^4) = \left[\varepsilon\sigma(T_{surr}^2 + T_s^2)(T_{surr} + T_s)\right] * A(T_{surr} - T_s)$

$$R_{t,rad} = \frac{1}{hA_{rad}}$$

تحليل مسئله:



انتقال گرما در دیوار مسطح (الف) توزیع دما (ب) مدار گرمایی معادل

$$R_1 = \frac{1}{h_1 A}, R_2 = \frac{l}{kA}, R_3 = \frac{1}{h_2 A}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 \quad \text{Series Resistances}$$

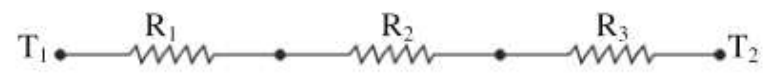
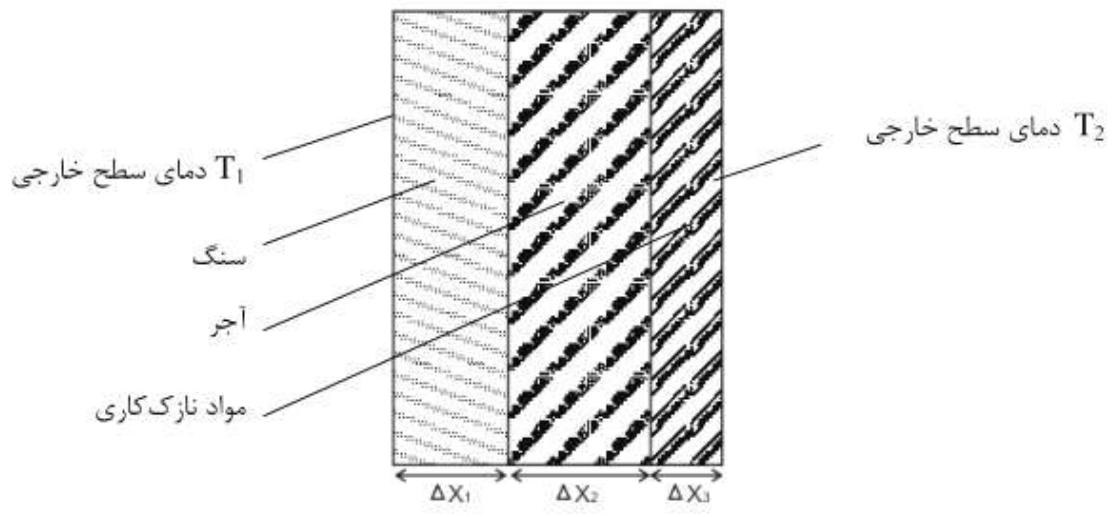
$$\dot{q}_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \dots$$

Parallel Resistance:

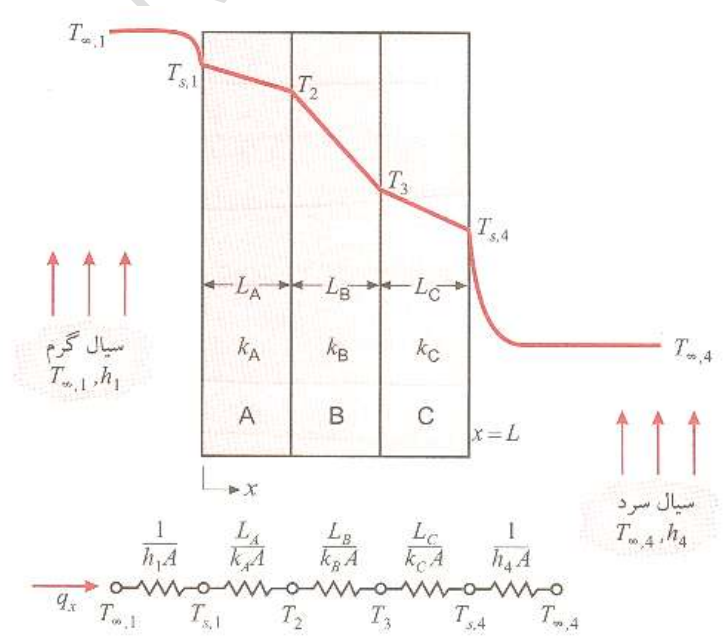
$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad \dot{q} = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

دیوار مرکب:



انتقال حرارت از دیواره چند لایه

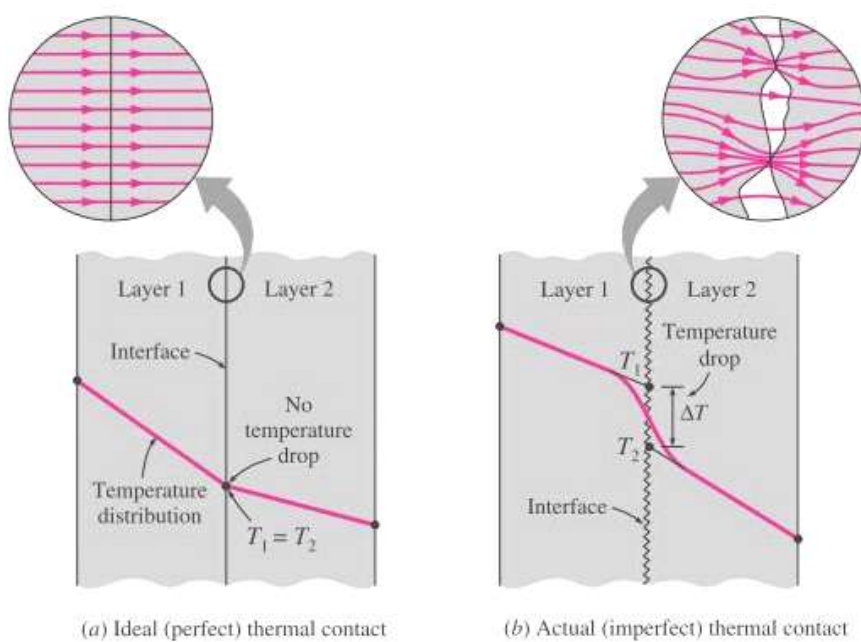
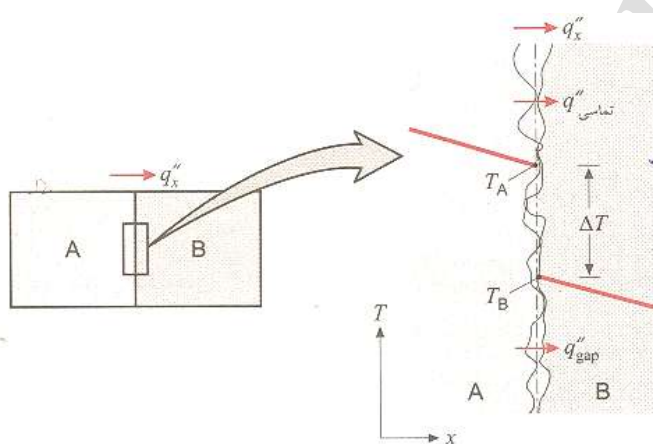


مدار گرمایی معادل برای دیوار مرکب سری

$$\dot{q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_t} \quad R_t = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_4}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Thermal contact Resistance: مقاومت حرارتی سطح تماس



افت دما بر اثر مقاومت تماسی گرمایی

مقاومت سطح تماس به عوامل زیر وابسته است :

۱- نوع سیال

۲- زبری سطح

۳- فشار

* هرچه زبری بیشتر باشد افت دما بیشتر می شود.

(۱) در حالت واقعی چون بین دو سطح تماس سیالی وجود دارد و خود سیال مقاومت دارد بنابراین انتقال حرارت را کم می کند و از طرف دیگر k جامد همیشه از k سیال بیشتر است در نتیجه انتقال حرارت کمتر می شود.

(۲) هرچه زبری دو سطح بیشتر باشد افت دما بیشتر می شود. چون مقاومت بیشتر می شود.

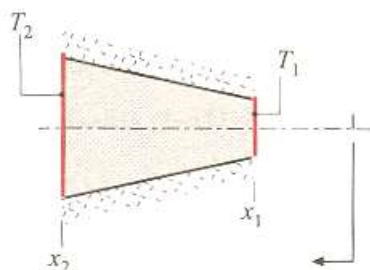
(۳) هر چه سیال بین دو سطح دارای k کمتری باشد افت دما بیشتر می شود. (مقاومت بیشتر است) و افت دما بیشتر می شود.

(۴) هرچه فشار سیال کمتر شود، Convection کمتر می شود در نتیجه افت دما بیشتر می شود.

$$R_{c,H_2} < R_{c,He} \Leftrightarrow k_{H_2} > k_{He}$$

$$k_{Air} < k_{oil} \Leftrightarrow R_{c,Air} > R_{c,oil}$$

سوال : اگر سیال که بین فصل مشترک قرار دارد اکسیژن باشد افت دما بیشتر وجود دارد یا نیتروژن؟



تابع توزیع دما در دیوار با سطح متغیر:

فرضیات: (۱) بدون منبع حرارتی

(۲) حالت پایدار

۳) دور آن عایق کاری شده است.

برای المان قانون اول را می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{dE}{dt}$$

$$\dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} \Rightarrow \dot{q}_x = \text{constant}, \quad \downarrow q'' = \frac{\dot{q}_x}{A} \uparrow$$

$$\downarrow q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \downarrow$$

$$\dot{q}_x = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{\dot{q}_x \cdot dx}{A} = -k dT$$

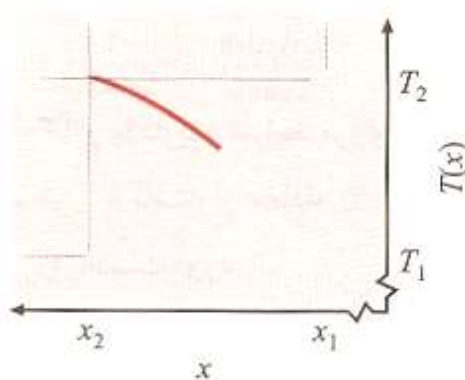
$$\Rightarrow \int_{x_1}^x \frac{\dot{q}_x \cdot dx}{A} = \int_T^T -k dT, \quad A = \frac{\pi d^2}{4}, d = ax$$

$$\frac{d_1}{x_1} = \frac{d_2}{x_2} = \frac{d}{x} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4} a^2 x^2$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x / \frac{\pi a^2}{4} \int_{x_1}^x \frac{dx}{x^2} = -k(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \frac{4\dot{q}_x}{k\pi a^2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right) = T - T_1$$

$$\Rightarrow T = T_1 + \frac{4\dot{q}_x}{k\pi a^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \text{ تابع توزیع دما}$$

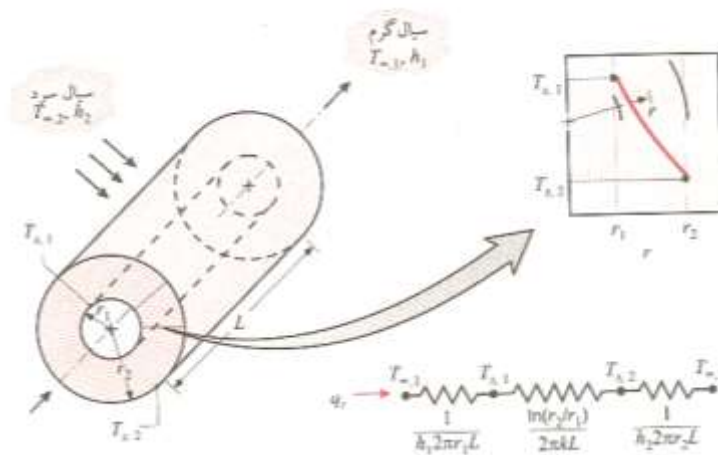


* با افزایش x ، شیب کم می شود. **Heat conduction in cylinder:**

معادله انتقال حرارت در استوانه ها:

Assumption: one-dimensional; no Heat Generation, steady states

انتقال حرارت فقط در راستای شعاع است.



استوانه توی خالی با شرایط جابه جایی در سطح

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = C_1 \Rightarrow dT = \frac{C_1}{r} dr$$

$$\Rightarrow T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

* دما در سیستمهای استوانه‌ای بر اساس شعاع به شکل تابع لگاریتمی تغییر می‌کند. (توزیع

دما لگاریتمی است).

A: مساحت جانبی استوانه:

$$\dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi r l) \frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{q} = \text{constant}$$

نرخ انتقال حرارت ثابت است.

* با افزایش شعاع شار حرارتی کم می‌شود.

$$\text{ثابت نیست} \rightarrow \dot{q}_r = \frac{\dot{q}}{A} \text{ : شار حرارتی}$$

* با افزایش شعاع، گرادیان دمایی کم می‌شود.

$$\uparrow r \frac{dT}{dr} = \text{constant}$$

$$r \text{ افزایش} \Rightarrow \frac{dT}{dr} \text{ (کاهش)}$$

برای حل معادله توزیع دما دو ثابت داریم پس نیاز r دو شرط مرزی داریم:

$$B.C: \begin{cases} T = T_1 \Rightarrow C_1 \ln r_i + C_2 \\ T = T_2 \Rightarrow C_1 \ln r_o + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_o}{r_i}}, C_2 = \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r_o$$

$$\text{توزیع دما} \Rightarrow T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r + T_2 - \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r_o =$$

$$= T_2 + \frac{T_2 - T_1}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = -k(2\pi l) \frac{T_2 - T_1}{r \left[\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \right]} = \frac{T_1 - T_2}{2\pi k l \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)}$$

روش دوم: استفاده از قانون فوریه:

$$\text{راه دوم: } \dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi l) \frac{dT}{dr}$$

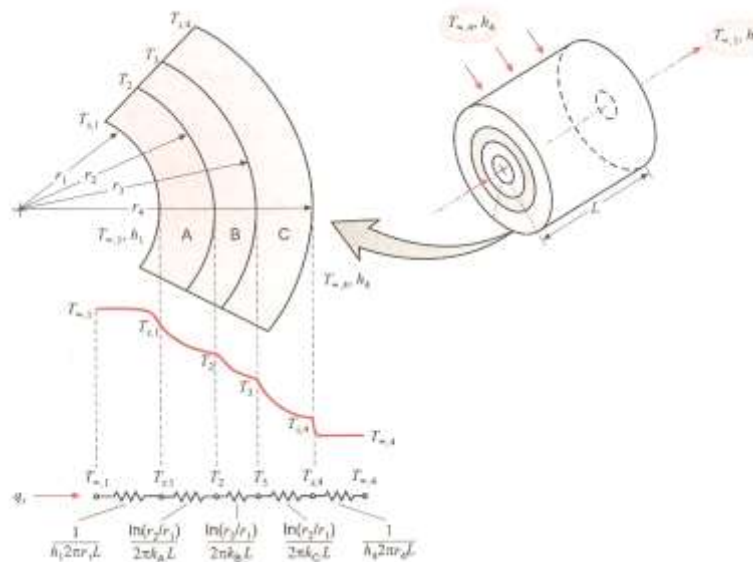
$$\int_{r_i}^{r_o} \dot{q}_r \frac{dr}{r} = \int_{T_1}^{T_2} -2k\pi l dT \Rightarrow \dot{q}_r \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) = 2k\pi l (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{2k\pi l (T_1 - T_2)}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)}$$

$$R_{i,cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kl} \text{ (For cylinder)}$$

* بررسی مقاومت حرارتی در سیستم استوانه‌ای: (∞_i, ∞_o)

Radiation = C فرضی



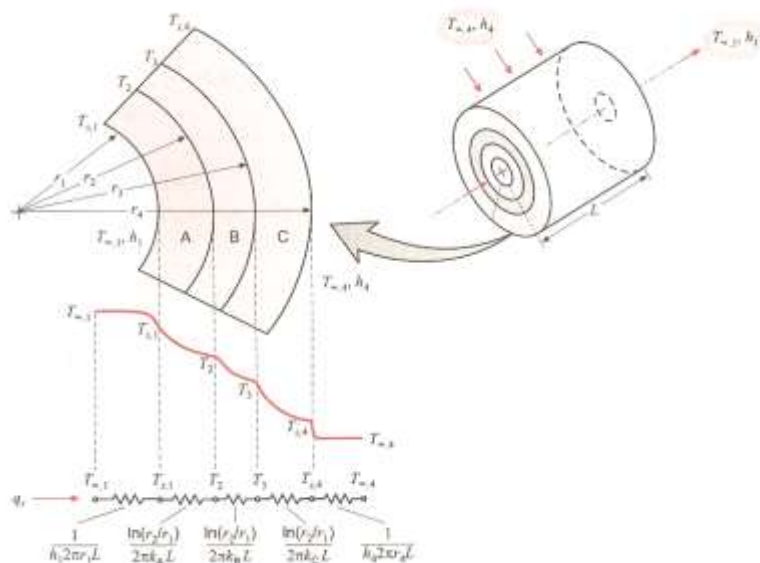
توزیع دما برای دیواره مرکب استوانه‌ای

$$R_1 = R_{Conv} = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i (2\pi r_1 l)}$$

$$R_2 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kl} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (2\pi r_o l)}$$

$$R_3 = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (2\pi r_o l)}$$

استوانه‌های چندلایه: **multy layers Cylinder**



توزیع دما برای دیواره مرکب استوانه‌ای

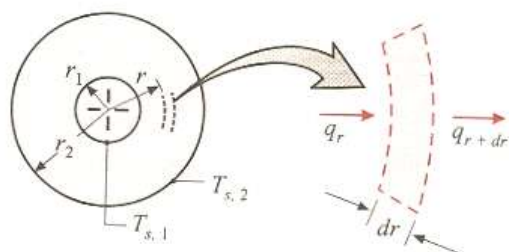
$$R_1 = R_{conv} = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i (2\pi r_1 l)}, \quad R_2 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_1 l}$$

$$R_3 = R_{cond} = \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2\pi k_2 l}, \quad R_4 = R_{cond} = \frac{\ln(r_4 / r_3)}{2\pi k_3 l}$$

$$R_5 = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (2\pi r_4 l)}$$

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \Rightarrow \dot{q}_r = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty o}}{R_{total}} = \frac{T_1 - T_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \dots$$

Heat conduction in sphere:



* معادله انتقال حرارت در کره:

دو روش وجود دارد: فقط روش دوم را بررسی می‌کنیم

Assumption: one-Dimensional , steady state, no Heat Generation

فرضیات:

بدون منبع حرارتی

شرایط پایدار

یک بعدی

* در راستای θ نمی‌توانیم حرارت انتقال داشته باشیم، انتقال حرارت در جهت شعاع داریم . (اگر دور بزنیم کاهش و یا افزایش دما وجود ندارد).
* خطوط شعاع ثابت ، خطوط دما ثابت نیز هستند

* انتقال حرارت فقط در راستای شعاع اتفاق می‌افتد. در نتیجه هر سطح شعاع ثابت یک

سطح دما ثابت است.

First law of thermo:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_Q - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} |_{c.v} \Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_{r+dr}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_r + \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} dr \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow \dot{q}_r = \text{constant}$$

$$\uparrow q_r'' = \frac{\dot{q}_r}{A} \downarrow$$

* نرخ انتقال حرارت در سه نوع دویواره (تخت- استوانه‌ای- کره‌ای) ثابت است.

* شار حرارتی فقط در دیوار تخت ثابت است ولی در دیواره استوانه‌ای و کروی ثابت نیست و با افزایش شعاع کم می‌شود.

