فصل دوم

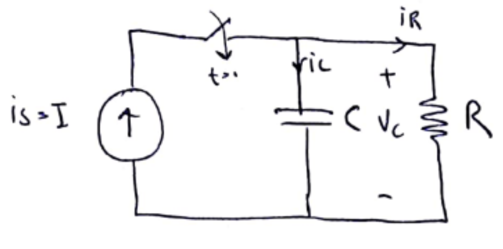
مدارهای جریان مستقیم و جریان متناوب

مدارهای جریان مستقیم

در فصل قبل مشاهده شد برای تحلیل مدارهای الکتریکی از قانون اهم و به طور کلی از قوانین KVL و KCL استفاده می شود. در قوانین KVL و KCL به ترتیب با ولتاژها و جریان های المان های مختلف مدار سروکار داریم. اما همانطور که دیدیم ولتاژ سلف و جریان خازن به صورت مشتق در روابط ظاهر می شوند و به طور همزمان مجهول مسئله نیز ممکن است باشند. در درس معادلات دیفرانسیل با معادلاتی که مجهول و مشتق آن معادله وجود داشت آشنا شدیم. به عبارتی در صورتی که سلف یا خازن در مدار باشد معادلات KVL و KCL به معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌شوند، که با استفاده از شرایط اولیه مدار آنها را حل خواهیم کرد. تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل مرتبه مدار را مشخص میکند. در اینجا معادلات مرتبه اول یعنی معادلاتی که یک خازن و چند مقاومت (RC) یا یک سلف و چند مقاومت (RL) دارند بررسی خواهند شد.

بررسی مدار RC

در مدار زیر یک مقاومت، خازن و منبع وجود دارد. با فرض اینکه خازن شارژ داشته است (در اینجا صفر در نظر گرفته شده است) معادلات حاکم بر مدار را تشکیل می‌دهیم:



$$i_C + i_R = I$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_R = \frac{V_C}{R} \quad \Rightarrow \quad C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{I}{C} \qquad V_C(0) = 0$$

طرف راست معادله دیفرانسیل غیر صفر است. بنابراین جواب نهایی دو قسمت در نظر میگیریم که جواب همگن و جواب خصوصی نام دارند.

$$V_C = V_h + V_p$$

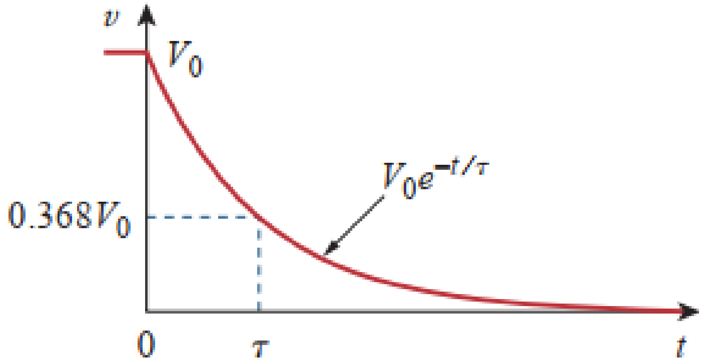
برای معادله همگن داریم

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0 \qquad V_C(0) = V_0$$

$$S + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{RC} \Rightarrow V_C = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(0) = V_0 \Rightarrow V_0 = K e^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow K = V_0$$

$$\Rightarrow V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



به τ ثابت زمانی مدار نام دارد و τ =RC تعریف میشود.

قسمت دوم معادله دیفرانسیل جواب خصوصی است که در واقع به ورودی یا منبع تغذیه مدار وابسته است. برای حل آن طبق روشهای درس معادلات دیفرانسیل تابعی مشابه تابع سمت راست حدس میزنیم و معادله را حل می کنیم.

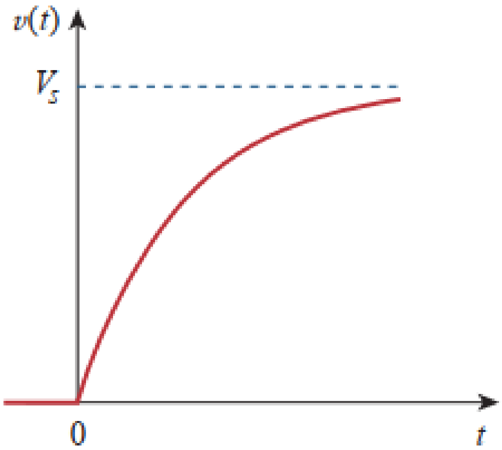
$$V_p = A \Rightarrow \frac{d(A)}{dt} + \frac{A}{RC} = \frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{A}{RC} = \frac{I}{C} \Rightarrow A = RI$$

$$\Rightarrow V_C = V_h + V_p = K e^{-\frac{t}{RC}} + RI$$

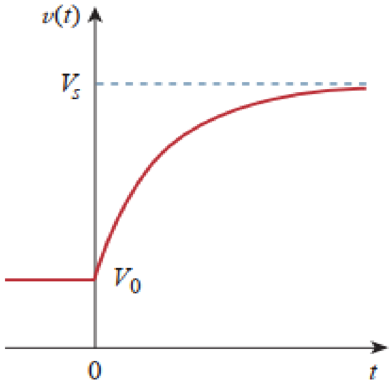
$$V_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = K e^{-\frac{0}{RC}} + RI \Rightarrow -RI = K$$

$$\Rightarrow V_C = -RI e^{-\frac{t}{RC}} + RI = RI\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



جواب نهایی مدار جمع دو جواب بدست آمده خواهد بود.

$$V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} + RI\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



اگر پاسخ را بازنویسی کنیم، می‌توان جواب نهایی مدارهای مرتبه اول را به‌صورت زیر نوشت:

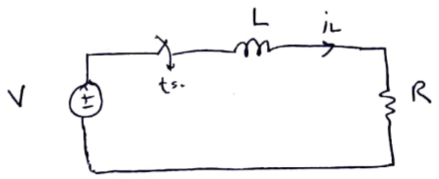
$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau}$$

که در آن، v(0)، ولتاژ اولیه در t=0+ و v(∞)، مقدار نهایی یا حالت ماندگار است. بنابراین، برای یافتن پاسخ به سه پارامتر نیاز داریم:

۱. ولتاژ اولیه خازن v(0)
۲. ولتاژ نهایی خازن v(∞)
۳. ثابت زمانی τ

مدار RL

اگر یک سلف و یک مقاومت داشته باشیم به طریق مشابه جواب معادله شبیه حالت قبل خواهد شد. با این تفاوت که معادله بر حسب جریان سلف نوشته شده و ثابت زمانی به صورت τ =L/R تعریف میشود. جریان سلف به صورت زیر خواهد بود:



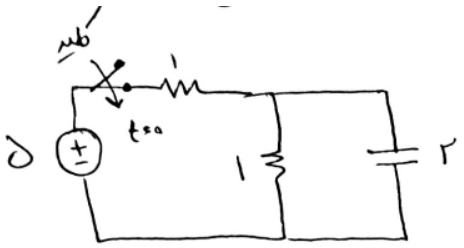
$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

نکته ۱: برای بدست آوردن مقادیر ولتاژ خازن و جریان سلف در بینهایت آنها را به ترتیب مدار باز و اتصال کوتاه میکنیم.

