چند روشن‌گری در باب منطق

مرتضی منیری
ezmoniri@gmail.com
گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

در ابتدا برخی موضوع‌های بحث برانگیز در حوزهٔ منطق ریاضی را بررسی می‌کنیم. این‌ها موضوع‌هایی هستند که معمولاً غیرمتخصصان را به دردسر و گاهی اشتباه می‌اندازند. موضوع‌های عمده‌ای که در این راستا به آن‌ها خواهیم پرداخت عبارتند از: تعریف صدق تارسکی، قضیهٔ تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی، قضیهٔ تمامیت گودل و قضیه‌های ناتمامیت گودل، منطق مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم. در ادامه، به معرفی برخی منطق‌های غیرکلاسیک و جایگاه آن‌ها در منطق فلسفی و همچنین منطق در علوم کامپیوتر می‌پردازیم. افزون بر آن، برخی موضوع‌های فلسفی مرتبط به منطق را به بحث می‌گذاریم. از زمرهٔ این موضوع‌ها، پرسش از چیستی منطق، تفاوت منطق و دستگاه منطقی و چالش یگانه‌گرایی در مقابل کثرت‌گرایی در انتخاب منطق است. با تفکیک منطق از دستگاه منطقی، از این دیدگاه دفاع خواهیم کرد که منطق ریاضی به عنوان بخشی از ریاضیات، تنها می‌بایست متعهد به رعایت استانداردهای خود ریاضیات باشد. در این راستا، هر یک از دستگاه‌های منطق غیرکلاسیک که این استانداردها را رعایت کند، مشروعیت خواهد داشت.

کلمه‌های کلیدی: منطق ریاضی، منطق فلسفی، فلسفهٔ منطق، منطق در علوم کامپیوتر.

۱) مقدمه

در این مقاله به چند موضوع بحث‌انگیز در مورد منطق می‌پردازیم. توجه ما بیشتر متوجه منطق ریاضی و نمادی (mathematical logic, formal logic) است. کلمهٔ منطق بطور سنتی به دانش بررسی استنتاج ها از جهت معتبر بودن یا نبودن اطلاق می‌شود. منطق ریاضی پایه‌ای عبارت است از بررسی مدل‌های ریاضی ساخته شده از استنتاج ها. این پرسش که استنتاج چه هنگام معتبر است و این اعتبار بر چه ملاکی استوار است، خود موضوعی برای بحث های بی‌پایان در طول تاریخ بوده است و این بحث‌ها هنوز هم در حوزهٔ فلسفهٔ منطق (Philosophy of Logic) ادامه دارد (Maddy, 2012). البته منطق ریاضی امروزی بسیار فراتر از این رفته و از ریشه‌های خود دور شده است، پدیده‌ای که مشابه آن در

اکثر شاخه‌های ریاضی اتفاق افتاده است. هر چند کلمۀ «منطق نمادی» نیز گاه به گاه به جای «منطق ریاضی» بکار می‌رود اما این دو لزوماً بار معنایی یکسانی ندارند. برای مثال، فیلسوفان نیز در جهت اهداف خاص خود از نمادگذاری ریاضیاتی استفاده می‌کنند.

منطق ریاضی بر اساس منطق کلاسیک یا آن‌گونه که برخی ترجیح می‌دهند آنرا بنامند، منطق استاندارد، بنا شده است (Priest, 2017). این منطقی است که در اواخر قرن نوزدهم و و اوایل قرن بیستم میلادی توسط منطق‌دانان پیشروی چون فرگه(Frege)، راسل (Russell)، هیلبرت (Hilbert)، گودل (Gödel) و تارسکی (Tarski) بنیان گذاشته شد.

هدف فرگه و راسل تاسیس منطق بگونه‌ای بود که بتوان حساب اعداد طبیعی را بر آن بنیان گذاشت. از این جهت این منطق از ابتدا با ریاضیات در هم تنیده شده است. هیلبرت، گودل، تارسکی و تورینگ (Turing) مبانی این منطق را مستحکم کردند و شاخه‌های متفاوت آن را پایه‌گذاری کردند و قضیه‌های اساسی آن را اثبات نمودند. این شاخه‌ها عبارتند از نظریۀ مدل (model theory)، نظریۀ مجموعه (set theory)، نظریۀ برهان (proof theory) و نظریۀ محاسبه‌پذیری (computability theory). منطق ریاضی در سال‌های اخیر بسیار پیشرفت کرده و برخی از شاخه‌های آن با دیگر شاخه‌های ریاضی پیوند خورده است. برای مثال، در سال ۱۹۹۶ برهانی کامل برای حدس موردل–لنگ (Mordell-Lang) در هندسۀ جبری با استفاده از روش‌های مبتنی برنظریۀ مدل، توسط ایهود هوروشوفسکی (Ehud Hrushovski) ارائه شد (Hrushovski, 1996).

از طرف دیگر، هم‌زمان برخی منطق‌های غیر کلاسیک با انگیزه‌های فلسفی و یا محاسباتی ناشی از نیازهای علوم کامپیوتر، مطرح شده‌اند. البته برخی از این منطق‌ها از پیش نیز با انگیزه‌های عمدتاً فلسفی مطالعه شده بودند، اما مطالعۀ آنها از دید ریاضی جدید است. از زمرۀ منطق‌های غیرکلاسیک (non-classical logics)، منطق شناخت (epistemic logic)، منطق شهودی (intuitionistic logic)، منطق زمان (temporal logic)، منطق فازی (fuzzy logic)، منطق ربط (relevance logic) و منطق پویا (dynamic logic) هستند. برخی از این منطق‌های غیرکلاسیک، گسترش‌هایی از منطق کلاسیک هستند، مانند منطق شناخت و منطق زمان، و برخی در تقابل با آن و ردکنندۀ برخی از اصول آن هستند، مانند منطق شهودی، فازی و ربط. این منطق‌ها معمولاً در حوزه‌های موسوم به منطق فلسفی یا منطق در علوم کامپیوتر قرار داده می‌شوند. البته این به آن معنی نیست که از مدل‌سازی ریاضی در آنها استفاده نمی‌شود. به همین دلیل همۀ آنها در زمرۀ منطق نمادی قرار می‌گیرند.

در واقع امروزه امکان ترسیم مرزی قاطع بین منطق ریاضی، منطق فلسفی (philosophical logic) و منطق در علوم کامپیوتر (logic in computer science) وجود ندارد. هر یک از این منطق‌های غیرکلاسیک را می‌توان از دید نظریهٔ مدل، نظریهٔ برهان و نظریهٔ محاسبه‌پذیری مطالعه کرد. این‌ها موضوعاتی هستند که هم در مجله‌های پژوهشی منطق ریاضی چاپ می‌شوند، و هم بر حسب مورد در مجله‌های منطق فلسفی یا مجله‌هایی که به منطق در علوم کامپیوتر می‌پردازند، منتشر می‌شوند. برای دیدن برخی از کاربردهای منطق در علوم کامپیوتر منبع (Halpern et al., 2001) را ببینید. کتاب اخیراً چاپ شده توسط فیلسوف علم هانس هالورسون، (Halvorson, 2019)، به کاربردهای منطق در فلسفهٔ علم می‌پردازد.

