Fluid Mechanics

مکانیک سیالات

استریتر

((پیشگفتار))

*پیش درآمد:

در درس مکانیک تحلیلی که مربوط به حرکت اجسام صلب بود , با اصول و قوانین نیوتن , پایستگی تکانه , انرژی و تکانه ی زاویه ای به خوبی آشنا شدیم و آنها را در حل مسایل مربوطه بکار بریم . مکانیک سیالات نیز بخشی از علم مکانیک است که در آن استاتیک و دینامیک مایعات و گازها مطالعه میشود .اگرچه این مطالعات نیز مانند مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین اصلی مکانیک استوار است ولی دو فرق عمده و مهم بین این دو مکانیک وجود دارد:

۱. خواص و ویژگیهای سیالات با جامدات سبکی متفاوت است و این ویژگی ها اغلب بـــــــــا حرکــــــــــت ســـــــــیال تغییــــــــــر مـــــــــــی کنـــــــــد .

۲. در مکانیک جامدات معمولا حرکت اجسامی بـا جـرم و ابعـاد مشـخص بررسـی به صورت یـک ,میشود ولی در مکانیک سیالات مطالعه ی حرکت پیوسته ی سیال جریان مورد نظر می باشد. به بیان دیگر در مکانیک اجسام صـلب مسـیر حرکـت ذره مشخص است ولی در مکانیک سیالات این مسیر نا مشخص و امکان مطالعه ی حرکت ذره ی منفرد وجود ندارد . در نتیجه با توجه به نکات بالا حل کامل معادلات حرکت سیالات معمولا امکان پذیر نیست و در معادلات نظری آن ضـروری اسـت که فرض هایی در نظر گرفته شود تا در عمل این معادلات به معادلات آسـانتری تبدیل شود . بنابراین استفاده از نتایج نظری بدست آمده هنگامی مسـیر خواهـد شـــد کـــه آنهـــا را بـــا آزمایشـــهای تجربـــی تصـــحیح و تکمیـــل کـــرد .

* فصل ۱

ویژگی های سیال

۱–۱ مقدمه:

دانش فناوری مکانیک سیالات با درک و مفاهیم ویژگی های سیال و همچنین بکارگیری قوانین اساسی مکانیک و ترمودینامیک و انجام آزمایشهای دقیق بسیار گسترش یافته است .

ویژگی چسبندگی و چگالی در جریان داخل کانالهای باز و بسته و جریان در پیرامون اجسام شناور در سیال نقش عمده ای در مکانیک سیالات دارد . به هنگامی که با کاهش فشار روبرو هستیم , فشار بخار نیز که موجب تغییر فاز (حالت) مایع به گاز می شود , اهمیت می یابد .

در این فصل ابتدا به تعریف سیال و سیستم بین المللی یکاها (SI) و سپس به بررسی ویژگی ها و تعریف های فوق می پردازیم .

۲-۱ تعریف سیال:

سیال ماده ای است که در اثر تنش برشی حتی ناچیز به طور دائم تغییر شکل می دهد . تنش برشی متوسط برابر با تقسیم نیروی برشی بر سطح است .

توجه داریم که نیروی برشی همان مولفه ی مماسی نیرو بر سطح مزبور می باشد . حال اگر این سطح آنقدر کوچک شود که به یک نقطه تبدیل شود آنگاه حد نیروی برشی بر این سطح نقطه ای را تنش برشی در یک نقطه می گویند .

در شکل (۱-۱) ماده ای در بین دو صفحه موازی و نزدیک بهم نشان داده شده است .

فرض می کنیم صفحات آنقدر بزرگ باشند تا از شرایط لبه های آنها بتوان صرف نظر کرد . اگر صفحه ی پایین ثابت باشد و نیروی F صفحه یبالا به مساحت A را بکشد . در نتیجه F/A همان تنش برشی بر این ماده است.

هنگامی که نیروی F باعث شود صفحه ی بالایی با سرعت یکنواخت (اما مخالف صفر) حرکت کند ,می توان نتیجه گرفت که ماده ی موجود بین دو صفحه مذبور , یک سیال است .

به طور تجربی معلوم شده است که ذرات سیال مجاور صفحات , سرعتی برابر با سرعت لایه های مرزی خواهند داشت . سیال موجود در سطح abcd به موقعیت جدید a b'c'd' می رسد.

هر ذره سیال موازی صفحه حرکت می کند , بنابراین سرعت u از صفحه پایین که سرعت آن صفر است تا صفحه بالایی که سرعتش U می باشد , تغییر می کند .

آزمایش نشان می دهد اگر سایر کمیات ثابت باشد F با U , A نسبت مستقیم و با ضخامت سیال نسبت عکس دارد . یعنی داریم :

$$F = \mu AU/t$$

که در آن μ ضریب تناسب است و مربوط به ویژگی های هر سیال می شود . اما اگر تنش برشی را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$Z = F/A$$

آنگاه داریم :

$$Z = \mu U / t$$

توجه داریم , نسبت , u/t همان سرعت زاویه ای خط ab یا به بیان دیگر میزان کاهش زاویه ای bad است .

اما نسبت u/t , du/dy هر دو حاصل تقسیم تغییرات سرعت بر مسافتی می باشد که این تغییرات در طول آن انجام می گیرد . بنابراین رابطه ی (۱-۱) را می توان به صورت رابطه ی دیفرانسیلی زیر درآورد:

$$Z = \mu \, du/dt$$

رابطه ی بالا , نشان دهنده ی ارتباط تنش برشی با سرعت تغییر شکل زاویه ای یک جریان تک بعدی است .

μضریب تناسب را چسبندگی سیال و معادله (۲-۱) را قانون چسبندگی نیوتن می نامند .

توجه داریم تعریف سیال , مواد غیر سیال را شامل نمی شود . به طور مثال یک ماده ی پلاستیکی متناسب با مقدار نیروی وارد بر آن به میزان معینی تغییر شکل می دهد ولی این تغییر شکل دائمی نیست .

۳–۱ یکاهای نیرو ، جرم ، طول و زمان

در حل مسایل مکانیک , یکاهای نیرو , جرم , طول و زمان نقش مهمی دارند . همچنین از این یکاها می توان , یکاهای دیگر را بدست آورد .

سیستم بین المللی یکاها , (SI) در اغلب کشورهای جهان پذیرفته شده است و در چند سال آینده انتظار می رود که تمامی کشورها این سیستم را بپذیرند و از آن استفاده کنند . در این سیستم نیوتن N یکای نیرو , کیلوگرم Kg یکای جرم , متر m یکای طول و ثانیه S یکای زمان است.و یک نیوتن به صورت زیر تعریف میشود:

$$N = 1\ Kg\ \ m/s^2 \qquad (۱–۳)$$

نیرویی که به علت جاذبه بر جسمی وارد می شود را نیروی گرانش یا وزن آن جسم می نامند .

توجه داریم که جرم یک جسم با تغییر مکان یا محل تغییر نمیکند ولی نیروی گرانش یا وزن جسم تغییر میکند زیرا این نیرو برابر با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب جاذبه g بدست می آید .

$$F=mg \quad (۱-٤)$$

در سیستم بین المللی یکاها , شتاب گرانش استاندارد برابر با $9/806 \ m/s2$ میباشد .

در این درس علائم اختصاری سیستم یکای SI با حروف کوچک مانند ساعت h , متر m و ثانیه s نشان داده می شود . برای بعضی از یکاها در این سیستم از حرف اول اسامی دانشمندان استفاده می شود :

وات W، پاسکال Pa ، نیوتن N و . . .

اهمیت این سیستم در استفاده از مضارب ۱۰ یا ۱۰/۱ به صورت پیشوند است . در جدول (۱-۱) پیشوندهایی که کاربرد بیشتری دارند آمده است .

۴–۱ چسبندگی

در بررسی جریان یک سیال , چسبندگی سیال حائز اهمیت است . در این بخش راجع به طبیعت و ویژگیهای چسبندگی, ابعاد , ضرایب تبدیل , چسبندگی مطلق و چسبندگی سینماتیکی بحث خواهیم کرد .چسبندگی ویژگی از سیال است که به علت آن , سیال در مقابل تنش برشی از خود مقاومت نشان میدهد . از قانون چسبندگی نیوتن معلوم می شود که برای یک تغییر شکل زاویه ای , تنش برشی با لزجت نسبت مستقیم دارد . به طور مثال قیر از مایعاتی با چسبندگی زیاد است , در صورتیکه هوا و آب از سیالاتی با چسبندگی کم می باشند .از آزمایش معلوم شده است که چسبندگی گازها با افزایش دما , زیاد می شود در صورتیکه برعکس چسبندگی مایعات با افزایش دما, کاهش می یابد .

مقاومت یک سیال در برابر نیروی برشی به جاذبه مولکولی و میزان انتقال تکانه ی مولکولها بستگی دارد . در مایعات به دلیل کوچکی فواصل بین مولکولها , نیروی جاذبه ی مولکولی به مراتب از گازها بیشتر است . چنین به نظر می رسد که علت اصلی وجود چسبندگی در مایعات , جاذبه ی مولکولی است , زیرا با افزایش دما , جاذبه مولکولی کم میشود و چسبندگی نیز کاهش می یابد .اما در مورد گازها , نیروهای جاذبه مولکولی بسیار اندک است , بنابراین آنچه باعث مقاومت در مقابل تنش برشی م یشود همان انتقال تکانه ی مولکولی آنهاست .در فشارهای معمولی , چسبندگی مستقل از فشار است و فقط تابعی از دما می باشد ولی در فشارهای بالا , چسبندگی گازها و برخی از مایعات با تغییر فشار , تغییر می کند .

در یک سیال چه در حالت سکون و چه در حالت حرکت , اگر دو لایه مجاور نسبت به یکدیگر حرکتی نداشته باشند , هیچ نوع تنش برشی ایجاد نخواهد شد , زیرا مقدار du/dy در کل سیال برابر صفر می باشد . بنابراین به هنگام بررسی ایستایی سیالات , فقط تنش های عمودی یا فشار مورد توجه خواهند بود .

ابعاد چسبندگی را می توان از قانون چسبندگی نیوتن (معادله ۲-۱) بدست آورد :

$$\mu = Z/(du/dy)$$

۵–۱ محیط پیوسته

در بررسی جریان سیالات , ساختمان واقعی مولکولی را می توان به شکل یک فضـــای پیوسته در نظر گرفت که آن را محیط پیوسته می نامند . به عنوان مثال , سرعت در هر نقطه در فاصله بین دو مولکول برابر با صفر است و زمانی دارای سرعت می شود که مولکولی دیگر این فاصله خالی را اشغال کنــد . در محاسبه ی ویژگیهای سیال , می توان علاوه بر نظریه ی مولکــولی همــراه با حرکات مولکولی , روابط پیوستــگی را نیز مورد استفاده قرار دارد.

در گازهای رقیق , مانند آتمسفر در ارتفاع 80km از سطح دریا , از نسبــت پویــش آزاد متوسط گاز به عنوان یکی از شاخــص های طولی جسم یا مجرای عبور گاز جـهت تشخیص نوع جریان استفاده به عمل می آید .

پویش آزاد متوسط برابر با مسافت متوسطی است که یک مولکول بین دو برخورد متوالی طی می کند .

هنگامی که نسبت پویش آزاد متوسط خیلی کوچک باشد , رفتار جریان گاز رادینامیک گازها می گویند و رفتار لحظات بعدی را جریان لغزشی می نامند . اگر این نسبت خیلی زیاد باشد , حرکت را جریان آزاد مولکولی می نامند . ما در این درس فقط دینامیــک گازها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد . همچنین فرض می شود کمیات چگالی , جسم مخصوص , سرعت و شتاب در تمامی سیال به طور پیوسته تغییر کند یا ثابت باشد .

۱–۶ چگالی , حجم مخصوص , وزن مخصوص , چگالی مخصوص و فشار

چـگالی سیال را معـادل جـرم در واحد حجـم تعریف می کنند و تعریف چـگالی در یک نقطه

عبارتست ازحد جرم کوچکی از سیال Δm تقسیم به حجم بسیار کوچک Δv به هنگامی که

Δv به سمت ε^3 میل کند , توجه داریم ε مقدار کوچکی است که در مقایسه با فاصله ی

بین مولکولها بازهم بزرگ می باشد .

$$\rho = \lim_{\Delta v \to \varepsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta v} \qquad (۱–۷)$$

چگالی آب در فشار استاندارد 760mmHg و دمای 4`c برابر با 1000Kg/m3 است .

V_s حجم مخصوص برابر با وارون چگالی می باشد و در واقع حجم اشغــال شده

توســط واحد جرم سیال را حجم مخصوص می نامند . یعنی :

$$V_s = 1/\rho \qquad (۱-۸)$$

نیروی گرانش واحد برای یک جسم ، همان نیروی گرانش در واحد حجـم جسم

می باشد که مقدار آن با تغییر مکان یا محل , تغییر می کند و بستگی به شتاب

جاذبه محیط دارد :

$$\gamma = Pg$$

چگالی نسبی S یک جسم در شرایط استاندارد , نسبت جرم جسم به جرم آب هم حجم آن می باشد و به صورت نسب چگالی آب نیز بیان می شود .

فشار , متوسط برابر با تقسیم نیروی محوری موثر وارد بر سطح به مساحت آن سطح بدست م یآید . فشار در یک نقطه از نسبت نیروی عمودی به مساحت سطحی که به سمت یک نقطه بسیار کوچک میل می کند , بدست می آید . اگر از طرف سیال فشاری به دیواره ی ظرفی وارد شود , متقابلا از طرف همان ظرف نیز فشار برابر با فشار سیال به سیال اعمال می شود . مایعات بخوبی در مقابل فشارهای زیاد از خود مقاومت نشان می دهند در صورتیکه در مقابل کشش بسیار ضعیف هستند .

فشار را می توان بصورت ارتفاع ستونی از سیال نیز بیان کرد رجوع به فصل ۲ .

فشار مطلق را با P و فشار نسبی را با نشان خواهیم داد .

۱–۷ گاز کامل

رابطه های ترمودینامیکی و جریان سیالات تراکم ناپذیر نظیر گازها به طور کلی به گازهای کامل محدود می شود . گاز کامل , گازی است که از قانون مربوط به گازهای کامل پیروی کند و دمای مخصوص آن نیـز ثابت باشد :

$$PV_s=RT \qquad (۱–۱۰)$$

در رابطه ی بالا P فشار مطلق، V_s حجم مخصوص ، R ثابت گازها و T دمای مطلق می باشد .

باید بین گاز کامل با سیال آرمانی تفاوت قائل شد . زیرا سیال آرمانی سیالی است که تراکم ناپذیر و بدون اصطکاک می باشد در حالیـکه گاز کـامل , گازی است که هم چسبنـدگی دارد و هم قـادر به ایجـاد تنش های برشی می باشد و همچنین تراکم پذیر است .