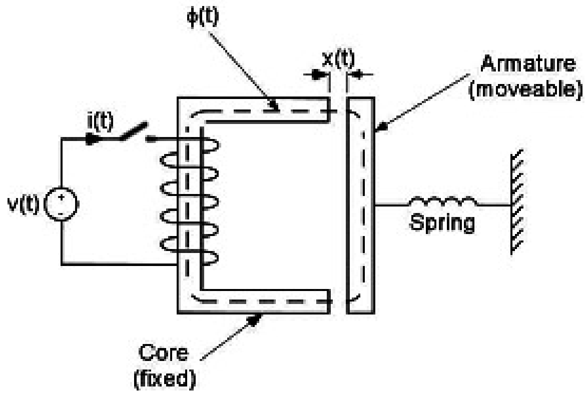
نکته ۲ :اگر یک سلف و چند مقاومت داشته باشیم و یا یک خازن و چند مقاومت داشته باشیم ابتدا از دید سلف یا خازن مقاومت معادل را با سری و موازی کردن مقاومت ها بدست می آوریم، سپس ثابت زمانی برابر میشود:

$$\tau = R_{eq} C \qquad \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

مثال۱: در مدار زیر مقدار ولتاژ خازن را بدست بیاورید.



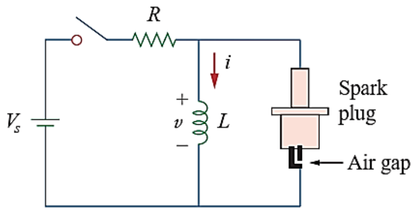
مثال۲: شکل زیر یک رله را نشان می‌دهد. رله به این صورت عمل میکند که اگر کلید وصل شود و سیم پیچ برقدار شود قسمت متحرک بسته شده و کار مکانیکی انجام میدهد. مدار الکتریکی رله با یک مدار RL مدل میشود. حال اگر منبع ۱۲ ولتی به رله متصل شود و مقاومت سیم پیچ رله ۱۵۰ اهم و سلف معادل سیم پیچ ۳۰ میلی هانری و برای عملکرد رله جریان ۵۰ میلی آمپر لازم باشد، بعد از بسته شدن کلید چه مدت زمان طول میکشد تا رله عمل کند؟



مثال ۳: قابلیت عدم تغییر جریان سلف را میتوان در سیستم جرقه زنی خودرو استفاده کرد. در شکل زیر این سیستم نشان داده شده است. اگر مقاومت ۴ اهم و سلف ۶ میلی هانری باشد، با استفاده از یک منبع ۱۲ ولتی و باز کردن کلید در ۱ میکرو ثانیه چه ولتاژی دو سر شمع ایجاد می شود.

راهنمایی:

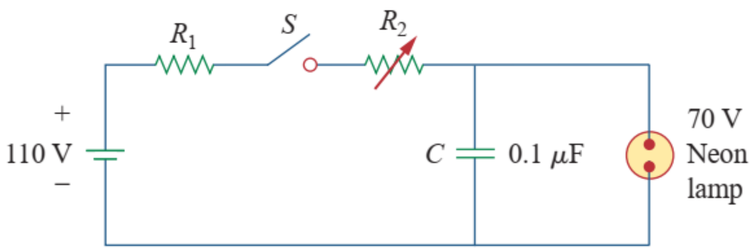
$$V = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$



مثال ۴: شکل زیر یک مدار تاخیر را نشان میدهد که با استفاده از خازن ساخته شده است. در این مدار ولتاژ منبع ۱۱۰ ولت و برای روشن کردن لامپ ۷۰ ولت لازم است. اگر خازن یک میکرو فاراد و مقاومت R1 ۱.۵ مگا اهم باشد، مقدار مقاومت دوم برای ایجاد زمان تاخیر ۱ ثانیه ای را تعیین کنید.

راهنمایی:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 110[1 - e^{-t/\tau}]$$



مدارهای جریان متناوب

در قسمت قبل دیده شد بعد از حضور سلف و خازن در مدار معالات مداری به معادله دیفرانسیل تبدیل میشوند. اگر منبع موجود در مدار از نوع مستقیم (DC) باشد سمت راست معادله دیفرانسیل عدد ثابت بوده و به سادگی حل میشود. حال اگر منبع موجود در مدار از نوع متناوب (ac) باشد سمت راست معادله دیفرانسیل (متناظر با جواب خصوصی) توابع پیچیده تری مانند سینوس و کسینوس ظاهر شده که حل آنها را مشکل میکند. سوال: جواب خصوصی به چه شکل می شود؟

برای تحلیل ساده تر مدارهای متناوب و حل کردن معادله دیفرانسیل، از تبدیل فیزور phasor استفاده میکنیم. تبدیل فیزور معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار را به معادلات جبری با اعداد مختلط تبدیل میکند. در ادامه ابتدا مروری بر اعدا مختلط انجام خواهد شد.

مرور اعداد مختلط

اعداد مختلط برای حل معادلات که جواب آنها عبارت منفی زیر رادیکال قرار میگیرد معرفی شدند. برای این منظور عدد موهومی $i=\sqrt{-1}$ تعریف شده است (در مهندسی برق این عدد با حرف j نشان داده می‌شود). با این تعریف دیگر نمیتوان اعداد مختلط را روی محور افقی نشان داد بلکه به صفحه برای نشان دادن آنها نیاز است.

۱- فرم دکارتی اعداد مختلط

یک عدد مختلط توسط یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی نشان داده می شود که شکل کلی بصورت زیر است:

$$Z=x+jy$$

بطوریکه:

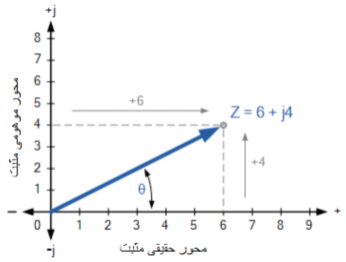
Z-عدد مختلط

x-قسمت حقیقی

y-قسمت موهومی

j-توسط $\sqrt{-1}$ تعریف می شود.

در فرم دکارتی، یک عدد مختلط را می توان به عنوان یک نقطه در یک صفحه دو بعدی به نام صفحه مختلط یا sنشان داد. بنابراین به عنوان مثال ، $Z = 6 + j4$ یک نقطه منفرد را نشان می‌دهد که مختصات آن ۶ را در محور حقیقی افقی و ۴ را در محور موهومی عمودی نشان می دهد که در زیر نشان داده شده است.



۲- فرم قطبی اعداد مختلط

روش دیگر برای نمایش عدد مختلط استفاده از دستگاه مختصات قطبی است؛ در این روش به جای استفاده از x و y از فاصله نقطه Z تا مبدأ (اندازه) و زاویه بردار با جهت مثبت محور حقیقی استفاده میکنیم. نمایش قطبی به صورت زیر خواهد بود:

$$Z = r \angle \pm \theta$$

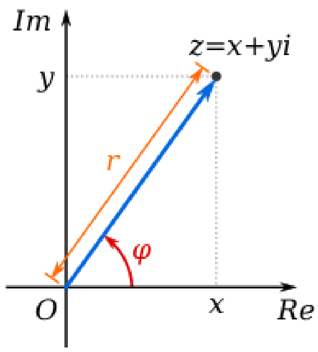
بطوریکه Z عدد مختلط به شکل قطبی r اندازه برداری و θ زاویه است. به این ترتیب قدر مطلق یا اندازه عدد مختلط $z = x + iy$ برابر است با:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

و زاویه یا آرگومان Z زاویه شعاع پاره خط oz با جهت مثبت محور حقیقی است که با θ یا φ بیان شده و به صورت زیر محاسبه میشود.