در این مقاله، در ابتدا به چند موضوع پایه‌ای و بحث انگیز در مورد منطق ریاضی می‌پردازیم. سپس اشاره‌ای به برخی منطق‌های غیرکلاسیک مطرح در حوزهٔ منطق فلسفی یا منطق در علوم کامپیوتر می‌کنیم. در نهایت کمی نیز به فلسفهٔ منطق و اینکه منطق چیست، می‌پردازیم.

۲) تارسکی و صدق

یک زبان مرتبهٔ اول منطقی L متشکل از نمادهایی به عنوان الفبا و قواعدی برای ساخت عبارت‌ها یا فرمول‌های پیچیده‌تر به کمک عبارت‌های ساده‌تر است. الفبای L بجز نمادهای سجاوندی و ادوات (رابط‌های) منطقی، شامل سورهای عمومی و وجودی و نمادهای موسوم به نمادهای ثابت، تابعی و محمولی است. این نمادها را می‌توان تعبیر کرد. یک تعبیر برای یک زبان مرتبه اول را می‌توان چونان تابعی در نظر گرفت که به سورهای زبان یک مجموعهٔ ناتهی به عنوان دامنه نسبت می‌دهد و به نمادهای ثابت، تابعی و محمولی، به ترتیب اعضایی متمایز از دامنه، تابع‌های تعریف شده بر دامنه از چندگانگی مناسب، و رابطه‌هایی با چندگانگی مناسب تعریف شده بر دامنه را نسبت می‌دهد. یک فرمول درست ساخت در زبان L دنباله‌ای از نمادهای این زبان است که در یک تعبیر مناسب قابلیت اطلاق صدق (درستی) و کذب (نادرستی) به آنها وجود دارد. صدق یک فرمول منطقی در یک تعبیر بر اساس مفهوم برآوردن (ارضاء) به صورت بازگشتی تعریف می‌شود. در نهایت، چکیدهٔ تعریف به این شکل خواهد بود که، در یک تعبیر، یک عضو دامنه چون a یک فرمول درست ساخت A با یک متغیر ازاد x را برآورده می‌کند، هرگاه تعبیر A هنگامی که متغیر x را با a جایگزین کرده باشیم، درست باشد (درست به مفهوم معمول ریاضی). تعریف صدق یک جمله، یعنی فرمولی فاقد متغیر آزاد، حالت خاصی از این تعریف است و بنابراین، هر جمله در یک تعبیر صادق یا کاذب است. این خلاصهٔ آن چیزی است که با عنوان تعریف صدق تارسکی مشهور است.

البته می‌بایست به چند نکته در مورد تعریف صدق تارسکی توجه کرد. نخست آنکه، تعریف تارسکی برای زبان‌های نمادی است، به ویژه زبان‌های مرتبهٔ اول. این تعریف خارج از خود زبان L و به اصطلاح در فرازبان (meta-language) که آن را ML می‌نامیم، انجام می‌شود. در منطق ریاضی، ML در واقع همان زبان معمولی ریاضی است که شامل نظریهٔ طبیعی و غیررسمی مجموعه‌ها به علاوهٔ نسخه‌ای از همهٔ نمادهای L است. به طور کلی، وقتی در مورد جمله‌ای از یک زبان در زبان دیگر صحبت می‌کنیم، آن را در گیومه قرار می‌دهیم. برای مثال، زمانی که زبان انگلیسی و فرازبان فارسی داریم، این ادعایی در فرازبان است: "Snow is white" یعنی برف سفید است. در مورد تعریف صدق، برای مثال، گوییم "$A \wedge B$" صادق است اگر و تنها اگر A و B هر دو صادق باشند. در اینجا $\wedge$ نمادی از زبان منطق، L، و «و» نمادی از فرازبان، ML ، است. حتی این مثال ساده، گاهی برخی نوآموزان منطق را به دردسر می‌اندازد. یک نکته مهم دیگر اینکه، تا اینجا ما مفهوم صدق جمله‌ای خاص از یک زبان صوری را در فرازبانی مناسب تعریف کرده‌ایم و نه مفهوم صدق به طور عام، آن‌گونه که مطابق میل فیلسوفان است. در ضمن، این کار برای زبان‌های نمادی که ساخت جمله‌هایشان استقرایی است و تعاریف بازگشتی برای آنها ممکن است، انجام شده است.

همچنین باید توجه کرد از آنجا که صدق جمله‌های یک زبان نمادی، نه در خود آن زبان بلکه در فرازبان آن زبان انجام می‌شود و در خود زبان نمادی امکان سخن گفتن از صدق جملاتش وجود ندارد، برخی از پارادوکس هایی‌که معمولاً در این حوزه ظاهر می‌شوند، پیش نخواهند آمد. از مشهورترین این پارادوکس‌ها، پارادوکس دروغگو است، یعنی جمله‌ای در زبانی طبیعی مانند زبان فارسی که نادرستی خود را بیان می‌کند. این پارادوکس نشان می‌دهد که در حالت کلی، تعریف صدق برای یک زبان در خود آن زبان منجر به پارادوکس می‌شود. بحث در مورد این پارادوکس‌ها جایگاه مهمی در فلسفهٔ منطق دارد، اما در تحلیل تارسکی از صدق، منطق ریاضی از این مشکل رهایی می‌یابد. در واقع این تعریف، مشکل را به جای دیگر حواله می‌دهد، خود ریاضیات. اینکه حکم‌های ریاضیات به چه معنی صادقند، خود پرسش مهمی در فلسفهٔ ریاضی است. به این معنی، دیگر نمی‌توان منطق ریاضی را به مطالعهٔ بنیادهای ریاضیات محدود دانست.

در مقابل تعریف صدق تارسکی، قضیهٔ تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی، قرار دارد. زبان مرتبه حسابی شامل نمادهایی با تعبیرهای مورد نظر $< ,0, 1, +, \times$ را در نظر بگیرید. همچنین $\mathbb{N}$ را تعبیر استاندارد حسابی برای این زبان فرض کنید. بعد از گودل می‌دانیم که فرمول‌های منطقی را می‌توان به شکل مناسبی با عددهای طبیعی کد کرد، عدد گودل فرمول‌ها.

در این صورت، بنابر قضیهٔ یاد شده، فرمولی با یک متغیر آزاد وجود ندارد که مجموعه عددهای گودل جملات صادق حسابی را در $\mathbb{N}$ تعریف کند. به بیان دقیق‌تر، فرمولی چون $A(x)$ به طوری که

$$\mathbb{N} \vDash A(\bar{x}) \iff \text{کد جمله‌ای صادق باشد } x$$

وجود ندارد. در این‌جا، $\bar{x}$ ترمی است از زبان حسابی که تعبیر آن عدد x است. این قضیه که می‌توان آن را شکل نمادی شدهٔ پارادوکس دروغگودانست، تاکید مجددی است بر اینکه نمی‌توان به کمک فرمولی در زبان مرتبهٔ اول حساب، صدق فرمول‌های حسابی را در خود آن زبان تعریف کرد.