معادله ی (۱–۱۰) را می توان به صورت زیر درآورد :

$$P= \rho RT \qquad (۱–۱۱)$$

یکای R با توجه به سایر کمیتها به آسانی تعیین می شود . اگر از SI استفاده کنیم آنگاه P بر حسب پاسکال , بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب و T بر حسب کـلوین می باشد و در نتیجه داریم :

$$R=\frac{N}{m^2}\frac{m^3}{Kg.K}=\frac{m.N}{Kg.K} \quad \text{یا} \quad {m.N}/{Kg.K} \quad (۱-۱۲)$$

رابطه بین کلوین و سانتی گراد : $T = t + 273$

که دمای t بر حسب سانتی گراد میباشد یعنی 0`C برابر با 273` کلوین می باشد .

مقادیر R برا ی گازهای معمولی در جدول ٤-١ آمده است .

گازهای حقیقی در دمای بالاتر از دمای بحرانی و در فشارهای کمتر از فشار بحرانی از قانون گازهای کامل پیروی میکنند . یعنی با افــزایش فشار و نزدیکی به نقطه بحــرانی دیگر از قانون گازهای کامل نمی توان برای گازهای حقیقی استفاده کرد .

این قانون , قانــون بویــل رل نیز در بر می گیرد . بنــا به قانون بویــل در دمای ثابت , تغییرات چگالی با فشار نسبت مستقیم دارد . حجم V به ازای واحد جرم m گاز برابر با mrs است , بنابراین داریم :

PV = mRT (۱۳–۱)

اگرقانون گازهای کامل را برای یک مول گاز بنویسیم، نتایج آسانی بدست می آید .

یک کیلوگرم مول از گاز , جرمی از گاز است که برابر با جرم مولکولی نسبی آن گاز باشد . به عنوان مثال یک کیلوگرم مول از اکسیژنی O_2 برابر با 32Kg است . اگر حجم در مول را با نشان می دهیم , قانون گازهای کامل به صورت زیر بیان می شود :

$$P = mRT \qquad (1\text{–}14)$$

که در آن M جرم مولـکولی گاز است . اگر تعداد مولهای گاز را در حجم V برابر با n بگیریم, آنگاه می دانیم m=nM است و در نتیجه بدست می آید :

$$PV = nMRT \qquad (1\text{–}15)$$

اما از قانون آووگادرو می دانیم گازها در حجم مساوی و دمای مطلق و فشار یکسان , تعداد مولکولهای مساوی دارند . بنابـراین جـرم آنها متنـاسب با جرم مولـکولی نسبی آنها است . از آنجایی که مقدار PV / nT برای تمام گازهای کامل , یکسان است , بنابراین با توجه به معادله ی (۱-۵) حاصل ضرب MR نیز ثابت می باشد. این مقدار ثابت را ثـابت گازها می نامند و در سیستم بین المللی یکاها داریم :

$$MR = 8.312 \qquad m.N/Kg.mol.K \qquad (۱-۱۶)$$

در نتیجه مقدار R را می توان از رباطه بالا چنین بدست آورد:

$$R = 8.312 / M \qquad m.N/Kg.N \qquad (۱-۱۷)$$

{رجوع کنید به جدول ۳-۱}

گرمای ویژه یک گاز , Cv مقدار گرمائی است که باید در حجم ثابت به واحد جرم آن داده شود , تا دمای آن یک درجه بالا برود. Cp گــرمــای ویــژه یک گاز است و آن مقدار گــرمایی است که در فشار ثابت به واحد جرم آن داده می شود تا دمای آن یک درجه زیادتر شود .

K ضریب دمای مخصوص برابر با Cp/Cv است و انرژی داخل u نیز به P , , T ρدارد و انرژی در واحد جرم تعریف می شود . یکی از پارامترهای مهم گاز آنتــالپی است که از رابطه ی $h = u+P/\rho$ بدست می آید .

یکای Cp , Cv برابر با ژول بر کیلوگرم , یعنی J / kg .k است. دمای معادل 4187J باید به یک کیلوگرم آب در شرایط استــاندارد داده شود تا دمای آن یک درجه سلیــوس زیاد شود و این مقدار گرما را یک کالری می نامند .

رابطه ی R با Cv , Cp به صورت زیر است :

$$Cp= Cv + R$$

در فصلهای ۳ و ۶ به نکات و رابطه های مهم تری درباره گاز کامل پرداخته می شود .

۸–۱ ضریب کشسانی حجمی

در بخش های قبلی تراکم پذیری گازها را با استفاده از تعریف گاز کامل توضیـح دادیم . زمانــی تراکم پــذیری یک سیــال اهمیت می یابد که به طور ناگهانی تغییــرات فشار زیادی را تحمل کنــد. با تغییر دمای مساله, تراکم پذیری اهمیت می یابد . تراکم پذیری یک مایع از ضریب چگالی حجمی بیان می شود . اگر در واحد حجــم مایعی فــشار به اندازه ی dp زیاد شود , حجـــم مورد نظر به اندازه ی –dv کــم می شود. نسبت –dp / dv را ضریـب کشسانی حجمی K می نامند. بنابراین داریم :

$$K = dp / (dv/V)$$

اما dv / V بدون بعدمی باشد بنابراین واحد K را بر حسب واحد فشار بیان می کنند.

با توجه به جدول (۲–۱) برای آب در دمای $20`C$, $K=2.2Gpa$ می باشد. برای درک بهتر تراکم پذیری آب , فرض کنید فشاری برابر با 0.1 Mpa به یک متر مکعب آب اثـر کند . در این صورت داریم :

$$dV = Vdp / K = (1.0\ m3)(0.1\ Mpa) / 2.2\ Gpa = 1 / 22000 \quad m^3$$

که تـقریبـا مساوی 45/5 m3 می باشد . هنگامی که یک مایع فـشرده می شود مقاومتش در برابر ازدیاد فشار افزایش می یابد . به همین دلیل , در ۳۰۰۰ اتمسفر , مقدار K برای آب دو برابر می شود .

۱–۹ فشار بخار

به علت فرار مولکولها از سطح مایع , مایعات تبخیر می شوند و فشاری که از طرف مولکولهای بخار در فضا ایجاد می شود را فشار بخار می نامند. اگر فضـای بالای سطـح مایـع مسدود باشد ,پس از مدت زمانی , مقدار مولکولهایی که قبلا از سطح مایع فرار کرده اند با مقدار مولکولهایی که در اثر برخورد با سطـح آزاد مایع تقطیر می شدند , برابر خواهد بود و تعـادل ایجاد میشود . اما این پدیده به تحریک مولکولها بستگی دارد و این تحـریک نیز تابـعی از دماست , بنابراین فشـار بخـار یک سیـال با ازدیـاد دمـا افـزایـش می یابد. به هنـگام برابری فشـار روی مایع با فشـار بخـار , مایع شـروع به جوشیدن می کند. یعنی با کاهش فشار به مقدار کافی، آب می تواند در دمای اتـاق بجوشد .

در دمای , 20`C فشار بخار آب برابر با , 2 / 447 Kpa فشار بخار جیوه 0/173 Paمیباشد .

در اغلب سیستم هایی که مایعات در آنها جریان دارند , احتمال این که در نقاطی از این سیــستم فشار بقدر کافی کاهش یابد که برابر با فشــار بخــار یا کمتر از آن شود وجود دارد و این باعث تبخیــر سدیــم مایع می شود و پدیده ای به نام حفــره ســازی بوجود می آید. حبــابهای کوچک یا حفــره های بوجود آمده,سریعا انــبساط می یابند و از مکان اولیــه خود به طرف منطقه ای که فشار بیشتری نسبت به فشار بخار دارد , حرکت می کند و در آنجا از بین می روند. این پــدیــده رشد و نابودی در پمپ ها و توربیــن های هیــدرولیــکی باعث خوردگــی فلــزی می شوند و در نــتیجه خساراتی به دنبال خواهند داشت.

تست های فصل ۱

۱-۲-۱ سیال ماده ای است که :

الف) به طور دائم منبسط می شود تا ظرفی را پرکند .

ب) عملا تراکم ناپذیر است .

ج) نمی تواند تابع نیروهای برشی باشد.

√د) تحت تاثیر نیروی برشی نمی تواند درحالت سکون باقی بماند.

۲-۲-۱ قانون چسبندگی نیوتنی ترکیبی است از :

الف) فشار , سرعت و چسبندگی

√ب) تنش برشی و میزان تغییر شکل زاویه ای یک سیال

ج) تنش برشی , دما , چسبندگی وسرعت

د) فشار , چسبندگی و میزان تغییر شکل زاویه ای

۱-۳-۱ جسمی به جرم 2 Kg و وزن ۱۹n روی یک ترازوی فنری قراردارد . شتاب جاذبه محل را برحسب متر بر مجذورثانیه برابر است با :

الف) ۱۰۵/۰ ب) ۲ √ج) ۵/۹ د) ۱۹

۲-۳-۱ اگر نیرویی معادل ۱۰n به جرم ۲kg وارد شو د شتاب این بر جسم بر حسب M/s2 چقدراست؟

الف) ۲/۰ ب) ۰/۲ √ج) ۰/۵ د) ۰/۲۰

۳-۳-۱ نیروی گرانش وارد به یک جسم به جرم ۳ kg درسیاره ای که شتاب جاذبه ی آن g=10m/s2 می باشد برجسب نیوتن چقدر است ؟

الف) ۳۰/۰ ب) ۳۳/۳ ج) ٤۲/۲۹ √د) ۳۰

٤-۳-۱ فشار $۱۰^{۹}$pa را می توان به صورت زیر نوشت :

الف) gP_a √ب) GP_a ج) KMP_a د) $\mu\, p_a$

۱-٤-۱ رابطه ی ابعادی چسبندگی کدام است ؟

√الف) $FLT^{-۲}$ ب) $FLT^{-۱-۱}$ ج) $FLT^{-۲}$ د) $FLT^{۲}$

۲-٤-۱ جواب نادرست را مشخص کنید . نیروهای برشی :

الف) درموقعی که سیال ساکن است بوجود نمی آید.

ب)√ موقعی که سیال ساکن است به دلیل جاذبه ی مولکولی ممکن است بوجود بیاید

ج) به تبادل مولکولی تکانه بستگی دارد.

د) به نیروهای بین مولکولی بستگی دارد.

۳-٤-۱ رابطه ی ابعادی چسبندگی سیناتیکی عبارت است از :

الف) $FLT^{-۲}$ ب) $MLT^{-۱-۱}$ ج) $LT^{۲\,۲}$ √د) $LT^{۲-۱}$

٤-٤-۱ چسبندگی نفت سفید در ۲۰`c با توجه به جدول ۲-۱ برجسب نیوتن برمترمربع برابر است با :

الف) $۱۰^{-۵} \times ٤$ ب) $۱۰^{-٤} \times ٤$ √ج) $۱۰^{-۳} \times ۹۳/۱$ د) $۱۰^{-۲} \times ۹۳/۱$

۱-۴-۵ چسبندگی سیناتیک هوای خشک در ۳۰`c و ۷۶۰ میلی متر جیوه برحسب مترمربع برثانیه برابر است با :

–۵   –۴   –۶   –۵

الف)۱۰× ۷/۱   √ ب) ۱۰ × ۷/۱   ج) ۱۰ × ۷۳/۱   د) ۱۰× ۹۳/۱

۱-۴-۶ به ازای $V = 3\times10^{-8}\ m2/s$, $P = 800\ kg/m2$, مقدار μ درسیستم متریک برابراست با :

۱۱   –۵   ۵   ۱۲

الف)۱۰× ۷۵/۳   ب) ۱۰ ×۴/۲   √ ج) ۱۰ × ۴۷/۲   د) ۱۰ × ۴/۲

۱-۵-۱ درکدامیک از انواع جریان های زیر فرض پیوستگی معقول می باشد؟

۱) جریان آزاد مولکولی   ۲) جریان لغزشی   ۳)دینامیک گازها

۴) خلاء کامل   ۵) جریان مایع

الف) ۱و۲   ب) ۱و۴   ج) ۲و۳   √د) ۳و۵

۱-۷-۱ گاز کامل :
الف) چسبندگی اش صفر است .
√ ب) چسبندگی اش ثابت نمی باشد.
ج) تراکم ناپذیراست .
د) ازرابطه ی Pp=RT پیروی می کند.

۱-۷-۲ جرم مولکولی نسبی گازی ۲۸ است , مقدار R برحسب m.N/kg.kبرابر است با :

الف) ۲۹۱۷ ب) ۲۹۷ √ج) ۲۹۱۱ د) ۸۳۱۲

۱-۷-۳ درفشار مطلق I MPa دردمای ۱۰`c چگالی در SI برابر است با :

الف) ۲۳۱/۱ √ب) ۳۱/۱۲ ج) ۰/۶۵ د) ٤/۱۱۸

۱-۷-٤ چه مقدار گاز منواکسید کربن برحسب کیلوگرم جرم , در حجم ۱۰۰L و دمای ۲۰`c وفشار ۲۰۰KPa جای می گیرد؟

الف)۰/۲۳۰۰۰ √ب) ۰/۲۳ ج) ۳۶۷/۳ د) ۳۳۶۷

۱-۸-۱ ضریب کشانی حجمی گازی دردمای T. ازرابطه ی زیر بدست می آید :

الف) p/p   ب) RT.   ج) pP   د)√ PRT.

۱-۸-۲ ضریب کشسانی حجمی :

الف) به دمای بستگی ندارد   √ ب) با افزایش فشار , زیاد می شود

د) رابطه ابعادی آن به صورت ۱/p می باشد

ج) به فشار و چسبندگی بستگی ندارد .

۱-۸-۳ اگر ۱VMPa فشار به روی آب وارد کنیم , چگالی آن چند درصد افزایش می یابد ؟

الف) ۳۰۰/۱   ب) ۳۰/۱   ج)√ ۳/۱   د)۲/۱

۱-۸-٤ با اعمال فشار MPa ۱به روی مایعی به حجم ۳۰۰L حجمش ۶/۰ L می شود ضریب کشانی حجمی آن را برحسب GPa بدست آورید .

الف) ۵/۰ –   ب) ۵/۰   ج) ۵۰   √ د) ۵۰۰

۱-۹-۱ فشار بخار آب برحسب پاسکال دردمای ` ۳۰c برابر است با :

الف) ٤٤/۰   ب) ۱۸/۷   ج) ۲۲۳   √د) ٤۳۱۵

فصل ۲

ایستایی سیالات

۲–۱ مقدمه

در این فصل راجع به دانش ایستایی سیالات و آنهم در دو بخش خواهیم پرداخت: فشار و تغییرات داخلی یک سیال و همچنین نیروها ی فـشاری روی سطوح معین . اگـر سیـال مانند جـسم جامد حرکت کند، به دلیل تشابه نیروهای مورد بحث، آن را در قسـمت ایستـایی سیالات بررسی می کنند. در مطالعه ی ایـستـایی سیـالات بر روی سطــوح تمام اجسام آزاد، فقط نیروهای فــاری عمودی مورد توجه است.