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{if } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{indeterminate} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

شکل زیر نمایش قطبی عدد مختلط را نشان میدهد.



تبدیل فرم دکارتی به قطبی و برعکس:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$x = r\cos\theta$ $\quad y = r\sin\theta$

- **جمع و تفریق اعداد مختلط**

فرم دکارتی

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{cases}$$

فرم قطبی

$z_1 = r_1 \angle \theta_1 \qquad z_2 = r_2 \angle \theta_2$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2) \\ z_1 - z_2 = (r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2) \end{cases}$$

- ضرب و تقسیم اعداد مختلط

فرم دکارتی

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = (x_1+iy_1)\times(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)} \dfrac{\times (x_2-iy_2)}{\times (x_2-iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \end{cases}$$

فرم قطبی

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \angle \theta_1+\theta_2 \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

نکته مهم: برای جمع و تفریق فرم دکارتی و برای ضرب و تقسیم فرم قطبی محاسبات را ساده تر می‌کند.

فرم نمایی اعداد مختلط

اکنون که فرم قطبی اعداد مختلط را می‌شناسیم، می‌توانیم فرم نمایی را معرفی کنیم. ابتدا از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم:

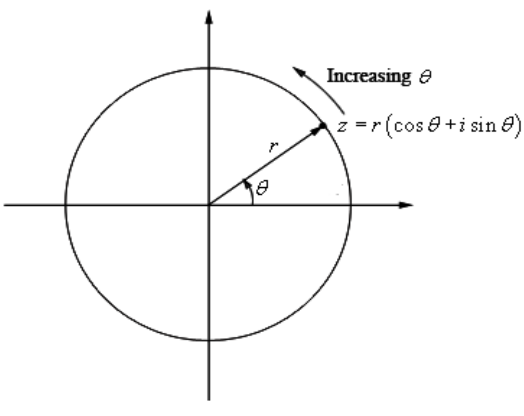
$$\mathbf{e}^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

با استفاده از فرمول اویلر می‌توانیم فرم قطبی یک عدد مختلط را به‌فرم نمایی زیر بنویسیم:

$$z = r\mathbf{e}^{i\,\theta}$$

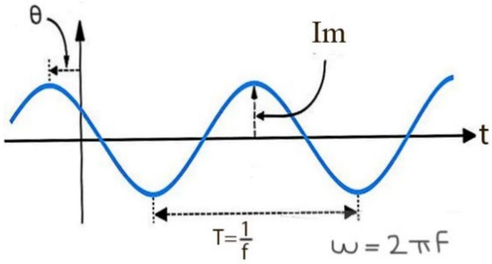
$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

که در آن، $\theta = \arg z$ است. در واقع $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ یک نمایش پارامتری از دایره‌ای به شعاع r است و فرم نمایی یک عدد مختلط، در حقیقت راه دیگری برای نوشتن فرم قطبی است که دایره ای به شعاع r را نشان می‌دهد.



مفهوم فیزور

همانطور که گفته شد در صورتی که منبع موجود در مدارهای الکتریکی متناوب یعنی سینوسی یا کسینوسی باشد، برای ساده تر شدن محاسبات از تبدیل فیزوری استفاده میشود. جریان یا ولتاژ متناوب با رابطه زیر بیان میشود:



$$i(t) = \mathrm{I_m}\cos(\omega t+\theta)$$

با استفاده از فرم مختلط داریم :

$$i(t) = Re\{I_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\} \quad \text{،} \quad i(t) = Re\{I_m e^{j(\omega t+\theta)}\}$$

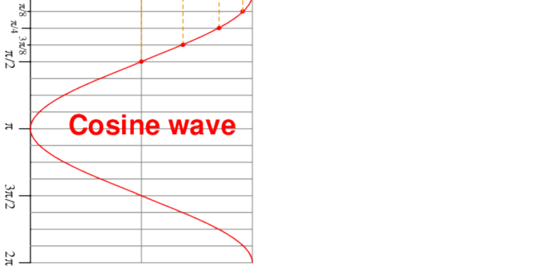
از آنجا که عبارت ejwt یک عدد مختلط دارای اندازه ۱ است و با افزایش زمان تنها زاویه آن تغییر میکند، قسمت حقیقی یا Re آن تصویر عدد بر روی محور حقیقی است. بنابر این عدد مختلط

$$\bar{I} = I_m e^{j\theta}$$

با سرعت زاویه ای ω رادیان بر ثانیه در حال چرخش است. لذا با فرض ثابت بودن سرعت زاویه ای که در واقع فرکانس را نشان میدهد (ω=2πf) یک عبارت سینوسی را با یک بردار یا فیزور میتوان بیان کرد. فیوز از دو کمیت اندازه و زاویه تشکیل شده است که معادل با موج سینوسی متناظر با آن بوده و به صورت زیر بیان میشود.

$$I_m \cos(\omega t+\theta) \longrightarrow I_m e^{j\theta} = I_m \angle \theta$$

در شکل زیر نمودار یک شکل موج سینوسی و کسینوسی و فیزور معادل آن که در حال چرخش هست در نقطه از زمان نشان داده شده است. تصویر بردار روی محور حقیقی معادل کسینوس و تصویر روی محور موهومی معادل سینوس است.



خلاصه تبدیل فیزوری: برای کمیت های ولتاژ و جریان تبدیل دو طرفه فیزوری به صورت زیر خواهد بود

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow I_m \angle \theta$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow V_m \angle \varphi$$

نکته: اگر تابع به صورت سینوس بیان شده بودن به صورت زیر عمل میکنیم:

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90)$$

مثال۵: فیروز معادل توابع زیر را بدست آورید.

- $i(t) = 6 \cos(50t - 40)$

- $v(t) = 20 \sin(50t + 30)$

مثال۶: نمایش سینوسی اعداد مختلط زیر را با استفاده از عکس تبدیل فیزوری بدست آورید.

- $I = -3 + j4$

- $V = j8\, e^{-j20}$

تمرین: مجموع دو جریان زیر را با استفاده از مفهوم فیزور بدست آورید.

$i_1 = 4 \cos(\omega t + 30) \qquad i_2 = 5 \sin(\omega t - 20)$

مدل سازی المان های مداری در حوزه فیزور

اگر جریان $i(t) = \mathrm{I_m}\cos(\omega t + \theta)$ از المان های مختلف عبور کند مقدار ولتاژ را بدست آورده و در نهایت رابطه بین جریان و ولتاژ مشخص خواهد شد.