البته ذکر این نکته جالب است که هر چند فرمولی وجود ندارد که صدق همه فرمول‌های حسابی را تعریف کند، اما اگر پیچیدگی فرمول‌های حسابی را به نحو مناسبی تعریف کنیم، آنگاه فرمولی با پیچیدگی $n+۱$ وجود دارد که صدق فرمول‌های با پیچیدگی حداکثر n را تعریف می‌کند (Hajek et al., 1993). این موضوع در مورد نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، ZF، نیز برقرار است. از سوی دیگر، می‌توان صدق را به صورت اصل‌موضوعی مطالعه کرد، یعنی محمولی از زبان را به عنوان تعریف‌کننده صدق در نظر گرفت و خواص مورد نظر صدق را در مورد آن به خود نظریهٔ اضافه کرد. این خود موضوعی وسیع و جالب است، برای مثال (Halbach et al., 2020) را ببینید.

۳) گودل و ناتمامیت

آیا منطق مرتبهٔ اول (کلاسیک) تمام (complete) است؟ این پرسشی بود که هیلبرت مطرح کرد و گودل در رسالهٔ دکتری خود به آن پاسخ مثبت داد. اما این تمامیت به چه معنی است؟ در اینجا تمامیت به این معنی است که قضیه بودن یک فرمول، یعنی از اصول منطقی و به کمک قواعد اثباتی قابل استنتاج بودن، هم ارز صادق بودن در همهٔ تعبیرهای ممکن زبان مورد بحث است، نوعی تناظر بین «صادق در همهٔ تعبیرها» و «اثبات‌پذیری». این قضیهٔ تمامیت گودل برای منطق محمولات مرتبهٔ اول است. تعمیم آن برای نظریه‌های مرتبهٔ اول (first-order theories) و مدل‌های آن‌ها (یعنی تعبیرهایی از زبان که همهٔ اصل‌های نظریهٔ مورد بحث در آنها صادقند) را گاهی قضیهٔ تمامیت قوی می‌نامند. به این معنی، هر نظریهٔ مرتبهٔ اول تمام است.

از طرف دیگر، قضیهٔ ناتمامیت گودل (Gödel's incompleteness theorem) بیان می‌کند که حساب اعداد طبیعی مبتنی بر منطق مرتبهٔ اول (first-order arithmetic) تمام نیست. اما مفهوم تمامیت در اینجا متفاوت با آن چیزی است که در قضیهٔ تمامیت آمد. همانطور که گفتیم، قضیهٔ تمامیت در مورد هر نظریهٔ مرتبه اول، من جمله حساب مرتبهٔ اول، برقرار

است. ناتمامیت در اینجا به معنی آن است که جمله‌ای حسابی وجود دارد که حساب مرتبهٔ اول نه قادر به اثبات آن است و نه قادر به اثبات نقیض آن. پس جمله‌ای صادق در تعبیر استاندارد حسابی وجود دارد که اثبات‌پذیر نیست. به عبارت دیگر، هرچند PA نسبت به کلاس همه مدل هایشان تمام است، ولی نسبت به مدل استاندارد، تمام نیست.

بنابر قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل، PA قادر به اثبات جمله‌ای در زبان حساب که سازگاری حساب را بیان می‌کند، $Con(PA)$، نیست. این جمله در مدل استاندارد حساب درست است. البته اگر خودمان را به جملات وجودی محض محدود کنیم، آنگاه نه تنها PA بلکه زیرنظریه‌های بسیار ضعیف آن نیز هم تمام خواهند بود. اما این وضعیت در مورد جمله‌های عمومی‌محض برقرار نیست، زیرا جملهٔ گودل از این نوع است. برای یک مورد جالب، جمله $\Box A \longrightarrow A$ را در نظر بگیرید. در اینجا $\Box A$ جمله‌ای در زبان حسابی است که اثبات پذیری جملهٔ A در PA را بیان می‌کند. جملهٔ $\Box A \longrightarrow A$ در مدل استاندارد درست است ولی PA آن را اثبات نمی‌کند. برای توجیه این موضوع، مدلی نااستاندارد از حساب مرتبهٔ اول را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Box$ A در آن درست باشد. در این صورت، ممکن است اثباتی که با فرض $\Box A$ می‌بایست درآن مدل نااستاندارد موجود باشد، عنصری نااستاندارد باشد و وجود آن، دلیل بر وجود یک اثبات متناهی نباشد. بنابراین ممکن است که A در این مدل درست نباشد. البته جملهٔ مورد بحث، در مدل استاندارد درست است، زیرا در صورت درست بودن $\Box A$، کد اثبات A یک عدد استاندارد است و نشانگری ملموس بر اثباتی برای A در PA.

دستگاه حسابی که در قضیهٔ ناتمامیت گودل به آن اشاره می‌شود، مرتبهٔ اول است. این دستگاه منطقی مدل‌های نامتناهی از هر کاردینالی دارد که با مدل استاندارد حساب یک‌ریخت نیستند. اما حساب مرتبهٔ دوم (second-order arithmetic) مدل‌های نااستاندارد ندارد، همهٔ مدل‌های آن با هم یک‌ریخت هستند. در حساب مرتبهٔ دوم، که بر منطق مرتبهٔ دوم مبتنی است، سورها می‌توانند به محمول‌های زبان نیز اشاره کنند. به این ترتیب، اصل استقرا را می‌توان به شکل معمول ریاضی آن، یعنی برحسب زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد طبیعی بیان کرد. در حساب مرتبهٔ اول، به ازای هر فرمول با یک متغیر آزاد متمایز، یک مورد از اصل استقرا را خواهیم داشت. اما این اصل را در حساب مرتبهٔ دوم می‌توان با یک جملهٔ مشخص بیان کرد. در فصل ٤، به منطق مرتبهٔ دوم خواهیم پرداخت.

نکتهٔ دیگر در مورد اثبات‌های منطقی، طولانی و دشوار بودن آنها است. البته دستگاه‌های هم‌ارز اثباتی مختلفی تاکنون مطرح شده‌اند که هر یک به منظوری مناسبند، اما به هر حال ارائهٔ اثبات در هیچ یک از آنها کار ساده‌ای نیست. از این نظر،

از همه بدتر همان دستگاه اصل موضوعی یا به عبارت دیگر هیلبرتی است. این دستگاه اثباتی (proof system) را می‌توان حاصل مدل‌سازی ریاضی اثبات‌های معمولی ریاضیدانان دانست. اصطلاح فراریاضیات (metamathematics) که زمانی هم‌ارز منطق ریاضی در نظر گرفته می‌شد، به همین جهت وضع شده است. در اینجا فراریاضیات به معنای مطالعهٔ خواص این اثبات‌ها است که خارج از خود زبان منطق و در بدنهٔ اصلی ریاضیات انجام می‌شود، مانند اثبات تمامیت یک دستگاه اثباتی. از این نظر می‌توان فراریاضیات را جزئی از ریاضیات دانست.