۲–۲ فشار در یک نقطه

می دانیم اگر نیروی عمودی وارد بر صحنه ای را تقسیم بر مساحت این صفحه کنیم، فشار متوسط بدست می آید. بنابراین فشار در یک نقطه از حد نسبت نیروی عمودی وارد بر سطح بدست می آید اگر مساحت آن سطح به سمت صفر میل کند. در نتیـجه در هر نقطه از یک سیال ساکن، فشار در تمام جهت ها یکسان می باشد. برای اثبات این مطلب فرض می کنیم جسم کوچک آزادی به شکل گوه ای باشد که عرض آن برابر واحد و در نقطه (x, y) از یک ساکـن قـرار داشـته باشد. شـکل (۱–۲). همچنین فرض می کنیم فقط نیروی عمودی بر سطح و نیروی گرانی موجود باشد. بنابراین معادلات حرکت در جهت y, x به صورت زیر در می آید:

$$\sum F_x = P_x\delta_y - P_s\delta_s Sin\theta = \frac{\delta_x\delta_y}{2}\rho ax = 0$$

(۲–۱)

$$\sum F_y = p_y\delta_x - p_s\delta_s \cos\theta - \gamma\frac{\delta_x\delta_y}{2} = \frac{\delta_x\delta_y}{2}\rho ay = 0$$

(۲–۲)

که در این دو رابطه Pz , Py , Px فشارهای متوسط بر سه سطح ، نیـروی گرانـی واحـد چگـالـی و ay , ax شـتاب می باشند . اگر حد جسـم آزاد را که به سـمت نقـطـه‌ی (x,y) میل کند (با حفظ زاویه θ) بگیریم و با استفاده از دو رابطه‌ی زیر:

$$\delta s \, \mathrm{Sin}\theta = \delta y \quad , \quad \delta s \, \mathrm{Cos}\theta = \delta x$$

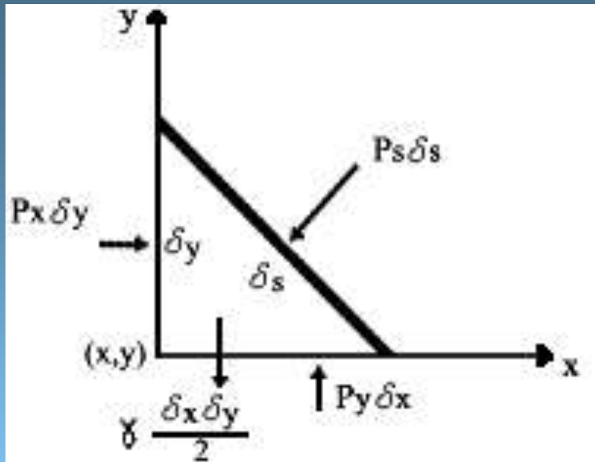
آنگاه معادلات (۱-۲) و (۲-۲) به صـورت زیـر در مـی آیند:

$$p_x\delta_y - p_s\delta_y = 0 \qquad p_y\delta_x - p_s\delta_x - \frac{\gamma\delta_x\delta_y}{2} = 0$$

جمله‌ی آخر در مـعادله‌ی دوم را صرف نظر کنـیم. زیـرا در مـقایـسه با سـایر جـملات کوچـک است. بنابراین نتیجه می شود:

(۳-۲)

$$Ps=Px=Py$$



<u>شکل ۱-۲</u>
نمودار جسم آزاد ذره ای به شکل گوه

و این قانون پاسکال است. چون زاویه‌ی θ اختیاری بود، بنابراین با توجه به معادله‌ی (۳-۲) مشخص می شود که در هر نقطه از یک سیال ساکن، فشار در تمام جهات یکسان است.

اگر حرکت سیال طوری باشد که دو لایه مجاور آن نسبت به هم حرکت داشته باشند، تنشهای برشی بوجود می آیند و در نتیجه تنش های عمودی حاصل در تمام جهت ها یکسان نخواهد بود . این فشار به صورت میانگین سه تنش فشاری عمود بر هم در یک نقطه به صورت زیر تعریف می شود:

$$P = \frac{P_x + P_y + P_s}{3} \qquad (۲-٤)$$

اما در یک سیال آرمانی با چسبندگی صفر برای هر نوع حرکت سیال، هیچ تنش برشی بوجود نمی آید ، در نتیجه در هر نقطه از این سیال ، فشار در تمامی جهت ها یکی خواهد بود.

۲-۳ معادلات بنیادی ایستایی سیالات

۲-۳-۱ تغییرات فشار در سیال ساکن

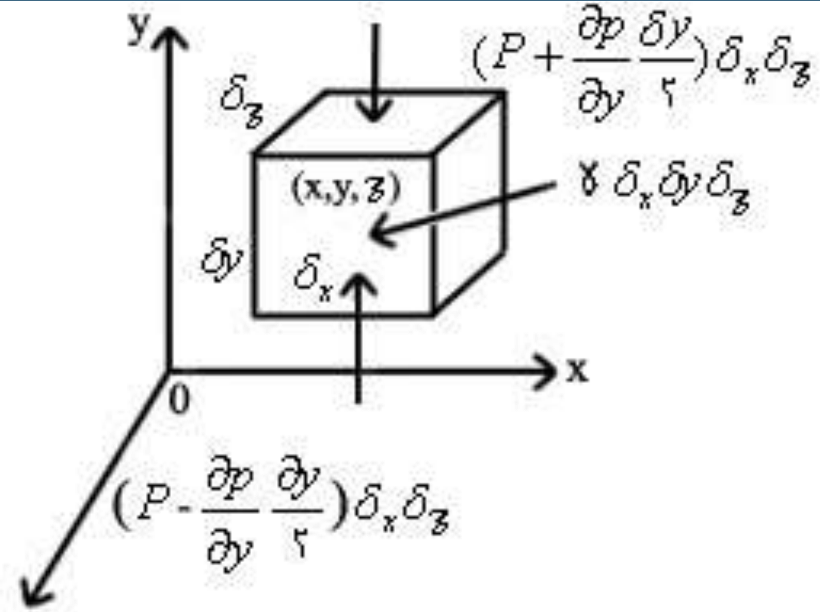
نیروهایی که به یک جـزء سـیال سـاکن وارد مـی شـود همـان نیروهای سطحی و نیروهای داخلی است (شکل ۲-۲). اگر محور y را به سمت بالا و به طور عمودی در نظـر بگیـریم، تنهـا نیـروی داخلی که بر این جزء در امتـداد y وارد مـی شـود برابـر بـا : $\gamma\delta x\delta y\delta z$ می باشد. فرض می کنیم، فشار P در مرکز ایـن جـزء (x,y) نیروی تقریبی وارد بر سطح عمود بر کل y که نزدیکتر بـه مبدأ می باشد، تقریباً برابر است

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{2}\right)\delta_x\delta_z$$

و نیروی وارد بر سطح مقابل آن برابر است با:

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{2}\right)\delta_x\delta_z$$

توجه داریم δy فاصله از مرکز تا سطح عمود بـر محـور y اسـت. بنابراین نیروهای وارد بر این جزء فرضی در جهت y بدست مـی آید:



شکل ۲-۲ جزء مکعب مستطیل شکل در سیال ساکن

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z - \gamma\,\delta_x\partial y\,\delta_z$$

اما در دو جهت xو هیچ نیروی داخلی وارد نمی شود:

$$\delta F_x = \frac{\partial p}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z \qquad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z$$

سرانجام بردار نیروی مؤثر δF از رابطه زیر بدست می آید.

$$\overrightarrow{\delta F} = \hat{i}\,\delta F_x + \hat{j}\,\delta F_y + \hat{k}\,\delta F_z = -\left(\hat{i}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta_x\delta_y\delta_z - \hat{j}\gamma\delta_x\delta_y\delta_z$$

حال ابعاد جزء مورد نظر را به سمت صفر میل می دهیم و دو طرف رابطه‌ی بالا را بر δxδyδz=δ v تقسیم می کنیم تا نتیجه شود:

$$\lim_{\delta v \to 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta v} = -(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z})\,p - \hat{j}\gamma \qquad (۲-۵)$$

و این مقدار نیروی وارد بر واحد حجم جزءِ در هر نقطه است که برای سیال ساکن باید برابر با صفر گرفت. کمیت داخل پرانتز در رابطـه‌ی (۲-۵) گرادیان $(\vec{\nabla})$ می باشد. یعنی:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\partial\big/\partial y + \hat{k}\,\partial\big/\partial z \qquad (۲-۶)$$

و $-\nabla P$ ، برابر با میدان برداری f (نیروی فشار سطح در واحد حجم) است:

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} P$$

(۲-۷)

بنابـرایـن قـانون تغییـرات فشار در سـیال ساکن به صورت زیر بیان می شود.

$$\vec{f} - \hat{i}\gamma = 0$$

اگر سـیال چسبناکی در حال حرکت یا سیالی که در آن تنش برشی در تمام نـقاط صفر باشد، قانون دوم نیوتن به صورت زیر در می آید:

$$\vec{f} - \hat{j}\gamma = \rho\vec{a}$$

(۲-۸)

در رابطـه ی بالا a شتاب جزء سیال است. اگر فقط نیروی گرانشی به حجم سـیال اثـر کند. نیروی سیال به صورت $f - j\gamma$ است. ما از این رابطه بـه هنگـام بحث معادلات اویـلر اسـتفاده خواهیم کرد. اگر مـعادله (۲-۸) را بـخواهـیم به صـورت مولفـه ای بـیان کنیم، سه معادله‌ی زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

در واقع این معادلات شکلی از قانون پاسکال است و بیانگر این نکته می باشد که در جرمی پیوسته ای از یک سیال، چنانچه دو نقـطه ارتفاع یکسانی داشته باشند ، فشارهای یکسانی دارند. بنابراین مـی توان نتیجه گرفت که P فقط تابعی از y است یعنی:

$$dp = -\gamma dy$$

(۲-۹)

این معادله‌ی دیفرانسیل آسان، رابطه‌ای بین تغییرات فشار را با نیروی گرانی و تغییرات ارتفاع نشان می دهد و برای سیالات تراکم پذیر یا تراکم ناپذیر بکار می رود.

اگر سـیال همگـن و تراکـم ناپـذیر باشـد کـه در ایـن صورت γ ثابت می باشد . با انتـگرال گیری از رابطه‌ی (۹-۲) نتیجه می شود:

$$p = -\gamma y + c$$

(۲-۱۰)

اما اگر سطح مقایسه را سطح آزاد مایع بگیـریم . بنابـراین در ارتفاع P, y=-h برابر است با افزایش فشار از سطح آزاد مایع و معادله‌ی بالا به صورت زیر در می آید.

$$p = \gamma h$$

(۲-۱۱)

مثال ۱:

می خواهیم آزمایشگاه دریایی به ارتفاع ۵ متر را طراحــی می کنیــم که بتواند در عمق ۱۰۰ متری از سطح دریا غوطه ور باشــد . می دانیم چگــالــی نــسبــی آب نــمــک ۱/۰۲۰ است ، فــشار روی سطــح بالای آزمایشگاه و همچنین تغییرات فشار را روی یکی از وجوه آن بدست آورید. به ازای $h=100m$

حل $\gamma = 1/020 \times 1000 \times 9/806 = 10\ kN/m3$ و از رابــــطــــه ی (۱۱-۲) داریم :

$$P=\gamma h=10 \times 100=1\ N/m$$

اگر y فاصله از بالای آزمایــشگاه رو بــه پایــین باشد، تغییرات فشار به صورت زیر خواهد بود.

$$P=10(y+100)\ Kpa$$

۲–۳–۲ تغییر فشار در سیال تراکم پذیر

اگر دمای یک گـاز آرمانی ثـابت و به حالت سکون باشد با توجه به معادله‌ی (–۱) داریم:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_o}{\rho_o}$$

(۲–۱۲)

اگر ρ را از این معادله و معادله (۹–۲) حذف کنیم (می دانیم γ =ρg است):

$$dy = \frac{-P_o}{g\rho_o}\frac{dp}{P}$$

(۲–۱۳)

با انتگرال گیری از این معادله نتیجه می شود:

$$\int_{y_0}^{y} dy = -\frac{P_o}{g\rho_o}\int_{P_o}^{P}\frac{dp}{P}$$

و یا

$$y - y_o = -\frac{P_o}{g\rho_o}\, lm\, P/P_o$$

و یا

$$P = P_o e^{\left(-\frac{y-y_o}{P_o / g\rho_o}\right)}$$

(۲–۱٤)

معادله بالا تغییر فشار را با ارتفاع در یک گاز تکدما نشان می دهد.

مثال ۲

اگر در سطح دریا ρ = ۱/۲٤ kg/m3 و P=105 Paabs و آتمسفر تکدما باشد، مقدار فشار و چگالی را در ارتفاع ۲۰۰۰ متری چقدر خواهد بود؟

حل

با جایگزین داده ها در معادله ی (۱٤-۲) بدست می آید:

$$P = 10^5 \exp[-\frac{2000}{10^5 / 9/806 \times 1/24}]$$ = ٤/٧٨ kPa abs

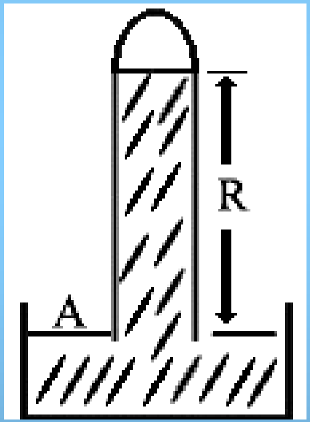
برای محاسبه‌ی چگالی از معادله‌ی (۱۲-۲) خواهیم داشت:

$$p = \frac{\rho_o}{\rho_o} P = 1/24 \frac{78400}{100000} = 0/972$$ Kg/m³

۲-٤ دستگاه های اندازه گیری فشار

فشار را می توان نسبت به هر مبنای دلخواهی بیان کرد. متداول این است که مبنای فشار، صفر مطلق و فشار آتمسفر محلی باشد. اگر فشار بر حسب اختلاف آن با خلاءِ کامل بیان شود آن را فشار مطلق می گویند و هنگامی که بر حسب اختلاف با آتمسفر محلی بیان شود، فشار نسبی می نامند.