۱- مقاومت

$$V = i \times R = R\,I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$V = R\,I_m \angle \varphi \Rightarrow V = R\,I$$

۲- سلف

$$V = L\frac{di}{dt} = L(-\omega I_m \sin(\omega t + \varphi))$$

$$= \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi - 90 + 180) = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi + 90)$$

$$= \omega L I_m e^{j(\varphi + 90)} \xrightarrow{e^{j90} = j} V = j\omega L I_m e^{j\varphi} = j\omega L\, I$$

۳- خازن

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad I = j\omega C V \Rightarrow V = \frac{1}{j\omega C} I$$

خلاصه مدل سازی المانهای مختلف در حوزه فیزور به صورت زیر است.

R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

مفهموم امپدانس و ادمیتانس

امپدانس در تحلیل سینوسی نسبت ولتاژ به جریان برای یک المان تعریف میشود. چون ولتاژ و جریان در حالت سینوسی اعداد مختلط هستند، امپدانس نیز یک عدد مختلط خواهد شد (در واقع شبیه مقاومت اما عدد مختلط) و واحد آن نیز چون نسبت ولتاژ به جریان است اهم می باشد.

امپدانس با Z نمایش داده می شود بنابراین داریم:

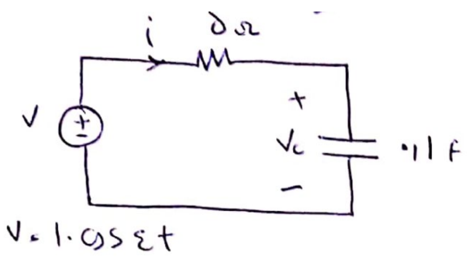
$$Z = \frac{V}{I}(\Omega)$$

ادمیتانس عکس امپدانس و در واقع نسبت جریان به ولتاژ است (شبیه رسانایی) با واحد مهو تعریف میشود.

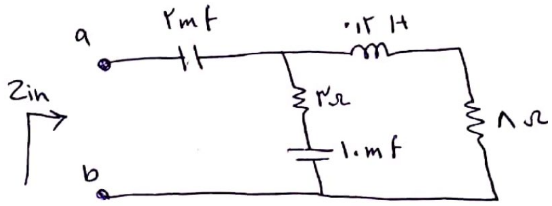
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}(\mho)$$

نتیجه گیری: در مدارات سینوسی سلف و خازن شبیه مقاومت عمل میکنند اما مقاومتی که مقدار آن عدد مختلط است!

مثال۷: در مدار زیر امپدانس معادل و جریان مدار را محاسبه کنید.



مثال۸: امپدانس ورودی مدار زیر را بدست آورید. ω=50 rad/s



مفهوم رزیستانس و راکتانس

ملاحظه شد که امپدانس Z یک عدد مختلط است. به قسمت حقیقی آن مقاومت یا رزیستانس R و به قسمت موهومی آن راکتانس X گفته میشود.

$$Z = R + jX$$

$$R = \mathrm{Re}\{Z\} \qquad X = \mathrm{Im}\{Z\}$$

نکته: امپدانس یک مقاومت تنها قیمت حقیقی و امپدانس سلف و خازن تنها قسمت موهومی دارد.

$$R \longrightarrow R$$

$$L \longrightarrow j\omega L \quad \Rightarrow X_L = j\omega L$$

$$C \longrightarrow \frac{1}{j\omega C} \quad \Rightarrow X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

تعریف: همانطور که امپدانس عدد مختلط بود ادمیتانس نیز عدد مختلط است که به قسمت حقیقی آن **کندوکتانس G** و به قسمت موهومی آن **سوسپتانس B** گفته میشود.

$$Y = G + jB$$

کلیه روابط KVL, KCL، تقسیم جریان، تقسیم ولتاژ ، قوانین سری و موازی کردن المان ها و ..... در حالت سینوسی برقرار است، با این تفاوت که معادلات اعداد مختلط خواهند شد.

توان در مدارات سینوسی

طبق آنچه که در فصل قبل گفته شد توان حاصل ضرب ولتاژ در جریان است. در مدارات سینوسی هم از همین تعریف استفاده میشود اما با توجه به سینوسی بودن ولتاژ و جریان (مختلط بودن ولتاژ و جریان در حالت فیروزی) مفاهیمی مانند توان لحظه ای، توان ظاهری، توان متوسط، توان اکتیو، توان راکتیو و ضریب توان وجود دارد که در ادامه بررسی میشود.

توان لحظه ای: توان لحظه ای از حاصلضرب شکل موج سینوسی ولتاژ در شکل موج سینوسی جریان در هر لحظه بدست می آید.

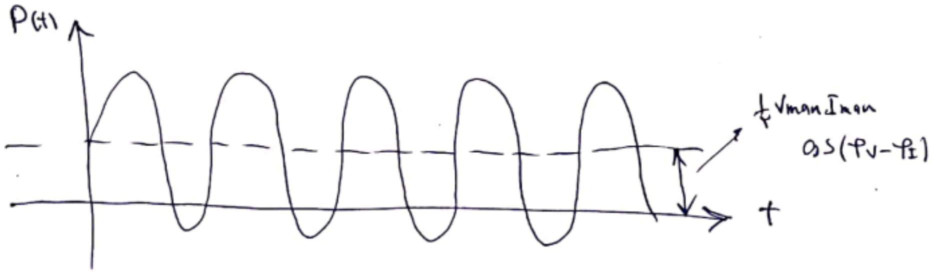
$$v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \varphi_V)$$

$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$P(t) = V(t)\cdot I(t) = V_{max} I_{max} \cos(\omega t + \varphi_V)\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$ با استفاده از رابطه

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{max} I_{max}\cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_{max} I_{max}\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$$



مقدار متوسط یک شکل موج

برای بررسی سک شکل موج متناوب یکی از پارامتهای ارزیابی مقدار متوسط شکل موج است که برابر با انتگرال شکل موج تقسیم بر دوره تناوب تعریف میشود. مقدار متوسط در واقع نشان میدهد که قیمتها بالای نمودار یک شکل موج بیشتر است یا قسمت زیر نمودار و یا اینکه در صورت تساوی این دو مقدار عدد صفر خواهد بود.

مقدار متوسط شکل موج x(t) به صورت زیر است.

$$X_{ave} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

مقدار متوسط توان لحظه ای به صورت زیر محاسبه می‌شود.

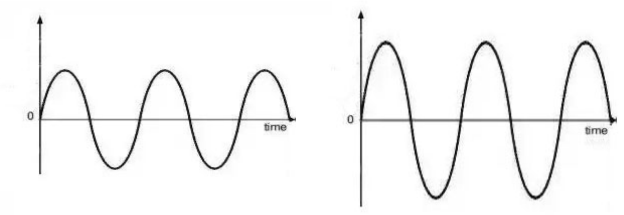
$$P_{ave} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(\varphi_V-\varphi_I) + \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I)\,dt$$

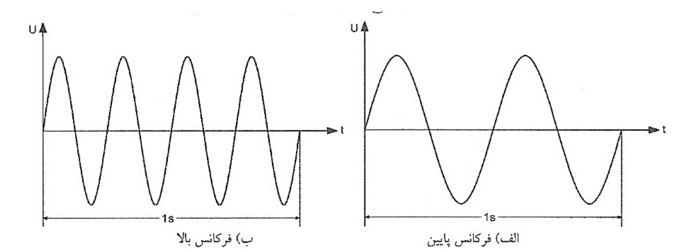
$$= \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(\varphi_V-\varphi_I) + \cancel{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I)\,dt}$$

$$= \frac{1}{2}V_{max}I_{max}\cos(\varphi_V-\varphi_I)$$

ملاحظه میشود که توان لحظه ای که به صورت متناوب بود دارای مقدار متوسط متناسب با ولتاژ، جریان و کسینوس زاویه بین آنها بستگی دارد.