* در دیواره کروی گرادیان دمایی $\left(\frac{dT}{dr}\right)$ با افزایش شعاع کم می‌شود.

$$\text{حله از قانون فوریه: } \dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} = cte$$

$$\int_{r_i}^{r_o} \dot{q}_r \frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} -4\pi k dT \Rightarrow \dot{q}_r \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right) = 4\pi k (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)}$$

$$\Rightarrow R_{t,cond} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4\pi k} \text{ for sphere} \quad T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

توزیع دما:

سوال:

* شار حرارتی در استوانه کمتر است یا در کروی؟

* کاهش شیب در استوانه بیشتر است یا در کره؟

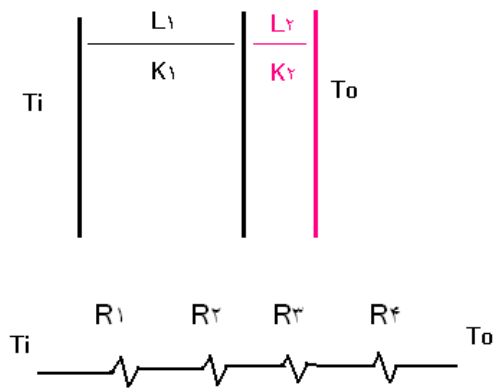
شعاع بحرانی عایق: Critical Radius of insulation

$$R_1 = \frac{L_1}{K_{1A}}, R_2 = \frac{l_2}{k_2A}, R_3 = \frac{1}{h_oA}$$

$$\downarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_\infty}{R_1 + R_2 + R_3} \uparrow$$

شعاع بحرانی عایق :

(۱) صفحه تخت:



$$R_{conv} = \frac{1}{h_i A_i} = cte$$

$$R_1 = \frac{L_1}{K_1 A} = cte$$

$$R_{ins} = \frac{L_2}{K_{ins} A}$$

$$\downarrow q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} \uparrow$$

$$R_{conv} = \frac{1}{h_o A} = cte$$

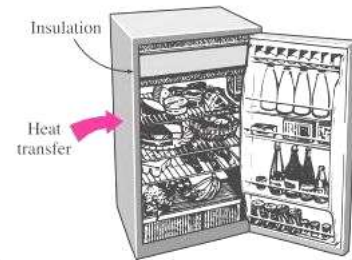
$$\uparrow R_{tot} = R_{conv} + R_1 + R_{ins} + R_{conv}$$

* در صفحه تخت باید عایق را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مجموع مقاومتها زیاد شود

هرچه طول (ضخامت) عایق را بیشتر انتخاب کنیم انتقال حرارت به همان نسبت کم

می‌شود چون مقاومت کل افزایش پیدا می‌کنیم (کلیهٔ مقادیر ثابت‌اند فقط می‌توانیم l عایق را تغییر دهیم).

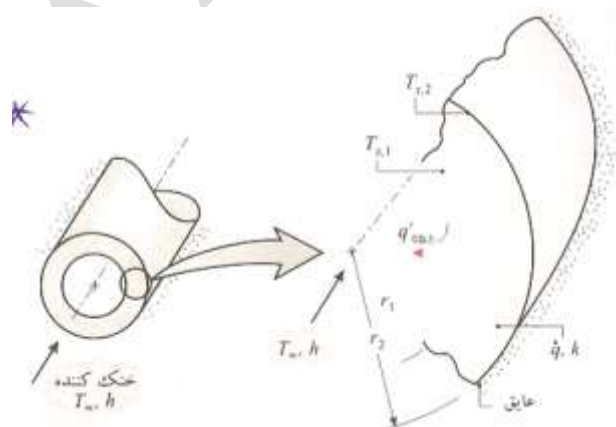
* در صفحهٔ تخت شعاع بحرانی عایق نداریم و هر چه ما را بیشتر کنیم مقاومت بیشتر می‌شود.



* در دیواره‌ی تخت هر چه ضخامت عایق را بیشتر کنیم نرخ انتقال حرارت کمتر می‌شود.

* در دیواره‌ی تخت با افزایش عایق مقاومت هدایتی افزایش پیدا می‌کند ولی مقاومت جابه‌جایی کاهش پیدا می‌کند.

* دیوارهٔ استوانه‌ای:

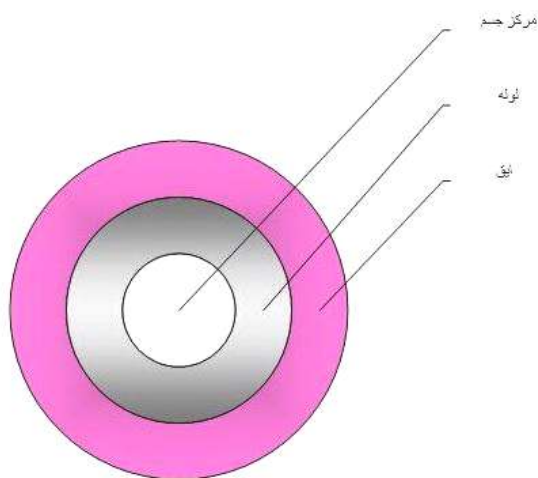
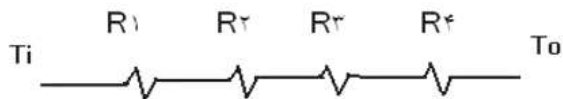


$$\uparrow R_1 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_{in} l}, \quad \downarrow R_2 = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o l} \uparrow$$

$$\dot{q}_r = \frac{T_1 - T_{\infty o}}{R_1 + R_2}$$

* گاهی اوقات کاهش مقاومت جابه جایی به افزایش مقاومت هدایتی غلبه می کند که در این حالت نه تنها افزایش عایق باعث کاهش انتقال حرارت نمی شود بلکه به افزایش انتقال حرارت نیز می انجامد.

* با افزایش عایق مقاومت جابه جایی کم ولی مقاومت رسانش زیاد می شود. در نتیجه باید شعاع بهینه را بیابیم:
می خواهیم شعاع بهینه را پیدا کنیم:



$$R_1 = \frac{1}{hiA} = cte$$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k} = Cte$$

$$\uparrow R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_{ins}}$$

$$RL_1 \downarrow = \frac{1}{hoA_o} \uparrow$$

پیدا کردن شعاع بحرانی:

شعاعی است که در آن شعاع max انتقال حرارت را داریم.

قبل از rcr اضافه کردن عایق باعث افزایش انتقال حرارت و بعد از rcr اضافه کردن عایق سبب کاهش انتقال حرارت می شود.

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} = R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{1}{h_i 2\pi k} + \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_i}\right)}{2\pi k_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_1}\right)}{2\pi k_{ins}} + \frac{1}{h_o 2\pi r_o}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r_o} = 0$$

$$\frac{\partial R_{tot}}{\partial r_o} = 0$$

$$\frac{\partial R_{tot}}{\partial r_o} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi k_{ins} r_o} - \frac{1}{2h_o \pi r_o^2} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi k_{ins} r_o} = \frac{1}{2h_o \pi r_o^2} \rightarrow r_{cr} = \frac{k_{ins}}{h}$$

برای پیدا کردن min و max بودن یکبار دیگر مشتق می گیریم

$$\frac{\partial^2 R_{tot}}{\partial r_o} = -\frac{1}{2\pi k_{ins} r_o^2} + \frac{1}{h_o \pi r_o^3} =$$

$$\frac{-1}{2\pi k_{ins} \left(\frac{k_{ins}}{h_o}\right)^2} + \frac{1}{h_o \pi \left(\frac{k_{ins}}{h_o}\right)^3} = \frac{-1}{2\pi k_{ins} \frac{L}{h_o^2}} + \frac{1}{\pi k_{ins} L \frac{h_o^2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi k_{ins} \frac{L}{h_o^2}} > 0 \quad \frac{\partial^2 R_{tot}}{\partial r_o^2} > 0$$

$$R_t = R_1 + R_2$$

$$\text{باید } \frac{dq_r}{dr_o} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dR_{tot}}{dr_o} = 0$$

$$\Rightarrow R_{tot} = R_1 + R_2, \frac{dR_t}{dr_o} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi k_{in} l} + \frac{-1}{h_o 2\pi r_o^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_o 2\pi} \left[\frac{1}{k_{in}} - \frac{1}{h_o r_o} \right] = 0$$

$$\frac{1}{k_{in}} = \frac{1}{h_o r_o} = 0 \Rightarrow r_{ocr} = \frac{k_{in}}{h_o}$$

$$\frac{d^2 R_t}{dr_o^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\pi k_{in} l r_o^2} + \frac{2}{h_o 2\pi r_o^3} = -\frac{1}{2\pi} \frac{k_{in}^2}{h_o^2} + \frac{2}{2\pi} \frac{k_{in}^2}{h_o^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{k_{in}^2}{h_o^2}$$

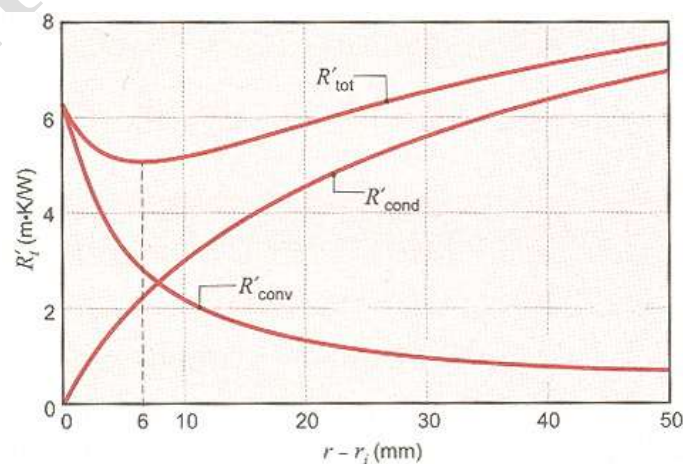
شعاع بحرانی کره:

$$r_{ocr} = \frac{2k}{h_o}$$

* پس شعاع بحرانی شعاعی است که در آن مقاومت می نیمم در نتیجه انتقال حرارت

ماکزیمم است.

* شعاع بحرانی عایق برای مسائلی اهمیت دارد که قطر لوله کم باشد. و h_o کم باشد.



* با توجه به نمودار برای افزودن عایق فقط باید در ناحیه مشخص شده اقدام کرد. اگر در

$r > r_{o,cr}$ عایق اضافه کنیم. انتقال حرارت به اندازه همان \dot{q}_{base} است.

سوال:

* شعاع بحرانی برای لوله های با شعاع کم دارای اهمیت است یا شعاع های زیاد؟

در لوله های با شعاع زیاد ماهواره بعد از rCF هستیم پس با اضافه کردن عایق انتقال

حرارت کم می شود ولی شعاع بحرانی برای لوله های با شعاع کم دارای اهمیت است .

* rCF در محیط هایی که h زیاد است با اهمیت است یا h کم است ؟ در جاهایی که

h کم است باید دقت کنیم و دارای اهمیت است چون ضریب انتقال حرارت کم است و

دلیل بالا

	دیوار تخت	استوانه	کروی
معادله :	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
توزیع دما :	$T = C_1 X + C_2$ خطی	$T = C_1 \ln r + C_2$ لگاریتمی	$T = \frac{C_1}{r} + C_2$ $\frac{1}{r}$
مقاومت حرارتی :	$\frac{L}{KA}$	$\frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k}$	$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}$ $4\pi k$
شعاع بحرانی :	-	$\frac{Kins}{h}$	$\frac{2Kins}{h}$

مسئله: لوله‌ای به طول 50 m داریم دمای هوای اطراف لوله 15 C است. قطر لوله 10 m

است. در داخل لوله نیز بخار آب جریان دارد. دمای سطح دیرون لوله 150 C است. ضریب

انتقال حرارت جابه‌جایی بیرون لوله $20\text{ W/m}^2\cdot\text{C}$ است.

الف) نرخ انتقال حرارت را بدون عایق بدست آورید.

ب) شعاع بحرانی عایق را در صورتی که از عایقی با $k=0.035$ استفاده شود. را به دست آورید.

ج) اگر شعاع بیرونی با عایق برابر 69 mm باشد چه مقدار از اتلاف انرژی صرفه‌جویی می‌شود.

$$\dot{q}_{bare} = h_o A (T_s - T_\infty) = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{C}} \times (\pi D l) (T_s - T_\infty)$$

$$\dot{q}_{bare} = 20 \times (\pi \times 0.1 \times 50) (150 - 15) = 42412$$

$$r_{cr} = \frac{k_{in}}{h_o} = \frac{0.035}{20} \times 1000 = 1.75\text{ mm}$$

* در این مسئله شعاع بحرانی عایق از شعاع بیرون بدون عایق لوله کمتر است پس در این

مسئله شعاع بحرانی مطرح نیست یعنی همیشه اضافه کردن عایق انتقال حرارت را کم

می‌کند.

$$r_{cr} = \frac{k_{in}}{h_o} : \text{for cylinder}$$

$$r_{cr} = \frac{2k_{in}}{h_o} : \text{for sphere}$$

$$R_1 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_{in} l},$$

$$R_2 = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o l}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{T_s - T_{\infty 0}}{R_1 + R_2} = \frac{150 - 15}{\frac{\ln\left(\frac{692}{50}\right)}{2\pi \times 0.035 \times 20}} + \frac{1}{20 \times 2\pi \times (692 \times 10^3) \times 50}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_2 = 4241 \text{ W}, \dot{q}_{bare} = 4241 \text{ W}$$

* ده برابر با اضافه کردن عایق از افت حرارت صرفه جویی کرده ایم.

* تغییرات h با توجه به انواع انتقال حرارت جابه جایی:

Type of convection	h
<i>Free convection of</i> $\begin{cases} \text{gases} \\ \text{liquids} \end{cases}$	$\begin{cases} 2-25 \\ 10-100 \end{cases}$
<i>Forced convection</i> $\begin{cases} \text{gases} \\ \text{liquids} \end{cases}$	$\begin{cases} 25-250 \\ 50-2000 \end{cases}$
<i>Boiling & condensation</i>	2500-10000

Heat conduction with internal Heat (Energy) Generation

انتقال حرارت با وجود منبع حرارتی:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Electical Energy} \\ \text{chemical Energy} \Rightarrow \text{Heat Thermal energy} \\ \text{nacler Energy} \end{array} \right.$

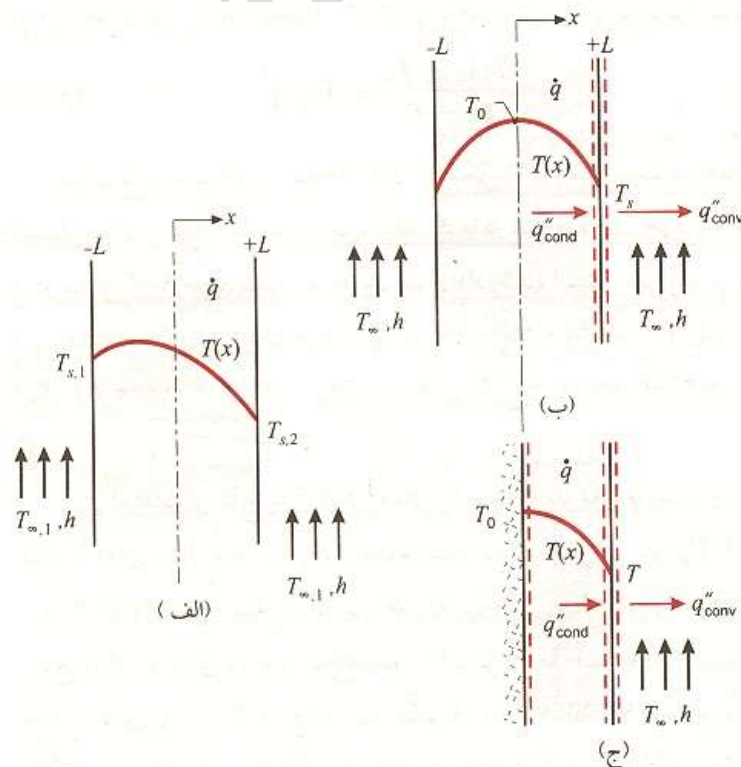
$$\dot{E}_g = RI^2 \quad \dot{q}_G = \frac{\dot{E}_G}{V}$$

\dot{q}_G : Rate of Heat Generation per unit volume نرخ انتقال حرارت بر واحد حجم

1) Plane wall : دیوار مسطح

* Assumption: one- Dimensional, steady state, uniform heat generation

* اگر شرایط دو طرف دیوار برابر باشد آنگاه، $T_{s1} = T_{s2}$ در نتیجه توزیع دما بدین صورت



در جایی که مماس بر منحنی افقی است پس در $x=0$ ، $c_1=0$ ، پس از معادله از نتیجه

می‌گیریم $\frac{dT}{dx}$ برابر صفر است.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k}, \dot{q} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k} \rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \text{ است سهمی که به شکل سهمی است}$$

$$B.C \begin{cases} x = -l : T = T_{s1} \Rightarrow T_{s1} = -\frac{\dot{q}l^2}{2k} - c_1l + C_2 \\ x = l : T = T_{s2} \Rightarrow T_{s2} = -\frac{\dot{q}l^2}{2k} + c_1l + C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2} + \frac{\dot{q}l^2}{2k}, \quad C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2l}$$

* مماس بر نمودار توزیع دما در $x=0$ افقی است یعنی $\frac{dT}{dx} = 0$

* بررسی دیوار با سطح ورودی آدیاباتیک:

First law of thermo:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} |_{c.v}$$

$$\Rightarrow \dot{E}_G = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}(Al) = hA(T_{s1} - T_{\infty})$$

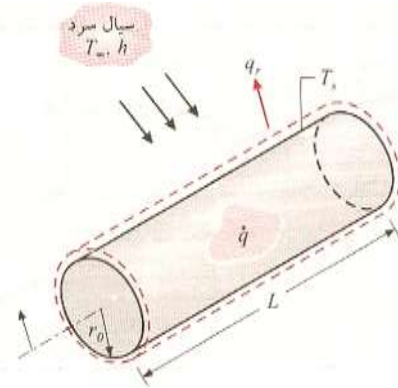
$$T_s = \frac{\dot{q}l}{h} + T_{\infty} \quad \dot{q}(2l_A) = hA(T_{s1} - T_{\infty1}) + h_2A(T_{s2} - T_{\infty2})$$

$$x=0 \Rightarrow T(0) = T_o = C_2 = T_s + \frac{\dot{q}l^2}{2k} \Rightarrow T_o - T_s = \frac{\dot{q}l^2}{2k}$$

۲) دیواره استوانه‌ای:

2. cylindrical wall:

Assumption: one-Dimensional, steady state, uniform heat generation.