فشار آتمسفر محلی را بـا بارومتـر جیوه ای (شکل ۳-۲) اندازه مي گیرند که اختلاف فشار بین اتمسفر و خلاءِ یا لوله ای که هوای آن تخلیه شده باشد نشان می دهد. بارومتر جیوه ای شـامل یک لولـه نازک شیشه ای محتوی جیوه است که یک سر آن و سر باز آن در تـشتکی پر از جیوه غـوطه ور می باشـد . این دستگاه طوری درجه بندی می شود که به کمک آن بتوان مقدار R را تعیین کرد.



شکل (۳-۲)

بارومتر جیوه ای

فضای بالای جـیوه حاوی بخار جیوه است و اگر فشار بخار جیوه hr برحسب میلی متر جیوه و R نیز بر حسب همین یکا بیان شود، آنگاه فشار در نقطه A برابر است با:

$$hr+R=hA \qquad (۲-۱۵)$$

توجه داریم که فشار بـارومتر با تغییر محل فرق می کند و hr تابعی از دما است ولی در دمای آتمسفر مقدار وابستگی hr به دما بسیار کم و ناچیز است.

معمولاً گـرادیان دمـای آتمـسفر را ثابت فرض می کنند و آن را به صورت زیر بیان

$T=T_o+\beta y$ (۲-۱۶)

و میزان تغییرات دما با ارتفاع را در آتمسفر میزان انحراف می نامند. حرکت توده هوا بستگی به چگالی آن نسبت به چگالی هوای پیرامونش دارد. اگر این توده هوا در آتمسفر بالا برود، فشار کاهش می یابد و منبسط می شود و در نتیجه دمای آن نیز کاسته می شود. این مقدار را انحراف بی در رو می نامند.

مثال ۳

در کارخانه ای می خواهند مقداری زیادی زباله را بسوزانند. دمای دود حاصل از این زباله ها در ارتفاع ۱۰ متری بالاتــر از سـطح زمــین ۱۱`C بیشـتر از هوای پیرامــونش می باشد . اگر شرایط طــوری باشــد که در فشار آتمسفر مقدار انحراف دمای β=۰۰۹۵۱/۰`C در هر متر و to =۲۰`C باشــد ، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

حل

با توجه به رابطه‌ی (۲-۱۶) می توان از قانون گاز کامل استفاده کرد. و چگالی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\rho=\frac{P}{RT}=\frac{P}{R(T_o+\beta)y}$$

با جایگزین این رابطه در رابطه‌ی فشار داریم:

$$\int_{P_o}^{P}\frac{dp}{P}=-\frac{g}{R}\int_{0}^{y}\frac{dy}{T_o+\beta y}$$

و یا

$$\ln P/P_o = -g/R\beta \ln\frac{T_o+\beta y}{T_o} = -g/k\beta \ln(1+\beta y/T_o)$$

در نتیجه داریم:

$$p/R_o = (1+\beta y/T_o)^{-g/k\beta}$$

اما از فصل می دانیم برای فشار و دما در حالتی که گاز بدون انتقال دما منبسط می شود رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{P}{P_o}\right)^{(k-1)/k}$$

که در آن T_1 و P_o دمـا و فشـار مطلق دود در حـالت اولیه است و k ضریب دمای مخصوص میباشد که برای هوا و سـایر گازهـای دو اتمی برابر با ٤/١ است. از حذف P/P_o در دو معادله‌ی اخیر، داریم:

$$T = T_1(1+\beta y/T_o)^{-[(k-1)/k](g/R\beta)}$$

اما در طـی این مـدت که گاز به سـوی بالا می رود ، دمایش با دمای پیرامون خود یکسان خواهد شد و داریم:

$T=T_o+\beta y$

سرانجام از این دو معادله، y را بدست آوریم:

$$y = \frac{T_o}{\beta}\left[\left(\frac{T_o}{T_1}\right)^{a} - 1\right]$$ (۲-۱۷)

که در آن

$$a = \frac{-1}{(k-1)\,{}^{g}\!/_{KR\beta} + 1}$$

اکنون به ازای $\beta = -0/00651^{o}C$ و مقدار $t_o = 20^{o}C$ $R = 287\frac{MN}{kg.k}$ بدست می آید:

y=۲/۸۰۹m و a= ۰۰۲/۲

اگر نقطه ای در زیر خط فشار آتمسفر محلی که به عنــوان مبدأ اندازه گیری معین شده، قرار داشته باشد، آن را فشار مکش می نامند . برای مثال اگر فشار 460mm Hg abs را بارومتر 720mm نشان دهد، فشار را می توان به صورت 260mmHg- یا 260mmHg مکش بیــان کرد . بنابراین می توان چنین نوشت.

$$P_{abs} = P_{bar} + P_{gage}$$ (۲-۱۸)

دستگاه دیگری که در اندازه گیری فشار بکار می رود مانومتر است و آن دستگاهی است که در آن از ستون مایع جهت تعیین اختلاف فشار استفاده می شود. ساده ترین نوع مانومترهایی را که در شکل (٤-٢) نشان داده شده است . پیزومتر می نامند و از آن در حالتی که فشار نسبی مایع از صفر بیشتر باشد استفاده می شود . توجه داریم که لوله شیشه ای به حالت قائم به فضای مخزن ارتباط می یابدو مایع داخل مخزن در این لوله تاجایی بالامی آید که به حالت تعادل برسد . این ارتفاع (h) بیانگر فشار داخل مخزن است . از این دستگاه نمی توان در اندازه گیری فشار منفی استفاده کرد.

اگر فشار داخل مخزن بسیار زیاد باشد، باید طول لوله شیشه ای قائم بسیار بلند باشد که عملی نیست ، بنابراین از این دستگاه نمی توان استفاده کرد.

اگر چگالی نسبی مایع S باشد . فشار مخزن برابر با " hsبرابر واحد طول آب" می باشد.

بنابراین اگر بخواهیم فشارهای نسبی مثبت و منفی ناچیز در یک مایع را اندازه گیری کنیم باید از نوع دیگر مانومتر که در شکل (٤-٢ الف) نشان داده شده است استفاده کرد . در این حالت سطح آزاد مایع پایین تر از مخزن A قرار می گیرد . زیرا با کاهش ارتفاع ، فشار کم می شود و فشار نسبی در سطح آزاد مایع صفر است. در این حالت داریم:

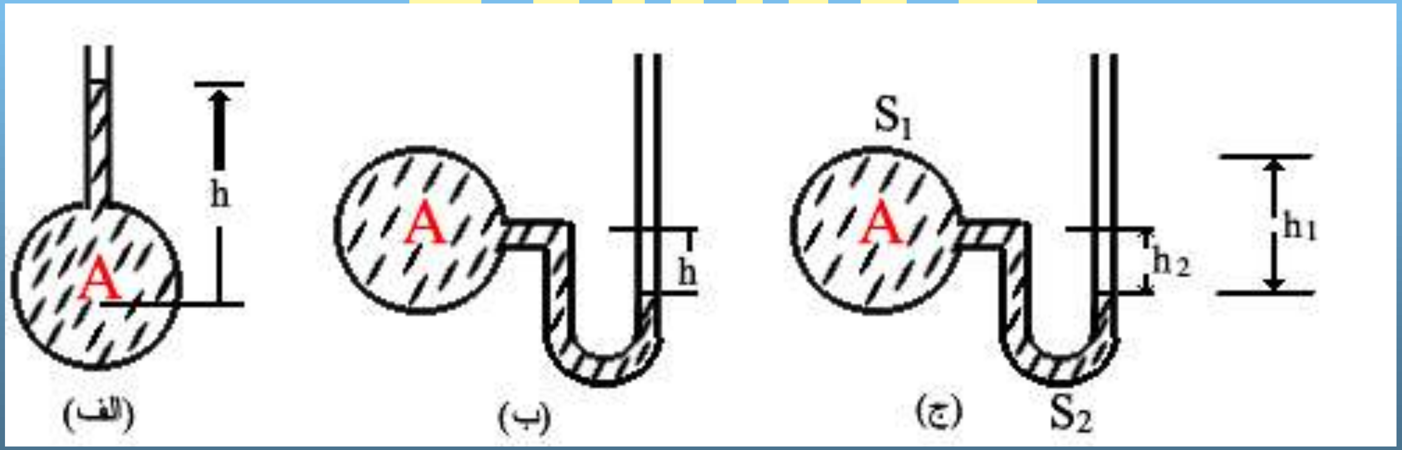
$h_A = -AS$ واحد طول آب

در مواردی که فشار نسبـی مثبت و یـا منفی زیاد باشد ، از مانومتری استفاده می شود که در شکل (٤-٢ ج) نشان داده شده است و در آن از دو مایـع یا یـک مایـع و یک گاز که یکی از آنها چگالی نسبی بیشتری نسبت به دیگری داشته باشد ، بکار می رود . اگر چـگالی نسبی سیال داخل مخزن A برابر با S_1 و چگالی مایع داخل مانومتر S_2 باشد. معادله ای به صورت زیر بـرای اندازه گیری فشار مخزن A باشد و از نقطه A یا بالاترین سطح آزاد مایع نوشته می شود:

$$h_A+h_2S_1-h_1S_2=o$$

و h_A فشار مجهول است , که بر حسب یکای طول آب بیان می شود .

شکل ٤-٢ مانومترهای ساده



۲–۵ نیروهای وارد بر سطوح سطح

در بخـش قبلی تغییرات فشار را درون سیال بررسی کردیم . روی یکـ سطح مشـخص داخـل سیـال نیـروهـای زیادی دارد وارد می شود که می توانیـم یکـ نیروی برآیند جایگزین آنها کرد. در این بخش راجـع به مقدار نیروی برآیند و خط اثر آن (مرکز فشار) بحث می کنیم.

۱–۵–۲ سطوح افقی

اگر صفحه ای مسطح به طور افقی داخل سیالی ساکن تحت فشار ثابت قرار گیرد، مقدار نیروی وارد بر یکـ وجه این صفحه برابر است با:

$$\int pdA = p\int dA = PA$$

نیرو های خارجی PA به طور موازی به سطح A وارد می شود، در نتیجه جمـع تمامــی آنها برابر با نیروی برآیند خواهد بود . توجه داریم در این حالت جمع نیروها به صورت جمع اسکالر میباشد. اکنون می خواهیم خط اثر این نیروی برآیند (نقطه ای داخل سطح که گشتـاور نیروها حول هر محوری گــذرا از این نقطــه صفر باشد) را تعیین کنیــم. با توجه به شکل

(۲–۵) داریم:

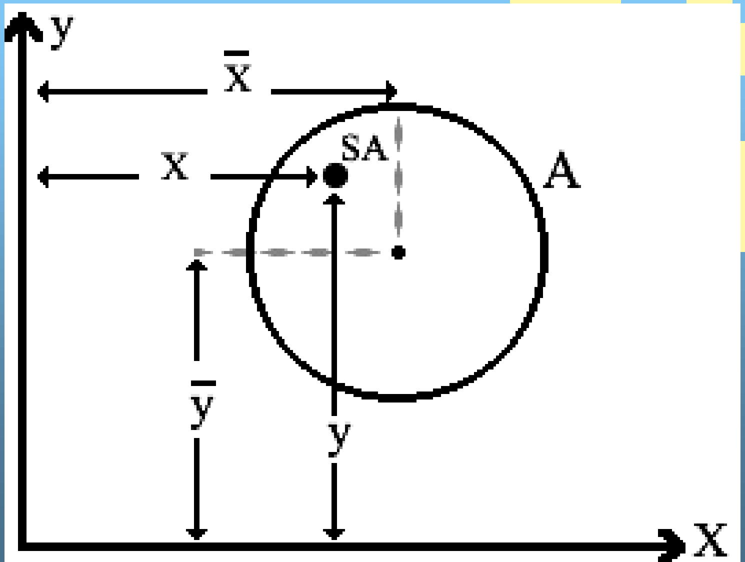
$$PAx' = \int_A xpdA$$

در رابطه‌ی بالا x' فاصــله‌ی نیــروی برآیند تا محور y است. چون P را ثابت فرض کردیم:

$$x' = \frac{1}{A}\int_A x dA = \bar{x}$$

که در آن $\bar{x}$ فاصــله‌ی مرکز جــرم تا محور y است (به پــیو ســت الف مراجعه شود). در نتیجه می توان چنین گفت در یک سطح افقی که تحت فشار سیال ساکن است، بردار برآیند از مرکز جرم این صفحه عبور خواهد کرد.

شکل ۵-۲ سطح افقی تحت فشار از سوی یک سیال ساکن



۲-۵-۲ سطوح شیبدار

در شــکل (۶-۲) صفحه سطحی با تصو یرش A′B′ نشــان داده شده است. زاو یه ای این صفحه با سطــح افقی θ فرض می شود. تقاطع ســطح مسطــح را با سطح آزاد مایع محور x می گیریم و محور y را روی سطح آزاد مزبور انتخاب می کنیم.

بنابراین صفحه xy را می توان یــک ســطح شیبداری فرض کرد. اکنون می خواهیم مقدار و جهت و خط اثر نــیروی برآیند را که از سیال به یک وجه این سطح وارد می شود، تعیین کنیم. فرض می کنیم نواری نازک به ضخامت δy به مساحت δA را از این سطح بر می گزینیم. مقدار نیرو یی که از سیال به این نوار وارد می شود ، برابر است با:

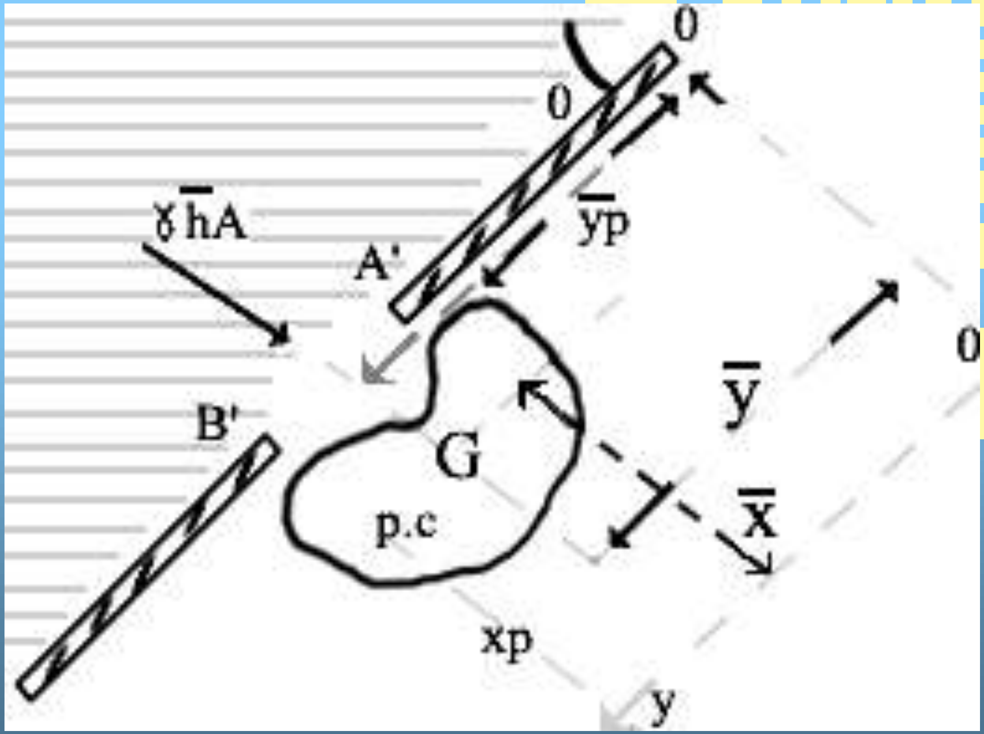
$$\delta_F = P\delta_A = \gamma h\delta_A = \gamma y \sin\theta\delta A \qquad (۲-۱۹)$$

امــا مــی دانیم تمام نیروهــای خارجی موازی اند، بنابراین به آسانی با انتگرال گیری از رابطه‌ی بالا مقدار F نیروی برآیند بدست می آید:

$$F = \int p dA = \gamma \sin\theta \int y dA = \gamma \sin\theta \bar{Y} A = \gamma \bar{h} A = p_G A \qquad (۲-۲۰)$$

در رابطه‌ی بالا PG فشار در مرکز جرم این سطح است . یعنی مقدار نیرو یی که به سطح شیـبدار وارد می شود بـرابـر با حـاصـل ضرب مساحت در فشار وارد به مرکز جرم این صفحه است. اگـر PG مثبت باشد یعنی نیرو در جهتی است که بر صفحه فشار وارد می شود . چون تمام نیروهای وارد بر این صـفحه موازی انـد و مـحور بر صـفحه اند. بنابراین خط اثر نیروی برآیند نیز عمود بر صفحه می باشد.