٤) منطق مرتبهٔ اول و دوم

منطق مرتبهٔ اول، منطق استانداردی است که معمولاً نوآموزان منطق در ابتدا با آن آشنا می‌شوند (منطق گزاره‌ای را زیرمنطقی از منطق مرتبهٔ اول می‌دانیم). این منطق خواص بسیار خوبی دارد که آن را در میان منطق‌های دیگر گزینهٔ مناسبی برای استاندارد شدن می‌کند. در میان این خواص می‌توان از فشردگی(compactness) و تمامیت نام برد. اما این منطق قدرت بیان زیادی ندارد. برای نمونه، اصل استقرای ریاضی به شکل معمول آن در این منطق قابل بیان نیست. به همین طریق، اصل کمال اعداد حقیقی توسط یک فرمول و یا حتی مجموعه‌ای از فرمول‌ها در زبان میدان‌های مرتب، قابل بیان نیست. در واقع، این ضعف منطق مرتبهٔ اول است که باعث وجود مدل‌های نااستاندارد برای دستگاه‌های مورد اشاره است، مدل‌های نااستاندارد حساب و آنالیز.

اگر منطق مرتبهٔ اول را با اضافه کردن متغیرهایی برای محمول‌ها و نمادهای تابعی و همچنین سورهایی که به آنها اشاره می‌کنند گسترش دهیم، به منطق مرتبهٔ دوم می‌رسیم (Enderton, 2001). این منطق دارای معناشناسی طبیعی و استانداردی است که درستی فرمول‌ها را می‌توان به روش تارسکی در آن تعریف کرد. ساختار حسابی و ساختار اعداد حقیقی، هنگامی که به عنوان ساختارهای مرتبهٔ دوم به آنها نگریسته شود، در حد یک‌ریختی یکتا هستند. این امتیاز مهمی برای گذر از منطق مرتبهٔ اول به مرتبهٔ دوم است.

اما مشکلی اساسی که منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی استاندارد با آن روبه‌رو می‌شود آن است که هیچ دستگاه اثباتی مناسبی ندارد. به عبارت دیگر، این منطق از اساسی‌ترین خواسته از یک منطق، یعنی داشتن دستگاه اثباتی تمام، بی‌بهره است. اما به نوعی می‌توان این مشکل را پوشاند. اگر معناشناسی استاندارد مذکور را با معناشناسی هنکین (Henkin Semantics) تعویض کنیم، آنگاه دستگاه اثباتی مناسبی برای منطق این ساختارها وجود دارد و قضیهٔ تمامیت برای آن برقرار است. معناشناسی هنکین نوعی گسترش‌معناشناسی استاندارد است، به این روش که ساختارهایی داریم که دامنهٔ سورهای مرتبهٔ

دوم در آنها به یک مجموعهٔ داده‌شده از رابطه‌ها وتابع‌ها روی دامنه، محدود شده است. مدل‌های استاندارد (یا پُر) حالت خاصی از این ساختارهای هنکین هستند. این نگاه به ساخت‌های مرتبهٔ دوم، ایرادی قدیمی به منطق مرتبهٔ دوم مبنی بر اینکه این منطق در واقع همان نظریهٔ مجموعه است را ندارد. لزومی ندارد که مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های دامنه را در نظر بگیریم. در ساختارهای هنکین، مثلاً می‌توان فقط اجازه داد که سورها به زیرمجموعه‌های متناهی دامنه اشاره کنند.

اما نکته این است که منطق مرتبهٔ دوم با معناشناسی هنکین، در واقع هم‌قدرت منطق مرتبهٔ اول است. به طور دقیق‌تر، منطق یاد شده را می‌توان نوعی از منطق چندگونا (many-sorted logic) دانست. یک زبان چندگونا، شامل دسته‌های مجزایی از متغیرها است و دامنهٔ تعبیرهای آن نیز پیرو این وضعیت، از چند مجموعهٔ مجزا تشکیل شده است. سورهای مرتبط با هر دسته از متغیرها، به بخش مربوط به خود از دامنه اشاره می‌کنند. برای مثال، منطق مرتبهٔ دوم روی ساختار

$$\mathfrak{N}_1 = (\mathbb{N}, +, \times)$$

معادل است با منطق مرتبهٔ اول روی ساختار

$$\mathfrak{N}_2 = (P(\mathbb{N}), E, \mathbb{N}, +, \times)$$

جایی که رابطهٔ

$$E \subseteq \mathbb{N} \times P(\mathbb{N})$$

به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$nEr \iff n \in r.$$

از آن‌جا که معناشناسی منطق مرتبهٔ دوم متکی بر فرض‌های قوی‌ای در مورد مجموعه‌ها است، برخی چون کواین (Quine)، آن را جزئی از ریاضیات می‌دانند که از حیطهٔ منطق خارج است. از طرفی دیگر، برخی مانند پاتنم (Putnam)، این رای را نمی‌پسندند و تمایز بین دستگاه‌های منطقی و غیرمنطقی ریاضی را تا حدود زیادی، دلبخواه می‌دانند (Putnam, 2010).

۵) منطق: کلاسیک و غیرکلاسیک

منطق کلاسیک مبتنی بر اصول و قواعدی است که فرگه، منطق‌دان و فیلسوف ریاضی قرن نوزدهم، معرفی کرد (در واقع منطق مورد نظر او مرتبهٔ دوم بود اما این تمایزها بعدها به شکل واضحی توسط کسانی چون هیلبرت ترسیم شدند). هدف اصلی فرگه به سرانجام رساندن پروژهٔ تحویل ریاضیات به منطق بود، منطق‌گرایی. بنابراین عجیب نیست که این منطق را منطق ریاضیات بدانیم (Priest, 2017). اما به جز این، به دلایل مختلف در طول تاریخ دستگاه‌های مختلفی برای منطق ارائه شده‌اند که با منطق مورد نظر فرگه که به نام منطق کلاسیک یا استاندارد مشهور شده، متفاوتند.

از زمرهٔ این منطق‌ها، منطق‌های چند ارزشی (many-valued logics) هستند، منطق‌های با سه ارزش یا بیشتر، و حتی بی‌نهایت ارزش (فازی). دستگاه‌های منطقی گوناگونی برای این خانواده از منطق‌های غیر کلاسیک ارائه شده است. برای مثال، در دستگاه لوکاسیویچ (Łukasiewicz) برای منطق فازی، ارزش گزاره‌ها، عددی در بازهٔ [0,1] است. نقیض گزاره‌ای با ارزش a ارزشی برابر با $1-a$ دارد. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره برابر با ماکزیمم ارزش‌های این دو است، به این ترتیب، یکی از مهمترین اصول منطق کلاسیک، $A \vee \neg A$، اصل طرد شق ثالث، دیگر معتبر نخواهد ماند. البته، زمانی که منطق لوکاسیویچ را به شیوهٔ ریاضی مطالعه می‌کنیم، فرامنطق مورد استفاده، همان منطق کلاسیک است. برای مثال، زمانی که به سبک تارسکی به گزاره‌های این دستگاه ارزش می‌دهیم، هر گزاره ارزشی مشخص دارد و مثلاً ارزش یک گزاره یا ۰/۵ است یا ۰/۵ نیست.