رسانش در استوانه توی پر با تولید گرمای یکنواخت

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{-\dot{q}}{k}$$

$$\Rightarrow r \left(\frac{dT}{dr} \right) = \frac{-\dot{q}r^2}{2k} + C_1 \Rightarrow dT = \left(-\frac{\dot{q}r}{2k} + \frac{C_1}{r} \right) dr$$

$$T = -\frac{\dot{q}r^2}{4k} + c_1 \ln r + C_2 \quad B.C \begin{cases} r = r_o & T = T_s \\ r = 0 & \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

با توجه به تقارن مسئله

* در نتیجه توزیع دما در استوانه توپر به صورت سهمی است.

$$r = r_o \Rightarrow T_s = \frac{-\dot{q}r_o^2}{4k} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_s + \frac{\dot{q}r_o^2}{4k}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_s - \frac{\dot{q}R^2}{4k} \text{ for cylinder}$$

$$T_o - T_s = \frac{\dot{q}R^2}{6k} \quad \text{* برای دیوار کروی ثابت شود:}$$

$$\text{* first law of thermo } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v.} \Rightarrow \dot{E}_G = \dot{E}_{out}$$

$$\Rightarrow \dot{q}(\pi R^2 l) = h(2\pi R l)(T_s - T_\infty)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}R}{2h} \text{ for cylinder}$$

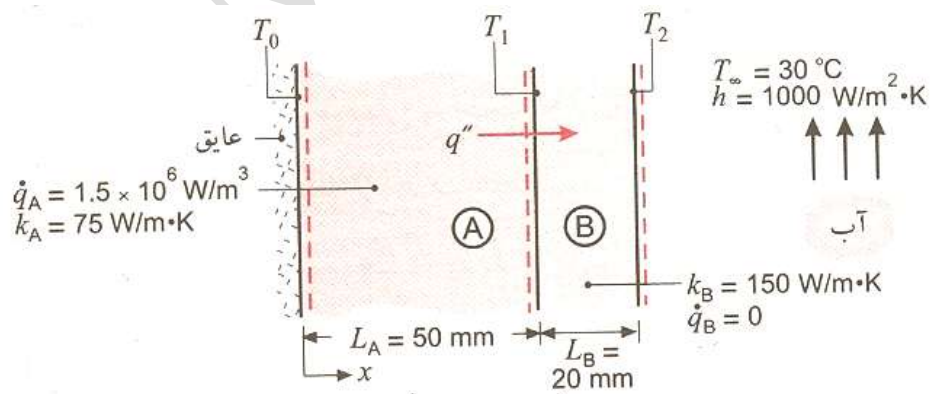
* برای معادلات در دیواره کروی

$$\text{for sphere: } \dot{q}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = h(4\pi R^2)(T_s - T_\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}R}{3h} \text{ sphere}$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}l}{h} \text{ plane wall}$$

مسئله حل شده کتاب: مسئله ص ۶۸ منبع: اینکروپرا



الف) توزیع دما را در حالت پایدار رسم کنید.

ب) T_2, T_o را نیز محاسبه کنید.

ج) شار حرارتی را براساس طول دیوار رسم کنید.

(۱) در T_o شیب مماس بر منحنی دما افقی است چون سطح عایق است.

(۲) از T_1 تا T_2 چون منبع حرارتی نداریم نمودار توزیع دما خطی است.

(۳) جایی که منبع حرارتی داریم نمی توان مدار رسم کرد چون حرارت ثابت نیست.

* سیستم دیوار B می گیریم:

$$\text{system B: } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v.}$$

$$\Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_A (l_A \cdot A) = hA(T_2 - T_\infty)$$

$$\Rightarrow 1.5 \times 10^6 (50 \times 10^3 m) = 100(T_2 - 80) \Rightarrow T_2 = 105^\circ C$$

$$T_o - T_1 = \frac{q l_A^2}{2k_A}$$

* برای به دست آوردن T_1 باید مدار به دست آوریم:

$$R_1 = R_{cond} = \frac{l_B}{k_{B.A}} = \frac{0.02}{150}, R_2 = \frac{1}{hA} = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_\infty}{R_2} \Rightarrow \frac{T_1 - 105}{\frac{0.02}{150}} = \frac{105 - 30}{\frac{1}{1000}}$$

$$\Rightarrow T_1 = 115^\circ C \quad T_o - T_1 = \frac{\dot{q}_A l_A^2}{2k_A} \Rightarrow T_o - 115 = \frac{1.5 \times 10^6 \times (0.05)^2}{2 \times 75}$$

$$\Rightarrow T_o = 140^\circ C$$

حل مسئله:

بخار آب فوق گرم با دمای $575C$ در لوله‌های فولادی ($k = 35W/m.K$) با قطر داخلی $300mm$ و با ضخامت دیواره $30mm$ از بویلر تا توربین یک نیروگاه الکتریکی حمل می‌شود. برای کاهش دفع گرما به اطراف و برای حفظ دمای قابل لمس در سطح خارجی، لایه‌ای از عایق سیلیکات کلسیم ($k = 0.1W/m.K$) برای لوله‌ها به کار برده می‌شود. اگر عایق در ورق نازکی از آلومینیوم با گسیلمندی $\epsilon = 0.2$ پوشیده شود، کیفیت آن کاهش می‌یابد. دمای هوا و دیواره نیروگاه $27C$ است.

(الف) با فرض این که دمای سطح داخلی لوله فولادی با دمای بخار آب برابر است و ضریب جابه‌جایی خارجی برای ورق آلومینیومی $6W/m^2.k$ است، مینیمم ضخامت عایق کاری مورد نیاز برای این که دما از $50C$ بیش‌تر نشود چقدر است؟
در این حالت، دفع گرما از یک متر طول لوله چقدر است؟

$$r_i = \frac{300}{2} = 150$$

$$t_T = 30mm$$

$$k_1 = 35W/m.k$$

$$k_2 = 0.1W/m.k$$

$$T_i = T_1$$

$$T_3 = 50$$

$$t_2 = ?, \dot{q}_2 = ?$$

$$r_1 = r_i + t_1 = 150 + 30$$

$$R_1 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_i}\right)}{2\pi k_1 l} = \frac{\ln\left(\frac{180}{150}\right)}{2\pi \times 35}$$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_1}\right)}{2\pi k_2 l} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{180}\right)}{2\pi \times 0.1}$$

$$R_3 = R_{conv} = \frac{1}{h_o A} = \frac{1}{6 \times 2\pi r_o l}$$

$$R_4 = R_{Rad} = \frac{1}{h_r A} \quad h_{rad} = \sigma_\epsilon (T_3^2 + T_o^2)(T_3 + T_o)$$

$$h_{rad} = 567 \times 10^8 (323^2 + 300^2)(323 + 300)$$

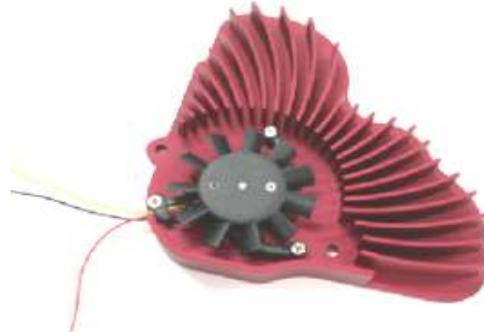
$$\frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2} = \frac{T_3 - T_o}{R_3 + R_4} \Rightarrow r_o =$$

$$r_o = r_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = \quad \Rightarrow \dot{q} = ?$$

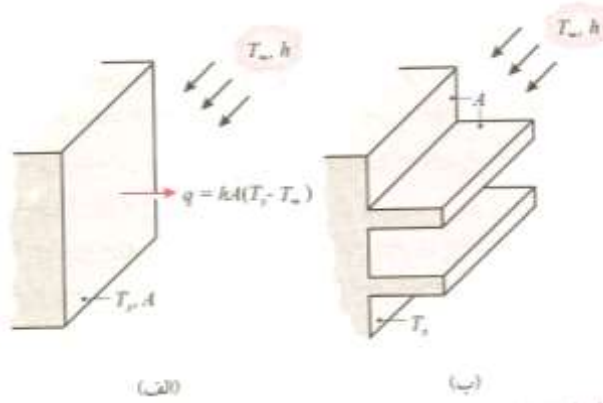
Ali Masoudniya

Heat Transfer from Extended surface: (fin)

انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته:



خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)



استفاده از پره‌ها برای تقویت انتقال گرما از دیوار مسطح (الف) سطح بی‌پره. (ب) سطح پره‌دار

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

$$\text{if } T_s = \text{cte}$$

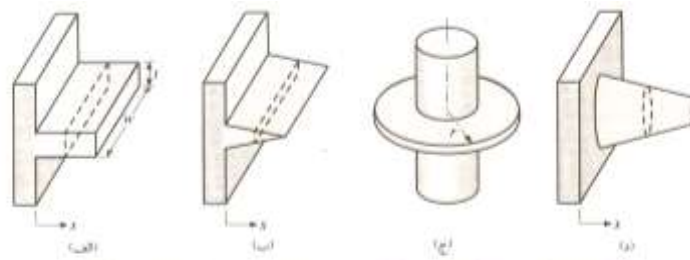
راههای افزایش انتقال حرارت:

(۱) یکی از راههای افزایش انتقال حرارت افزایش h است.

(۲) کاهش T_∞ ، که معمولاً غیر عملی است.

(۳) یکی دیگر از راههای افزایش انتقال حرارت افزایش سطح مقطع (A) می‌باشد.

* هدف اصلی استفاده از fin افزایش انتقال حرارت است



وضعیت‌های پره (الف) پره مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت (ب) پره مستقیم با مقطع عرضی غیریکنواخت (ج) پره مخروطی (د) پره سوزنی

Straight fin of uniform cross sectioned area

fin با سطح مقطع یکنواخت

Straight fin of nonuniform cross sectioned area

* انتقال حرارت فقط در جهت طول فین انجام می‌شود و به صورت رسانش می‌باشد.



شکل کاربردهای متنوع پرها

Fin Analysis:

Assumption: steady state , one , dimensione

$k=cte$, Radiation=0

, No heat Genration $n=1$

, hisuniform from fin surface

قانون بقای انرژی: $\dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} + d\dot{q}_{conv}$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx + hdA_s(T - T_\infty), \dot{q}_x = -KA_c \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(-kA_c \frac{dT}{dx} \right) + h(T - T_\infty)dA_s = 0$$

پره یکنواخت: **Straight fin of uniform cross sectioned area:**

$$A_c = w.t, p = 2(w + t)$$

$$-kA_c \frac{d^2T}{dx^2} + hpd_x(T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hp}{kA_c}(T - T_\infty) = 0$$

معادله خطی، مرتبه ۲، همگن با ضرایب ثابت $\theta = T - T_\infty$: فرض $\frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\theta = 0$

$$m = \left(\frac{hf}{KA_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$معادله مشخصه: $t^2 - m^2 = 0 \Rightarrow t = m \Rightarrow \theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$$

* بررسی شرایط مختلف مرزی

$$B.C.1 \begin{cases} x=0 & T = T_{base} \Rightarrow \theta_b = T_b - T_\infty \\ 0 \end{cases}$$

$$B.C.2 \begin{cases} A: \text{very long fin} : T_{fin tip} = T_\infty \\ B: \text{Insulated fin tip} : x=l \quad q_{x=l} = 0 = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} \\ C: \text{convection from fin tip} \quad -kA_c \frac{dT}{dx} = hA_c(T_l - T_\infty) \end{cases}$$

$$A: \text{Very long fin} : B.C \begin{cases} x=0 & T = T_b \Rightarrow \theta = \theta_b \\ x=l & T = T_\infty \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \theta_b = C_1 + C_2 \\ x=l \Rightarrow 0 = \lim_{L \rightarrow \infty} (C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \theta_b \end{cases}$$

$$1 \rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \qquad \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx}$$

$$q_{fin} = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_b$$

$$q_{fin} = q_b = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow$$

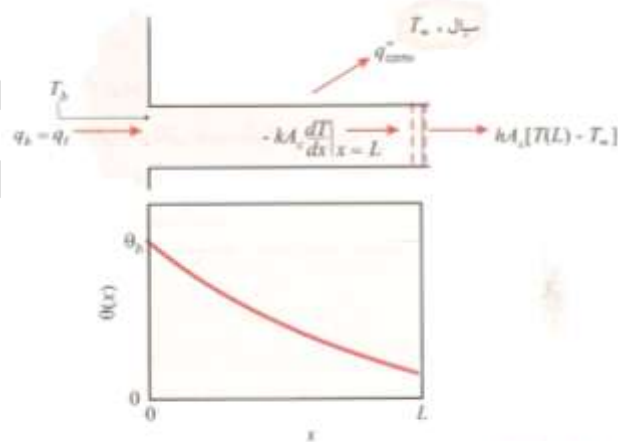
$$q_{fin} = -kA_c \theta_b (-me^{-mx})_{x=0}$$

$$q_f = kA_c \left(\frac{hp}{KA_c} \right)^{\frac{1}{2}} \theta_b$$

$$q_f = (hp kA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b = M = q_{base}$$

$$B \begin{cases} x=0 & T = T_b \Rightarrow \theta = \theta_b \\ x=l & -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_b = C_1 + C_2 \\ m(C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}) = 0 \end{cases}$$



رسانش و جابه‌جایی در پره با مقطع عرضی یکنواخت

$$C_1 + C_2 e^{-2ml}$$

$$\theta_b = C_2(1 + e^{-2ml}) \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_b}{1 + e^{-2ml}}$$

$$C_1 = \frac{\theta_b \cdot e^{-2ml}}{1 + e^{-2ml}} = \frac{\theta_b}{1 + e^{2ml}} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{2ml}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2ml}}$$

$$\text{Review: } \begin{cases} \sinh ml = \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{2} \\ \cosh ml = \frac{e^{ml} + e^{-ml}}{2} = \frac{e^{2ml} + 1}{2e^{ml}} \end{cases}$$

$$2 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{e^{mx}}{2e^{ml}}}{\frac{1 + e^{ml}}{2e^{ml}}} + \frac{\frac{e^{-mx}}{2e^{-ml}}}{\frac{1 + e^{-2ml}}{2e^{-ml}}} = \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{2 \cosh ml}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(l-x)}{\cosh ml}$$

نرخ انتقال حرارت:

$$\dot{q}_{fin} = \dot{q}_{base} = -KA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \Rightarrow \dot{q}_f = -KA_c \frac{\theta_b}{\cosh ml} (-m \sinh m(l-x)) \Big|_{x=0}$$

$$\dot{q}_f = (hpkA_c)^{1/2} \theta_b \tanh ml$$

$$\dot{q}_f = M \tanh ml$$

$$C: \begin{cases} x=0 & T = T_b \Rightarrow \theta = \theta_b \\ x=l & -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=l} = h\theta(l) \end{cases}$$

$$\theta_b = C_1 + C_2$$

$$-k(C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml}) = h(C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml})$$

* بدین ترتیب C_2, C_1 را به دست آورده و با یافتن توزیع دما نرخ انتقال حرارت را حساب می‌کنیم.

عملکرد و کارایی فین: fin Effectiveness

(۱) میزان انتقال حرارت با فین به زمانی که انتقال حرارت بدون فین انجام می‌شود را عملکرد و کارایی فین می‌گویند.

$$\varepsilon_f = \frac{q_{fin}}{q_{nofin}}$$

(۲) زمانی از فین استفاده می‌کنیم که کارایی ۲ باشد.

(۳) همیشه فین‌ها باعث انتقال حرارت نمی‌شوند.

For very long fin with straight fin : $q_f = M = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}}\theta_b$

$$\varepsilon_f = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}}\theta_b}{hA_c\theta_b} \Rightarrow \varepsilon_f = \left(\frac{kp}{hA_c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۴) باید برای فین جنسی باید انتخاب کنیم که دارای k با واتری باشند مانند آلومینیوم و مس ولی چون آلومینیوم سبکتر و ارزان‌تر است اغلب از آلومینیوم استفاده می‌کنند.

(۵) کارایی فین با h نسبت عکس دارد.

$$\varepsilon_f \quad \alpha \quad k$$

$$\varepsilon_f \quad \alpha \quad \frac{P}{A_c}$$

جایی که h کم باشد کارایی فین زیاد است (جاهایی که با گازها سرو کار داریم)

* اگر سطحی بین دو سیال با h مختلف داشته باشیم فین را باید در قسمتی بگذاریم

که h سیال کمتر است (مانند رادیاتور اتومبیل)

فین را در قسمت با سیال h_1 قرار می‌دهیم.

$$h_2 > h_0$$

راندمان: (بازده): fin Efficiency

انتقال حرارت ماکزیمم زمانی است که دمای سطح دمای base باشد.

$$h_f = \frac{q_{fin}}{q_{max}}$$

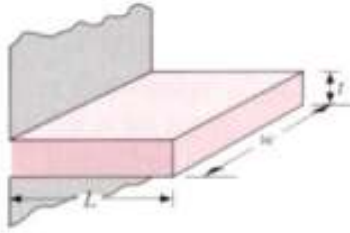
$$\begin{cases} lf \rightarrow 0 & \eta_f \rightarrow 1 \\ l \rightarrow \infty & \eta_f \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$q_{max} = hA_f(T_b - T_\infty) = hA_f\theta_b$$

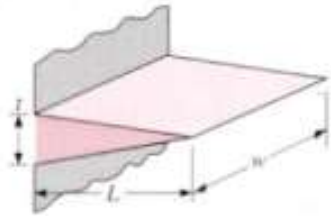
برای فین با طول زیاد: for very long fin

$$q_{fin} = M = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}}\theta_b \quad w \gg t$$

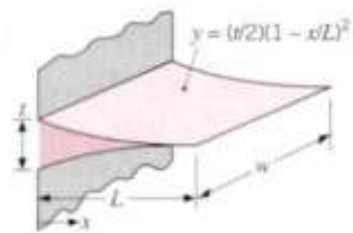
$$\eta_{fin} = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}}\theta_b}{hpl\theta_b} = \frac{1}{l} \left(\frac{kA_c}{hp} \right)^{\frac{1}{2}}$$



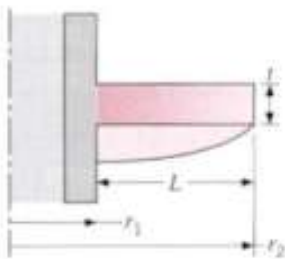
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

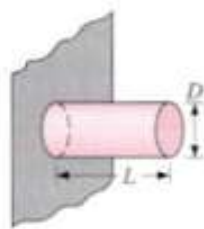


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

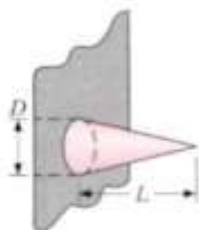


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_2^2 - r_1^2)}$$



$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

شکل راندمان پره‌ها با اشکال مختلف [۹]

* For industrial fin Tip:

برای فین با انتهای آدیاباتیک

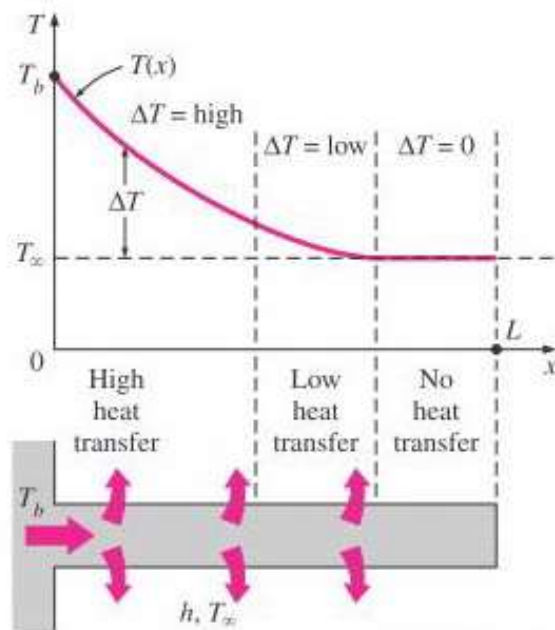
$$q_{fin} = M \tanh ml = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b \cdot \tanh ml$$

$$q_{max} = hA_f \theta_b, A_f = pl$$

$$\eta_{fin} = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b \cdot \tanh ml}{(hpl\theta_b)}$$

$$\eta_{fin} = \frac{\tanh ml}{\left(\frac{hp}{kA_c}\right)^{\frac{1}{2}} l} \Rightarrow \eta_{fin} = \frac{\tanh ml}{ml} \text{ straight of uniform cross sectionl area}$$