مثال۹: مقدار متوسط دو شکل موج زیر را با هم مقایسه کنید.
چه راهی برای تمایز آنها وجود دارد؟





ب) فرکانس بالا

الف) فرکانس پایین

مقدار موثر (RMS) یک شکل موج

مقدار موثر یا RMS مخفف کلمه Root Mean Squared و به معنی جذر میانگین مربع است. به عبارت دیگر مقدارRMS یک جریان AC برابر با مقداری است که اگر جریان مستقیم (DC) به همان اندازه داشته باشیم، در اثر عبور از مقاومت معینی همان مقدار حرارت را ایجاد می‌کند که جریان متناوب ایجاد کرده است. برای یک شکل موج این مقدار با توجه به تعریف آن از رابطه زیر بدست می آید.

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}$$

برای یک شکل موج متناوب سینوسی داریم

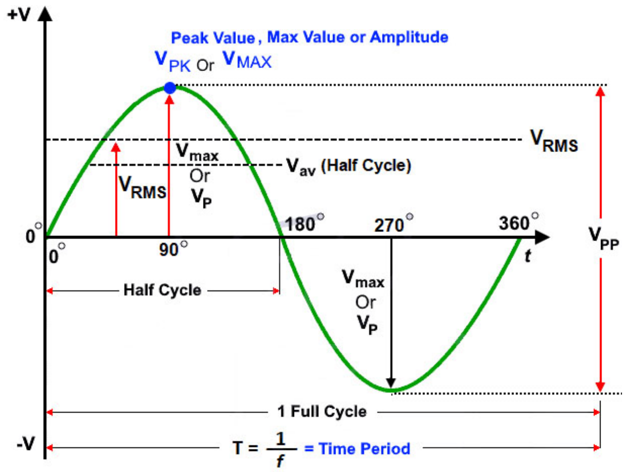
$$x(t) = X_{max}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T X_{max}^2 \cos^2(\omega t+\varphi)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T X_{max}^2 \left(\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\right)}$$

$$X_{rms} = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

ملاحظه میشود برای یک شکل موج سینوسی مقدار موثر برابر با مقدار ماکزیمم یا دامنه آن تقسیم بر رادیکال ۲ است. یعنی یک جریان متناوب ۱۰ آمپری، همان مقدار حرارتی را تولید خواهد کرد که یک جریان مستقیم ۱۰ آمپری تولید می‌کند. در حالی که مقدار ماکزیمم جریان متناوب برابر ۱۰ ضربدر رادیکال ۲ یعنی ۱۴.۱۴ آمپر است.

در شکل زیر مقدار موثر برای یک سیکل و مقدار متوسط برای یک نیم سیکل نشان داده شده است؟



مثال۱۰: مقدار موثر را برای شکل موجهای مثال قبل مقایسه کنید.

توان متوسط را بر حسب مقادیر موثر میتوان به صورت زیر نوشت.

$$P_{ave} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cos(\varphi_V - \varphi_I) \Rightarrow P_{ave} = V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

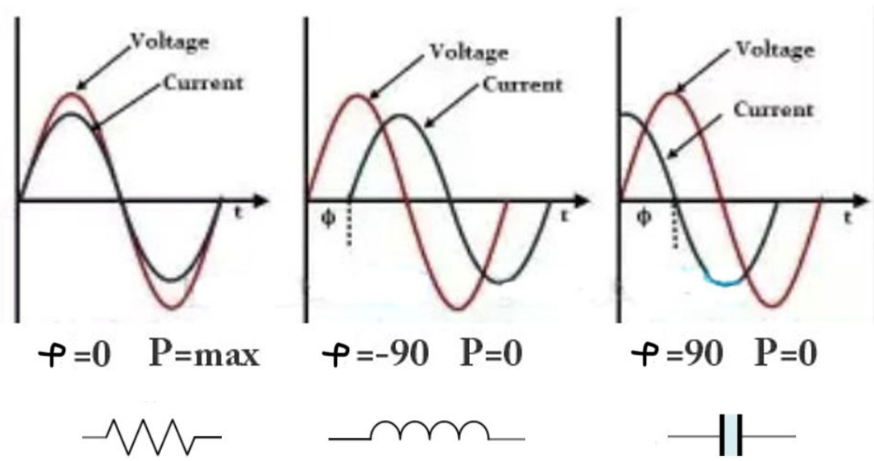
مشاهده میشود توان متوسط برابر با ضرب ولتاژ و جریان موثر در کسینوس زاویه بین آنها است. به این عبارت ضریب توان گفته میشود.

ضریب توان یا ضریب قدرت یا Power Factor

در رابطه توان متوسط علاوه بر ولتاژ و جریان که در مدارات DC نیز وجود داشت عبارت دیگری برابر با کسینوس اختلاف زاویه ولتاژ و جریان نیز وجود دارد که به این عبارت ضریب توان گفته میشود.

$$\text{Power factor} = \cos\varphi \qquad \varphi = \varphi_V - \varphi_I$$

در شکل زیر سه حالت مختلف برای اختلاف زاویه ولتاژ و جریان رسم شده است.



توان اکتیو و توان راکتیو

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر رابطه توان لحظه ای را میتوان بازنویسی کرد

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

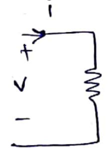
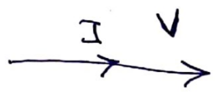
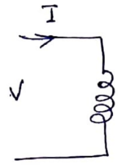
$$\beta = \varphi_V - \varphi_I \qquad \alpha = 2\omega t + 2\varphi_I$$

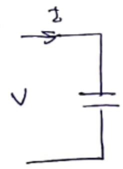
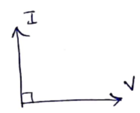
$$p(t) = \frac{V_{max} I_{max}}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_I)\right] + \dots$$

$$- \frac{V_{max} I_{max}}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \sin(2\omega t + 2\varphi_I)$$

حال عبارت توان لحظه ای را برای سه عنصر اصلی مقاومت، سلف و خازن بدست می آوریم.