شکل ۶-۲ سطح شیبدار درون مایع



۳-۵-۲ مرکز فشار

با توجه به شکل (۶-۲)، ملاحظه می شود که خط اثر نیروی برآیند از نقطه ای به مختصات (x_p, y_p) گذر می کند . این نقطه را مرکز فشـار می گویند و توجه داریـم ضرورتـی نـدارد که بر مرکز جرم سیستم منطبق باشد . یعنی مرکز فشار یک صفحه شیبدار در مرکز جرم آن صفحه قرار ندارد. در تعیین مرکز فشار بـاید گشتاورهای نیروی برآیند را که x_pF , y_pF می باشند برابر با گشتاورهای نیروهای گسترده حول محورهای y, x گرفت:

$$x_p F = \int_A x_p d_A$$ (۲۰-۲ ب)

$$y_p F = \int_A y_p d_A$$ (۲۰-۲ الف)

توجه داریم در معادلات بالا δA دیگر برابر با $\delta x\ \delta y$ نیست و سرانجام داریم:

$$x_p = \frac{1}{F}\int_A x_p d_A$$ (۲۱-۲ الف)

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A y_p d_A$$ (۲۱-۲ ب)

بـرای سـطوح سـاده ، ایـن معادلات به شـکل کلی تر زیر بیـان مـی شوند (به ضمیمه الف رجوع کنید).

$$x_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin\theta}\int_A x\gamma y \sin\theta d_A = \frac{1}{\bar{y}A}\int_A xy d_A = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A}$$

با استفاده از ضمیمه مزبور معادله بالا به صورت زیر ساده می شود:

(۲-۲۲)

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}_A} + \bar{x}$$

اگر یکی از محورهای مرکز جرم یا $x = \bar{x}$ یا $y = \bar{y}$ محورتقارن صفحه باشد ، $\bar{I}_{xy}$ حذف و مرکز فشار روی $x = \bar{x}$ قرار می گیرد. توجه داریم $\bar{I}_{xy}$ می تواند مثبت یا منفی باشد،

بنابراین مرکز فشار می تواند در طرف چپ و یا در طرف راست خط $x = \bar{x}$ باشد.

اکنون yp را محاسبه می کنیم.

$$y_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin\theta} \int_A \gamma\gamma\gamma_y \sin\theta dA = \frac{1}{\bar{y}A} \int y^2 dA = \frac{I_x}{\bar{y}A} \qquad (۲-۲۳)$$

با استفاده از قضیه محورهای موازی $Ix = I_G + \bar{y}^2 A$ در این رابطه IG گشتاور دوم سطح حول مرکز جرم افقی آن می باشد با جایگزینی رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲-۲۳) نتیجه می شود:

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y}$$

(۲-۲٤)

اما IG همواره مثبت است، بنابراین نیز مثبت می باشد و مرکز فشار همیشه پایین تر از مرکز جرم صفحه خواهد بود.

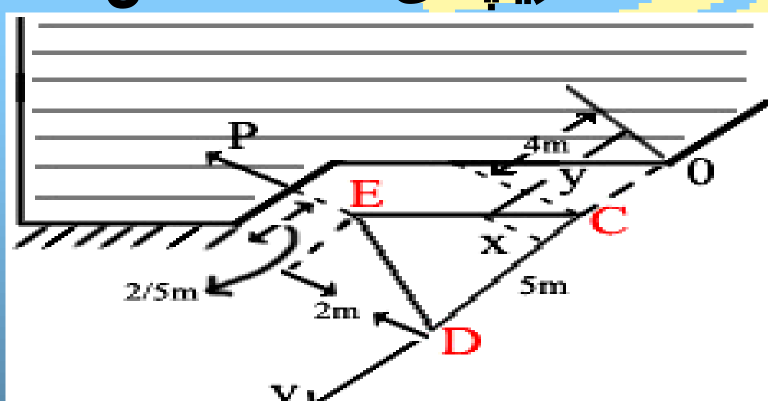
مثال ٤

دریچه مثلثی شکل CDE حول محور CD لولا شده است (شکل ۷–۲) و بـرای باز کردن آن باید نیرو یی مانند P در نقطه‌ی E وارد شود. روی دریچـه رو غـنی با چـگالی ۸۰/۸ قرار دارد و بـه سطـح زیرین دریـچه فشـار آتـمسفر وارد می شود . با چشم پوشی از وزن این دریچه (الف) مقدار نیرو یی را که به دریچه وارد می شود محاسبه کنید (ب) موضوع مرکز جرم کجاست؟ (ج) مقدار نیروی لازم برای بازکردن دریچه چقدر است؟

حل

<u>شکل ۷–۲</u>

دریچه‌ی مثلث شکل



(الف) با انتگرال گیری و مراجعه به شکل دریچه (۷–۲) داریم.

$$F = \int_A pdA = \gamma \sin\theta \int y_x d_y = \gamma \sin\theta \int_4^{615} xydy + \gamma \sin\theta \int_{6/5}^{9} xydy$$

اکنون رابطه‌ی بین y, x را بدست می آوریم.

X=ay+b -> 0=4a+b , 3=6/5a+b

از حل این دو معادله a و b بدست می آید.

$$a = {}^{6}\!/_{5}\,, b = -{}^{4/8}\!/_{5} \rightarrow x = \frac{6}{5}(y-4)$$

همین طور برای انتگرال هم داریم: $x = \frac{6}{5}(9-y)$ بنابراین با جایگزینی در دو انتگرال بالا نتیجه می شود:

$$F = \gamma \sin\theta \frac{6}{5}\left[\int_{4}^{6/5} y(y-4)dy + \int_{6/5}^{9} y(9-y)dy\right]$$

با انتگرال گیری و جایگز ینی مـقدار γ Sin θ در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت.

$$F = 9806\times 0/8\times 0/50\times\frac{6}{5}[(\frac{y^3}{3}-2y^2)_4^{615}+(4/5y^2-\frac{y^3}{3})_{615}^{9}]$$

$$=191/2kN$$

(ب) با توجه به مقادیر $\bar{x} = 1/0$ و $\bar{y} = 6/5$ و این که $\bar{I}_{xy}$ به علت تقارن با محور مرکز جرم که با محور x موازی است، صفر می باشد. بنابراین $\bar{x} = xp = 1m$ همچنین با جایگزینی در معادله‌ی (۲۴-۲) داریم.

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} = \frac{2\times1\times3\times2/5^2}{12\times6/5\times7/5} = 0/16m$$

یعنی مرکز فشار روی صفحه مسطح، ۰/۱۶m پایین تر از مرکز جرم قرار دارد.

(ج) از جایگزینی نیروی برآیـند به جـای نیروهای وارده از روغن و تعیین گشتاور حول CD داریم:

px3=191/200x1 -> p=63/74KN

۲-۶ مؤلفه های نیروی مؤثر بر سطح های خمیده شکل

اگر سطح خمیده شکل باشد، جهت نیروهای وارد بر یک جزء آن سطح $C_P\delta_A$ تغییر می کند . بنابراین مقادیر آنها به صورت بـرداری با هم جمع می شوند. یک کنج راست گوشه را در نظر می گیریم و از جـمع مؤلفه های هم امتداد، سـه مؤلفه در سه جـهت بدست می آید. از جـمع برداری ایـن مـولفه های سرانـجام نیروی مـوثر بر سطح خمیده شکل بدست می آید و خطوط اثر این مؤلفه های نیز به آسانی قابل تعیین می باشند.

(آ) مولفه‌ی افقی نیروی مؤثر بر سطح خمیده شکل

این مولفه بـرابر با نیروی فشـاری وارد بر تصـویر سطح خمیده شکل است و صـفحه عمـودی حاصل از تصویر سطح خمیده شکل ، عمود بر جهت مولفه‌ی افـقی است . این مطلب در شکل (۸-۲) نشان داده شده است . اگر سطح کوچـکی مـانند δ_A را از این سطـح در نظـر بگیریم و فرض کنیم خط عمود بر این جزء کوچک با جهت منفی محور X زاویه θ بسازد، آنگاه داریم.

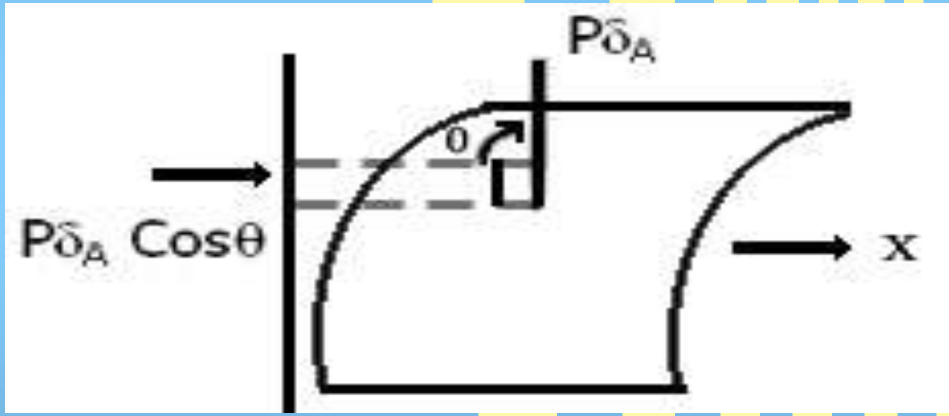
$$\delta F = P\delta_A \ \mathrm{Cos}\theta$$

اکنون با انتگرال گیری، مجموع تمـام مـولفه ها را در امتـداد محور X بدست می آوریم.

$$F = \int_A P \cos\theta \, dA \qquad (۲-۲۵)$$

توجه داریم در رابطـــه‌ی بالا δ_A Cosθ تصویر δ_A روی صفحه ای عمود بر امتداد محور x است. حال اگر مولفه‌ی افقی یکـ نیروی فشاری روی یکـ سـطح بسته مورد نظر باشد، تصویر سطح خمیده شکل مزبور روی یکـ صفحه قائم همواره صفــر است . زیرا در برابر هر سطح تصویری سطح تصویری دیگری با عــلامت مخالف بوجود می آید که اثر یکدیگر را خنثی می کنند.

شکل ۸–۲ مولفه‌ی افقی نیرو روی سطح خمیده



در تعیین خط اثر مولــفه‌ی افقی نیــروی موثر بر سطح خمیده شکل لازم است بــرآیند نیــروهای مــوازی که از مولفه های نیرو وارد بر هر یکـ از اجزاءِ سطح تشکیل می شود، تعیین کرد. این برآیند، همان برآیند نیروی وارد بر سطح تصــویر شده در امتداد مزبور است . بنابراین مرکز فشار بر سطح تصویر قرار می گیرد.

مثال ۵

معادله‌ی بیضوار که در آب غوطه ور شده است عبارتست از $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{э^2}{2}=1$ مرکز آن ۲m پایین تر از سطح آزاد قرار دارد. مولفه های نیروی افقی موثر را بر سطح خمیده شکل در $\frac{1}{8}$ اول پیدا کنید. فرض کنید صفحه‌ی xэ افقی باشد و جهت مثبت y رو به بالا است.

حل

مساحت تصویر روی صفحه yэ برابر با $\frac{\pi}{4}\times 2\times 3m^2$ می باشد . بنـابراین مرکز $(2-\frac{4}{3}\pi\times 2)m$ جرم پایین تر از سطح آزاد قرار می گیرد. در نتیجه داریم.

$$F_x=-(\frac{\pi}{4}\times 6)(2-\frac{8}{3_\pi})\gamma=-53/2kN$$

و

$$F_x=-(\frac{\pi}{4}\times 4)(2-\frac{8}{3_\pi})\gamma=-32/4kN$$

(ب) مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر سطح خمیده شکل

می دانیم مولفه‌ی قائم نیــروی فشــار موثر بر سطح خمیده مساوی با وزن مایع است که از سطح خمیده مزبور تا سطح آزاد به طور قائم قرار گرفته است.