L_c : Corrected fin length طول تصحیح شده



همان مساحت تصحیح $A_p =$ شده است با طول تصحیح شد در $A_p = L_c \cdot t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rectangular fin} \\ A_c = wt \\ p = 2(w+t) \\ \text{if } t \ll w \Rightarrow p = 2w \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_c}{P} = \frac{t}{2} \Rightarrow L_c = L + t/2$$

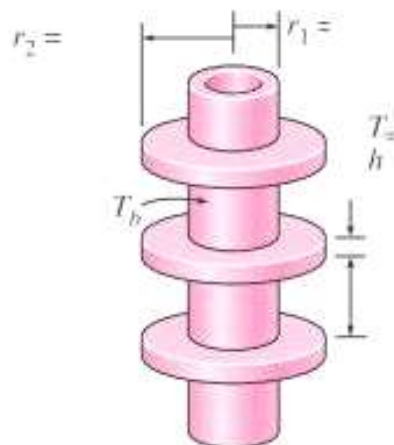
طول تصحیح شده برای دایره:

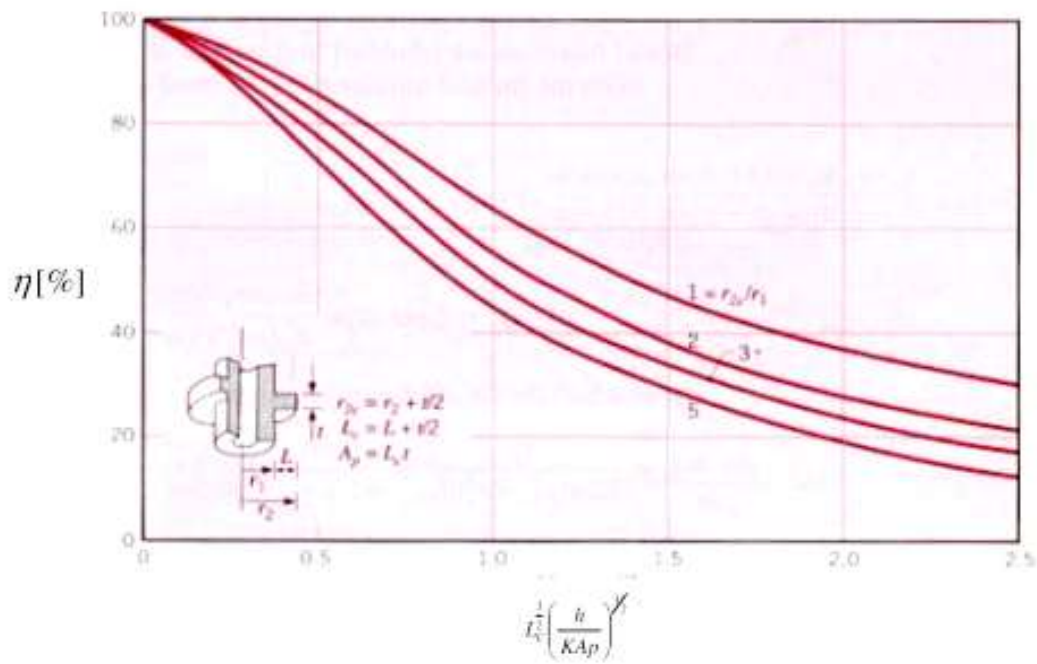
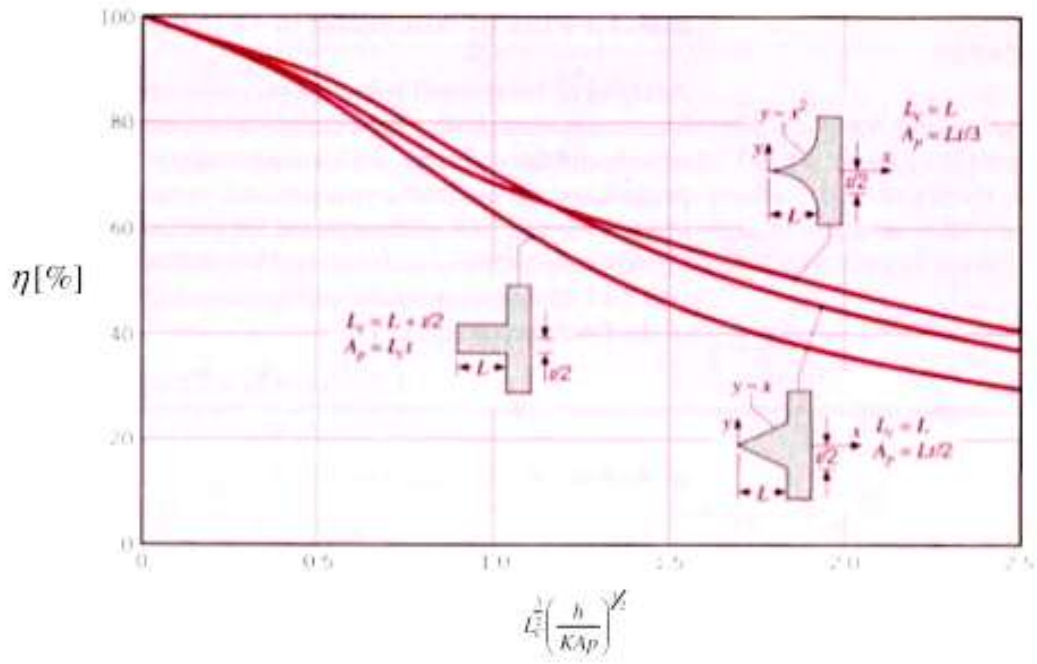
$$\left. \begin{array}{l} A_c = \frac{\pi}{4} D^2 \\ p = \pi D \end{array} \right\} \Rightarrow L_c = L + \frac{\pi/4 D^2}{\pi D} \Rightarrow l_c = l + \frac{D}{4}$$

مسئله کتاب: پره‌های Al شعاعی با مقطع مستطیلی به یک لوله با قطر خارجی ۵۰ mm و دمای سطح 200C سلسیوس وصل شده‌اند. ضخامت پره‌ها 4mm و بلندی آنها 15mm سیستم در هوای محیط با دمای 20c و ضریب جابجایی $40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ قرار دارند الف) بازده پره چقدر است؟

ب) اگر در هر متر طول لوله ۱۲۵ پره نصب شود نرخ گرمای هدر رفته از واحد طول لوله چقدر است؟

در شکل ۳-۱۹ راندمان فین‌ها را داده





$$\begin{cases} r_1 = \frac{50}{2} = 25 \text{ mm} \\ T_b = 200 \\ r_2 = r_1 + 15 = 40 \text{ mm} \end{cases}$$

$$T_{\infty} = 20c$$

$$h = 40 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$r_{2c} = r_2 + t/2 = 40 + \frac{4}{2} = 42 \text{ mm}$$

$$L_c = L + t/2 = 15 + \frac{4}{2} = 17 \text{ mm}$$

$$A_p = L_c t = 17 \times 4 = 68 \text{ mm}$$

از جدول الف-۱ k آلومینیوم در دمای 110 که $\frac{200-20}{2} = 110$ که ۱۱۰ درجه را به اضافه ۲۷۳

می‌کنیم می‌شود ۳۸۳K که باید با میان پایی بین ۳۰۰ و ۴۰۰ که چون ۳۸۳K به ۴۰۰

نزدیک لیست همان را تقریبی می‌گیریم:

$$K_{AL@400} = 240 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\Rightarrow L_e^{\frac{3}{2}} \left(\frac{h}{kA_p} \right)^{\frac{1}{2}} = (17^{10^3} m)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{40 \frac{W}{m^2 \cdot K}}{240 \frac{W}{m \cdot K} \times 68 \times 10^6 m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.11$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{42}{25} = 1.68$$

حالا از محور افقی 0.11 را پیدا می‌کنیم و بطور عمودی آن را بالا می‌بریم تا خط بین ۱ و ۲

را که 1.68 است و نزدیک به ۲ است قطع کند و پس بطور افقی ادامه می‌دهیم از همان

خط تا η را قطع کند و راندمان را می‌خوانیم. در نتیجه بعد از این کارها

$$\eta = 0.96 \text{ (الف)}$$

$$\text{ب) } \eta_f = \frac{q_{fin}}{q_{max}} \Rightarrow q_{fin} = \eta_{fin} = \eta_f \cdot q_{max}$$

دمای کل فین با دمای پایه فین برابر شود q_{min} اتفاق می‌افتد.

$$A_f = N[\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)] \times 2 = 0.98 m^2$$

طول جانبی اصلاح شده است که یا از مساحت جانبی دایره استفاده می‌شود یا از طول اصلاح شده یعنی r_2 استفاده می‌کنیم که ضخامت هم داخل هست.

$$q_{total} = q_{fin} + q_1$$

$$q_1 = hA_1\theta_b$$

(مساحت لوله منهای مساحت فین‌هایی که به لوله چسبیده‌اند) $(2\pi r_1 t) - 12(2\pi r_1 t)$

$$A_1 = 2\pi r_1(1 - 12(0.004)) = 2\pi \times 0.025 \times 0.5$$

$$A_1 = 0.078 \text{ m}^2$$

$$q_1 = hA_1\theta_b = 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \times 0.078 \text{ m}^2 \times (200 - 20) \text{ K} \Rightarrow q_1 = 56.16 \text{ W}$$

$$q_{max} = hA_f\theta_b = 40 \times 0.98(200 - 20) = 705$$

$$q_{fin} = \eta_f \cdot q_{max} = 0.96 \times 705 = 677.36$$

$$q_{total} = q_{fin} + q_1 = 677.36 + 56.16 = 733.56 \text{ W}$$

$$\varepsilon_f = ? = \frac{q_{fin}}{q_{no\ fin}}$$

* تعیین طول فین:

$$L = \frac{2}{3} m$$

$$m = \left[\frac{hp}{kA_c} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Chapter 4

معادله حرارتی حالت دو بعدی:

فرضیات : بدون منبع حرارتی - حالت پایدار - یکبعدی : فرضیات

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$$

معادله دیفرانسل با مشتقات جزئی (pde) ، مرتبه دو ، خطی ، همگن

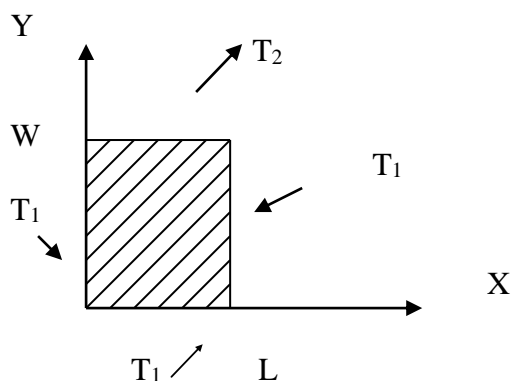
هدف از حل : بدست آوردن توزیع دما (متغیر وابسته).

حل با استفاده از روش جدا سازی متغیرها.

(توزیع دما) : شار حرارتی از قانون فوریه

$$q'' = q''_{x^{il}} + q''_{y^{ij}} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial X} li + \frac{\partial T}{\partial Y} ij \right)$$

حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها .



شرایط مرزی همگن نیست ونمی توانیم از آن استفاده کنیم و باید شرایط مرزی را همگن کنیم تا بتوانیم از آنها استفاده کنیم. با یک تغییر متغیر (شرایط مرزی را همگن می کنیم).

$$B.S \left[\begin{array}{l} T(O,Y)=T_1 \\ T(L,Y)=T_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T(X,O)=T_1 \\ T(X,W)=T_2 \end{array}$$

$$\theta = \frac{T-T_1}{T_2-T_1}$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(O,Y)=0 \\ \theta(L,Y)=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \theta(X,O)=0 \\ \theta(X,W)=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = Cte = \begin{cases} 0 \\ +\lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{cases}$$

$$\frac{x''}{x} = -\lambda^2 \Rightarrow x'' + \lambda^2 x = 0 \quad t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm i\lambda$$

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$B.C \left[\begin{array}{l} \theta(0,y)=0 \Rightarrow X(0)=0=C_1 \\ \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(L)=0=C_2 \sin \lambda l \Rightarrow \sin \lambda l=0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l} \end{array} \right.$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{y''}{y} = -\lambda^2 \Rightarrow y'' = -\lambda^2 y = 0$$

$$t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \lambda$$

$$Y(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

$$\theta(x, 0) = 0 = X(x)y(0) = 0$$

$$0 = C_3 + C_4 = C_4 = -C_3$$

$$y(y) = 2C_3 \left(\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} \right) = 2C_3 \sinh \lambda y$$

$$Y(y) = 2C_3 \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right)$$

$$\theta = X(x)Y(y) \rightarrow \theta = b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \rightarrow \theta(x, w) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$\frac{x''}{x} = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow X(0) = C_1 X + C_2$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(0, Y) = 0 = X(0)Y(Y) \Rightarrow X(0) = 0 = C_2 \\ \theta(L, Y) = 0 = X(L)Y(Y) \Rightarrow X(L) = 0 = C_1 L \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$t^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \lambda$$

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(0, y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \theta(L, Y) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} = 0 \end{array} \right.$$

$$C_2 = (-e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda L} & e^{-\lambda L} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$x(X) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x''}{x} = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow x = C_2$$

$$B.C \left\{ \begin{array}{l} \theta(0, Y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \theta(L, Y) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \Rightarrow C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$T^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \lambda$$

$$X(X) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

$$\begin{cases} \theta(0,y)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \\ \theta(l,y)=0 \Rightarrow X(L) \Rightarrow C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow C_2(-e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda L} & e^{-\lambda L} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$X(X) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow T = \pm i\lambda$$

$$x(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$B.C \begin{cases} \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(0)=0=C_1=0 \\ \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(L)=0=C_2 \sin \pi L \Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ \sin \pi L \end{cases} \end{cases}$$

Ali Masoudhniya

$$\Rightarrow \lambda L = h\pi X(x)Y(y)$$

$$\lambda = \frac{h\pi}{l} \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x(x)C2SIN \frac{h\pi}{l} x \rightarrow h = 1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{y''}{y} = -\lambda^2 \Rightarrow y'' - \lambda^2 y = 0$$

$$t^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow T = \pm \lambda$$

$$Y(Y) = C3e^{\lambda y} + C4e^{-\lambda y}$$

$$\theta(x, 0) = 0 = X(x)Y(0) \Rightarrow y(0) = 0$$

$$0 = C3 + C4 \Rightarrow C4 = -C3$$

$$Y(y) = 2C3 \left(\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} \right) = 2C3SINH\lambda y$$

$$= 2C3SINH\left(\frac{n\pi}{l} y\right)$$

$$\theta = X(x)Y(y) \Rightarrow \theta = b \sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\Rightarrow \theta(x, y) = \sum b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\theta(x, w) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$F(x) = 1$$

$$B_N = b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right)$$

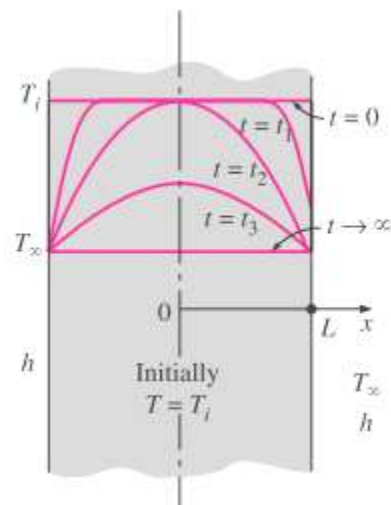
$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l 1 \times \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \frac{-1}{\frac{n\pi}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l$$

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \Rightarrow b_n = \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right)}$$

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

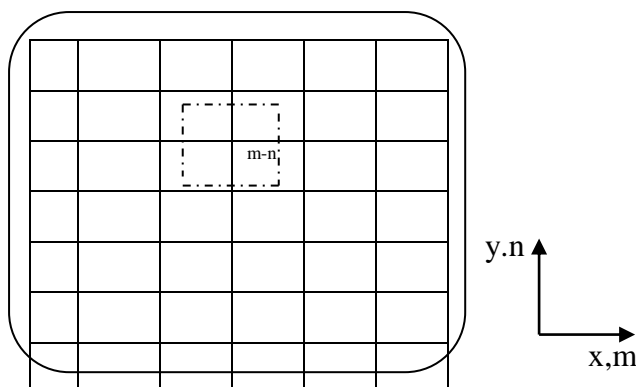
این مثال حل تحلیلی ندارند و با روش عددی حل میشوند.



روش حل معادله دو بعدی (روش عددی برای حل معادله هدایت):

روش اختلاف محدود Finite Difference:

در این روش دمای اطراف ناحیه مورد نظر را ثابت در نظر میگیریم و هر چه تعداد نواحی بیشتر باشد دقت معادله نیز بالاتر خواهد بود ولی در عوض معادلات بیشتری بدست می آید.



روش اول:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta X}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 X} \right)_{m,n} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{m+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta X}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 X} \right)_{m,n} = \frac{\frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta X} - \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta X}}{\Delta X} \xrightarrow{\text{فاكتور } \Delta X}$$
$$= \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta X^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{m,n} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m,n+\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{m,n-\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{if } \Delta X = \Delta y$$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$

دمای ۱ گره برابر با دمای گره های اطراف تقسیم بر ۴.

روش دوم:

روش موازنه انرژی (حالت خاص حجم محدود)

فرضیات:

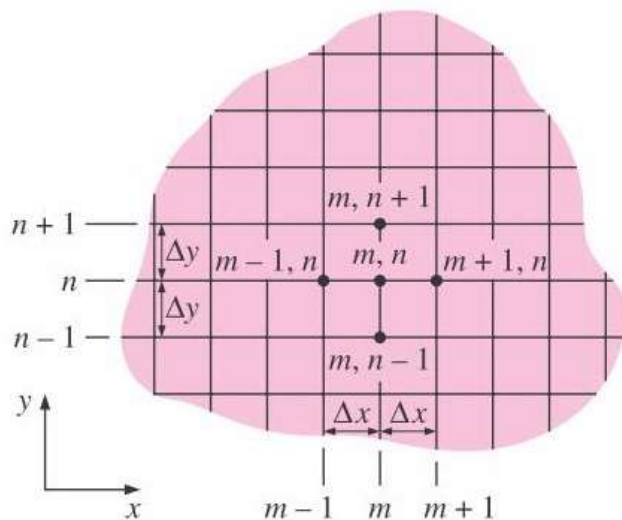
* با استفاده از قانون اول ترمودینامیک است.

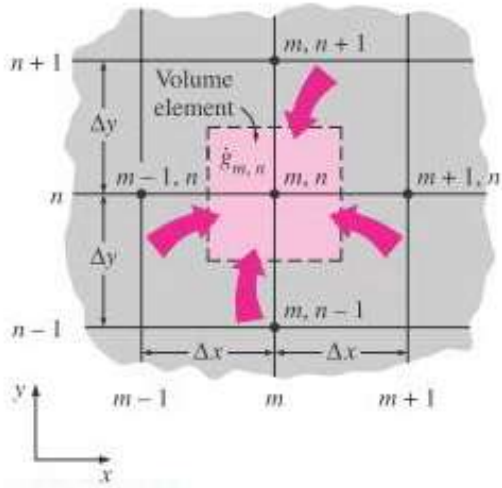
* در این روش منبع حرارتی هم میتوان در نظر گرفت.

