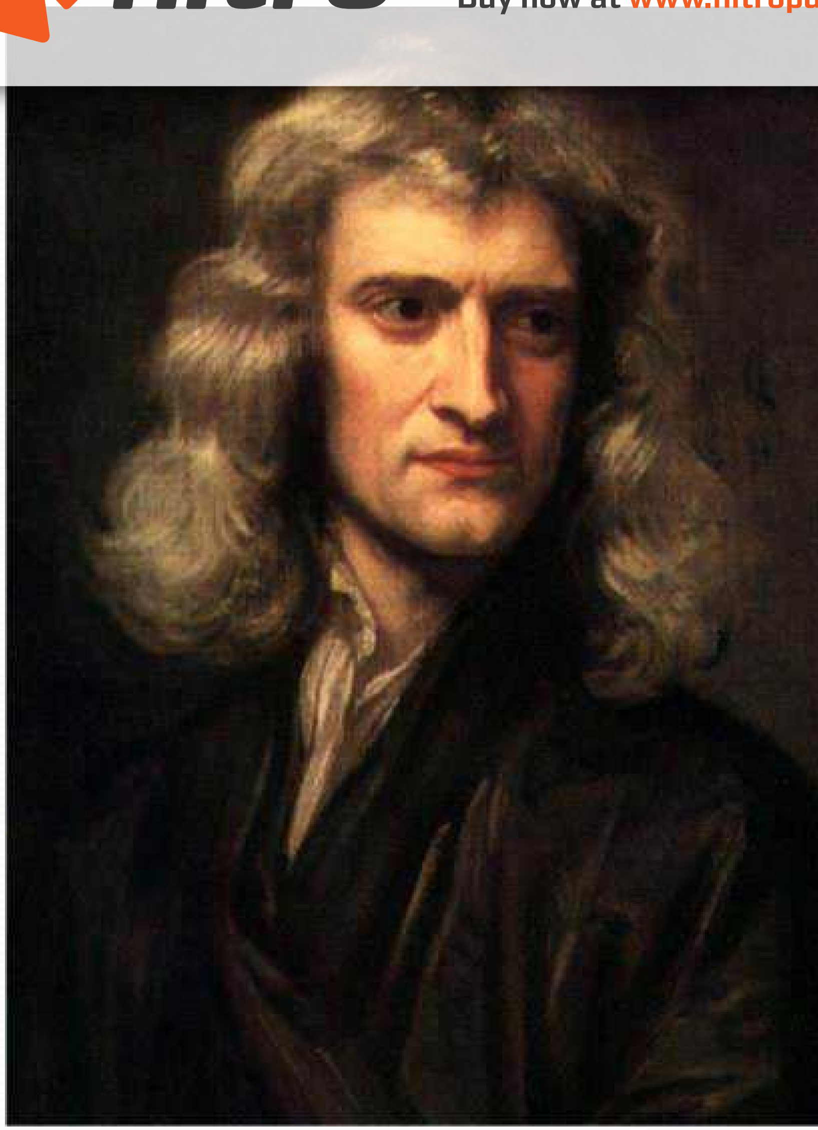
Ideas of Calculus in Islam and India

استاد راهنما:دکتر اصغری

گردآورندگان :رویا سلطانلو و فهیمه فاطمی

در ارتباط با درس تاریخ ریاضیات

سال تحصیلی 92-91



- سِرآیزاک یا اسحاق (نیوتن)
- ژانویه 1643-مارس 1727
- فیزیکدان ، ریاضیدان ،ستاره شناس،فیلسوف و شهروند انگلیسی بوده است.
- وی در سال 1687 میلادی شاهکار خود اصول ریاضی فلسفه طبیعی را به نگارش در آورد.

- نیوتن ورژن خود را از حساب جامعه و فاضله در طول سال های1665 تا 1670 ایجاد کرد.

- نیوتن باور داشت که او سری های توانی را اختراع کرده بود وهمچنین او به خوبی می دانست که مساحت زیر خم $y = x^n$ بین x=o و x=b می شود:

$$b^{n+1}/(n+1)$$

- این مسئله توسط چند ریاضی دان به نام های کاوالیری ، روبروال و فرما در حدود سال های1630 تا 1640گسترش یافته بود .