از جمع برداری مولفه های نیرو فشاری موثر بر سطح کوچک δA می توان مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر سطح خمیده را محاسبه کرد. با توجه به شکل (۹-۲) δA جزء کــوچکی از سطح خمیده شکل است که با امتداد قائم زاویه θ می سازد. بنابراین مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر این سطح برابر است با:

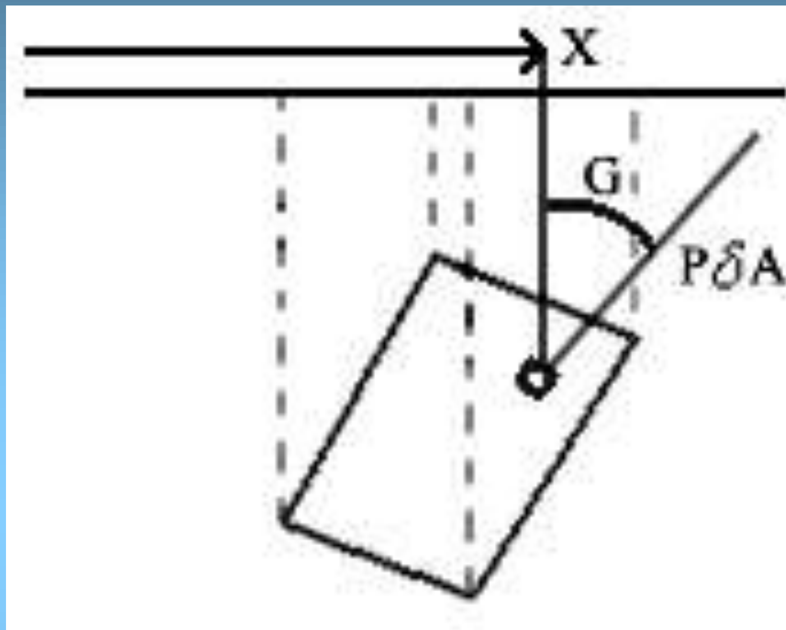
$$F_v = \int_A P \cos\theta dA$$ (۲-۲۶)

اکنون به جای P، عبارت γ h که h فاصـلـه‌ی جـزء مـزبور تا سطـح آزاد است، قرار می دهیــم و می دانیم عبــارت CosθδA تصــویــر δA بر روی سطح افقی است. در نتیجــه معــادله‌ی (۲-۲۶) به صورت زیر در می آید:

$$F_v = \gamma \int h \cos\theta dA = \gamma \int_v dv = \gamma V$$ (۲-۲۷)

توجه داریم δv حجم منشــوری اســت که ارتفاع آن h و مساحت قاعده‌ی آن برابر CosθδA می باشد و یا در واقع حجم مایعی است که به طور قائم روی جزء سطح مورد نظر قرار دارد.

شکل ۹-۲ مولفه‌ی عمودی نیروی وارد بر سطح خمیده شکل



اکنون می خواهیم خط اثر مولفه‌ی قائم نیرو را تعیین کنیم ، برای این کار باید گشتاور مولفه های اجزای قائم نیرو را حول محوری مناسب در نظر گرفت و آن را برابر با گشتاور برآیند نیرو گرفت . به عنوان مثال در شکل (۹-۲) محوری را که از O گذر می کند در نظر می گیریم . در این صورت داریم:

$$F_v \bar{x} = \gamma \int x dv$$

که در آن $\bar{x}$ فاصله‌ی نقطه‌ی o تا خط اثر است و چون $F_v = \gamma V$ است ، پس به آسانی می توان نتیجه گرفت:

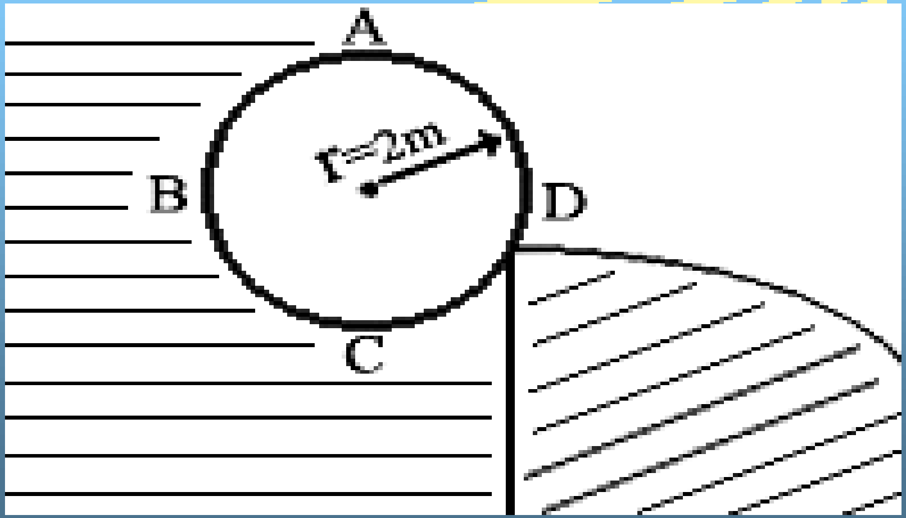
$$\bar{x} = \frac{1}{V}\int x dV$$

و این مقدار معــادل فاصله تا مرکز جرم است . بنابراین خط اثر نیروی قائم از مرکز جــرم عبور می کند و در بالای سطح خمیده تا سطح آزاد ادامه می یابد.

مثال ۶

مطابق شکل (۱۰-۲) مانــع استــوانه شکــلی جلــوی آب را گرفته است و محل تماس بین استوانه و دیواره کاملاً صاف می باشد. به ازای یک متر طول استوانــه مطلــوبست تعیــین (الف) وزن آن و (ب) نیــروی وارد بر دیواره

شکل ۱۰-۲ مانع استوانه ای شکل



حل

(الف) در حالت تعادل ، وزن استوانه بایـد برابر با مولفه‌ی قائم نیرویی باشد کـه از سـوی آب وارد می شـود (سـطح آزاد فرضـی برای CD در ارتفاع Aاست).نیروی قائم وارد به BCD برابر است با:

$$F_{vBCD} = (\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2)\gamma = (2\pi + 8)\gamma$$

و نیروی قائم وارد بر AB برابر است با:

$$F_{vAB} = -(r^2 - \frac{\pi r^2}{4})\gamma = -(4 - \pi)\gamma$$

در نتیجه وزن واحد طول بدست می آید:

FvBCD+FvAB=(3π+4)γ =0/132 N

(ب) می دانیم نیروی وارد بر دیواره برابر با نیروی افقی ABC منهای نیروی افقی وارد بر CD می باشد . اما تصویر BCD روی صفحه‌ی قائم صفر است، مولفه های افقی نیروی وارد بر CD-BCبا یکدیگر حذف می شوند:

FH=FHAB=2γ=19/6 KN

چون مساحت سطح تصویر شده ۲m2 است ، بنابراین فشار در مرکز جرم سطح مزبور برابر با ۹۸06 Pa می باشد.

۲-7 نیروی شناوری

نیروی شناوری همان نیروی برآیند وارد از طرف یک سیال ساکن به جسمی است که داخل آن فرورفته یا شناور باشد . این نیرو همواره به طور قائم و رو به بالا اثر می کند. این نیرو مؤلفه افقی ندارد زیرا تصویر جسمی که در مایع غوطه ور است یا قسمتی از آن در مایع شناور می باشد، همواره روی سطح قائم برابر صفر است.

این نیرو را می توان از تفاضل بین مؤلفه‌ی قائم نیروی فشاری که به قسمت تحتانی جسم وارد می شود و مولفه‌ی قائم نیروی فشاری که به فوقانی جسم مزبور وارد می شود، بدست آورد . اختلاف بین این دو نیرو ، نیروی قائمی میشود که همواره به سمت بالا است که ناشی از وزن سیال جابجا شده توسط جسم مزبور است . شکل معادله ای آن به صورت زیر در می آید:

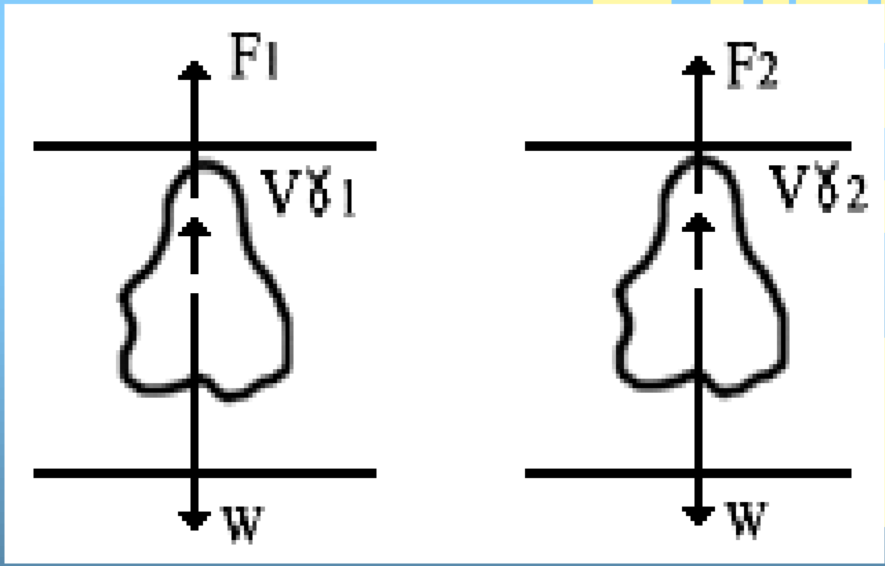
$$F_B = V\gamma \qquad (۲-۲۸)$$

که در آن F_B نیروی شناوری و V حجم سیال جابجا شده و γ وزن مخصوص سیال مزبور است. همین فرمول در مورد جسمی که در مایعی شناور باشد نیز بکار می رود که در آن V حجم مایع جابجا شده است . توجه داریم خط اثر نیروی شناوری از مرکز جرم حجم جابجا شده‌ی سیال می گذرد و این مطلب برای اجسام شناور یا غوطه ور در مایع نیز صادق است . مرکز جرم حجم سیال جابجا شده را مرکز شناوری می نامند.

در حل مسایل ایستایی اجسام شناور یا غوطه ور ، جسم را به عنوان جسم آزاد در نظر می گیرند و نیروی شناوری جایگزین عملکرد سیال می کنند و وزن جسم را که از مرکز جرم نیز می گذرد مانند سایر نیروهای تماسی را نشان می دهند.

یکی از کاربردهای شناوری، تعیین وزن ، حجم ، و وزن مخصوص و چگالی جسم نامشخص است که از دو سیــال مختلف استفاده و جسم مزبور را در داخل آنها فرو می برند(شکل ۱۲-۲) . F_1 و F_2 وزن های جسم بعد از فرورفتن در سیال اســت و γ۱ و γ۲ وزن مخصــوص سیــال اول و دوم و W و V نیز وزن و حجــم مخصوصی است کــه می خواهیم آنها را تعیین کنیم. ابتدا شرایط تعادل را می نویسیم:

شکل ۲۴-۲ جسم غوطه ور در دو سیال



$$F_1 + V\gamma_1 = W \quad \text{و} \quad F_2 + V\gamma_2 = W$$

اکنون از این دو رابطه W, V را بدست آوریم:

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad \text{و} \quad W = \frac{F_1\gamma_2 - F_2\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

کاربرد دیگر آن تعیین چگالی مایعات است که در چگالی سنج ها بکار می رود. در شکل (۲-۱۲) چگالی نسبـی را نشـان می دهد که در دو مایع فرو رفته است . چـگالی نسبی یک ساق منشوری با سطح مقطع a دارد. فرض می کنیم مایع سمـت چپ آب مقـطر یعـنی S=۰۰/۱ باشد . این چـگالی هنگامی شناور می ماند که شرط زیر برقرار باشد.

$$V_o \gamma = W \qquad (۲-۲۹)$$

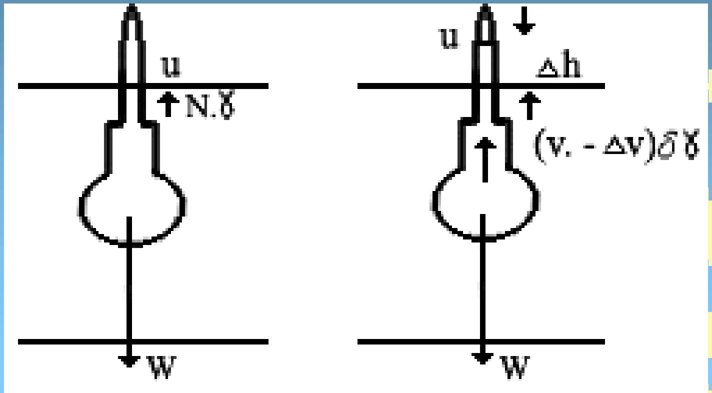
که در آن V_o حجم قسمتی از جسم است که در آب مقطر غوطه ور می باشد و γ وزن مخصوص آب و W وزن چگالی نسبی است . در این شکل محل سطح مایع را به ازای چگالی واحد با علامت u روی ساق چگالی نسبی نشان داده ایم. حـال آن را در مایـع دیـگری شنـاور می کنیم . بار دیـگر معادله‌ی تقارن را می نویسیم.

$$(V_O - \Delta V)S\gamma = W \qquad (۲-۳۰)$$

که در آن ΔV=aΔh می باشد. از دو رابطه‌ی اخیر Δh را بدست می آوریم:

$$\Delta h = \frac{V_o}{a}\frac{S-1}{S} \qquad (۲-۳۱)$$

به این ترتیب می توان ساق چگالی نسبی را مندرج کرد و آن در تعیین چگالی های مختلف بکار برد.



شکل ۱۳-۲

کاربرد چگالی نسبی در تعیین چگالی مایع

مثال ۷

قطعه سنگ معدنی در هوا ۵/۱N وزن دارد وقتی آن را به زیر آب فرو می برند ۱/۱N وزن خواهد داشت . حجم (بر حسب سانتی متر مکعب) و چگالی این قطعه سنگ را بدست آورید.

حل

با استفاده از شکل (۱۲-۲) می نویسیم:

۵/۱=۱/۱ + (۹۸۰۶) V

V =۸/٤۰ Cm3

$$S = \frac{W}{\gamma V} = \frac{1.5}{9806 \times 0.0000408} = 3.75$$

۲–8 دوران یکنواخت حول محور قائم

دوران یک سیال مانند جسم صلب ، حول یک محور مشخص را حرکت گردابی اجباری می نامند . در این دوران، سرعت زاویه ای تمام ذرات یکسان می باشد و این حرکت با حرکت گردابی آزادی که در آن هر ذره در مسیر دایره ای حرکت می کند و تغییرات سرعتش نسبت معکوس با فاصله از مرکز دارد، فرق خواهد داشت . مایع داخل ظرف پس از زمانی که این ظرف حول محور قائم با سرعت زاویه ای می چرخد، مانند یک جسم صلب عمل می کند. و در این حالت هیچ تنش برشی در مایع وجود نخواهد داشت و تنها شتابی که پدیدار می شود شتاب شعاعی که رو به داخل و به سمت محور چرخش می باشد.