* در این روش فرض نداشتن انرژی خروجی فرض درستی است.

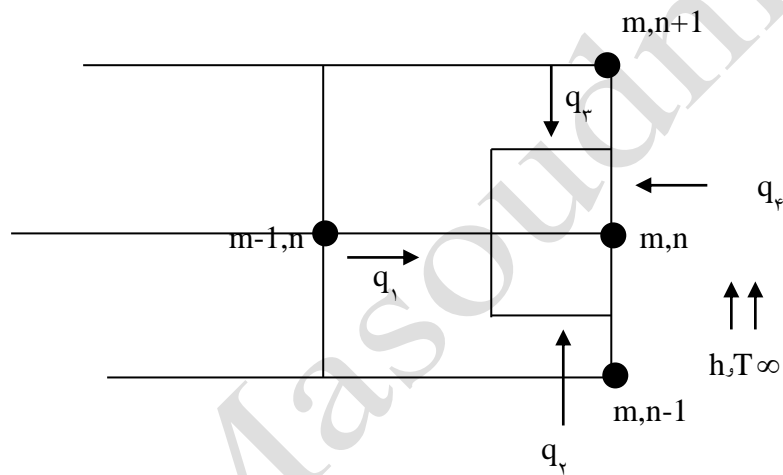
* در این روش المان بعد سوم را صفر در نظر میگیریم و تغییرات X را برابر تغییرات y.

* k را ثابت در نظر میگیریم.





مثال:



$$q_1 = K(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

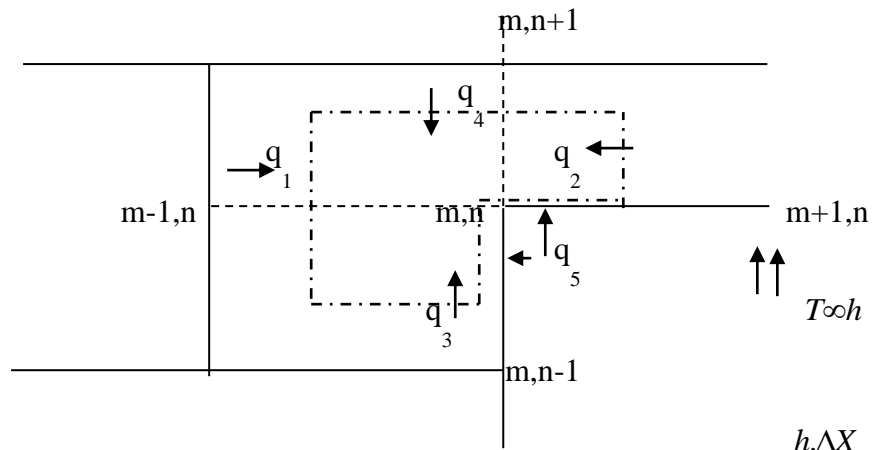
$$q_2 = K\left(\frac{\Delta X}{2}\right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_3 = K\left(\frac{\Delta X}{2}\right) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_4 = h\Delta y(T_\infty - T_{m,n})$$

$$T_{m-1,n} + \frac{1}{2}(T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{h\Delta x}{K}T_\infty + \frac{q_G(\Delta X)}{2K} - T_{m,n}\left(2 - \frac{h\Delta x}{K}\right) = 0$$

مثال:



$$Bi = \frac{h \cdot \Delta X}{K}$$

$$q_1 = k \Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$q_2 = k \Delta X \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

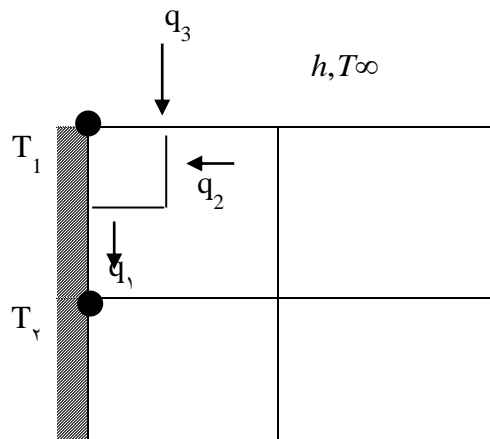
$$q_2 = K \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$q_3 = K \frac{\Delta X}{2} \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_5 = h \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) (T_\infty - T_{m,n}) + h \frac{\Delta y}{2} (T_\infty - T_{m,n})$$

$$T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2} (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) - T_{m,n} (3 + Bi) + Bi \cdot T_\infty = 0$$

مثال:



$$h = 200$$

$$k = 4 \frac{w}{m, k}$$

$$T_2 = 70^\circ C$$

$$T_3 = 70^\circ C$$

$$T_\infty = 40^\circ C$$

$$\Delta X = \Delta y = 1cm$$

$$T_1 = ?$$

$$q_1 = K \left(\frac{\Delta X}{2} \right) \left(\frac{T_2 - T_1}{\Delta y} \right)$$

$$q_2 = K \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \left(\frac{T_3 - T_1}{\Delta X} \right)$$

$$q_3 = h \left(\frac{\Delta X}{2} \times 1 \right) (T_\infty - T_1)$$

$$T_2 + T_3 - T_1 \left(2 + \frac{h\Delta X}{K} \right) + \frac{h\Delta X}{K} T_\infty$$

$$Bi = \frac{h\Delta X}{K} = \frac{200 \times 0.01}{4} = 0.5$$

$$70 + 70 - T_1(2 + 0.5) + 0.5 \times 40 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{160}{2.5} = 64^\circ C$$

Ali Masoudniya

Chapter 5

فصل پنجم: رسانش گذرا

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Assumption : One Dimensional- Steady state – No heat generation

: PDE Equation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

Initial Condition $T(x,0) = f(x)$

Boundary condition :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0,t) \\ T(L,t)=0 \end{array} \right.$$

$$T(x,t) = X_n T(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\lambda^2 \\ X''T = \frac{1}{\alpha} XT' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'}{T} = 0 \\ -\lambda^2 \end{array} \right.$$

جهت حل مسله از روش حرارتی فشرده استفاده می شود .
فرض اول :تغییر دما به صورت یکنواخت انجام می شود .

۱. باید جسم کوچک فرض شود .

۲. K جسم زیاد باشد.

۳. h سیال حاوی جسم کمتر باشد .

$$\downarrow B_i = \frac{(\downarrow h)(L \downarrow)}{(K \uparrow)}$$

قانون اول بقای انرژی :

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$-\dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$hA(T - T_\infty) = \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \rho v = m$$

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{hA}{\rho v C_p} \theta \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^t -\frac{hA}{\rho v C_p} dt$$

$$\theta = T - T_\infty = \theta_i$$

$$t = 0 \quad T = T_i$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hA}{\rho v C_p} t$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho v C_p}\right)t} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho v C_p}\right)t}$$

$$B_i = \frac{hL_c}{k} = \frac{h(V/A)}{k} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-B_i f_0}$$

$$-B_i f_0 = \frac{h}{\rho L_c C_p} t = \frac{hL_c}{k} \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-B_i \cdot F_0)$$

مثال:

ساچمه های فولادی ضدزنگ ها به طور یکنواخت تا دمای $850^\circ C$ گرم شده با فرو

بردن در روغن $40^\circ C$ درجه خنک می شد قطر ساچمه ها $20mm$ و ضریب جابه جایی

1000 اگر سرمایش تا زمانی ادامه یابد تا دمای سطح ساچمه به $100^\circ C$ برسد مدت

زمان را حساب کنید.

$$T_{\infty} = 40^{\circ}C$$

$$h = 1000 \frac{W}{m^2 K}$$

$$T_1 = 100^{\circ}C$$

جدول ١

$l, cp \rightarrow$

مربوط به جسم جامد

$$\begin{cases} l = 7900 \frac{kg}{m^3} \\ CC_p = 477 \frac{J}{kg.k} \end{cases}$$

جدول الف-١

$$\frac{100 - 40}{850 - 40} = e^{-\frac{1000W}{m^2.k} \times T}{7900 \frac{kg}{m^3} \times 0.01m \times 477 \frac{J}{kg.k}}$$

$$S = \frac{A}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{60}{810}\right) = -0.079t \Rightarrow T = 32.95 \text{Sec}$$

Ali Masoudhanya

Chapter 6: Introduction of convection (fundamental of convection)

$$dq'' = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow q = hA_s(T_s - T_\infty)$$

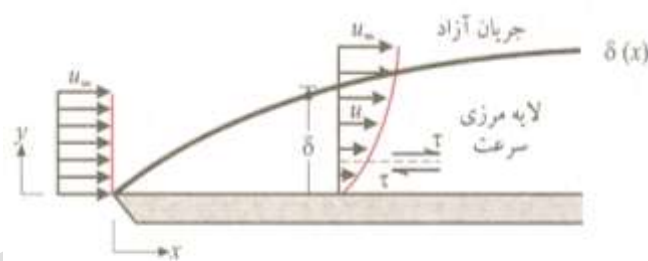
* **h** به پارامترهای زیر بستگی دارد (خواص سیال)

$$h \begin{cases} \text{fluid properties (k, cp, } \mu, \rho) \\ \text{surface Geometry} \end{cases}$$

$$q = \int h(T_s - T_\infty) dA_s = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h dA_s = hA_s(T_s - T_\infty)$$

$$h = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad h = \frac{1}{l} \int_0^l h dx$$

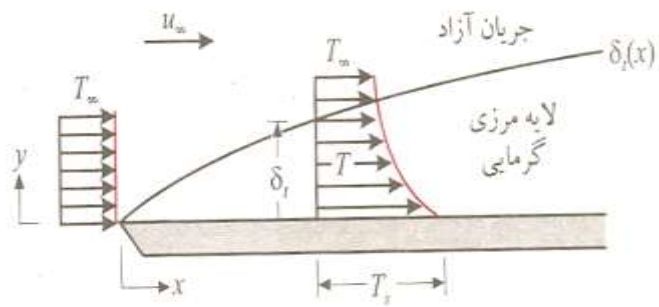
لایه مرزی سرعت: (the velocity Boundary Layer)



تشکیل لایه مرزی سرعت روی صفحه تخت

* لایه نازکی اطراف سطح موردنظر که تحت تأثیر اصطکاک سطح است را لایه مرزی می‌گویند. در واقع قسمتی که سرعت در آن از سرعت سطح آزاد کمتر است. جریان در لایه مرزی، جریان ویسکوز و خارج آن جریان غیرویسکوز است.

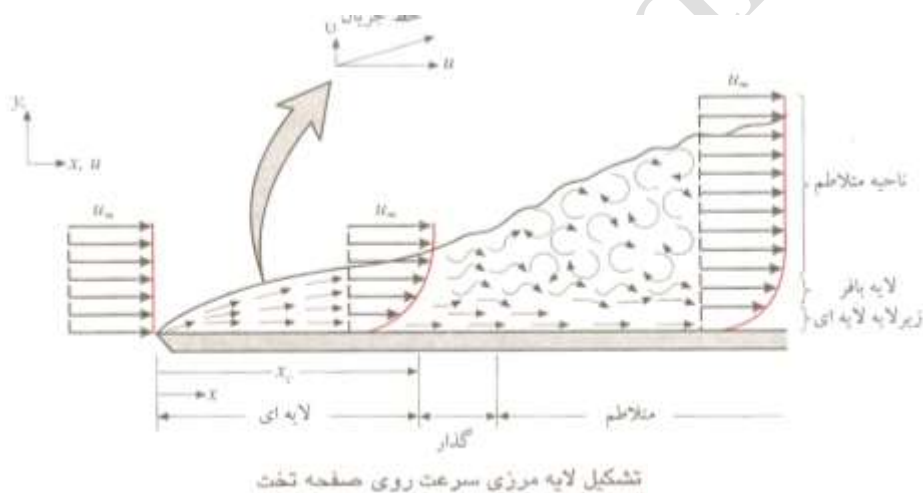
لایه مرزی گرمایی: **The thermal Boundary Layer**



تشکیل لایه مرزی گرمایی روی صفحه تخت تک‌دما

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_2} = 0.99$$

* رشد لایه مرزی در قسمت turbulent بیشتر است.



تشکیل لایه مرزی سرعت روی صفحه تخت



Laminar and turbulent flow regimes of cigarette smoke.

$$Re = \frac{\rho u_{\infty} x}{\mu} = \frac{U_{\infty} x}{\nu}$$

$$Re_{crit} = 5 \times 10^5 \text{ (for flat plate)}$$

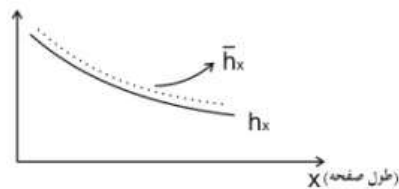
* رینولدز بحرانی به زبری سطح خیلی وابسته است. هر چه زبری سطح بیشتر باشد رینولدز بحرانی کمتر است. یعنی جریان سریعتر بحرانی می شود.

* پارامتری که در لایه مرزی سرعت برای ما مهم است ضریب اصطکاک است چون با داشتن ضریب اصطکاک می توانیم برشی را حساب کنیم .

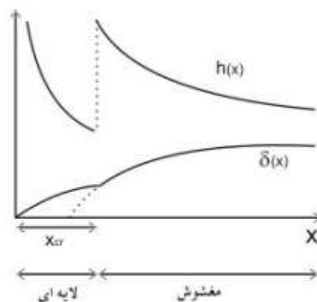
و با داشتن تنش برشی نیروی مقاومت سیال اصطکاک را بدست می آوریم .

$$CF = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

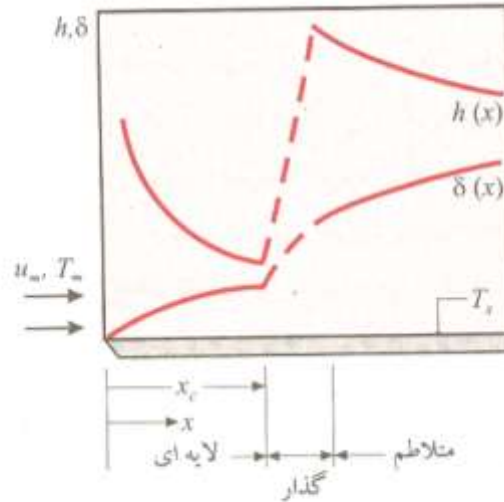
* در لایه مرزی حرارت پارامتر کلیدی ضریب حرارت است (h)



- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت جابجایی در طول یک صفحه:



* نمودار تغییرات h با افزایش x



۵- تغییر ضخامت δ لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال گرمای جابه جایی محلی h برای جریان روی صفحه تخت تک دما

لایه اول: $q_{cond}'' = q_{conve}''$

$$\Rightarrow -k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_s - T_\infty)$$

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

(۱) در ابتدای سطح ضخامت لایه مرزی صفر است در نتیجه $\frac{\partial T}{\partial y}$ اندازه بزرگی دارد ولی با

پیش رفتن در جهت ضخامت لایه مرزی بیشتر می شود در نتیجه تغییرات $\frac{\partial T}{\partial y}$ کمتر است و

ناگهانی نیست.

(۲) در ناحیه Turbulent چون تغییرات بسیار مغشوش است در نتیجه انتقال حرارت بیشتر

است. به علت انتقال مولکول ها از لایه های پایین به بالا (همیشه مقدار h ناحیه Turbulent

از مقدار h ناحیه laminar بیشتر است.

۳) در مورد ناحیه Transition بحث نمی‌شود.

۴) برای جریان روی سطح همیشه لایه مرزی سرعت وجود دارد ولی در یک جریان روی سطح لایه مرزی گرمایی زمانی وجود دارد که بین سطح و سیال اختلاف دما داشته باشیم.

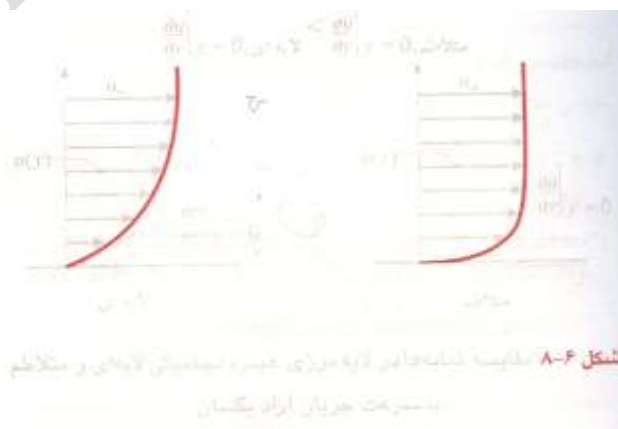
$$S \uparrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial Y} \downarrow \\ PS \downarrow \rightarrow CF \downarrow \end{array} \right.$$

$$St \uparrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \downarrow \\ h \downarrow \rightarrow q'' \downarrow \end{array} \right.$$

5. در قسمت توربولنت کاهش CF آرامتر از قسمت لمینار است .

6. ضریب اصطکاک در قسمت Turbolent بیشتر از ضریب اصطکاک در قسمت laminar است .

* تغییرات سرعت در قسمت خطی (laminar):



$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

* مقدار $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$ برای لایه laminar کوچکتر از لایه turbulent است در نتیجه چون این

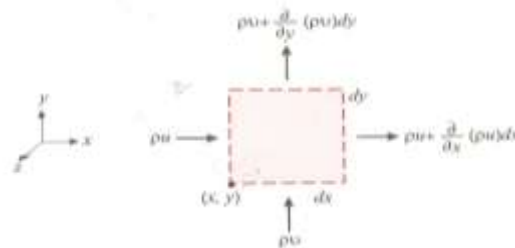
شیب بیشتر است. تنش برش turbulent بیشتر از laminar است.