اصل طرد شق ثالث (principle of excluded middle) در یکی دیگر از منطق‌های غیرکلاسیک مشهور یعنی منطق شهودی نیز، البته با دلایل دیگر، رد می‌شود. منطق شهودی را می‌توان منطق ریاضیات شهودگرایانه دانست که بر اساس ایده‌های براوئر (Brouwer) ریاضیدان هلندی و بر پایهٔ فلسفهٔ شهودی بوجود آمده است. فرامنطق منطق شهودی را می‌توان منطق شهودی مرتبهٔ دوم در نظر گرفت، هر چند این کار محدودیت‌های زیادی برای مطالعهٔ منطق شهودی بوجود می‌آورد. برای مثال، تمامیت معناشناسی کریپکی (Kirpke semantics)، که معناشناسی محبوب این منطق و جایگزینی برای معناشناسی تارسکی است، در فرامنطق شهودی، اثبات‌پذیر نیست (Trolestra et al., 1988).

برخی از منطق‌های غیرکلاسیک اصول منطق کلاسیک را نفی نمی‌کنند اما زبان و اصول آن را گسترش می‌دهند، مانند منطق وجهی(modal logic). ایدهٔ بنیادی این منطق آن است که درستی برخی گزاره‌ها از نوع ضروری است اما در مورد برخی دیگر چنین نیست. البته بجای ضروری بودن می‌توان صادق بودن در همهٔ آینده‌های محتمل را قرار داد و به منطق زمان رسید. با تعبیرهای مناسب دیگر، منطق شناخت را بدست خواهیم آورد. این منطق‌ها هم از نظر فلسفی مفید و جالبند و هم کاربردهایی در علوم کامپیوتر دارند. برای مثال، منطق زمان جایگاه مهمی در زمینهٔ مبحث وارسی مدل در علوم کامپیوتر (model checking) دارد. معمولاً این منطق‌ها را رقیبی برای منطق کلاسیک در نظر نمی‌گیرند.

همانطور که گفتیم، انتخاب یک دستگاه منطقی بیش از آنکه بنابر ملاحظات فلسفی باشد، بر اساس دلایلی از قبیل کاربردپذیری و یا حتی برازندگی‌های ریاضی آن است. اما پرسشی فلسفی که به طور طبیعی در اینجا مطرح می‌شود آن است که کدامیک از این منطق‌های استاندارد یا ناااستاندارد حرف آخر را در مورد قواعد تفکر استدلالی، یعنی کارکرد ویژهٔ

منطق، می‌زند؟ این پرسش ما را به حوزهٔ فلسفهٔ منطق می‌رساند. این پرسشی است نظیر این پرسش که کدامیک از هندسه‌های اقلیدسی یا نااقلیدسی، ساختار جهان را بازنمایی می‌کند. ریاضیدان می‌توان فارغ از ملاحظات فیزیکی، و تنها بر اساس معیارهای درونی ریاضیات، دست به انتخاب هندسهٔ مورد علاقهٔ خود بزند. به همین ترتیب، اینکه منطق کلاسیک بهتر می‌تواند منطق درونی زبان فارسی را نمایش دهد یا منطق فازی، پرسشی خارج از حوزهٔ منطق است.

به عنوان نمونه‌ای جدید از کابردهای منطق، می‌توان به نظریهٔ تایپ‌ها از دید هموتوپی، هموتوپی تایپ تئوری یا HoTT اشاره کرد که اخیراً مورد توجه ریاضیدانان و منطق‌دانان قرار گرفته است (Homotopy Type Theory, 2013). در این دستگاه نمادی با در نظر گرفتن تایپ‌ها به جای مجموعه‌ها در زمینهٔ منطق شهودی، می‌توان بخش‌های وسیعی از ریاضیات را بازسازی کرد. برای نمونه، به جای میدان می‌توان از تایپ میدان‌ها صحبت کرد و به همین ترتیب در مورد دیگر ساختارهای ریاضی.HoTT نظریه‌ای کاملا نمادی است و می‌توان تعبیرهای متفاوتی برای آن در نظر گرفت که مهمترین آن‌ها بر اساس نظریهٔ هموتوپی است. هرچند HoTT اساساً بر مبنای منطق شهودی بنا شده، اما در پیشرفت‌های اخیر برای بازسازی ریاضیات در آن، در صورت لزوم از اصل طرد شق ثالث نیز استفاده می‌شود. از ویژگی‌های خوب این دستگاه آن است که اثبات‌های نمادی شده در آن را می‌توان به صورت رایانه‌ای وارسی کرد. در اینجا مجالی نیست که به این موضوع جدید و جذاب بیشتر بپردازیم. منطق ریاضی که در اوایل قرن بیستم نضج گرفت، اکنون به شاخه‌ای پربار تبدیل شده است.

در دو فصل بعد، به بعضی پرسش‌های فلسفی مرتبط با منطق می‌پردازیم. از زمرهٔ این پرسش‌ها، این است که «منطق چیست؟»، «فرق منطق و دستگاه منطقی کدام است؟» و این‌که «آیا می‌توان به چند منطق معتقد بود؟». البته باید متذکر شد که تعریف منطق به هیچ وجه ساده نیست. برای مثال، پاتنام معتقد است که تعریف منطق بدون دور ممکن نیست و ترجیح می‌دهد که برای فهمیدن مفهوم منطق، به کاری که منطق‌دانان انجام می‌دهند و خود منطق نگاه کند (Putnam, 2010) کند، منابع (Maddy, 2012, 2014) نیز در این زمینه خواندنی هستند.

٦) کثرت‌گرایی در تقابل با یگانه‌گرایی در منطق

کدامیک از منطق‌های مطرح شده، حرف آخر را در مورد قوانین استنتاج می‌زند؟ این پرسشی فلسفی است. در این مورد می‌توان به کثرت‌گرایی (pluralism) یا یگانه‌گرایی (monism) اعتقاد داشت. یگانه‌گرایی در منطق به این عقیده اطلاق می‌شود که تنها یک منطق راستین وجود دارد و مابقی منطق‌های موجود یا آن‌هایی که در آینده ممکن است معرفی شوند، معتبر نیستند. در مقابل، کثرت‌گرایی در منطق معتقد است که منطق‌های مختلفی ممکن است که همگی معتبر باشند. به

نظر می‌رسد که فرگهٔ افلاطون‌گرا، یک یگانه‌گرای منطقی است و در عوض فیلسوفی چون کارناپ (Carnap) را می‌توان در دستهٔ کثرت‌گراها قرار داد.

کثرت‌گرایی خود به چند دسته تقسیم می‌شود. ممکن است بپذیریم که منطقی راستین و یگانه وجود دارد و دستگاه‌های مختلف موجود، همگی تلاش هایی برای پرده برداشتن از این منطق هستند، پس به نوعی همگی مایه‌هایی از حقیقت را در بر دارند. اینکه در نهایت ممکن است این منطق راستین را شناسایی کنیم یا تنها باید به تقریب‌هایی دل خوش کنیم، خود موضوعی دیگر است. در مقابل، دسته‌ای ممکن است چنین بیاندیشند که چنین منطق راستین نهایی‌ای وجود ندارد. در توجیه عقیدهٔ اخیر، راه‌های مختلفی توسط کثرت‌گراهای به کار گرفته شده‌اند. کسانی مانند کارناپ که منطق را به قراردادهای زبانی تحویل می‌کنند و اصطلاحات منطق و دستگاه منطقی را به یک معنا به کار می‌برند، معتقدند مادامی که قواعد زبانی به دقت معرفی شوند، هرکس می‌تواند دستگاه منطقی خود را داشته باشد و به این ترتیب هیچ دستگاه منطقی بر دیگری رجحان ندارد.