با توجه به شکل (۲–۱٤) بردار یکه‌ی $\hat{i}$ را در امتداد r و $\hat{j}$ را در امتداد قائم (محور y ها) و به سمت بالا انتخاب می کنیم. معادله‌ی (۲–۸) را در تعیین تغییرات فشار در سرتاسر سیال بکار می بریم:

$$\vec{\nabla}P=-\hat{j}\gamma-p\vec{a}$$

(۲–۳۲)

فرض می کنیم سرعت زاویه ای w ثابت باشد در نتیجه هر ذره‌ی سیال شتاب شعاعی رو به داخل و معادل W^2r خواهد داشت . در نتیجه $\vec{a}=-\hat{i}w^2r$ خواهد بود . از جسم دو بردار $-\hat{j}\gamma$ و $-\rho\vec{a}$ ، گرادیان فشار $\vec{\nabla}P$ بدست می آید . فشار در ا متداد عمود بر این خط تغییری نخواهد کرد . بنابراین اگر نقطه m را در سطح در نظر بگیریم، سطح آزاد عمود بر $\vec{\rho}P$ خواهد بود . ازدو معادله‌ی (۲–۳۲) چنین خواهیم داشت:

$$\hat{i}\frac{\partial p}{\partial r}+\hat{j}\frac{\partial p}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}=-\hat{j}\gamma+\hat{i}\rho w^2 r$$

توجه داریم برداریکه $\hat{k}$ در امتداد محــور z اســت . از این معادله‌ی برداری داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho w^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial y}=-\gamma \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=0$$ **(۲–۳۳)**

چــون P فــقط تابــعی از y و r مــی باشد ، بنــابراین دیفرانسیل کامل P(dp) به صورت زیر بیان می شود.

$$dp=\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial r}dr$$

از جایگزینی روابط (۲–۳۳) در این رابطه نتیجه می شود:

$$dp=-\gamma dy+\frac{\gamma}{g}w^2 r dr$$ **(۲–۳٤)**

معمولاً برای یک مایع ثابت γ -v مــی باشــد، بنابراین از انتگرال گیری رابطه‌ی بالا چنین بدست می‌آید.

$$P=\frac{\gamma}{g}w^2\frac{r^2}{2}-\gamma y+c$$

که در آن c ثابــت انتگرال گیری است . اگــر فرض کنیم مقدار فشار در مبدأ برابر با P_o باشد چون $C=P_o$ می شود. بنابراین داریم:
(۲-۳۵)

$$p = p_0 + \gamma \frac{w^2 r^2}{2g} - \gamma y$$

اگر سطح افقی طوری انتخاب شود که $P_0 = 0$ و $y=o$ باشد از تقسیم دو سمت معادله‌ی بالا بر γ نتیجه می شود

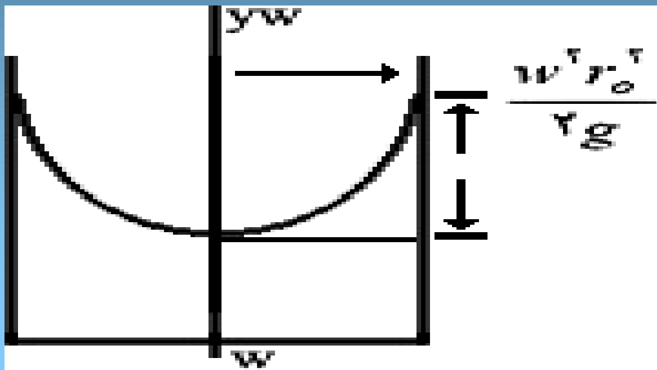
$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{w^2 r^2}{2g}$$

(۲-۳۶)

و این رابطه‌ی بسیــار مهم اســت زیرا عمق مایع را نشــان می دهد که با مجــذور شعــاع نسبــت مستقیم دارد . بنــابرایــن به هنگام دوران، شکل سطوحی که فشار روی آنها ثابت باشد، به صورت سهمی وار خواهد بود. فرض کنید ظرفی محتوی سیالی را به دوران در آوریم ، حجم زیر سطح آزاد که به شکل سهمی در آمده است برابر با حجــم سیال اولیه است و شکل این سهمی فقط تابعی از سرعت زاویه ای دوران w است . اگر این ظرف به صورت استوانــه باشــد با توجه به معــادلــه‌ی (۲-۳۶) ارتفاع حدود مایع مساوی با $\frac{W^2 r_o^2}{2g}$ خواهد بود. اما سهمی حاصل حجمی برابر با نصف استوانه‌ی هم ارتفاع خود دارد ، حجــم مایع در بالای سطح گذرا بر پایین ترین نقطه سهمی برابر است با

$$\pi r_o^2 \times \frac{1}{2} \frac{w^2 r_o^2}{2g}$$

به هنگام سکون، ارتفاع سطح آزاد مایع از پایین ترین نقطه سهمی برابر است با $\frac{1}{2}\frac{w^2 r_o^2}{2g}$
بنابراین همان مقدار که مایع در مرکز پایین می آید ، در جداره ها بالا می رود و در نتیجه با مشخص بودن w و ro پیش از چرخش، می توان پایین ترین نقطه را تعیین کرد(شکل ۱۳-۲)



<u>شکل ۱۳-۲</u> دوران استوانه حول محور خود

مثال ۸

مایعی با چگالی نسبی ۲/۱ با سرعت ۲۰۰rpm حول یک محور قائم دوران می کند و در نقطه ای چون A که از محور دوران ۱m فاصله دارد فشار برابر با ۷۰ kPa است . فشار داده B که ۲m بالاتر از A می باشد و از محور دوران ۵/۱m فاصله دارد، بدست آورید.

حل

معادله‌ی (۳۵-۲) را برای این دو نقطه می نویسیم:

$$P_A = P_0 + \gamma \frac{w^2 r^2 A}{2g} - \gamma y, P_B = P_0 + \gamma \frac{w^2 r^2 B}{2g} = \gamma y$$

این دو معادله را از هم کم و داده ها را جایگزین می کنیم:

$$70000 - P_B = 2\times 11767 + \frac{11767}{2\times 9806}(2095)^2 \times [1^2 - 1/5^2]$$

B=375/6 kPa

تست های فصل ۲

۱–۲–۲ در هر نقطه از سیال تنش عمودی در تمام جهت ها اگر

(الف) سیال بدون اصطکاک باشد، یکسان است (ب) سیال بدون اصطکاک و تراکم پذیر باشد، یکسان است (ج) سیال با لزجت صفر و درحال سکون باشد، یکسان است √(د) هیچگونه حرکتی بین یک لایه از سیال و لایه مجاورش وجود نداشته باشد، یکسان خواهد بود.

۱–۳–۲ فشار مطلق هوا در فضای بالای سطح روغنی با ۰۷۵/۰ = S در یک مخزن برابر با ۱۱۵kPa abs است. فشار در ۲ متر زیر سطح این روغن بر حسب kPa برابر است با

(الف) 14/71 (ب) ۵/۱۱۶ √(ج) ۷۱/۱۲۶ (د) ۱/۱۳٤

۲–۳–۲ معادله‌ی دیفرانسیل تغییر فشار در یک سیال ساکن به کدام صورت زیر بیان می شود y رو به بالا و به طور عمودی است؟

√(الف) $dp= -\gamma dy$ (ب) $dp= -\gamma dy$ (ج) $dy=-\rho dp$ (د) $dp=-\gamma d\rho$

۳–۳–۲ در اتمسفر تکدما

(الف) فشار ثابت باقی می ماند (ب) فشار به طور خطی با ارتفاع کاهش می یابد

(ج) فشار افزایش می یابد (د) فشار به طور توانی با ارتفاع افزایش می یابد

۱-٤-۲ کدام گزاره صحیح است؟

(الف) فشار آتمسفر محلی همواره پایین تر از فشار آتمسفر استـاندارد است.

(ب) فشار آتمسفر محلی فقط به ارتفاع جغرافیایی آن محل بستگی دارد.

√(ج) فشار آتمسفر استاندارد، میانگین فشار آتمسفر مـحلی در سـطح دریا است.

(د) بارومتر اختلاف بین فشار استاندارد و محلی را نشان می دهد.

۲-٤-۲ اگر بارومتری فشار ۷۳۰mmHg را نشان دهد، ۱۰kPa مکش معادل است با

(الف) ۲/۱۰ mH2o- (ب) ۰/۷۵ mHg۰

(ج) ۹۱/۸ mH2o abs √(د) هیچکدام

۳-٤-۲ در شکل (٤-۲ ب) یک روغن مایع با چگالی نسبی ۰/۸۰ موجود است. اگر ۶۰cm= hباشد، فشار در نقطه‌ی A برابر است با

√(الف) ۵۲ cm H2o abs- (ب) 48cm H2o خلاء

(ج) ٤۸ cm Hco مکش (د) ۵۲cm H2o خلاء

۲-٤-٤ در شکل (٤-۲ ج) لوله محتوی هوا است و مایع داخل مانومتر آب.
اگر h_1=۵۰۰mm و h_2=۲۰۰mm باشد، فشار در نقطه‌ی A برابر است با:

الف) ۱٤/۱۰ mH_2o abs   ب) ۲/۰ mH_2o خلا
ج) ۲/۰ m H_2o مکش   √ د) ٤۹۰۱ Pa

۲-٤-۵ یک مانومتر آب ـ جیوه با اختلاف نسبی ۵۰۰mm است (اختلاف در ارتفاع سطح آزاد مایع) اختلاف فشار اندازه گیری شده بر حسب آب برابر است با:

الف) ۵/۰   √ ب) ۳/۶   ج) ۸/۶   د) ۳/۷

۲-۵-۱ یک سطح مستطیل شکل به ابعاد ۳ در ٤ متر که لبـه‌ی پایین افقی آن ۳ متر است، ۶ متر پایین تر از سطح آزاد روغـن با S =۸/۰ قرار گرفته است. این سطح نسبت به افق زاویه ۳۰ درجه دارد. نیروی وارد بر یک وجه آن برابر است با:

الف) ٤۵/۳۸   √ب) ٤۸۵   ج) ۲۵/۵۱   د) ۶۰۵

۲-۵-۲ مرکز فشار پرسش قبلی، نسبت به افق و بر محور قائم چندمتر از سطح آزاد مایع پایین تر است؟

الف) ۱۰/ ۱۳۳m   ب) ۱۳۳/۵m   √ج) ۰۶۷/۵ m   د) ۰۰/۵ m

۳-۵-۲ مرکز فشار:

(الف) در مرکز جرم سطح غوطه ور قرار دارد

(ب) همواره در بالای مرکز جرم سطح واقع است

(ج) بستگی به موقعیت سطح دارد

√(د) نقطه ای روی خط اثر نیروی برآیند است.

۲-۵-٤ دریچه مربعی شکل عمودی به ضلع 4m که سطح فوقانی آن همان سطح آزاد می باشد، برای نگهداری آب بکار می رود . گشتاور نسبت به پایین تر قسمت دریچه چقدر می باشد؟

√(الف) ۷۵/٤۲ (ب) ۵۷۵ (ج) ٦٤۵ (د) ۳۵/۸۵

۲-٦-۱ مولفه‌ی افقی نیروی موثر وارد به سطح خمیده شکل برابر است با:

(الف) وزن مایعی که به طور قائم در بالای سطح خمیده قرار دارد.

(ب) وزن مایعی که توسط سطح خمیده شکل نگه داشته می شود.

(ج) حاصل ضرب فشار مرکز جرم در مساحت

√(د) نیروی وارد بر صفحه قائمی که تصویر سطح خمیده شـکـل می باشد.

۲-۶-۲ مؤلفه‌ی قائم نیروی فشاری موثر وارد به سطح خمیده شکل که در مایعی فرو برده شده است برابر می باشد با:

(الف) مولفه‌ی افقی خودش

(ب) نیروی وارد بر تصویر قائم سطح خمیده شکل

(ج) حاصل ضرب فشار مرکز ثقل در مساحت سطح مزبور

√(د) وزن مایعی که به طور قائم روی سطح خمیده شکل قرار دارد.

۲-۶-۳ استوانه ای به قطر ۳m و طول ۱۰m را پر از آب می کنیم و آن را به طور افقی قرار می دهیم. فشار در محور استوانه ۸/۹ KPa می باشد.مولفه‌ی قائم نیروی موثر برنیمه فوقانی آن برحسب کیلو نیوتن چقدر است.

(الف) ۷/۹٤- √(ب) ٤/۵۲- (ج) ۱/۹۸ (د) ۱/۱٤۷

۲-۷-۱ قطعه چوبی به ابعاد ۱ در ۱ در ۲۵/۰ متر با ۵/۰= S با باری به وزن ٤۰۰N روی آب شناور است. حجم قسمت غوطه ور بر حسب متر مکعب برابر است با:

(الف) ٤۳/۰ (ب) ۱۲۵/۰ √(ج) ۱۶۶/۰ (د) ۲۹۳/۰

۲-۷-۲ خط اثر نیروی شناوری موثر

(الف) از مرکز جرم هر جسم غوطه ور می گذرد.

(ب) از مرکز جرم حجم هر جسم شناور می گذرد.

(ج) از مرکز حجم سیال جابجا شده عبور می کند.

(د) از مرکز جرم تصویر افقی جسم عبور می کند.

۱-۸-۲ وقتی یک مایعی مانند یک جسم صلب حول محور قائم دوران می کند. فشار:

(الف) با مجذور فاصله کاهش می یابد

(ب) با فاصله شعاعی به طور خطی افزایش می یابد.

(ج) به نسبت عکس ارتفاع در امتداد هر خط قائمی تغییر می کند.

√(د) با مجذور فاصله شعاعی تغییر می کند.

۲-۸-۲ اگر مایعی حول محور قائم مانند جسم صلب دوران کند به نحوی که فشار نقاط واقع بر محور برابر با فشار نقاطی که ۶۰ سانتی متر بالاتر و در فاصله‌ی ۶۰ سانتی متری از محور قرار دارند، باشند . سرعت زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه برابر است با:

(الف) ۴/۴۰ (ب) ۴۳/۴ √(ج) ۷۲/۵ (د) ۴۲/۵

۳-۸-۲ استوانه قائمی که قسمت فوقانی آن باز و از روغنی با چگالی ۲/۱ پر می باشد با چنان سرعتی به دوران در می آوریـم کـه نیمی از مایع آن به بیرون می ریزد. فشار مرکز تحتانی آن:

√(الف) برابر صفر است

(ب) یک چهارم مقداری است که در حالت پر بودن داشته است

(ج) بزرگتر از حالتی است که به جای این مایع، آب قرار گرفته باشد.

(د) نصف مقداری است که در حالت پر بودن داشته است.

٤-۸-۲ گرداب اجباری:

(الف) خلاف گرداب آزاد می چرخد

(ب) همواره در رابطه با یک گرداب آزاد بوجود می آید

(ج) سرعتی دارد که به نسبت عکس شعاع کاهش می یابد.

√(د) هنگامی روی می دهد که سیال مانند یک جسم صلب دوران کند

مفاهیم جریان سیـــال و معــادلات بنیـــــادی

۱–۳ مقدمه

در فصل قبلی راجـع به ایستایی سیــالات بحث شد و علمی تقریباً دقیق است زیرا در ایستایی سیالات فقط کمیتی چون وزن مخصوص (یا چگالی) باید با آزمایش تعیین شود. اما واقعیت چیز دیگری است، به عبارت دیگر ماهیت یک جریان یک سیال واقعی بسیار پیچـیده است و چـون قوانیــن بیــانگر حرکت کامــل یک سیــال را نمی توان به آسانی محاسبه کرد، لازم است از آزمایشات نیز کمک گرفته شود . با استفاده از تحلیل های مکانیکی ، تــرمودینامیکی و آزمایشات دقیق می توانیم سازه‌های هیدرولیکی بزرگ و روابط ارزشمند مکانیک سیالات را بدست آوریم.