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \tau_{turbulent} \right) \tau_{laminar}$$

* چون کنش برش در سطح آشفته بیشتر است پس C_f ناحیه آشفته از ناحیه خطی:

معادلات لایه مرزی The Boundary Layer Equations

معادله بقای جرم (The conservation of mass Equation)



حجم کنترل دیفرانسیلی $(dx, dy, 1)$ برای پایستاری جرم در جریان دوبعدی سیال ویسکوز

$$\sum \dot{m}_i - \sum \dot{m}_e = \Delta \dot{m}_{c.v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pu(dy \times 1) + pv(dx \times 1) = \left[pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} dx \right] (dy \times 1) +$$

$$+ \left[pv + \frac{\partial(pv)}{\partial y} dy \right] (dx \times 1) \Rightarrow \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} = 0 \text{ معادله پیوستگی در دو بعد}$$

$$\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = 0 \text{ معادله پیوستگی در سه بعد}$$

Unsteady:

$$\Delta \dot{m}_{c.v} = \frac{\partial(p d_x d_y d_z)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} \text{ معادله پیوستگی برای حالت ناپایدار}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{P\vec{V}}) = \text{Div}(p\vec{v}) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p\vec{v} = pui + pvj + pwk$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

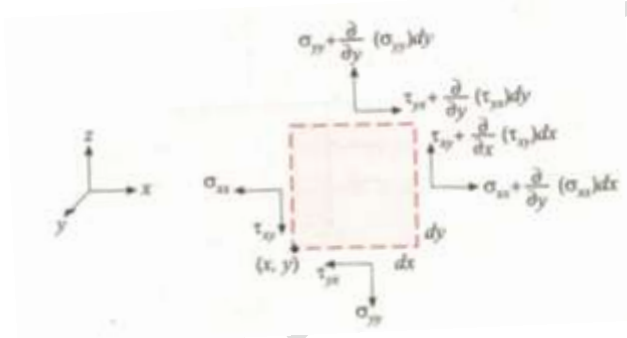
If: $p = \rho e$ (incompressible fluid):

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر

** برای سیال تراکم ناپذیر دیورژانس سرعت برابر صفر است.

Conservation of momentum Equation: (قانون دوم نیوتن): معادله بقای مومنتوم



- Assumption:
- 1) دو بعدی (two dimensional)
 - 2) تراکم (incompressible)
 - 3) شرایط پایدار (steady - aets)
 - 4) خواص سیال ثابت (consteact properties)

$$Q_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\delta_m = P(dx \cdot dy \cdot dz)$$

$$\sum F_x = \max \Rightarrow p(dy \times 1) - \left[p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] (dy \times 1) -$$

$$-\tau(dx \times 1) + \left[\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right] (dx \times 1) + \underbrace{\times(dx dy dz)}_{\text{نیروی حجمی}} = p d_x dy$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + X = p \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{p} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} + X \right)$$

$$x=0 \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{x-direction momentum Equation}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \quad y=0 \quad \text{x-direction}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

* ترم نیروی حجمی فقط در سیالات که سرعت بالاست مانند صورت مدنظر گرفته می‌شوند.

$$B.C \begin{cases} y=0 & u(x,0)=0, v(x,0)=0 \\ y \rightarrow \infty & u(x,\infty)=U_\infty, v(x,\infty)=0 \\ x=0 & u(0,y)=U_\infty, v(0,y)=0 \end{cases} \quad \text{خارج لایه مرزی}$$

$$U \gg v \quad \frac{\partial y}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$$

(۱) در خارج لایه مرزی \mathbf{v} صفر می‌باشد و در مرز لایه‌ورزی سرعت صفر است یعنی \mathbf{u}, \mathbf{v}

صفراند.

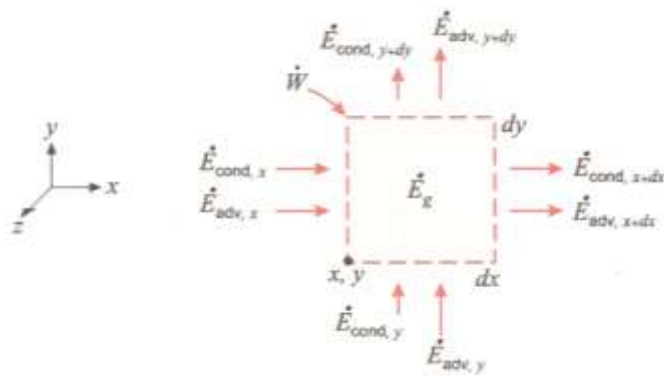
(۲) جریان تراکم ناپذیر به جریان می‌گویند که سرعت آن کمتر از 0.3 سرعت صورت باشد.

$$\text{for flat plate } \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ معادلهٔ مومنتوم برای صفر است}$$

3. Conservation of Energy Equation: for laminar flow

- Assumption :
1. two Dimensional
 2. steady state
 3. in compressible fluid
 4. constant properties



* انرژی از یک سیستم به شکل با محیط خود مبادله می‌شود: کار، حرارت، جرم

$$\dot{E}_{in, Heat, x} = \dot{Q}_x$$

$$\dot{E}_{out, Heat, x} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \Rightarrow (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, x} = \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = \frac{\partial \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} dy \right)}{\partial x} dx$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, y} = \frac{\partial \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} dx \right)}{\partial y} dy = -k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, x} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy$$

$$\dot{E}_{in, mass, x} = \rho \dot{e}_{stream} u dy$$

$$e_{strem} = utpo + ke + pe = h = CpT$$

$$\dot{E}_{in, mass, x} = pe_{strem} u dy + \frac{\partial(pudyCpT)}{\partial x} dx$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, x} = \frac{-\partial(uT)}{\partial x} Cp dx dy = -pC_p \left(u \frac{dT}{dx} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, y} = -pC_p \left(v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, (x,y)} = -pC_p dx dy \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \text{ معادله پیوستگی (تراکم ناپذیر)}$$

$$\text{قانون اول ترمو: } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} |_{c.v}$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{mass} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat} = 0$$

$$-pC_p dx dy \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] + k dx dy \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{pC_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Assumption: Steady , laminar, incompressible flow, with constant

Properties. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ continuity Equation (معادله پیوستگی)

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ momentum Eq.

$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ Energy Eq.

advection
conduction
viscous dissipation μQ

(۱) اگر در رابطه انرژی سرعت صفر باشد یعنی سیال ساکن باشد $u, v = 0$ در نتیجه فقط ترم رسانش در معادله باقی می ماند که بیانگر آن است که انتقال حرارت فقط ناشی از رسانش است.

For flat plate: $\left\{ y > \delta \Rightarrow v = 0, u = u_{\infty} = cte \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \right.$

(۲) در معادله انرژی از ترم $\frac{u}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ فقط در مواقعی نمی توان صرف نظر کرد که دارای سرعت صورت و یا روغن های با لزجت بالا باشیم. در این معادلات از اتلافات لزجت می توان صرف نظر کرد.

معادلات مومنتوم ساده شده $\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} : \text{for flat plate} \right) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ (negligible viscous)} \end{array} \right.$ مجهولات سرعت (v,u) دما (T)

* اگر سرعت مشخص باشد می توان تنش برشی و آنگاه نیروی اصطکاک دیواره را حساب کرد.

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow F_s = \tau_{s,A}$$

* چون خواص ثابت‌اند، معادله‌های مومنتوم و پیوستگی قابل حل می‌باشند و مؤلفه‌های سرعت به دست می‌آیند (u, v) ولی تا زمانی که میدان سرعت مشخص نشده باشد. نمی‌توان توزیع دما را به دست آورد.

* با به دست آوردن توزیع دما که از رابطه انرژی به دست می‌آید می‌توان ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) را به دست آورد.

اعداد بدون بعد:

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} \text{ (for flat plate: } V = u_{\infty} \text{)}$$

L : طول مشخصه

$$R_e = \frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}} = \frac{vl}{\nu}$$

* اگر عدد رینولدز پایین باشد به این مفهوم است که نیروهای ویسکوز بیشتر از نیروهای اینرسی هستند. رینولدز بحرانی، رینولدزی است که جریان را از آرام به آشفته تبدیل می‌کند.

* اگر Re بزرگ بود به این معنی است که نیروهای اینرسی بیشتر از نیروهای ویسکوزیته است. مثل ناحیه Turbolent

* هر چه زبری سطح بیشتر باشد، جریان سریعتر آشفته می‌شود یعنی در رینولدزهای پایین‌تری اتفاق می‌افتد.

ضریب بی بعد انتقال حرارت:

Nusselt number: (عدد ناسلت)

$$Nu = \frac{h_x \cdot x}{k_f}$$

$$k_f \text{ مربوط به سیال: } T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \text{ (fime temperature)}$$

k_f * باید در دمای τ_f خوانده شود.

عدد ناسلت: شیب بی بعد دما در سطح

3. prandtel number:
$$pr = \frac{D}{\alpha} = \frac{\mu / p}{k} = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$Pr = \frac{\text{پخش مولکولی مومنتوم}}{\text{پخش مولکولی گرمایی}} = \frac{\text{moloucular diffusivity of mo}}{\text{moloucular diffusivity of Heat}}$$

* عدد پرانتل جزء خواص سیال است چون تمام مقادیر رابطه آن از خواص سیال می باشند.
پرانتل جز خواص یک سیال است. تنها عدد بدون بعدی است که به نوع سیال بستگی دارد.
اگر $Pr < 1$ یعنی انتقال حرارت سریعتر انجام می شود. در نتیجه لایه مرزی حرارتی بزرگتر از لایه مرزی سرعت است.

عدد پرانتل برای مواد مختلف:

$$pr_{liquid\ metal} \ll 1 \quad 0.004-0.03$$

$$pr_{gass} \approx 1 \quad 0.7-1$$

$$pr_{water} > 1 \quad 1.3-17$$

$$pr_{oils} \gg 1 \quad 50-10^5$$

* $pr_{gass} \approx 1$ یعنی لایه مرزی حرارت و سرعت با یکدیگر برابرند.

* برای فلزات مایع $\delta_i > \delta$

* برای روغن ها $\delta > \delta_i$

* فلزات مایع دارای فشار بخار پایین (زود بخار می شوند) و ظرفیت گرمایی بالایی دارند ولی خوردگی ایجاد می کنند و واکنشزا هستند.

$$\text{برای جریان لایه ای: } \frac{\delta}{\delta_i} = pr^n$$

$$\begin{cases} \text{gasses : } P_r = 1 \quad \delta \approx \delta_t \\ \text{liquid metal : } P_r \ll 1 \quad \delta \ll \delta_t \\ \text{oils : } P_r \gg 1 \quad P_r \gg 1 \quad \delta \gg \delta_t \end{cases}$$

4. Peclet Number:

$$pe = Re \cdot pr$$

$$pe : Re, Pr \Rightarrow \frac{VL}{J} \cdot \frac{J}{X} \Rightarrow \frac{VL}{X}$$

5. Stanton Number: (عدد استانتون) $st = \frac{Nu}{pe}$

$$St : \frac{Nu}{Pe} = \frac{\frac{hl}{kf}}{\frac{vl}{x}} = \frac{h \frac{kf}{pcp}}{kfv} = \frac{h}{pcpv}$$

6. Colburn factor: (عدد كولبرن) $J = St \cdot pr^{\frac{2}{3}}$

7. Grashof Number: (عدد گرافشوف) $Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)l^3}{\nu^2} = \frac{\text{Buoyancy force}}{\text{viscous force}}$

8. $Ra : Gr \cdot Pr$

(Chilton-Colburn Analogy) : اصلاح شده تشابه Re

$$\frac{cf}{2} = st \cdot pr^{\frac{2}{3}}$$

$$ob \leq pr \leq bo$$

خیلی از سیالات را در بر می گیرد همیشه در صفحه تخت صادق چه در حالت laminar و چه Turbolent این تشابه برای داخل لوله ها در جریان laminar این صادق نیست . ولی برای جریان Turbolent می توانیم به کار ببریم . چون در جریان Turbolent تغییرات فشار در راستای x خیلی کم است (نداریم) ولی در جریان laminar تغییرات فشار در راستای x داریم.

تحلیل ارتباط بین مومنوم و انتقال حرارت:

Analogies between momentum and Heat transfer:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad F_f = T_s \cdot A = C_f \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

$$h, Nu = \frac{h_x \cdot x}{k_f}$$

Reynolds Analogy: For steady, incompressible, laminar flow of a fluid with constant properties (جریان آرام با خواص ثابت)

$$\text{معادله مومنوم: } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right)$$

$$\text{معادله انرژی: } u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{negligible}$$

p^*, x^* : طول و فشار بی بد می باشند.

$$p^* = \frac{P}{\rho v^2}, \quad x^* = \frac{x}{l}$$

$$C_f / 2 = st \quad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0 \quad P_r = 1 \quad (\text{flat plate})$$

chilton – Colburn Analogy:

$$\frac{C_f}{2} = st \cdot pr^{\frac{2}{3}} = j \quad 0.6 \leq pr \leq 60$$

$$st = \frac{Nu}{pe} = \frac{Nu}{Re \cdot pr} = \frac{\frac{hx}{k}}{\frac{vx}{v} \cdot \frac{v}{\alpha}} = \frac{h}{PV_{Cp}} \quad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0$$

St: عددی بی بعد براساس h می باشد.

* روابط بالا برای جریان آرام و روی صفحه تخت صادق است. ولی برای جریان آرام درون

لوله صادق نیست. $\left(\frac{\Delta p^*}{\Delta x^*} \neq 0 \right)$

Ali Masoudniya

Chapter 7

External flow: جریان خارجی

* جریان خارجی، جریان‌هایی هستند که در آنها لایه مرزی بتواند آزادانه رشد کند.

Assumption: steady, laminar, incompressible flow of fluid

With constant properties: , $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (اتلاف ویسکوزیته ناچیز)

فرضیات: جریان پایدار، لایه‌ای، تراکم ناپذیر با خواص ثابت

* استخراج معادلات:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Similarity solution: روش تشابهی

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \Psi: \text{تابع جریان}$$

$2f''' + ff'' = 0$ Blasius Equation (معادله بلازیوس)

$$\text{حل معادله} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{Re} = \frac{Vx}{\nu} = \frac{U_\infty x}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} \Rightarrow \delta \propto x^{\frac{1}{2}} \quad \text{رابطه (۱)}$$

نکات:

* در X یکسان ضخامت لایه مرزی سیال با ویسکوزیته بالاتر بیشتر است مثلاً آب و هوا ضخامت لایه مرزی آب بیشتر است. (هرچه ویسکوزیته سیال بیشتر باشد ضخامت لایه مرزی آن بیشتر است)

* رشد لایه مرزی در ناحیه laminar با \sqrt{x} متناسب است.

* هرچه سرعت زیاد شود مخرج رابطه (۱) بزرگتر می شود و ضخامت لایه مرزی کمتر می شود (در یک X مساوی)

$$\text{Turbulent: } \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{\text{Re}_x^{1/4}} \Rightarrow \delta \propto x^{4/5}$$

* رشد لایه مرزی در قسمت turbulent با $x^{4/5}$ متناسب است و از رشد لایه مرزی در ناحیه laminar بیشتر است.

For flat plate: (برای صفحه تخت)

$$\text{laminar: } \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad \text{Re}_x = \frac{\rho v x}{\mu} = \frac{v x}{\nu}$$

$$\text{Re} < 5 \times 10^5 \quad C_f = \frac{0.066}{\text{Re}_x^{1/2}} \Rightarrow \delta \propto x^{1/2}$$

From chilton – colburn analogy:

$$\frac{C_f}{2} = \text{St} \cdot \text{Pr}^{1/3} \Rightarrow \frac{0.066}{2} = \frac{\text{Re}_x^{1/2}}{\text{Re}_{x,\text{Pr}}} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_{x,\text{Pr}}} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad C_f \propto \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \text{Nu}_x = 0.332 \text{Re}_x^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} = \frac{h_x \cdot x}{k} \rightarrow h \propto \frac{1}{x^{1/2}}$$



$$0.6 \leq pr \leq 60$$

$$Nu_x = 0.56 Re_x^{1/2} \begin{cases} pr \leq 0.05 \\ pr \geq 100 \end{cases}$$

برای فلزات مایع با عدد پراپریت بسیار کوچک

$$\frac{\delta}{\delta_t} = pr^{1/3} \rightarrow \delta_t = \frac{\delta}{pr^{1/3}}$$

For flat plate & turbulent:

$$5 \times 10^4 < Re_x < 10^8$$

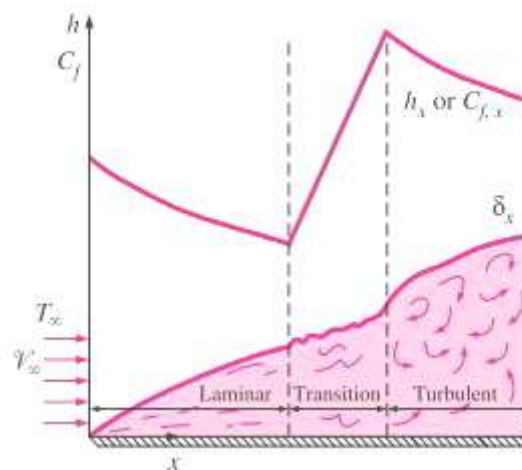
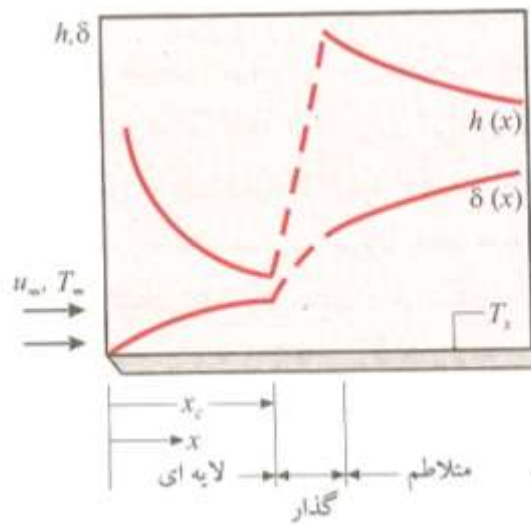
$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.38}{Re_x^{1/5}} \quad C_f = \frac{0.0592}{Re_x^{1/5}} \rightarrow C_f \propto x^{-1/5}$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} \cdot pr^{1/3} = \frac{h_x \cdot x}{k} \rightarrow h \propto x^{-1/5} \quad \delta \approx \delta_t$$

$$\delta \propto x^{4/5}$$

* رشد لایه مرزی در قسمت laminar از قسمت turbulent بیشتر است.

$la \ min \ ar = \frac{s}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5}{Re_x^{1/2}}$	$cf_x = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$	$S \propto X^{1/2}$
$Turbulent = \frac{s}{x} = \frac{0.382}{Re_x^{1/5}}$	$cf_x = \frac{0.0592}{Re_x^{1/5}}$	$S \propto X^{4/5}$



Laminar: $h = 2h_x$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} \cdot pr^{1/3} = \frac{h_x \cdot x}{k} \Rightarrow h_x = \text{answer} \Rightarrow h = \text{answer}$$

$$\overline{Nu} = 2Nu_x = 0.664 Re_x^{1/2} \cdot pr^{1/3}$$

$$\overline{C}_f = C_{fx} = 2 \left(\frac{0.664}{Re_x^{1/2}} \right) = \frac{1.328}{Re_x^{1/2}}$$

* عدد ناسلت برای حالات مختلف انتقال حرارت ($q = cte, T_s = cte$)

Laminar:

$$q'' = \text{constant} \begin{cases} Nu_x = 0.453 Re_x^{1/2} \cdot pr^{1/3} \\ \text{Turbulent : } Nu_x = 0.0308 Re_x^{4/5} \cdot pr^{1/3} \end{cases} \quad Nu_{q''=cte} > Nu_{T=cte}$$

عدد ناسلت برای حالت سطح با شار حرارت ثابت بیشتر از حالت سطح با دما ثابت است.

$$T_s = cte \begin{cases} \text{laminar : } Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} \cdot pr^{1/3} \\ \text{turbulent : } Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} \cdot pr^{1/3} \end{cases}$$

سوال:

در قسمت laminar اختلاف بیشتر است یا Turbolent؟ در laminar

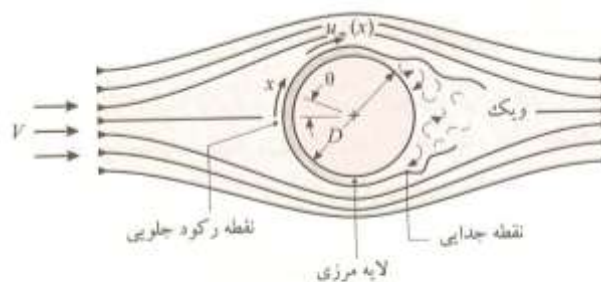
$$\text{la min ar } \frac{Nu_{q''=cte}}{Nu_{T=cte}} = \frac{0.453}{0.332} \cong 1.36 \quad \text{بیشتر } 36\%$$

$$\text{Turbolent } \frac{Nu_{q''=cte}}{Nu_{T=cte}} = \frac{0.0308}{0.0296} \approx 1.04 \quad \text{بیشتر از } 0.4\%$$

* در جریان laminar ضریب انتقال حرارت در شار ثابت 36% بیشتر از دما ثابت است.

