جانشانی های گویا ساز :

در این روش انتگرال‌گیری از جانشانی هایی استفاده می‌کنیم که عبارات رادیکالی، نمایی، مثلثاتی و... (غیرگویا) را به عبارات گویا یا کسرهای گویا تبدیل می‌نمایند تا با تکنیک‌های آن‌ها قابل حل شوند.

برای انجام این گونه جانشانی‌ها باید عبارت غیرگویا (یا عبارات غیرگویا) را با تغییر متغیر مناسب به چند جمله‌ای تبدیل نمود.

مثال : انتگرال‌های زیر را حل نمایید.

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} = A$$

حل : برای از بین بردن همزمان هر دو رادیکال، کافیست قرار دهیم :

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

$$A = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = \int \frac{6t^5}{t^2(t+2)} dt = 6\int \frac{t^3}{t+2} dt$$

$$= 6\int \frac{t^3 + 8 - 8}{t+2} dt = 6\left(\int \frac{\cancel{(t+2)}(t^2 - 2t + 4)}{\cancel{t+2}} dt - 8\int \frac{1}{t+2} dt\right)$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} + 4t\right) - 48 \, Ln|t+2|$$

و می‌دانیم که $t = \sqrt[6]{x}$ ؛ پس :

$$A = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48 \, Ln(2 + \sqrt[6]{x}) . \square$$

$$*\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = B$$

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \qquad x=(t^3-1)^4 \Rightarrow dx = 4(t^3-1)^3 \times 3t^2\,dt$$

$$B=\int \frac{t}{\cancel{(t^3-1)^2}}\, 4(t^3-1)^{3} \times 3t^2\,dt$$

$$=12\int t^3(t^3-1)\,dt = 12\int t^6-t^3\,dt$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)=\frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7-3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4 .$$

$$*\int \frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x+2}\,dx = C \quad \times\frac{e^x}{e^x}$$

$$u=e^x \Rightarrow du=e^x\,dx$$

$$C=\int \frac{u+1}{(u^2-u+2)u}\,du$$

برای ادامه حل نیاز به تفکیک کسر داریم:

$$\frac{u+1}{(u^2-u+2)u}=\frac{Au+B}{u^2-u+2}+\frac{C}{u}=\frac{(Au+B)u+C(u^2-u+2)}{(u^2-u+2)u}$$

$\Delta<0$

$$\begin{array}{ll} u^2 & 0=A+C \\ \Rightarrow u & 1=B-C \\ \text{ثابت} & 1=2C \Rightarrow C=\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow B=\frac{3}{2} \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C=\int \frac{-\frac{1}{2}u+\frac{3}{2}}{u^2-u+2}\,du \times\frac{-4}{-4}+\int\frac{\frac{1}{2}}{u}\,du=-\frac{1}{4}\int\frac{2u-\overset{-1-5}{6}}{u^2-u+2}\,du+\frac{1}{2}\ln|u|$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{2u-1}{u^2-u+2}\,du-\frac{1}{4}\int\frac{-5}{(u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\cancel{2}+\frac{7}{4}}\,du+\frac{1}{2}\ln|u|$$

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|u^2-u+2|+\frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\arctan\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}+\frac{1}{2}\ln|u| \overset{u=e^x}{=}\dots$$

جایگزین

$$* \int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\, dx = D$$

حل :

$$\underset{\text{انتگرالده}}{D} \times \frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}} = \quad \left(\text{مزدوج مخرج} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)$$

$$= \int \frac{2 - 2\sqrt{1-x^2}}{\cancel{1}+x-\cancel{1}+x}\, dx$$

$$= \int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}\, dx \qquad \times \frac{x}{x}$$

برای حل با تغییر متغیر و همزمان از بین بردن رادیکال، قرار می‌دهیم :

$$u^2 = 1 - x^2 \Rightarrow \cancel{2}u\,du = -\cancel{2}x\,dx$$

$$\Rightarrow D = \int \frac{1-u}{1-u^2}(-u\,du) = \int \frac{-u}{1+u}\, du = \dots$$

ادامه بر عهده دانشجو ... (کسرها)

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = E$$

$$t^2 = e^x + 1 \Rightarrow 2t\,dt = e^x\,dx$$

$$\underset{\text{انتگرالده}}{E} \times \frac{e^x}{e^x} = \int \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(t^2-1)} = 2\int \frac{1}{t^2-1}\, dt = \dots$$

ادامه بر عهده دانشجو (کسرها)

منظور از چند جمله‌ای برحسب دو متغیر x و y، جمع چند جمله به فرم $\alpha x^m y^n$ می‌باشد که n و m اعداد صحیح نامنفی و $\alpha \in R$. این چند جمله‌ای را با $P(x,y)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً

$$P(x,y) = \sqrt{5} + 7xy^3 + 9x^2y - \frac{3}{4}x^2$$

همچنین $R(x,y)$ را تابع گویا (کسر گویا) برحسب x و y گوییم اگر $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ باشد جایی که P و Q هر دو چند جمله‌ای برحسب x و y باشند.

تابع $R(\sin x, \cos x)$ را تابع گویایی برحسب توابع $\sin x$ و $\cos x$ می‌دانیم که البته در کل تابعی از x می‌باشد. مانند:

$$F(x) = R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 - 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x}$$

* برای انتگرال‌گیری از توابع گویا برحسب $\cos x, \sin x$:

از جانشانی نصف زاویه یعنی

$\boxed{u = tg\frac{x}{2}}$ ؛ $-\pi < x < \pi$

استفاده می‌کنیم که طی آن انتگرال تابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$ به انتگرال یک کسر گویا برحسب u نوشته می‌شود و می‌توان آن را با کسرهای جزئی حل نمود لذا از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{مورد}]{\text{اثبات یک}} \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} \; \frac{\div \cos^2\frac{x}{2}}{\div \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2u}{1+u^2}$$

& ...

مثال: انتگرال‌های زیر را حل کنید:

* $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx$

$$=\int \frac{1-\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{\frac{1+u^2-2u}{1+u^2}}{\cancel{\frac{1+u^2+1-u^2}{1+u^2}}} \times \cancel{\frac{2du}{1+u^2}}$$

$$=\int 1-\frac{2u}{1+u^2}\,du = u - Ln(1+u^2)\Big|_{u=tg\frac{x}{2}}$$

$$= tg\frac{x}{2} - Ln(1+tg^2\frac{x}{2}) = tg\frac{x}{2} - Ln(\sec^2\frac{x}{2})$$

$$= tg\frac{x}{2} + 2Ln(\cos\frac{x}{2}). \quad \square$$

---

* $\int \frac{dx}{\cos x \sin x - 2\sin x}$

فاکتور

$$= \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}-2\right)} = \int \frac{du}{u\left(\frac{1-u^2-2-2u^2}{1+u^2}\right)} = \int \frac{(1+u^2)du}{u(-3u^2-1)}$$

تفکیک کسر برعهده دانشجو

$$\overset{}{=\!=} \int \frac{-1}{u}du + \int \frac{2u}{3u^2+1}du \times \frac{3}{3}$$

$$= -Ln|u| + \frac{1}{3}Ln|3u^2+1|$$

$$\overset{u=tg\frac{x}{2}}{=\!=} -\underbrace{Ln|tg\tfrac{x}{2}|}_{} + \frac{1}{3}Ln(1+3tg^2\frac{x}{2}). \quad \square$$

برابر: $Ln|Ctg\frac{x}{2}|$