کواین که خود یک کثرت‌گراست، این عقیدهٔ کارناپ را رد می‌کند. یک دلیل این موضوع آن است که قواعد زبانی خود می‌بایست بر مبنای قواعد منطقی از پیش مفروض معرفی شوند. به نظر می‌رسد برخی قواعد منطقی آنقدر پایه‌ای هستند که از بکار بردن آنها گریزی نیست. برای مثال، استفاده از این اصل که می‌توان از حکمی جهانی، نمونه‌ای خاص را استنتاج کرد، در بنیادگذاری یک دستگاه منطقی اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. دلیل این موضوع آن است که با توجه به نامتناهی بودن مجموعهٔ همهٔ جمله‌های معتبر، در معرفی قواعد یک منطق، می‌بایست از قواعدی کلی‌تر پیروی کرد و هر قاعدهٔ آن منطق را نمونه‌ای از یکی از این قاعده‌های کلی‌تر دانست. کواین معتقد است که اختلاف بر سر ادات منطقی به خاطر آن است که در واقع ادات مختلفی با نام‌های مشابه در نظر گرفته شده‌اند. برای مثال V در منطق کلاسیک با V در منطق شهودی دو رابط مختلف هستند و دو کاربرد مختلف دارند. این با دیدگاه کل‌گرایی(holism) کواین هم‌خوانی دارد، قواعد منطق بخشی از نظریه‌های علمی هستند و با تغییر آنها می‌توان حتی در منطق هم تجدید نظر کرد. البته رابط‌های مختلف در این دستگاه‌های مختلف، ممکن است که تشابه ظاهری داشته باشند اما به هیچ وجه یکی نیستند. پس کواین به یک معنی کثرت‌گرا است و به یک معنی نه. در پارادایم‌های مختلف با قواعد مختلف منطقی مواجه هستیم، اما با تثبیت پارادایم، منطق را هم تثبیت کرده‌ایم.

البته مدی (Maddy) نظر کواین را هم رد می‌کند (Maddy, 2012). نظر او را با یک مثال می‌توان توضیح داد. مفهوم سرعت در مکانیک نیوتنی و نسبیتی متفاوتند ولی هر دوی این نظریه‌های فیزیکی نمی‌توانند درست باشند. این دو نظریه

رقیب هم محسوب می‌شوند. پس نمی‌توان گفت که هم مکانیک نیوتنی و هم مکانیک نسبیتی در مورد مفهوم سرعت بر حق هستند. در نهایت شاید کواین بتواند بگوید که منطق می‌بایست به آخرین نظریه‌های علمی که مقبولیت عام دارند، متعهد بماند.

تارسکی نیز از نوعی کثرت‌گرایی دفاع می‌کرد که مبتنی بر این ایده است که در تعریف منطق بر حسب قاعده‌هایی که صدق را حفظ می‌کنند، می‌بایست رابطهٔ بین مقدمات و نتیجه را در زمینه‌های مختلف تحلیل کرد. با در نظر گرفتن زمینه‌های مختلف، عجیب نخواهد بود که یک استنتاج در یک منطق معتبر و در دیگر نامعتبر باشد. اخیراً بیل (Beall) و رستال (Restall) بر اساس استدلالی مشابه، از کثرت‌گرایی دفاع کرده‌اند (علایی‌نژاد و دیگران، ۱۳۹۸ و کلانتری و دیگران، ۱۳۹۸). هارتری فیلد (Field, 2009) این دفاع از کثرت‌گرایی را موجه می‌داند، اما این شکل از کثرت‌گرایی را جالب نمی‌داند. به اعتقاد او، این‌که در موقعیت‌های مختلف به شکل‌های مختلف استدلال کنیم، چیز عجیبی نیست. خود فیلد از نوعی کثرت‌گرایی هنجاری (normative pluralism) دفاع می‌کند، یعنی معتقد است که هنجارها و معیارهای مختلفی برای بررسی استنتاج‌ها وجود دارد و هر کس می‌توان بر اساس هنجارهای مورد نظر خود، از دستگاه منطقی مورد نظرش دفاع کند.

دستگاه‌های منطقی متکی بر زبان نمادی هستند و به کمک روش‌های ریاضی ساخته می‌شوند. بر این اساس، اینکه دستگاهی اثباتی موجه است، بستگی به این دارد که بتوان معناشناسی درست و تمام مناسبی برای آن ارائه کرد و کاربرد معقولی برای آن یافت. در واقع، دستگاه‌های منطقی، شکل ویژه‌ای از دستگاه‌های ریاضی هستند که متناسب با سلیقهٔ ریاضیدانان در بخش منطق قرار گرفته‌اند. اینکه یک اصل منطقی خاص، مانند اصل طرد شق ثالث، در یک دستگاه منطقی خاص مجاز است یا نه، بیشتر از آنکه پرسشی فلسفی باشد، پرسشی مرتبط با سلیقه است. البته اینکه مثلاً کاربرد این اصل در مورد زبان‌های طبیعی مجاز است یا نه، پرسشی مهم است که بیش از آنکه به ریاضی‌دانانی که دستگاه‌های منطقی را مطالعه می‌کنند مرتبط باشد، به فیلسوفان منطق برمی‌گردد. البته باید توجه کرد که به عنوان بخشی از ریاضیات، این دستگاه‌ها بر مبنای منطق متعارف ریاضی، یعنی منطق کلاسیک، مطالعه می‌شوند. به عبارت دیگر، فرامنطق این دستگاه‌ها همان منطق کلاسیک است.

به نظر می‌رسد برای اینکه بتوانیم به انتخابی بین کثرت‌گرایی و یگانه‌گرایی دست بزنیم، می‌بایست پیش از آن به این پرسش پاسخ دهیم که منطق چیست. بررسی این پرسش، موضوع اصلی فلسفهٔ منطق است. در فصل بعد، به صورت اجمالی به این پرسش می‌پردازیم.

۷) منطق چیست؟

در ادامه، به برخی پرسش‌های کلی که در مورد منطق مطرحند، می‌پردازیم. از زمرهٔ این پرسش‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد: منطق چیست؟ ملاک اعتبار قواعد منطقی کدام است؟ مرز میان منطق و دستگاه‌های منطقی، و دستگاه‌های منطقی و دیگر دستگاه‌های ریاضی را بر اساس چه ملاک‌هایی باید ترسیم کرد؟ ابتدا مروری بر برخی نظرهای مختلف در این زمینه می‌کنیم.