و در جریان tubulet ضریب انتقال حرارت در شار ثابت 0.04% بیشتر از دما ثابت است.

* بررسی حرکت جریان روی لوله استوانه‌ای:

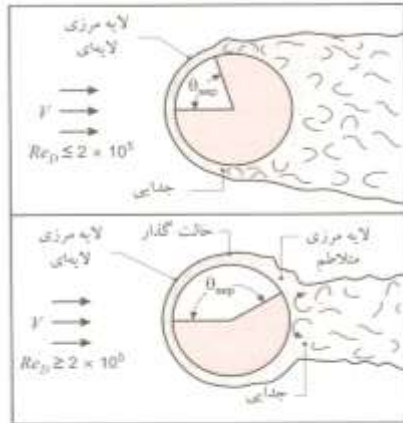


تشکیل لایه مرزی و جدایی روی استوانه دوار در جریان عرضی

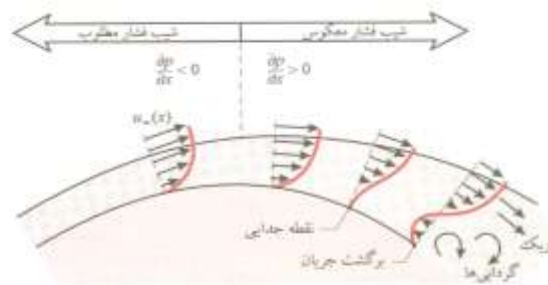
$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = cte \quad \text{برنولی}$$

$$z = cte$$

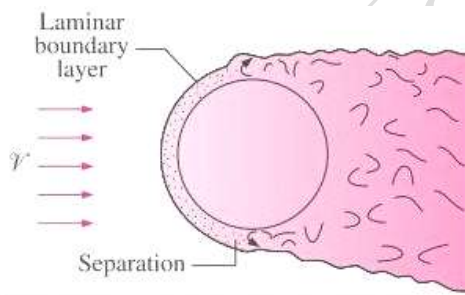
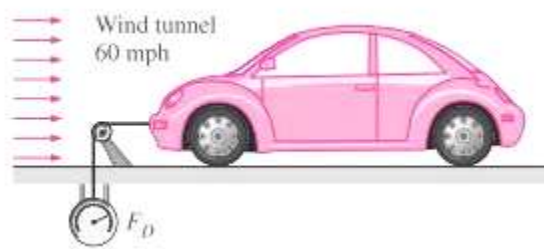
* در نقطه A با توجه به رابطه برنولی چون سرعت صفر است بیشترین فشار را داریم



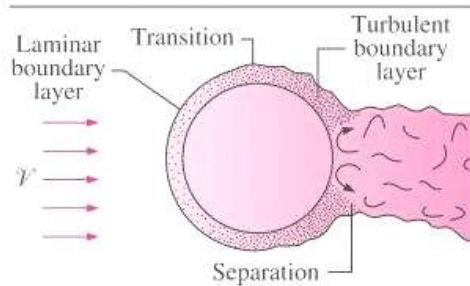
تأثیر تلاطم بر جدایی



نمایه سرعت مربوط به جدایی روی استوانه دوار در جریان عرضی



(a) Laminar flow ($Re < 2 \times 10^5$)



Laminar: $\theta_{s,p} \approx 80$

$$Re_D = \frac{PVD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

$$Re_{D_{cr}} = z \times 10^5$$

brug :D

C: نیرویی که به جسم وارد می‌شود.

$$C_D = C_{D,friction} + C_{D,presure}$$

Lurbulet: $\theta_{s.p} \approx 140$

Re بحرانی برای صفحه $Re=5.10^5$

Re بحرانی برای استوانه ای و کره $Re=2.10^5$

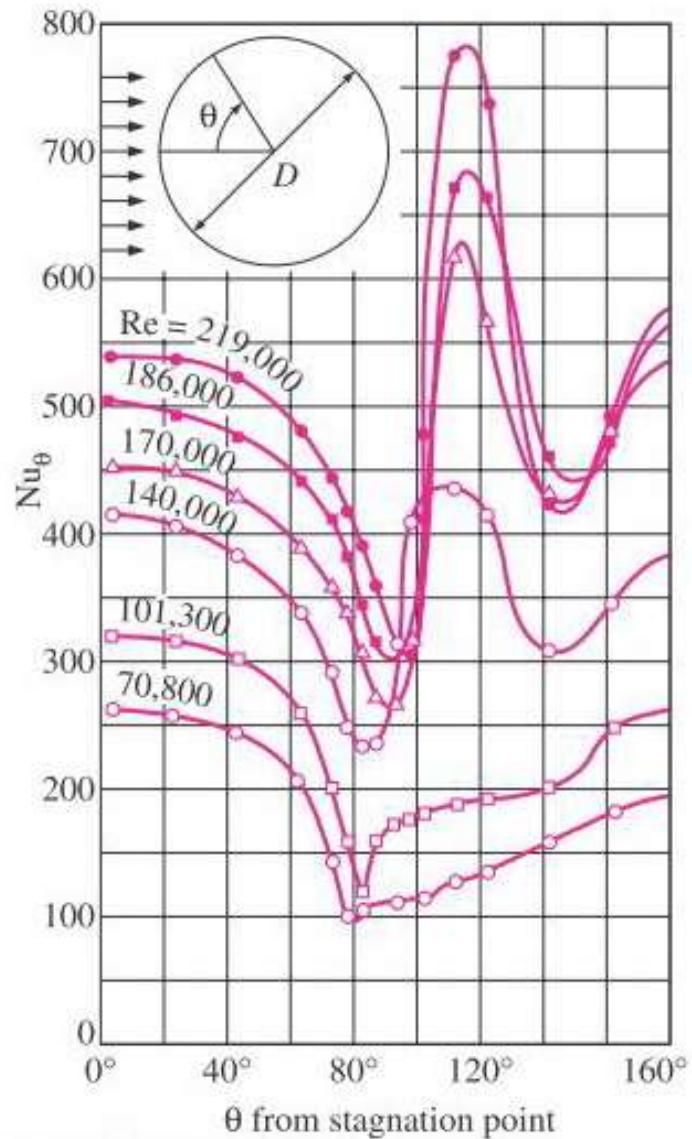
این اعداد به شدت به زبری بستگی دارد چون هر چه سطح زبرتر باشد جریان سریعتر Turbolent می‌شود و هر چه صافتر باشد در جریان پائین تری جریان Turbolent می‌شود.

سوال:

*نقطه جدایی به laminar یا Turbolint بودن جریان ربطی دارد یا نه؟

*در laminar یا در Turbolent؟ چه عاملی سبب جدایی می‌شود؟

*چرا توپ های گلف را زبر می‌سازند؟

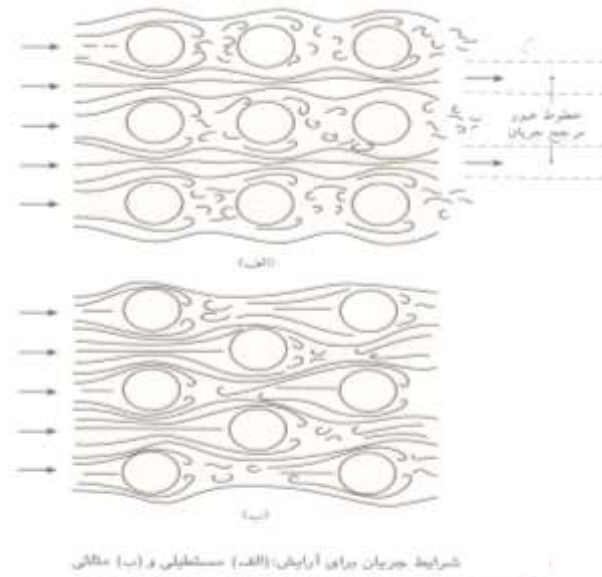


* این نمودار دارای دو نقطه \min است اولین \min به دلیل تبدیل جریان آرام به آشفته است و دومین نقطه \min به دلیل نقطه جدایی است.

* در جریان Turbulent تا \min داریم Min دومی همان نقطه جدایی است \min اولی تبدیل laminar به Turbulent است .

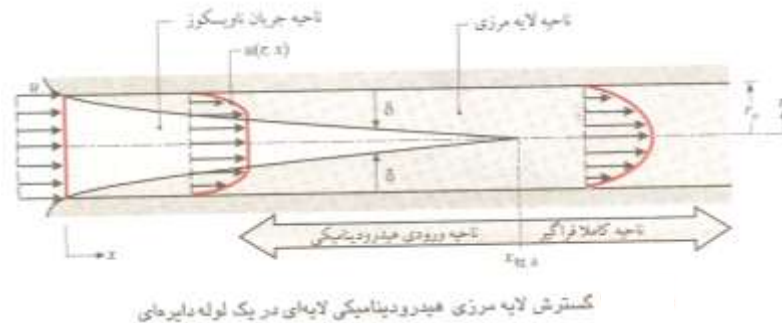
* در صفحه تخت ابتدا گرادیان زیاد است سپس بخاطر رشد لایه مرزی افت داریم و بعد از آن بخاطر تبدیل جریان laminar به Turbulent افزایش داریم و بعد از آن بخاطر رشد لایه مرزی افت داریم .

جریان روی دسته لوله‌ها: *Flow across tube banks*



*در لوله‌های دوم و سوم انتقال حرارت بیشتر است چون در اثر برخورد جریان با لوله اول جریان turbulent ایجاد می‌شود.

Chapter 8: Internal flow: جریان داخلی



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Laminar : } \left(\frac{x_{fd, h}}{D} \right)_{low} = 0.05 Re_D \\ \text{turbulent : } 10 \leq \left(\frac{x_{fd, h}}{D} \right)_{turb} \leq 60 \end{array} \right.$$

Turbulent: $x_{fd, h} \approx 10D$

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

$$\dot{m} = \rho u_m A = (\rho u_m D) \frac{\pi D}{4}$$

$$Re_D = \frac{4\dot{m}}{\mu \pi D}$$

$$Re_{cir} \approx 230$$

$Re_{cir} : 10$: کاملاً متلاطم

لایه مرزی نمی تواند آزادانه حرکت کند در لوله ها در ناحیه غیر چسبنده سیال هنوز تحت تأثیر ویسکوزیته (چسبندگی قرار نگرفته است). از طول ورودی سرعت به بعد را جریان کاملاً توسعه یافته می گویند.

سرعت تابعی x هم تابعی از شعاع است.

اگر لوله ما دایره ای شکل نباشد و قطر را نداشتیم از قطر هیدرولیکی استفاده می کنیم.

$$Dh = \frac{4A}{P}$$

$$Dh = \frac{4 \frac{\pi d^2}{4}}{\pi D} = D$$

$$Dh = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$Dh = \frac{4a^2}{4a} = a$$

مقایسه پیشینه در جریان آرام و جریان آشفته:

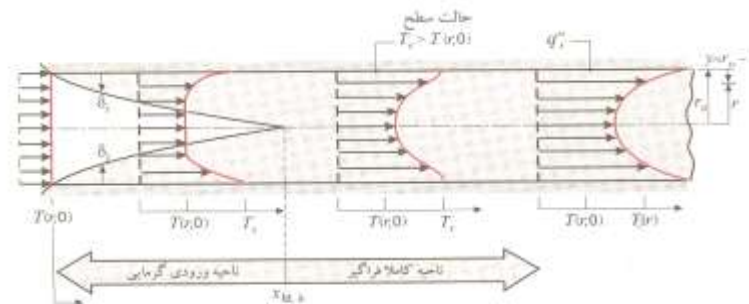
* سرعت در مرکز لوله (U_{max}) در لوله جریان Laminar از لوله با جریان turbulent در صورت ثابت بودن دبی بیشتر است. چون:

$$\dot{m} = cte \Rightarrow pu_{m,A} = cte \Rightarrow U_{mlam} = U_{mtur} \Rightarrow U_{max, lam} > U_{max, tur}$$

$$la \min ar : f = \frac{4}{C_f}$$

* جریان سیال وارد لوله می شود فرض کنیم دمای سیال و سطح مساوی نباشد سپس یک لایه مرزی حرارتی بوجود می آید.

* از طول ناحیه گرمایی به بعد جریان کاملاً توسعه نیافته است اگر دمای سطح بیشتر از دمای سیال باشد \min دما در مرکز لوله اتفاق می افتد.



گسترش لایه مرزی گرمایی در لوله دایره‌ای گرم شده

$$\begin{cases} \text{laminar : } \left(\frac{x_{fd,t}}{D} \right)_{lam} = 0.05 Re_D \cdot Pr \\ \text{turbulent : } \left(\frac{x_{f,D,t}}{D} \right)_{urb} \approx b \Rightarrow x_{fd,t} = 10D \end{cases}$$

* در جریان کاملاً فراگیر گرمایی سیالی با خواص ثابت ضریبی جا به جایی محل مستقل از X ثابت است.

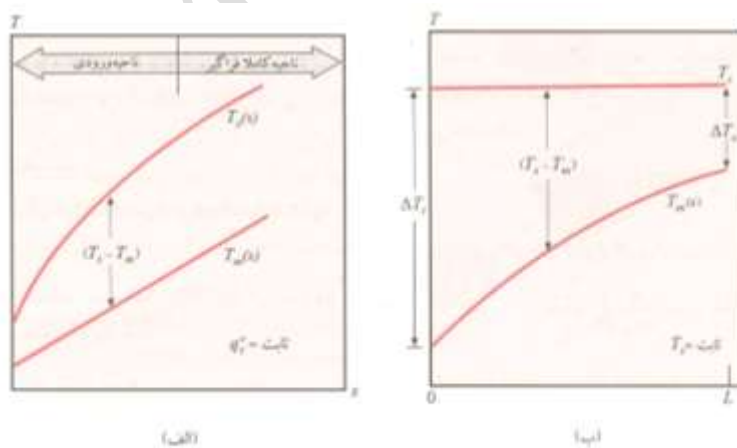
* اگر روغنی در حالت laminar داشتیم کل جریان را می توانیم توسعه یافته در نظر بگیریم فزات مایع خیلی سریع جریان توسعه یافته می شود.

در مرز لوله ها $cond = conr$ چون سرعت روی سطح لوله ها صفر است .

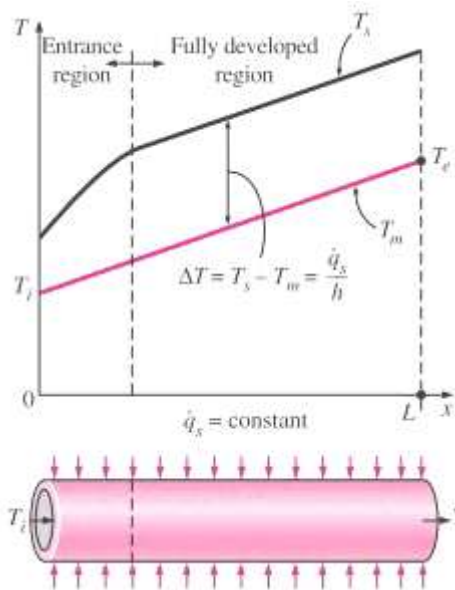
$$h = -k \frac{\partial T}{\partial V} / = h = (TS - TM)$$

$$\Rightarrow h = \frac{-kf \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{r=R}}{TS - TM}$$

* هنگامی که دمای سطح ثابت باشد شار حرارتی ثابت نیست.



تغییرات محوری دما برای انتقال گرما در لوله. (الف) شار گرمای ثابت در سطح. (ب) دمای ثابت در سطح



$$q'' = h(T_s - T_m)$$

$$q'' = h(T_s - T_m) = cte$$

* در نمودار چون q'' ثابت است هر چه h کمتر باشد باید ΔT بیشتر باشد و با افزایش h مقدار ΔT کاهش می‌یابد.

عدد ناسلت در جریان آشفته:

Turbulent: $Nu = 0.023 Re^{0.8} . pr^n$

$$0.6 < pr < 160$$

$$Re > 10$$

$$\begin{cases} \text{Heating } T_s > T_m & n = 0.4 \\ \text{cooling } T_s < T_m & n = 0.3 \end{cases}$$

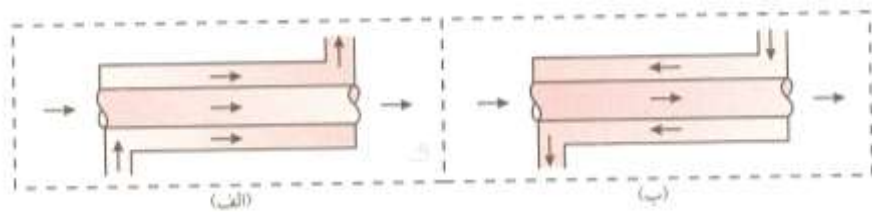
* زمان جریان توسعه یافته است (در جریان که $l/D \geq 10$)

Chapter 11

Heat Exchangers:

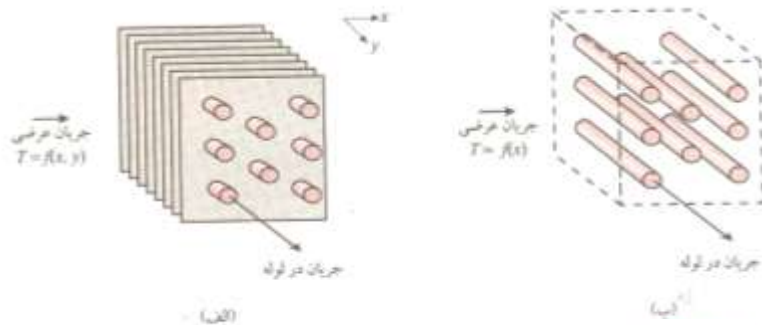
Heat Exchangers Types: { flow Grrangement (آرایش جریان)
Type of construction (نوع ساختار)

1. Double pipe: (دو لوله‌ای)



مبدل‌های گرمایی لوله‌ای هم‌مرکز، (الف) جریان هم‌سو، (ب) جریان ناهم‌سو

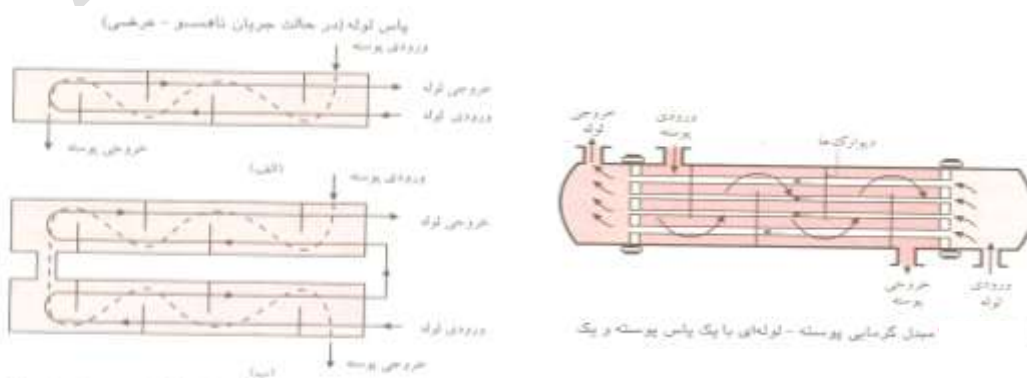
۲. جریان عمود بر دسته لوله‌ها



مبدل‌های گرمایی با جریان عرضی، (الف) پرده‌دار که در آن هر دو سیال مخلوط نشده‌اند، و (ب) بدون پرده که در آن یک سیال، مخلوط شده با سیال دیگر، مخلوط می‌شود.