- پی‌یر دو فرما

- در سال 1601در نزدیکی مونتابن فرانسه متولد شد .
- او تحصیلات اولیه را در منزل گذراند و برای تفریح به ریاضی می پرداخت.
- امروزه بسیاری از اکتشافات او مهمترین قضایاهستند.
- با مکاتباتی که با پاسکال داشت اساس علم احتمالات را پی ریزی کرد.

- ژیل دو روبروال
- (۱۶۰۲-۱۶۷۵)
- ریاضیدان معروف فرانسوی بود.
- مهمترین کار وی درباره منحنیات ریاضی است. و نیز ترازویی اختراع کرد که بنام خود وی معروف است.

- کاوالیری
- 1642-1564
- دانشمند ایتالیایی
- از همان سال های نخستین به ریاضیات علاقه مند بود،و تحت تاثیر گالیله، روش « غیر قابل تقسیم ها» را در هندسه بوجود آورد که در اثر بزرگ او در سال ۱۶۳۵، با عنوان «هندسه، با طرح تازه ای بر اساس غیر قابل تقسیم های پیوسته»، به شهرت رسید .

- بنابراین نیوتن با استفاده از سریهای توانی مساحت زیر گستره متنوعی از خم ها را پیدا می کرد و هم چنین با استفاده از فرمول مساحت سری های توانی را گسترش می داد.

- اما چیزی که نیوتن نمی دانست این بود که فرمول مساحت و سری توانی گسترش یافته بودند خیلی سال زودتر ،برای مثال فرمول مساحت در مصر حدود سال Ad 1000و سری های توانی برای sin, cos و Arctan در هند در حدود قرن 14 گسترش یافته بود.

- وحال گسترش این دو ایده است که در ادامه بحث خواهد شد.

ابن هیثم

- (965-1039)
- دانشمندان سرشناس ایرانی در قاهره می زیست.
- اولین دانشمند فیزیک نور در جهان است، که در زمینه شناخت نورو قانون‌های شکست و بازتاب آن نقش مهمی ایفا کرده‌است. شرح اصول اتاقک تاریک و اختراع ذره‌بین از کارهای برجستهٔ این دانشمند ایرانی و مسلمان است.

قبل از رفتن به قرن 11 مصر:

نامه فرما را داریم.

در ابتدا به قرن 11 مصر می رویم:

- مجموع های توان های صحیح
- فرمول هایی برای مجموع های توانی هایkام مثل ورژن نامساوی روبرال از اوایل قرن 11 به وسیله Haythamنیز شناخته شده بودند و حتی فرمولی برای مجموع های مربع ها حدود 250سال قبل از میلاد به وسیله ارشمیدس نیز ارائه شده بود.

Haythamنشان داد که چطور فرمولی برای توان هایk ام را از k=1 تا k=4گسترش میدهد و حتی توانست اثباتش را برای مجموع هر توان های صحیحی تعمیم دهد.

اما تعمیم اثباتش را بیان نکرد و این شاید برای این بود که او نیازی به آنها نداشته است.

معادله ای از Haytham

معادله از Haytham

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right)$$

استفاده میکند و اثبات هایش را با استقرا روی n بیان میکند که ما در این جا برای حالت k=3 وn=4 اثباتش را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
&(4+1)(1^3+2^3+3^3+4^3)\\
&=4(1^3+2^3+3^3+4^3)+1^3+2^3+3^3+4^3\\
&=4\cdot 4^3+4(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3\\
&=4^4+(3+1)(1^3+2^3+3^3)+1^3+2^3+3^3+4^3.
\end{aligned}$$

- برای n=3;

$$
\begin{aligned}
&(3+1)(1^3+2^3+3^3) \\
&= 1^4+2^4+3^4+(1^3+2^3+3^3)+(1^3+2^3)+1^3.
\end{aligned}
$$

- بنابراین او با اثبات فرمول های مجموع برای مربعات و مکعبات به شکل زیر:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4}\right) n(n+1)n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

- یک اثبات برای هر kای با استقرا روی n،برای مجموع های توان های صحیح ارایه می دهد.حال در ادامه داریم:

$$
\begin{aligned}
(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^4}{4}+\frac{p^3}{2}+\frac{p^2}{4}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2.
\end{aligned}
$$