جدول مقایسه توان مقاومت، سلف و خازن

<table>
<tr><th>عنصر</th><th>اعمال ولتاژ</th><th>رابطه ولتاژ و جریان و فیزور</th><th>رابطه توان</th></tr>
<tr><td>مقاومت</td><td></td><td>$v(t) = V_{max}\cos(\omega t+\varphi_v) \xrightarrow[V_{max}=V_m]{\text{فیزور}} V_m\angle\varphi_v$
$I = \frac{V_m\angle\varphi_v}{R} = \frac{V_m}{R}\angle\varphi_v = I_m\angle\varphi_v$
</td><td>$P_R = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\cos(0)\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right] + 0$</td></tr>
<tr><td colspan="4">نتیجه گیری توان مقاومت: یعنی قسمت دوم که سینوس صفر شده است برابر با صفر میشود و مقدار متوسط قسمت اول هم مطابق رابطه زیر میشود
$$P_{R_{ave}} = \frac{V_{max}I_{max}}{2}$$
توان متوسط، توان اکتیو (P) نام دارد و برحسب مقادیر موثر
$$P_{R_{ave}} = V_{rms}I_{rms}$$</td></tr>
<tr><td>سلف</td><td></td><td>$V = V_m\angle\varphi_v$
$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{V_m\angle\varphi_v}{j\omega L} = -j\frac{V_m}{\omega L}\angle\varphi_v = I_m\angle\varphi_v-90$

مشاهده میشود زاویه جریان سلف ۹۰ درجه عقب تر از ولتاژ آن است.
$\varphi_v-\varphi_I=90$</td><td>$p(t) = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\cos(90)\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right]$ (I)
$+\frac{V_{max}I_{max}}{2}\sin 90\,\sin(2\omega t+2\varphi_I)$ (II)</td></tr>
<tr><td colspan="4">نتیجه گیری توان سلف: جمله I چون شامل کسینوس ۹۰ درجه است برابر با صفر میشود و جمله II هرچند صفر نمیشود اما دارای مقدار متوسط صفر است. در نتیجه توان متوسط سلف صفر است.
اما جمله II دارای دامنه غیر صفر است که برابر با
$$Q = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\sin(\varphi_v-\varphi_I)$$
این کمیت یک توان نوسانی با متوسط صفر را بوجود می آورد که به آن توان راکتیو (Q) گفته میشود. این توان کار مفید انجام نمیدهد و متوسط صفر دارد و فقط در یک سیکل بین منبع و سلف تبادل میشود.
توان راکتیو با پارامترهای موثر به صورت زیر است.
$$Q = V_{rms}I_{rms}\sin(\varphi_v-\varphi_I)$$</td></tr>
<tr><td>خازن</td><td></td><td>$V = V_m\angle\varphi_v$
$I = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{V_m\angle\varphi}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C V_m\angle\varphi = I_m\angle\varphi_v+90$
مشاهده میشود زاویه جریان خازن ۹۰ درجه جلو تر از ولتاژ آن است.
</td><td>$p(t) = \frac{V_{max}I_{max}}{2}\cos(-90)\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right]$ (I)
$+\frac{V_{max}I_{max}}{2}\sin(-90)\,\sin(2\omega t+2\varphi_I)$ (II)</td></tr>
<tr><td colspan="4">نتیجه گیری توان خازن: جمله I چون شامل کسینوس ۹۰- درجه است برابر با صفر میشود و متوسط جمله II هم صفر میشود. برای خازن مقدار توان راکتیو عدد منفی میشود برعکس سلف که مثبت شد.
$$Q = V_{rms}I_{rms}\sin(\varphi_v-\varphi_I)$$</td></tr>
</table>

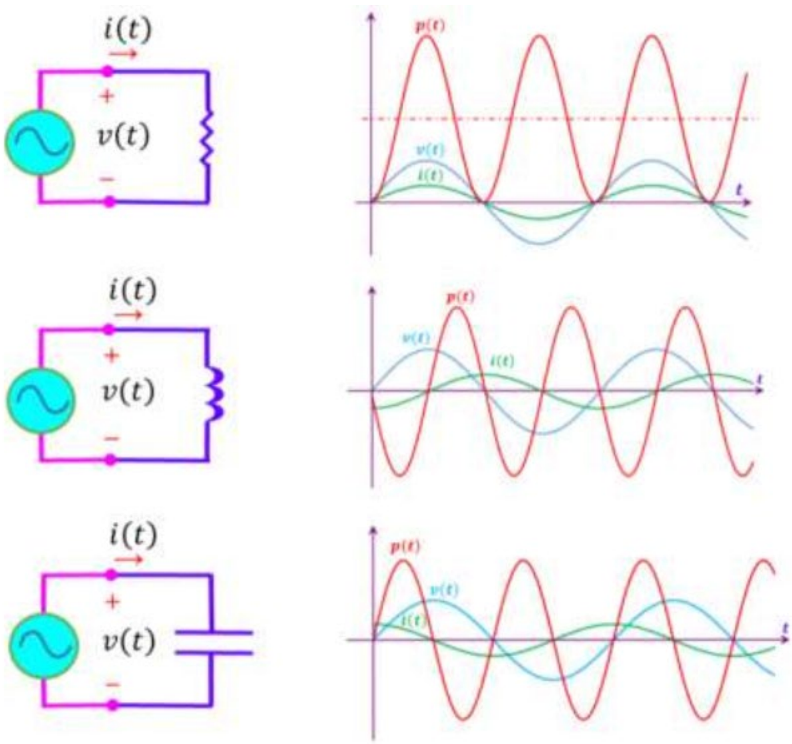
نکته: بنابراین خازن و سلف توان اکتیو مصرف نمیکنند اما توان راکتیو آنها مخالف یکدیگر است. میتوان گفتی یکی توان راکتیو مصرف و دیگری تولید میکند. واحد توان اکتیو وات W و واحد توان راکتیو وار VAr است.

جمع بندی توان مقاومت، سلف و خازن

همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، توان لحظه ای در مقاومت سیسنوسی بوده اما مقدار متوسط آن عدد مثبت است یعنی مصرف کننده توان است.

اما مقدار توان لحظه ای برای سلف و مقاومت یک سینوسی است که مقدار متوسط آن صفر است و برای خازن و سلف در هر سیکل قرینه است یعنی یکی تولید کننده آن و دیگری مصرف کننده آن است. بنابراین اگر راکتانس سلف و خازن با هم برابر باشد هیچ توانی از منبع با این دو مبادله نمی‌شود بلکه فقط بین سلف و خازن توان مبادله می‌شود.

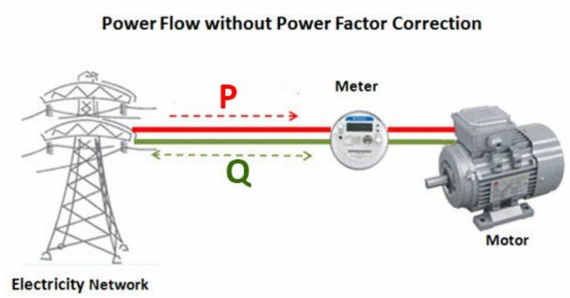
به عبارت دیگر سلف و خازن اثر توان یکدیگر را خنثی می‌کنند.

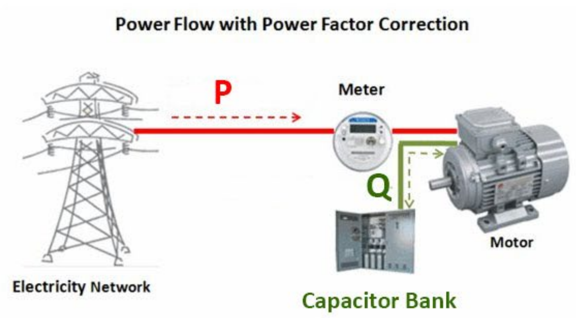


در نتیجه

اگر در نزدیکی یک مصرف کننده که خاصیت سلفی دارد یک خازن قرار داده شود، توان بین این دو مبادله شده و از شبکه دریافت نمیشود و جریان مصرفی را کاهش داده و هزینه را نیز کاهش می یابد.