* لوله‌ها بدون پرده‌اند و جریان خارج لوله‌ها مخلوط است.

3. shell & Tube Heat Exhonger: مبدل‌های لوله پوسته‌ای



مبدل‌های گرمایی پوسته‌ای - لوله‌ای، (الف) یک پاس پوسته و دو پاس لوله، (ب) دو پاس پوسته و چهار پاس لوله.

* در مبدل‌های با لوله U شکل به یک sheat نیاز است ولی در شکل بالا دو sheat نیاز است ولی عیب آنها این است که تمیز کردن آنها سخت‌تر از لوله‌های مستقیم است.

4. Compact Heat Exch: مبدل‌های حرارتی فشرده

* منظور از فشرده بودن این است که در حجم کوچکی تعداد زیادی صفحه قرار داده شده است. compactها برای زمانی استفاده می‌شوند که ضریب انتقال حرارت خیلی پایین باشد و نیاز به مساحت بالا داشته باشیم.

محاسبات مبدل‌ها:

ضریب کلی انتقال حرارت: U

$$q = UA\Delta T$$

$$R_1 = \frac{1}{h_i A_i}, R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l}, R_3 = \frac{1}{h_o A_o}$$

R_f : ضریب گرفتگی که به سرعت سیال - دمای کارکرد در مدت کارکرد بستگی دارد.

$$A_i = \pi D_i l = 2\pi r_i l$$

$$A_o = \pi D_o l = 2\pi r_o l$$

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} \quad R_t = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l} + \frac{1}{h_o A_o}$$

$$UA = \frac{1}{R_t}$$

* معادلات حل شده برای زمانی است که در مبدل‌ها رسوب نداشته باشیم.

حل معادلات با در نظر گرفتن رسوب:

- * مقدار رسوب با افزایش دما افزایش می‌یابد. و رسوب باعث کاهش انتقال حرارت می‌شود.
- * لوله‌ها معمولاً از جنسی انتخاب می‌شوند که ضریب انتقال حرارت بالایی (k) داشته باشند
- مثلاً مس، از طرف دیگر باید در مقابل تنش‌های حرارت مقاوم باشد.
- * در محاسبات معمولاً از مقاومت R_2 چون خیلی کوچک است صرف‌نظر می‌شود.

با کم بودن $(r_o - r_i)t$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kl}$$

در نتیجه اگر از مقاومت R_2 و تأثیر رسوب صرف‌نظر کنیم داریم:
* ضریب کلی انتقال حرارت به h کوچکتر بستگی دارد.

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}}$$

Heat Exchanger thermal Analysis:

شکل

Assumptions: $\Delta KE, \Delta PE \cong 0$ - Adiabatic - constant properties

Constant property: $\Rightarrow \Delta h = C_p \Delta T$

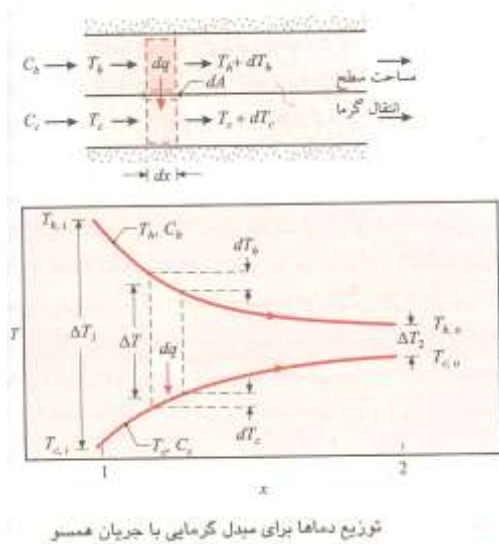
$$\Rightarrow \dot{Q}_c = \dot{m} \Delta h = \dot{m}_c C_{p_o} \Delta T$$

$$= \dot{m} c_p (T_{c_o} - T_{c_i})$$

$$\dot{Q}_H = -\dot{m} \Delta h = \dot{m} c_{p_n} (T_{h_i} - T_{h_o}) \quad \Rightarrow \dot{m}_c c_{p_c} \Delta T_c = \dot{m}_h c_{p_h} \Delta T_h$$

این رابطه مستقل از نوع مبدل و آرایش جریان است.

Parallel flow:



* در این نمودار ΔT تغییر می کند.

روش های تجزیه و تحلیل مبدل های حرارتی

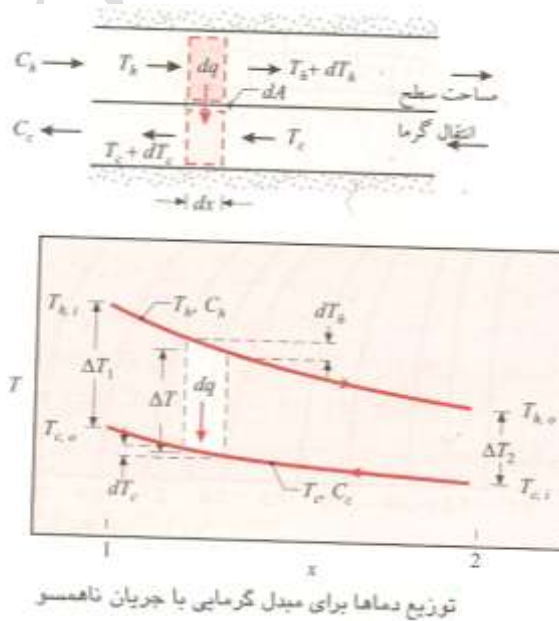
LMTD: log Mean Temperature Difference

ϵ -NTU: Effectiveness Number of Transfer Unit

$$q = UA\Delta T_{lm}$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

$$\Delta T_{lm,PF} \Rightarrow \begin{cases} \Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,i} \\ \Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,o} \end{cases}$$



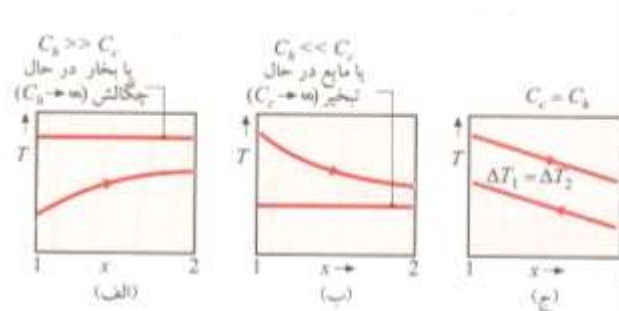
* در این نمودار ΔT تقریباً ثابت است.

$$\text{counter flow : } \begin{cases} \Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o} \\ \Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,i} \end{cases}$$

$$\Delta T_{lm,cf} > \Delta T_{lm,PF}$$

ΔT در جریان مخالف از ΔT در جریان موازی بیشتر است.

حالات خاص: *Special cases:*



شرایط خاص مبدل گرمایی. (الف) $C_h \gg C_c$ یا بخار در حال چگالش. (ب) مایع در حال تبخیر یا $C_h \ll C_c$. (ج) مبدل گرمایی با جریان ناممسو و ظرفیت‌های گرمایی برابر ($C_h = C_c$).

$$\dot{Q}_H = \dot{m}_h c_{p_h} \Delta T_h$$

$$\dot{Q}_C = \dot{m}_c c_{p_c} \Delta T_c$$

$$\dot{m}_h c_{p_h} \gg \dot{m}_c c_{p_c}$$

$$c_h \gg C_c$$

* دو نوع مبدل ذکر شده مستقل از آرایش جریان هستند.

Cross flow or multipass flow:

$$q = FUA\Delta T_{lm}$$

F : correction factor

مثل:

مبدل گرمایی پوسته-لوله‌ای برای گرمایش $2/5 \text{ kg/s}$ آب از 15°C تا 85°C طراحی می‌شود. گرمایش یا عبور روغن موتور گرم، با دمای 160°C ، در سمت پوسته مبدل انجام می‌شود. ضریب متوسط جابه‌جایی بین روغن و سطح خارجی لوله‌ها، $h_o = 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. آب از ده لوله داخل پوسته می‌گذرد. لوله‌ها جدار نازک، هر یک به قطر $D = 25 \text{ mm}$ و با هشت پاس در پوسته، هستند. اگر روغن با دمای 100°C از مبدل خارج شود، آهنگ جریان چقدر است؟ برای گرمایش خواسته شده، طول لوله‌ها چقدر باید باشد؟

حل:

$$\dot{Q}_C = \dot{Q}_h$$

$$\dot{m}_c C_{p,c} (T_{c,o} - T_{c,i}) = \dot{m}_h c_{p,h} (T_{h,o} - T_{h,i}) \quad ((1) \text{ رابطه})$$

$$T_{ov,c} = \frac{15+85}{2} = 50c \xrightarrow[A=6]{\text{جدول}} C_{p,av} = 4181 \text{ J/kg.k}$$

$$T_{av,h} = \frac{160+100}{2} = 130C = 403 \xrightarrow{\text{جدول}} C_{p,av,h} = 2350 \text{ J/kg.k}$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه (1)}} 25 \frac{\text{kg}}{\text{s}} (418)(85-15) = \dot{m}_h (2350)(160-100) \Rightarrow \dot{m}_h = 5.19 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

بدست آوردن کل طول لوله‌ها: $q = FUA\Delta T_m$

$$q = \dot{m}_c c_{p,c} \Delta T_c = (25)(418)(85-15) \Rightarrow q = 731675 \text{ W}$$

$$= 731675 \text{ W}, \Delta T_{l,m} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

$$\Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o} = 160 - 85 = 75c$$

$$\Delta T_2 = T_{c,o} - T_{c,i} = 100 - 15 = 85c$$

$$\Rightarrow \Delta T_m = \frac{75-85}{\ln\left(\frac{75}{85}\right)} = 799c$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}} \quad \text{Re} = \frac{4\dot{m}}{\mu\pi D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{water}}|_{T=50c} = 548 \times 10^{-6} \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2} \\ pr_{\text{water}}|_{T=50c} = 356k = 643 \times 10^3 \end{array} \right.$$

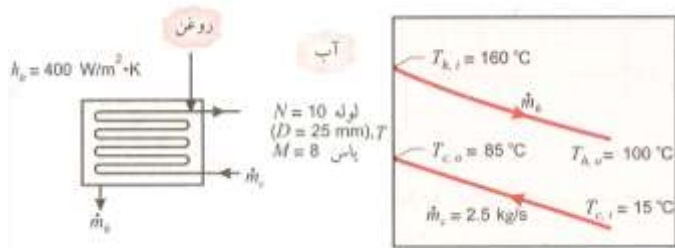
$$\text{لوله} \quad \dot{m} = \frac{\dot{m}_c}{N} = \frac{25}{10} = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Re} = \frac{4 \times 0.25}{548 \times 10^{-6} \times \pi \times 0.025} \Rightarrow \text{Re} = 23234$$

جریان را می‌توان توربولنت فرض کرد.

$$Nu = 0.023 \text{Re}^{0.8} \cdot pr^{0.4} \Rightarrow Nu = 0.023 (23234)^{0.8} \cdot (356)^{0.4} = 119$$

$$Nu = \frac{h_i D}{k} = \frac{h_i (0.025)}{0.643} = 119 \Rightarrow h_i = 3061 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$



$$\Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}} = \frac{1}{\frac{1}{3061} + \frac{1}{400}} = 354$$

$$p = \frac{t_o - t_i}{T_i - t_i}$$

$$R = \frac{T_i - T_o}{t_o - t_i}$$

$$\Rightarrow p = \frac{85 - 15}{160 - 15} = \frac{70}{145} = 0.48$$

$$R = \frac{160 - 100}{85 - 15} = \frac{60}{70} = 0.86$$

$$\Rightarrow F = 0.008$$

$$q = FUA \Delta T_{lm} \Rightarrow 731675 = 0.87 \times 354 \times 399$$

$$\Rightarrow A = 297 \text{ m}^2 \text{ مساحت مورد نیاز برای انتقال حرارت}$$

$$A = 10 \times 8 \times \pi D l \Rightarrow l = 4.7 \text{ m}$$

* روش $\varepsilon - NTU$: زمانی دماهای مجهول باشند.

$$\dot{Q}_h = \dot{Q}_c \Rightarrow \dot{m}_h C_{p_h} (Th_i - Th_o) = \dot{m}_c \dot{C}_{p_c} (T_{co} - T_{ci})$$

* ماکزیمم اختلاف دماها را ورودی‌ها دارند.

$$(\Delta T_{\max} = Th_i - T_{ci})$$

$$\dot{m} c_p = C$$

$$\Rightarrow C_c (T_{bc,o} - T_{c,i}) = C_h (Th_i - Th_o)$$

$$q_{\max} = C_{\min} \Delta T_{\max} = C_{\min} (Th_i - T_{c,i})$$

$$\begin{cases} * \text{ If } C_c < C_h \Rightarrow C_{\min} = C_c \\ * \text{ If } C_h < C_c \Rightarrow C_{\min} = C_h \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} \Rightarrow q = \varepsilon q_{\max} \quad \text{NTU: Number of Transfer Unit (پارامتر بدون بعد)}$$

$$NTU = \frac{UA}{\theta_{\min}}$$

$$\varepsilon = f(NTU, C_r), \quad C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

$$NTU = f(\varepsilon, C_r)$$

شکل‌های ۱۱-۱۴ تا ۱۱-۱۹ بررسی شود.

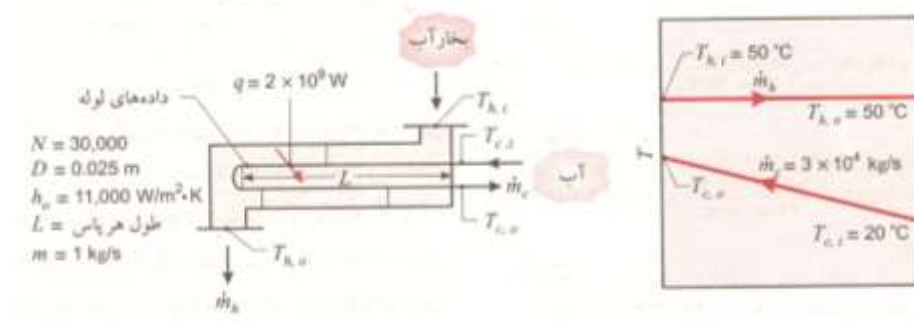
Condansor: $C_h \gg C_c$, Evaporator: $C_c \gg C_h \Rightarrow C_r = 0$

$$C_r = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

* زمانی که می‌خواهیم مبدل را طراحی کنیم از روش اول LMTD استفاده می‌کنیم اما زمانی که انتخاب نوع مبدل منظور است از روش $\varepsilon - NTU$ استفاده می‌کنیم.

مثال:

کندانسور نیروگاه بخار یک مبدل گرمایی است که بخار آب در آن به آب مایع تبدیل می‌شود. فرض کنید کندانسور از نوع مبدل گرمایی پوسته-لوله‌ای است که از یک پوسته و ۳۰۰۰۰ لوله، هر کدام با دوپاس، تشکیل شده است. لوله‌ها جدار نازک با $D = 25 \text{ mm}$ هستند، و بخار آب روی سطح خارجی آنها، با ضریب جابه‌جایی $h_o = 11000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ، چگالیده می‌شود. آهنگ انتقال گرمای مورد نیاز در مبدل $2 \times 10^8 \text{ W}$ است، و این را با عبور آب سرد با آهنگ $3 \times 10^4 \text{ kg/s}$ می‌توان تأمین کرد (بنابراین، آهنگ جریان در هر لوله 1 kg/s است). آب با 20°C وارد و بخار آب در 50°C چگالیده می‌شود. دمای آب سردی که از کندانسور خارج می‌شود چقدر است طول لوله مورد نیاز، L ، در هر پاس چقدر است؟



$$|q_h| = \dot{m}_c c_p (T_{c,i} - T_{c,o}) = \dot{m}_h c_p (T_{h,i} - T_{h,o})$$

$$q = \dot{m}_c \cdot c_p (T_{c,o} - T_{c,i}) \Rightarrow 2 \times 10^4 W = 3 \times 10 \frac{kg}{s} 417 (T_{c,o} - 20)$$

$$\Rightarrow T_{c,o} = 36 C$$

F: در کندانسور و اواپراتور برابر یک است.

$$q = FUA\Delta T_{lm}, F = 1$$

$$\Delta T_1 = 50 - 20 = 30$$

$$\Delta T_2 = 50 - 36 = 14$$

$$\Delta T_{l,m} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)} = 21 C$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}}, h_o =$$

$$T = 28 C \begin{cases} \mu = 855 \times 10^{-6} N \cdot s / m^2 \\ K = 0.613 W / m \cdot k \\ Pr = 5.83 \end{cases} \quad Re = \frac{4\dot{m}}{\mu \pi D}, \dot{m} = \frac{3 \times 10}{30000} = 1$$

$$\Rightarrow Re = \frac{4 \times 1}{855 \times \pi \times 10^{-6} \times 0.025} \Rightarrow Re = 59567 \Rightarrow \text{جریان: turbulent}$$

$$Nu_D = 0.023 Re^{0.8} Pr = 0.023 (59567)^{0.8} (5.83)^{0.4} = 308$$

$$\Rightarrow \frac{h_i \times 0.025}{0.613} = 308 \Rightarrow h_i = 7552 W / m^2 \cdot k$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{7552} + \frac{1}{11000}} \Rightarrow U = 447$$

U همیشه از دو h کمتر است.

$$\Rightarrow 2 \times 10^4 W = 1 \times 4478 W / m^2 \cdot k \cdot A \times 21 \Rightarrow A = 2126$$

$$A = N \pi D l = 30000 \times 2 \times \pi \times 0.025 \times l = 2126$$

$$\Rightarrow l = 4.51 m$$

روش دوم:

$$C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = 0 \quad \varepsilon = \frac{q}{q_{\max}}$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \quad \text{سیال سرد} \quad C_{\min} = \dot{m}_c C_p = 3 \times 10 \times 4179 \frac{j}{kg.k}$$

$$= 1.25 \times 10^6 \frac{w}{k}$$

$$\varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

$$q_{\max} = C_{\min} \Delta T_{\max} = C_{\min} (T_{hi} - T_{ci}) = 1.25 \times 10^6 (50 - 20)$$

$$= 375 \times 10^6 w, \quad \varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{2 \times 10^8}{375 \times 10^6} = 0.53$$

$$\Rightarrow 0.53 = 1 - e^{-NTU} \Rightarrow e^{-NTU} = \frac{AU}{C_{\min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.76 = \frac{4478}{1.25 \times 10^6} \Rightarrow A = 2121$$

$$\Rightarrow 2121 = 30000 \times \pi \times 0.025 \times l \Rightarrow l = 4.5$$

The End.