همانطور که در مورد منطق کلاسیک دیدیم، هر منطق شامل جمله‌هایی است که در آن منطق معتبر هستند (شامل اصول آن منطق) و همچنین شامل قواعدی استنتاجی است که معتبر بودن را حفظ می‌کنند. در تعریف یک منطق، هر دوی این موارد مهم‌اند. در ضمن، گاهی از یک دستگاه منطقی صحبت می‌کنیم و گاهی از یک منطق، اما در هر حال، یک دستگاه نمادی منطقی نیز معمولاً به عنوان نمادی شدهٔ منطقی خاصی در نظر گرفته می‌شود. البته در این مورد استثناهایی نیز وجود دارد. برای مثال منطق پیوسته، دستگاهی منطقی است که اساساً به منظور به کار بردن ساختارهای منطقی‌گون در آنالیز ریاضی ساخته شده است (خاتمی و دیگران، ۱۳۹۸). در عوض، دستگاه‌های مختلف منطق کلاسیک معرفی شده توسط فرگه، هیلبرت، گنتسن و دیگر بنیان‌گزاران منطق، قرار است که منطق کلاسیک که حاکم بر زبان طبیعی (و یا جهان) است را نمادی‌سازی کنند، هر چند هدف اصلی معرفی این منطق به عنوان پایه‌ای برای ریاضیات بوده است.

فرگه معتقد است که منطق به این پرسش که مردم چگونه فکر می‌کنند مرتبط نیست، بلکه به این پرسش مرتبط است که اگر قرار نیست حقیقت را از دست دهند، چگونه باید فکر کنند. در اینجا، فرگه بر ضد روانشناسی‌گرایی در منطق استدلال می‌کند که هدف آن فروکاستن منطق به فرایندهای ذهنی و روانی انسانی است. به عقیدهٔ فرگه، منطق مستقل از انسان و ذهن او است. قواعد منطق مستقل از زبان هستند و به واقعیتی مستقل اشاره می‌کنند. استدلال زیر، از دید فرگه، نمونه‌ای از یک استدلال موفق است:

اگر «تاس یا زوج بیاید و یا فرد بیاید»، و اگر «تاس زوج نیامده است»، لزوماً «تاس فرد آمده است».

با این توضیحات، به نظر می‌رسد که فرگه را می‌بایست یگانه‌گرا بدانیم. در تقابل با این عقیده، پوزیتیویست‌های منطقی قرار دارند. به اعتقاد اینان، حقیقتی که به زبان نیاید وجود ندارد. مانیفست پوزیتیویست‌ها در مورد منطق، به خوبی توسط کارناپ در عبارات زیر طرح شده است:

> *هر کسی آزاد است که منطق خودش را، یعنی شکل زبان خودش را، همان طور که می‌خواهد بسازد. تمام آن چه از او خواسته می‌شود، این است که اگر می‌خواهد در این باره بحث کند، باید روش‌های خود را به روشنی بیان کند و جای استدلال‌های فلسفی، قواعد نحوی ارائه دهد.* (Carnap, 1934, p. 52)

به اعتقاد کارناپ، قواعد منطق بخشی از قواعد زبانی هستند و در آزادی کامل می‌توان یک زبان (نمادی) ساخت. این قواعد را می‌توان در قالب دستگاه‌های مختلف اثباتی بیان کرد. البته این مانع از آن نیست که در زبانی مناسب بتوان در مورد صدق و کذب جملات زبان مورد بحث هم سخن گفت، این خود چیزی جز یک بازی زبانی دیگر نیست. در این مورد کارناپ با تارسکی هم‌دلی دارد (Carnap, 1963).

اما همانطور که دیدیم، کواین فیلسوف آمریکایی معاصر، تقلیل منطق به قواعد زبانی که جنبهٔ قراردادی دارند را رد می‌کند. به اعتقاد کواین، منطق بخشی از منظومهٔ دانش ما است که شامل علوم طبیعی و ریاضیات نیز است و تغییر در بخشی از این منظومه ممکن است به تغییر در بخش‌های دیگر منجر شود و کل منظومه را تغییر دهد. در کناره‌ها است که یک منظومه با محک تجربه و آزمایش سنجیده می‌شود و در صورت مغایرت نیاز به تغییر بوجود می‌آید. این تغییر حتی در بخش منطق، یعنی پایه‌ای ترین بخش منظومهٔ دانش هم ممکن است، هرچند که به دلایل روانی، ممکن است مقاومت در مقابل تغییر در مورد این بخش‌های پایه‌ای منطقی و ریاضی، بسیار بیشتر باشد. برای مثال، پس از معرفی جمع نسبیتی سرعتها در مکانیک نسبیتی، کسی تمایل به تغییر قوانین حاکم بر جمع عددها نداشت، هرچند این کار علی‌الاصول امکان‌پذیر است. برای نمونه، می‌توان به اصل توزیع‌پذیری $\wedge$ نسبت به $\vee$ اشاره کرد. این اصل در پرتو تفسیری از مکانیک کوانتومی رد می‌شود. حتی اصل این‌همانی نیز چنین وضعیتی دارد. دوگانگی ذره–موج می‌تواند به تغییر تصور ما از نحوهٔ وجود هویت‌های فیزیکی منجر شود.

در واقع، کواین معتقد است که ادات منطقی که دستگاه‌های مختلف منطقی به آنها اشاره می‌کنند، هر چند نامی مشابه داشته باشند، در واقع چیزهایی متفاوتند. برای نمونه، همانطور که در بخش قبل گفتیم، $\vee$ در منطق شهودی و $\vee$ در منطق

کلاسیک علی‌الاصول رابط واحدی نیستند، و می‌توان در دو پارادایم مختلف، از دو V مختلف استفاده کرد. به این معنی او یگانه‌گرا است. اما از آنجا که او پارادایم‌های مختلف را، بر حسب بهترین نظریه‌های تجربی موجود، ممکن می‌داند، از نظر دیگر او کثرت‌گرا است. همانطور که در فصل قبل اشاره شد، پنلوپه مدی، فیلسوف معاصر، به این دیدگاه کواین خرده می‌گیرد. به نظر او، ایراد کواین به کارناپ بر خود او نیز وارد است. به اعتقاد او، بخش‌هایی از منطق مانند اصل امتناع اجتماع نقیضین، حتی در دریافتن اینکه بخشی از منظومهٔ دانش غلط است، مورد نیاز هستند. به عبارت دیگر، برخی اصول منطقی غیر قابل صرف نظر کردن هستند و جایگاهشان با مثلاً اصل توزیع‌پذیری ۸ نسبت به V، متفاوت است. این منطق پایه را مدی منطق ابتدایی (rudimentary logic) می‌نامد. ظاهراً در مورد این بخش، مدی یک یگانه‌گرا است. البته این بخش منطق، لزوماً شامل همهٔ منطق کلاسیک نیست. این بخشی است که جهان، اگر درست در نظر گرفته شود، درست است و ما با توجه به ویژگی‌هایی که داریم تمایل داریم که آن را پیشینی، ناوابسته به تجربه، فرض کنیم. به این ترتیب، مدی از نوعی واقع‌گرایی نوافلاطونی دفاع می‌کند (Maddy, 2012).