در شکل زیر این قضیه قابل مشاهده است:





توان ظاهری

توان ظاهری با |S| نشان داده میشود و واحد آن ولت آمپر VA است چون ضرب اندازه جریان در اندازه ولتاژ تعریف میشود.

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left[V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)\right]^2 + \left[V_{rms} I_{rms} \sin(\varphi_V - \varphi_I)\right]^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{P^2 + Q^2} = |V_{rms}|\,|I_{rms}|$$

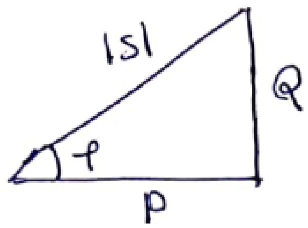
$$|S| = |V_{rms}|\,|I_{rms}|$$

با تقسیم رابطه توان راکتیو به اکتیو و تعریف اختلاف زاویه ولتاژ و جریان به صورت زیر داریم:

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_I$$

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

با در نظر گرفتن مثلث توان به صورت زیر میتوان نوشت



$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{S}$$

$$P = |S| \cos\varphi$$

$$Q = |S| \sin\varphi$$

تمرین: روابط زیر را اثبات کنید.

$$P = |I_{rms}|^2 R$$

$$Q = |I_{rms}|^2 X$$

توان مختلط

توان مختلط که با S نشان داده میشود در واقع فرم مختلط توان ظاهری است و به و صورت زیر تعریف میشود:

$$S = V I^{*} = V_{rms} \angle \varphi_V \; I_{rms} \angle -\varphi_I$$

$$= V_{rms} I_{rms} \angle \varphi_V - \varphi_I = \underbrace{V_{rms} I_{rms} \cos(\varphi_V - \varphi_I)}_{P} + j \underbrace{V_{rms} I_{rms} \sin(\varphi_V - \varphi_I)}_{Q}$$

$$\Rightarrow S = P + jQ$$

همانطور که مشاهده میشود که چون ولتاژ و جریان در حالت سینوسی اعداد ومختلط هستند توان نیز عدد مختلط میشود که قسمت حقیقی آن توان اکتیو و قسمت موهومی آن توان راکتیو است.

$$\mathrm{Re}\{S\} = P \qquad \mathrm{Im}\{S\} = Q$$

مفهوم پس فاز و پیش فاز

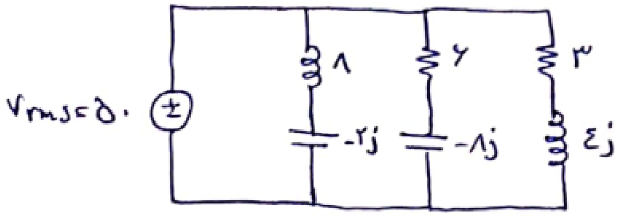
اگر زاویه جریان از ولتاژ عقب تر باشد سیستم پس فاز و اگر جلو تر باشد پیش فاز است. اولی در سیستمهای سلفی و دومی در سیستمهای خازنی اتفاق میافتد. چه سیستم پس فاز باشد چه پیش فاز توان اکتیو مثبت است اما توان راکتیو برای پس فاز منفی و برای پیش فاز مثبت است.

$\varphi_V - \varphi_I = \varphi > 0 \Leftarrow$ V, I lag پس فاز $\Leftarrow Q > 0 \Leftarrow \varphi_V > \varphi_I$

$\varphi_V - \varphi_I = \varphi < 0 \Leftarrow$ I, V lead پیش فاز $\Leftarrow Q < 0 \Leftarrow \varphi_V < \varphi_I$

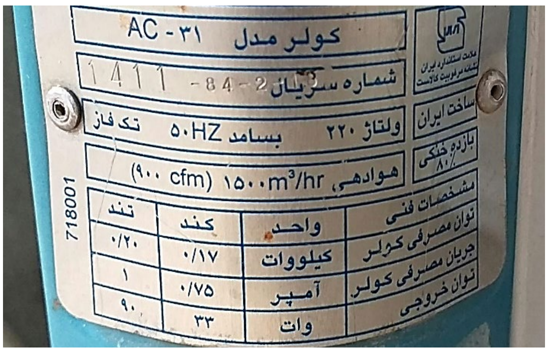
مثال۱۱: یک موتور الکتریکی به منبع ولتاژ v=120cos(100ωt) متصل شده است و جریان i=4cos(100ωt-30) آمپر از منبع میکشد. توان ظاهری، توان اکتیو، توان راکتیو و ضریب قدرت را بدست آورید. اگر بخواهیم این موتور را با المانهای مداری مدلسازی کنیم مقادیر آنها را بدست آورید و رسم کنید.

مثال ۱۲: سه بار الکتریکی که دوتای آنها مقاومتی خازنی و یکی مقاومتی سلفی است به صورت موازی به منبع متصل شده اند. منبع چند وات توان باید تولید کند؟



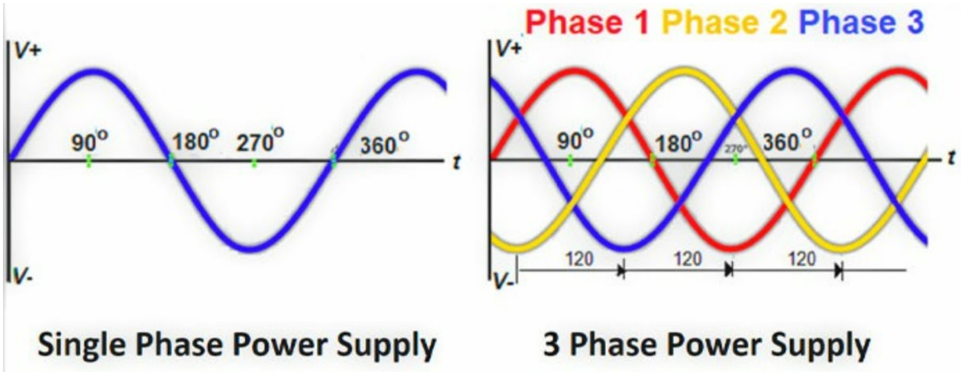
مثال ۱۳: یک پمپ توان 12KVA را در ضریب توان ۰/۸۵۶ از منبع سینوسی ۱۲۰ میکشد. توان اکتیو، توان راکتیو، حداکثر جریان مصرفی و امپدانس معادل پمپ را بدست آورید.

مثال ۱۴: پلاک مشخصات کولر آبی در شکل زیر آورده شده است. ضریب توان در دو حالت کند و تند را بدست آورید.