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

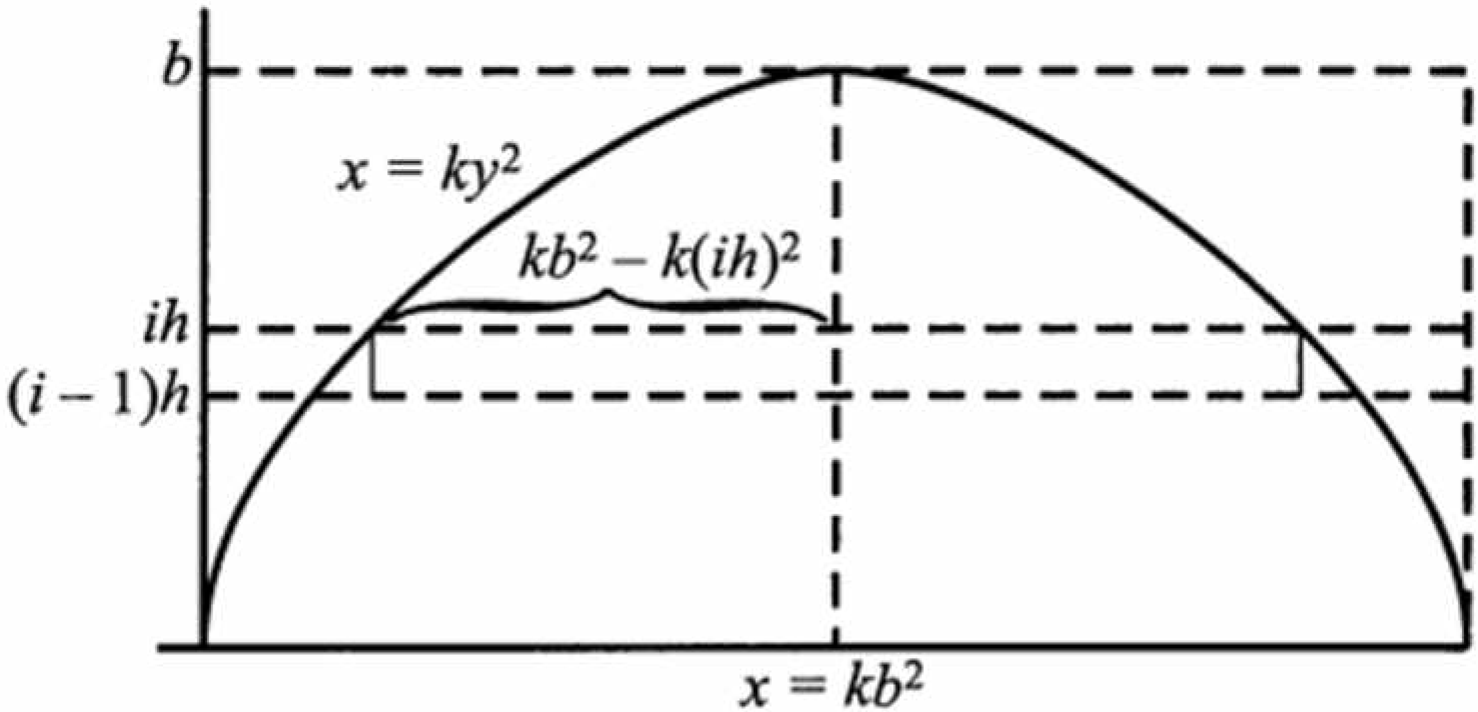
$$\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(n+1-\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^4 &= \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\right)n(n+1)n \\
&\quad -\frac{1}{5}\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n(n+1)n \\
&\quad -\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)n\cdot\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right) n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right].$$

که این هم مساویه با: $n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30$

و Haytham از نتیجه خوداز مجموع توان های صحیح استفاده می کند که حجم شکلی که با چرخاندن سهمی $x = ky^2$ به دور خط $x = kb^2$ عمود بر محور سهمی، ایجاد می شود را محاسبه کند و نشان می دهد که این حجم $\frac{8}{15}$ حجم استوانه ای به شعاع kb^2 وارتفاع b می باشد.


b
x = ky²
kb² – k(ih)²
ih
(i – 1)h
x = kb²

- روش او این گونه بود که استوانه و مخروط را به n تا دیسک به ضخامت $h = b/n$ برش می داد و بعد دیسک ها را اضافه می کرد وi امین دیسک در مخروط دارای شعاع $kb^2 - k(ih)^2$ می باشد و بنابراین حجم می شود:

$$\pi h(kh^2n^2 - ki^2h^2)^2 = \pi k^2 h^5 (n^2 - i^2)^2.$$

- و حجم کل مخروط تقریب زده می شود با :

$$\pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)^2 = \pi k^2 h^5 \sum_{i=1}^{n-1} (n^4 - 2n^2 i^2 + i^4).$$