مشکل اصلی در مورد درک منطق این است که آنچنانکه ویتگنشتاین (Wittgenstein) (در رساله) می‌گوید، قواعد منطق را تنها می‌توان نمایش داد و نمی‌توان توضیح یا بیان کرد، زیرا در توضیح دادن آن‌ها نیز می‌بایست از همین قواعد استفاده کرد. همانطور که قواعد یک زبان خاص مانند فارسی را نمی‌توان در خود آن زبان، بدون دانستن پیشاپیش آن زبان توضیح داد. در مورد منطق، در واقع این کار را در هیچ زبان طبیعی دیگری نمی‌توان انجام داد، زیرا منطق زبان‌های مختلف یکسان است. منطق مربوط به یک زبان خاص نیست و بنابراین به هیچ زبانی قابل توضیح دادن نیست، منطق کلی‌ترین قواعد ممکن است. در این مورد برخی این ایراد را مطرح کرده‌اند که در مورد یک منطق خاص، می‌توان در فرامنطق آن سخن گفت. اما در مورد زبان‌های طبیعی به نظر می‌رسد که این انتقاد وارد نیست، زیرا در مورد زبانی چون فارسی، زبان فرامنطق، خود این زبان است. به علاوه، زبان‌های طبیعی مختلف، از ساختار منطقی یکسانی برخوردار هستند.

در مورد منطق ریاضیات، از آنجا که منطق کلاسیک از ابتدا برای مطالعهٔ ریاضیات بنا شده است، توافق نسبی بر پذیرفتن منطق کلاسیک وجود دارد. البته برخی فیلسوفان حتی در زمینهٔ ریاضیات، منطق استاندارد را زیر سوال برده‌اند. برای مثال، کالیوان معتقد است که برای توجیه بخش‌هایی از ریاضیات که ناسازگار به نظر می‌رسند ولی در عین حال کارا هستند، چون نظریهٔ طبیعی (غیر اصل‌موضوعی) مجموعه، استفاده از منطق‌های پاراسازگار(paraconsistent logic) مناسب است (Colyvan, 2012). در این منطق‌ها، قاعدهٔ تناقض، یعنی اینکه از تناقض بتوان هر گزاره‌ای را نتیجه گرفت، رد می‌شود. یک توجیه این موضوع آن است که پیش از ظهور نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه، ریاضیدانان با مفهوم شهودی مجموعه

کار می‌کردند، و ظاهرا پارادوکس هایی چون پارادوکس راسل، مشکلی در این راه نبوده است. حتی کارایی مفهوم شهودی و متناقض حد از دید نیوتون، قبل از ظهور تعاریف رسمی امروزی، گواهی بر این ادعا قلمداد شده است.

به نظر نمی‌رسد که دلایل ذکر شده، ریاضی‌دانان امروزی را مجاب به تغییر منطق پایه‌ای ریاضیات کند. البته آن‌ها حتماً از ساخت دستگاه‌های ریاضی برای منطق‌های غیرکلاسیک بر اساس معیارهای ریاضی استقبال می‌کنند، به شرط آنکه کاربردی داشته باشند یا با دیگر شاخه‌های ریاضی ارتباط برقرار کنند.

۸) نتیجه‌گیری

در این مقاله، در مورد برخی نکات حساس در منطق ریاضی روشن‌گری کردیم. سپس با توجه به تفاوت بین منطق و دستگاه منطقی بناشده بر پایه‌ی ریاضیات، توضیح دادیم که در انتخاب این دستگاه‌ها، تا حدود زیادی آزادی وجود دارد. به این ترتیب، در انتخاب دستگاه منطقی از کثرت‌گرایی دفاع کردیم. اما این پرسش که منطق چیست و یا اینکه آیا در انتخاب منطق تا چه حد آزادی وجود دارد را به فیلسوفان واگذار کردیم. به‌علاوه، همان‌طور که تارسکی، پاتنام، فیلد و برخی دیگر از منطق‌دانان و فیلسوفان منطق متذکر شده‌اند، ما نیز معتقدیم مرز بین دستگاه‌های منطقی و بقیهٔ دستگاه‌های ریاضی چندان شفاف نیست.

منطق کلاسیک جایگاهی منحصر بفرد در دانش منطق دارد و امکان بنیان ریاضیات بر مبنای نظریهٔ مجموعه و مهمترین دستگاه منطقی مربوط به آن، یعنی ZFC، نشان داده‌است که ریاضیات استاندارد به خوبی می‌تواند بر بنیاد منطق کلاسیک بنا شود. اما این از اهمیت منطق‌های غیرکلاسیک نمی‌کاهد. مطالعهٔ هر یک از دستگاه‌های مختلف منطق‌های غیرکلاسیک به خاطر کاربردهای مختلف و حتی زیبایی‌ها و پیچیدگی‌های ریاضی آن‌ها، ادامه خواهد یافت.

کتاب‌نامه

خاتمی م.، پورمهدیان م. (۱۳۹۸). منطق پیوسته، *منطق‌پژوهی*، سال ۱۰، شماره ۱، صص. ۸۹–۱۲۰.

علایی‌نژاد ح.، حاج‌حسینی م. (۱۳۹۸). بررسی انتقادی کثرت‌گرایی غایت‌محور در مورد منطق، *منطق پژوهی*، سال ۱۰، شمارهٔ ۱، صص. ۱۹۵–۲۱۱.

کلانتری، ع.، کرباسی‌زاده، ا. (۱۳۹۸). بررسی کثرت‌گرایی منطقی با تکیه بر آرا بیل و رستال، *حکمت و فلسفه*، سال ۱۵، شمارهٔ ۵۸، صص. ۷–۲۸.

Beall, J., Restall, G. (2006). *Logical Pluralism*, Oxford: Oxford University Press.

Carnap, R. (1963). Intellectual Autobiography in *The philosophy of Rudolf Carnap*, Paul Arthur Schilpp (ed.), Open Court Publishing Company.

Carnap, R. (1934). *Logical Syntax of Language*, A. Smeaton (translator), Routledge & Keagan Paul, London, 1937.

Colyvan, M. (2012). *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Enderton, H. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic*, Second Edition, Academic Press.

Field, H. (2009). Pluralism in Logic, *The Reviews of Symbolic Logic*, vol. 6, no. 2 , pp. 345-359.

Hajek, P., Pudlak, P. (1993). *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag.

Halbach, V., Leigh G. E. (2020), Axiomatic Theories of Truth, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.).

Halpern, J., Harper R., Immerman N., Kolaitis P. (2001). On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 7. No. 2, pp. 213-236.

Halvorson, H. (2019). *The Logic in Philosophy of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Homotopy Type Theory*: The Univalent Foundations Program*, Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2013.

Hrushovski, E. (1996). The Mordel-Lang Conjecture For Function Fields, *Journal of American Mathematical Society*, vol. 9, no. 3, pp. 667-690.

Maddy, P. (2012). The Philosophy of Logic, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 18, no. 4, pp. 481-504.

Maddy, P. (2014). *The Logical Must: Wittgenstein on Logic*, Oxford: Oxford University Press.

Priest, G. (2017). What is the Specificity of Classical Mathematics?, *Thought: A Journal of Philosophy,* vol. 6, Issue 2.

Putnam, H. (2010). *Philosophy of Logic*, Routledge.

Trolestra A. S., van Dalen D. (1988), *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, vol. 1 and 2, North Holland.