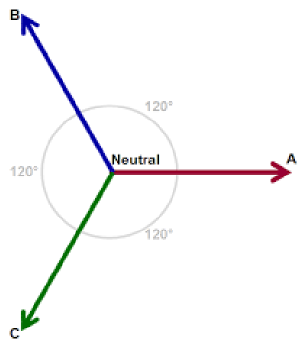


مدارهای سه فاز

در مدار تک فاز فقط یک فاز وجود خواهد داشت و جریان فقط از طریق یک سیم عبور می کند و یک مسیر برگشتی به نام سیم خنثی (نول) برای تکمیل مدار وجود دارد. بنابراین در سیستم تک فاز حداقل مقدار توان جابجا می شود. در سال ۱۸۸۲ اختراع جدیدی بر روی سیستم چند فازی انجام شد که می توان از بیش از یک فاز برای تولید، انتقال و برای سیستم بار استفاده کرد. مدار سه فاز یک سیستم چند فازی است که در آن سه فاز با هم از ژنراتور به بار ارسال می‌شوند. در سیستم سه فاز، اختلاف فاز ۱۲۰ درجه بین فازها وجود دارد. امواج سینوسی برای سیستم تک فاز و سه فاز در زیر نشان داده شده است:

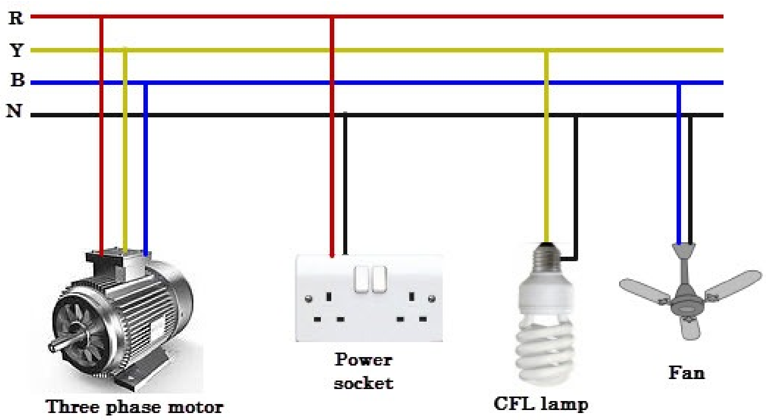


همانطور که امواج سینوسی در مدارهای سه فاز ۱۲۰ درجه با یکدیگر اختلاف فاز دارند، بردارهای متناظر با آنها نیز شبیه شکل زیر با هم ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند:



$$v_{an} = V_{max}\cos(\omega t)$$
$$v_{bn} = V_{max}\cos(\omega t - 120^{\circ})$$
$$v_{cn} = V_{max}\cos(\omega t + 120^{\circ})$$

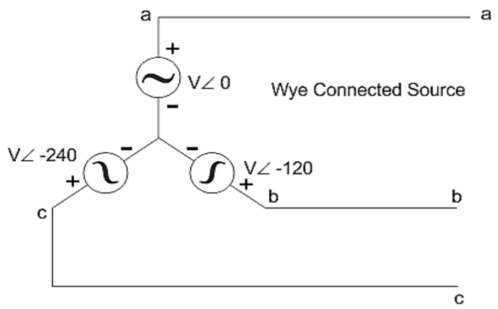
در سیستم تک فاز یک فاز و نول وجود دارد اما در سیستم سه فاز معمولا سیم نول وجود ندارد و هر سه فاز انتقال دهنده توان هستند. البته هر یک از سه فاز بعلاوه نول را می توان به صورت تک فاز استفاده کرد. بنابراین اگر بار تک فاز باشد، می توان از مدار سه فاز، یک فاز گرفت و از نول به عنوان زمین برای تکمیل مدار استفاده کرد. در شکل زیر چند دستگاه سه فاز و تک فاز نشان داده شده است.



دو اتصال رایج در مدارات سه فاز برای منابع و بارها وجود دارد: **اتصال ستاره و اتصال مثلث**

اتصال ستاره یا Y

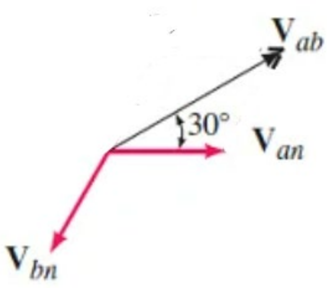
در اتصال ستاره یک سر اتصالات به یکدیگر و سر دیگر خروجی است که در شکل زیر نشان داده شده است. قسمتی که سر اتصالات به یکدیگر متصل شده اند نقطه خنثی یا نول است:



در اتصال ستاره، ولتاژ خط √۳ برابر ولتاژ فاز است. **ولتاژ خط** ولتاژ بین دو فاز در مدار سه فاز و **ولتاژ فاز** ولتاژ بین یک فاز تا نول است. در اتصال ستاره جریان خط و فاز باهم برابر است که به صورت زیر نشان داده می شود:

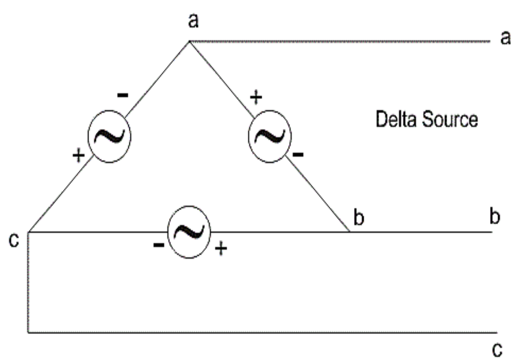
$$V_{line} = V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{3} V_{phase}$$
$$I_{line} = I_{phase}$$

تمرین: نشان دهید علاوه بر اینکه ولتاژ خط در اتصال ستاره √۳ برابر ولتاژ فاز است، زاویه آن نیز ۳۰ درجه جلوتر است.



اتصال مثلث یا دلتا Δ

در اتصال مثلث سه سیم به تنهایی وجود دارد و سیم نول در نظر گرفته نمی شود. شکل زیر اتصال مثلث را نشان می دهد. در ایستگاه بار، در صورت نیاز می توان از زمین به عنوان سیم خنثی (نول) استفاده کرد.



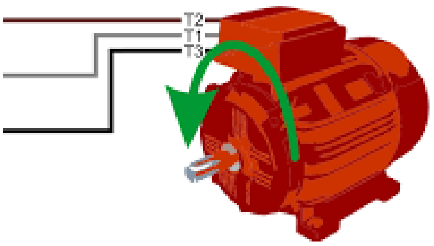
در اتصال مثلث، ولتاژ خط با ولتاژ فاز برابر است و جریان خط √۳ برابر جریان فاز است که به صورت زیر نشان داده می شود:

$$I_{line} = \sqrt{3} I_{phase}$$
$$V_{line} = V_{phase}$$

توان مستقل از آرایش مدار سیستم سه فاز است. توان خالص در مدار در هر دو اتصال ستاره و مثلث یکسان خواهد بود. از آنجایی که سه فاز وجود دارد، بنابراین مضرب ۳ را در معادله توان خواهیم داشت .توان در مدار سه فاز را می توان از رابطه زیر برای مقادیر فازی و خطی محاسبه کرد:

$$P_{3phase} = 3V_{phase} I_{phase} \cos\varphi$$
$$P_{3phase} = \sqrt{3} V_{line} I_{line} \cos\varphi$$

مثال۱۵: یک موتور سه فاز به منبع ۴۰۰ ولت متصل شده است و جریان ۲۰ آمپر با ضریب توان ۰.۸ پس فاز از شبکه می کشد. اگر راندمان آن ۸۰ درصد باشد توان خروجی موتور چند اسب بخار است.



مثال۱۶: مدار سه فاز زیر دارای بارهای ناهمسان است، جریان نول را بدست آورید.