- اما چون Haytham فرمول های مجموع های توان های مربعات و توان های 4ام را می دانست او می توانست محاسبه کند:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n^4 - 2n^2i^2 + i^4) = \frac{8}{15}(n-1)n^4 + \frac{1}{30}n$$
$$= \frac{8}{15}n \cdot n^4 - \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{30}n$$

$$\frac{8}{15}(n-1)n^4 < \sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - i^2)^2 < \frac{8}{15}n \cdot n^4.$$

- اما حجم تکه ی برش خورده ی بالای استوانه

$$\pi h((kb)^2)^2 = \pi k^2 h^5 n^4$$

- است و بنا بر این حجم کل استوانه میشود:

$$\pi k^2 h^5 (n-1) n^5.$$

- و در حالی که حجم استوانه ی کم تر از آن تکه ی برش خورده هست:

$$\pi k^2 h^5 (n-1) n^4$$

- و نامساوی نشان می دهد که حجم مخروط بین $\frac{8}{15}$ استوانه کمتر از تکه برش خورده و $\frac{8}{15}$ استوانه کامل است و چون تکه ی برش خورده به اندازه دلخواه کوچک می شود وقتی n به اندازه کافی بزرگ شود،بنابراین حجم مخروط دقیقا $\frac{8}{15}$ حجم استوانه می شود.

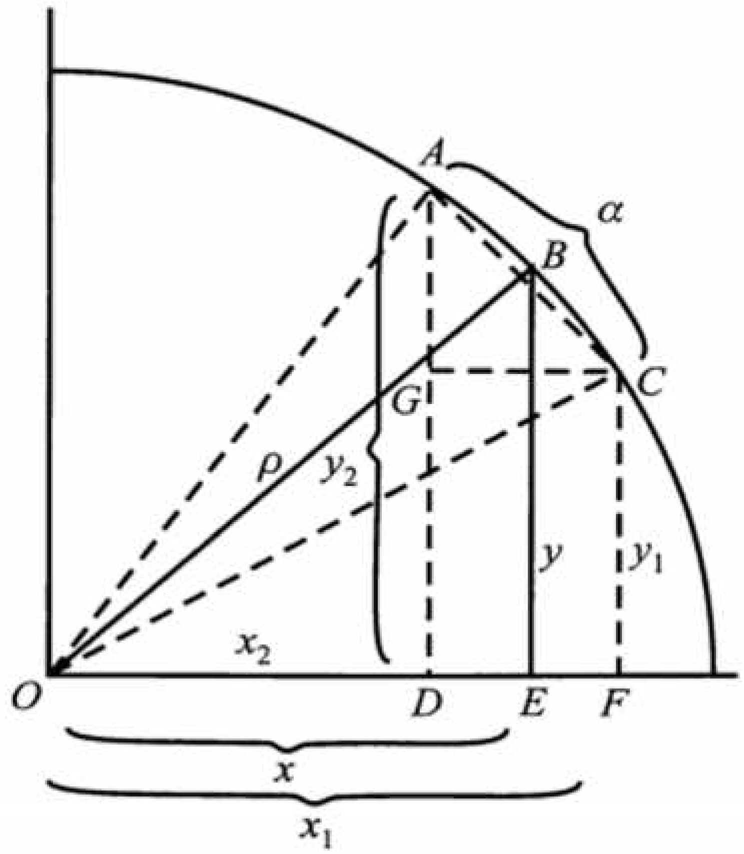
سری های مثلثاتی در قرن 16 هند:

این روشن است که سری ها خیلی زمان قبل از نیوتن در هند شناخته شده بودند، اما چرا هندی ها به این موضوعات علاقه مند بودند؟

هندی ها با مثلثات یونان آشنا شدند و سپس به تدریج آن را با معرفی cos,sin و tan گسترش دادند. ریاضیدانان اسلامی نیز مثلثات را از هند یاد گرفتند.

ستاره شناسان هندی یک مقدار دقیقی برای Π می خواستند (که این با دانستن سری های توانی Arctan امکان پذیر بود.) و هم چنین مقدارهای دقیقی برای sin و cos(که این هم نیاز به دانستن سری های توانی آنها بود) می خواستند و بدین صورت آنها می توانستند از این مقدارها در مشخص کردن موقعیت سیاره ها استفاده کنند.

سرچشمه های هندی نشان می دهند که آنها با تقریب های آشکاری، برای بدست آوردن سری های توانی سینوس و کسینوس،شروع می کنند و بعد این تقریب را مرحله به مرحله بهتر می کنند.در ابتدا دایره ی زیر را در نظر می گیریم:


A
α
B
C
G
ρ
y_2
y
y_1
x_2
O
D
E
F
x
x_1

از تشابه مثلث های AGC وOEB داریم:

$$\alpha = \widehat{AC} \approx AC$$

$$\frac{x_1 - x_2}{\alpha} = \frac{y}{\rho} \quad \text{and} \quad \frac{y_2 - y_1}{\alpha} = \frac{x}{\rho}$$

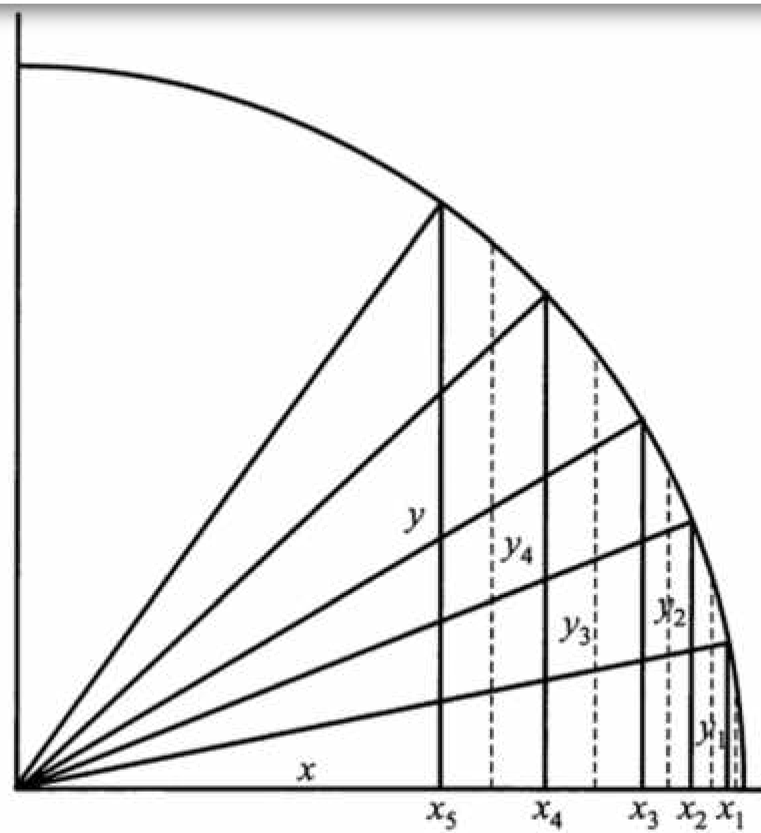
$$\text{or} \quad \frac{\alpha}{\rho} = \frac{x_1 - x_2}{y} = \frac{y_2 - y_1}{x}.$$

$\angle BOF = \theta$ $\angle BOC = \angle AOB = d\theta$

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta + d\theta) - \sin(\theta - d\theta) &= \frac{y_2 - y_1}{\rho} = \frac{\alpha x}{\rho^2} \\
&= \frac{2\rho\, d\theta}{\rho} \cos\theta \\
&= 2 \cos\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta + d\theta) - \cos(\theta - d\theta) &= \frac{x_2 - x_1}{\rho} = -\frac{\alpha y}{\rho^2} \\
&= -\frac{2\rho\, d\theta}{\rho} \sin\theta \\
&= -2 \sin\theta\, d\theta.
\end{aligned}
$$



y
y_4
y_3
y_2
y_1
x
x_5
x_4
x_3
x_2
x_1

$\alpha = s/n$ $\rho = 1$

$y_n = y = \sin s$

$$\Delta_n y = y_n - y_{n-1} = \alpha x_n$$
$$\Delta_{n-1} y = y_{n-1} - y_{n-2} = \alpha x_{n-1}$$
$$\cdots$$
$$\Delta_2 y = y_2 - y_1 = \alpha x_2$$
$$\Delta_1 y = y_1 - y_0 = \alpha x_1.$$

$$\Delta_{n-1}x = x_n - x_{n-1} = -\alpha y_{n-1}$$

$$\cdots$$

$$\Delta_2 x = x_3 - x_2 = -\alpha y_2$$

$$\Delta_1 x = x_2 - x_1 = -\alpha y_1.$$

$$\Delta_1 y = y_1$$

$$\Delta_2 y = y_1 - \alpha^2 y_1$$

$$\Delta_2 y = y_1 - \alpha^2 y_1$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 y - \Delta_2 y &= y_3 - y_2 - y_2 + y_1 \\ &= \alpha(x_3 - x_2) = -\alpha^2 y_2\end{aligned}$$

$$\Delta_3 y = \Delta_2 y - \alpha^2 y_2 = y_1 - \alpha^2 y_1 - \alpha^2 y_2$$

$$\Delta_n y = y_1 - \alpha^2 y_1 - \alpha^2 y_2 - \cdots - \alpha^2 y_{n-1}$$

$$\begin{aligned} y = y_n &= \Delta_1 y + \Delta_2 y + \cdots \Delta_n y \\ &= n y_1 - [y_1 + (y_1 + y_2) + (y_1 + y_2 + y_3) \\ &\quad + \cdots + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]\alpha^2. \end{aligned}$$

$s/n \approx y_1 \approx \alpha$, or $n y_1 \approx s$

$$\begin{aligned} y \approx s - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^2 & [y_1 + (y_1 + y_2) + \cdots \\ & + (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]. \end{aligned}$$

$x_n \approx x = \cos s$ and $x_1 \approx 1$

$$x_n - x_1 = -\alpha(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

$$x \approx 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}).$$

$y = \sin s$ $\qquad$ $x = \cos$

$$
\begin{aligned}
x &\approx 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right) \left[\frac{s}{n} + \frac{2s}{n} + \cdots + \frac{(n-1)s}{n}\right] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^2 [1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{s^2}{n^2} \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] \\
&= 1 - \frac{s^2}{2}.
\end{aligned}
$$

$$= s - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^2\left[\frac{s}{n} + \left(\frac{s}{n} + \frac{2s}{n}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{s}{n} + \frac{2s}{n} + \cdots + \frac{(n-1)s}{n}\right)\right]$$

$$= s - \lim_{n\to\infty}\frac{s^3}{n^3}\left[1 + (1+2) + (1+2+3)\right.$$

$$\left. + \cdots + (1 + 2 + \cdots + (n-1))\right]$$

$$= s - \lim_{n\to\infty}\frac{s^3}{n^3}\left[n(1 + 2 + \cdots + (n-1))\right.$$

$$\left. - (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)\right]$$

$$= s - s^3\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i}{n^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^2}{n^3}\right]$$

$$= s - s^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= s - \frac{s^3}{6},$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
x &\approx 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{s}{n}\left[\frac{s}{n} - \frac{s^3}{6n^3} + \frac{2s}{n} - \frac{(2s)^3}{6n^3} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(n-1)s}{n} - \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right] \\
&= 1 - \frac{s^2}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{s^4}{6n^4}\left[1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\right] \\
&= 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}{n^4} \\
&= 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{6} \cdot \frac{1}{4} \\
&= 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24}.
\end{aligned}
$$

$j = 3$ $\qquad j = 4$

$y = \sin s$:

$$y \approx s - \frac{s^3}{6} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^2\left[\frac{s^3}{6n^3} + \left(\frac{s^3}{6n^3} + \frac{(2s)^3}{6n^3}\right)\right.$$
$$\left. + \cdots + \left(\frac{s^3}{6n^3} + \frac{(2s)^3}{6n^3} + \cdots + \frac{((n-1)s)^3}{6n^3}\right)\right]$$
$$= s - \frac{s^3}{6} + \lim_{n\to\infty}\frac{s^5}{6n^5}\left[1^3 + (1^3 + 2^3)\right.$$
$$\left. + \cdots + (1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)\right]$$
$$= s - \frac{s^3}{6}$$
$$+ \lim_{n\to\infty}\frac{s^5}{6n^5}\left[n\left(1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\right)\right.$$
$$\left. - (1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4)\right]$$
$$= s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{6}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}{n^4} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^4}{n^5}\right]$$
$$= s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{6}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120}.$$

Sources:

1)Sherlock Holmes in babylon and other tales of mathematical history

2)Issac Newton book,fatemi publishment

3) wolfram & wikipedia