در این فصل مفاهیـم مورد نیاز در تحـلیل حرکت سیالات ارائه می شـود . معادلات بنیـادی که به کمـک آنها می توانیم به پیش بینی رفتار یک سیال بپردازیم. این قوانین عبارتست از تلنون حرکت ، پـیوستـگی و تـکانه خطی و سـرانجام قوانـین اول و دوم ترمودینامیک . ما در این فصل برای استنتاج معادلات پیوستگی ، انرژی و تکانه از حجم کنترل استفاده می کنیم.

۲–۳ مشخصه های جریان

جریان یک سیال به انواع : تلاطمی ، آرام ، حقیقی ، آرمـانی بازگـشت پذیر و بازگشت ناپذیر ، دائـمی و غیردائمی ، یکنواخت و نایکنواخت ، گردشی و بی گردشی رده بندی می شود. در این بخش انواع مختلف جریان را بررسی و مشخص می کنیم.

در جــریان تــلاطمی ، ذرات ســیال در مسیرهای نامنظمی حرکت می کنند و تکانه از یک بــخش سیــال به بخش دیگر انتــقال می یابد . ابعــاد ذرات سیــال می توانند بسیار کوچک (چند هزار مولکول) تا بسیــار بــزرگ (هزاران مترمکعــب درگــردابهای رودخانه و غیره) باشند . افــزایش جریــان سبــب می شــود که تنشــهای بــرشی بزرگتر شوند و در نتیجه بازگشت ناپذیری ایجاد می کنند و اتلاف بیشتــری روی می دهد . در تجربه معلوم شده است که در جــریان تلاطــمی ، اتلاف متنــاسب با توان ۱/۷ تا ۲ سرعت تغییر می کند. در صورتی که در جریان لایه ای این افت ها متناسب با سرعت تغییر می کند.

در جریان آرام ، ذرات سیال در امتــداد مسیــرهای همــواری که در داخل غشاء یا لایه ها قرار دارند حرکت می کنند و یک لایه به آرامی روی لایــه دیگر می لغزد. در جریان آرام قانون چســبندگی نیوتون برقرار است و تأثیر چسبندگی باعث کاهش تلاطمی و اغتشاش می شود . اگر چسبندگی کم باشد ، سرعت زیاد یا دبی جریان زیاد باشــد ، جریان آرام دائمی نخــواهد بود و تبــدیل به جریان تلاطمی می شود . می توان معادله همانند قانون چسبندگی نیوتن برای یک جریان تلاطمی نوشت:

$$\delta = \eta \frac{du}{dy} \qquad (3-1)$$

ضریب η فقـط به ویـژگی سیـال بستگی ندارد، بلکه بستگی به حرکت سیال و چگالی نیز دارد. این ضریب را چسبندگی گردابی می نامند . اما سیال آرمانی، سیالی است که تراکم ناپـذیر و بی اصـطکاک باشد و آن را نباید با گاز کامل اشـتباه گرفت. اگر بتوان سیالی را آرمـانی فـرض کرد در تجـزیه و تحـلیل جریان مفید خواهد بود . توجه داریم سیال بی اصطکاک فاقد چسبندگی و فرآیند جریان آن بازگشت پذیر است . لایه‌ی سیالی که در مجـاورت جریان مـرزی قرار دارد ، تحـت اثر نیـروی برشی چسبندگی واقع می شود و نسبت به مرز مزبور، سرعتی نسبی دارد. این لایه را لایه مرزی و این لایه مرزی می تواند آرام یا تلاطمی باشد.

در جــریان بی دررو هــیچ انتقــال حرکت از سیــال و یا به سیال پیش نمی آید. جریان بی در رو بازگــشت پذیــر (یعنی به در روی بدون اصطکاک) را جریان تک آنتروپی (ایزوتروپیک) می نامند . جریان دائمی هنگامی روی می دهد که شدیداً در هر نقطه ای از سیال نسبت به زمان تغییر نکند . همچنین در جریان دائــمی در هیــچ مــکانی تغــییری نسبت به زمان در چگالی ρ، فشار P یا دما T روی نمی دهد بنابراین برای این نوع جریان داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \circ \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \circ \qquad (۳-۲)$$

در جریان تلاطمی ، به علت حرکت گردش ذرات سیال اندک نوسانی در هر نقطه پیــش می آید . هنــگامی که ســرعت میانگــین لحظه ای نسبت به زمان تغییــر نکند ، این جریــان را می توان دائمی در نظر گرفت . جریان غیردائمی است که شرایط آن در هر نقطه نسبت به زمان تغییرکند $(\frac{\partial v}{\partial t} \neq \circ)$ آبی که با دبی ثابت به درون مخزن یا منبــعی پمــپ می شود ، مثالی از جریان غیر دائمی است . جــریان یکــنواخت هنــگامی روی می دهد که در هر لحظه برای تمامی نقاط آن بردار سرعت (جهت و هم مقدار سرعت) یکسان باشد یعنی $\partial v / \partial s = 0$ که در آن زمان ثابت و ∂s جابجایی در تمام جهت ها است، اما در جریانی که بردار سرعت در هر لحظه از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند، دیگر این جریان یکنواخت نیست و آن را جریان غیریکنواخت می گویند.

مثال ها

جریان دائمی یکنواخت: مایعی که به مقدار ثابت در درون یک لوله‌ی دراز جریان دارد.

جـریـان غـیردائـمی یـکنواخـت : مایعی که در داخل لوله‌ی دراز جریان دارد و مقدارش کاهش می یابد.

جـریان دائـمی نایـکنـواخـت : جریـان در درون لـوله ای انبساطی با دبی ثابت.

جریان غیر دائمی نایـکنـواخت : جریان در لوله ای انبساطی با افزایش مقدار دبی

گـردش یک ذره‌ی سیـال حـول محـور معینی چون z عبارت از سرعت زاویه ای مـتوسط در پاره خط کوچـکی است که در داخل ذره وجود دارد و برهم عمود و در جهت های معیـنی قرار دارند . اگر ذرات سیالی در ناحیه ای گردش حول یک محـور داشتـه باشند ، آن را جـریان گردشـی یا گردابی می نامند و در غیر این صورت آن را جریان بی گردشی می گویند.

در جریان یک بعدی از تغییرات سرعت ، فشار و غیره در امتداد عمود بر جهت اصلی جریان صرف نظر می شود و شرایط هر قطعی را بر حسب مقادیر سرعت ، چگالی و غیره بیان می کنند . خط جریان ، خط پیوسته ای است که می توان در سیال رسم کرد به طوری نمایانگر جهت بردار سرعت در هر نقطه‌ی آن باشد. رابطه‌ی دیفرانسیلی زیر بیانگر معادلات دیفرانسیل خط جریان است:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{d\ \backepsilon}{w}$$

(۳-۳)

که در آن w, v, u مولفه های بردار جریان $\vec{q}$ است.

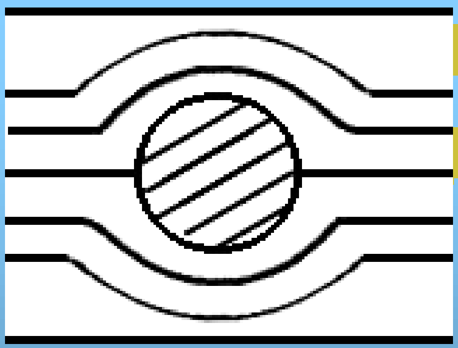
در شکل (۱-۳) جریان تراکم ناپذیر دو بعــدی نشان داده شده است و در آن خطوط جریان به نحوی رسم شــده است که اگر در جهت محور برصحنه‌ی شکل، عمق را واحد فرض کنیم.

حجم سیال گذرا از بین دو خط جریان مجاور در واحد زمان برابر باشد. بنابراین هنگامــی که خطوط جریان نزدیکتر بهم هستند، سرعت بیشتر خواهد بــود و برعکس.

اگر V سرعت متوسط بین دو خط جریان مجاور با فاصله h باشد، میزان جریان Δq برابر است با:

$$\Delta q = Vh \qquad (۳-٤)$$

شکل ۱-۳ خطوط جریان آرام در اطراف یک استوانه



لــوله جریــان ، عبارتــست از لــوله ای که توسط تمامی خطوط گذرا از منحنی کوچک بسته ، ایجاد می شود . در جریان دائمی، این لوله در فضا ثابــت می باشــد و ممکن است هیــچ جریانی از دیواره‌ی آن عبور نکند، زیرا بردار سرعت هیچ مؤلفه‌ی قائمی بر سطح لوله ندارد .

مثال ۱

در جریان دائمی تراکم نا پذیر که در اطراف یک سطح آئرودینامیکی ایجاد شده است . خطوط جریان مداری قرار دارند که در فاصله‌ی دور از این سرعت $\frac{m}{s}$ ۴۰ می باشد و فاصله‌ی بین خطوط جریان ۱۰mm است. سرعت در نزدیکی این سطح که فاصله‌ی خطوط جریان 7/5 mm است , چقدر خواهد بود؟

حل

40 x 0/01 x 1 = 0/40   m3/s

7 x 0/0075 = 0/40   V = 53/3   m/s

۳-۳ مفاهیم سیستم و حجم کنترل و کاربردهای آن

در فصل قبلی از نمودار آزاد به عنوان روشی مناسب در نمایش نیروهای وارد بر جسم ثابت بکار برده شد . این حالت , حالت خاصی از سیستم است .

سیستم عبارتست از جرم مشخص از ماده که قابل تشخیص از دیگر مواد باشد . مواد خارج از سیستم را محیط می گویند و مرزهای یک سیستم تشکیل یک بسته خواهند داد . توجه داریم که ممکن است این سطح نسبت به زمان تغییر کند به طوری که در حین تغییر شرایط سیستم , جرم در آن ثابت بماند .

از قانون پایستگی جرم می دانیم که جرم درون یک سیستم نسبت به زمان ثابت باقی می ماند .این قانون به شکل معادله ی زیر بیان می شود :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad (۳-۵)$$

که در آن جرم کل سیستم است .

قانون دوم حرکت نیوتن برای یک سیستم به صورت زیر بیان می شود :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

(۳-۶)

که در آن m جرم ثابت درون سیستم و $\Sigma \vec{F}$ برآیند نیروهـای وارد به سـیستم (و شامل نیروهای داخلی مانند وزن می باشد) و $\vec{V}$ سرعت مرکز جرم سیستم است . حجم کنترل ناحیه ای در داخل فضا اسـت و بـکار بردن به هنگام تجزیه و تحلیل حالتهایی که جریان به داخل یا به خـارج فضـا جریان می یابد مفید خواهد بود . مرز حجـم کنـترل را سطـح کنترل می نامند . شکل و اندازه ی حجم کنترل اختیاری اسـت ولـی غالـبا آن را منطبـق بر مرزهای صلـب آن ناحیـه در نظـر می گیرند .

اگر سـیستم و محیـط اطراف آن سرعتی یکسان داشته باشنـد , بکارگیری حجم کنتـرل مناسـب می باشـد . مثـلا در تعیین سرعت امواج صوتی در یک ماده از مفهـوم حجـم کنتـرل مناسب برای استـنتاج معـادلات پیوسـتگی و تکانه و انژی استفاده می شود بلکه برای انواع دیگر مسایل نیز بکار برده می شود . این حجم را حتی در مورد سیستم باز نیز بکار می برند .

قطع نظر از ماهیت جریان , تمامی جریانها از قوانین و شرایط پیروی می کنند .

۱- قوانین حرکت نیوتن ۲- رابطه پیوستگی (قانون پایستگی جرم)

۳- قوانین اول و دوم ترمودینامیک ٤- شرایط مرزی

ممکن است , روابط و معادلات دیگری چون معادله حالت یا قانون چسبندگی نیوتن نیـز وارد محاسـبه شـوند . مـا در این بخش به کاربرد حجم کنترل در محاسبه روابط پیوستگی , انرژی و تکانه ی خطی خواهیم پرداخت .

حالـت کـلی جریان را مطابق شکل(۲-۳) در نظر می گیریم که در آن سرعت سیـال نسـبت به دسـتـگاه مختصـات xyz داده شده است . اگر در زمان t سیـستمی که مرزهای آن با خط چین مشخص شده است , جرم معینی داشته باشـد و حـجم کنـترل در ایـن لحـظه کامـلا منطـبق بر سـیستم و نسبت به محورهای xyz ثابت باشد . در زمان , $t+\delta t$ سیستم مقداری حرکت می کند و بنابـراین هر ذره ی آن با توجـه به موقـعیت خود با سرعت مشخص جابجا می شود .

فرض کنید N مقدار کل ویژگی (که مـی توانـد جـرم , انرژی , تکانه باشد) سیستم در لحظه ی t , η مقـدار این ویـژگی در واحـد جـرم سیـال باشد . اکنون می توانیم مقدار افزایش N نسبت به زمان را بر حـسب حجـم کنـترل بنویسیم .

در زمان $t+\delta t$ سیستم شامل حجم های II , III اسـت , در حالیکه در زمان t حجم II را استفاده کرده بوده است .اما در سیستم , افزایش ویژگی N در فاصله ی زمانی δt برابر خواهد بود:

$$N_{syst+\delta t}-N_{syst}=\left(\int_{\mathrm{II}}\eta\rho dV+\int_{\mathrm{III}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{\mathrm{II}}\eta\rho dV\right)_{t}$$

در این رابطه dV جزء حجم می باشد . اکنون به این رابطه جمله ی $\left(\int_{\mathrm{I}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}$ را اضافه و کم می کنیم تا بدست آید .

$$\frac{N_{syst+\delta t}-N_{syst}}{\delta t}=\frac{\left(\int_{\mathrm{II}}\eta\rho dV+\int_{\mathrm{I}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}-\left(\int_{\mathrm{II}}\eta\rho dV\right)_{t}}{\delta t}$$

$$+\frac{\left(\int_{\mathrm{III}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}-\frac{\left(\int_{\mathrm{I}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

توجه داریم که عبارت سمت چپ برابر با افزایش متوسط N در فاصله ی زمانی δt است و اگر δt به سمت صفر میل کند این عبارت برابر با $\frac{dN}{dt}$ خواهد شد.
در این حالت , دو انتگرال اول در سمت راست برابر با تعداد N در زمان t +δt و انتگرال سوم برابر با مقدار N در زمان t رای حجم کنترل می باشد .
حد انتگرال های مذبور برابر است با :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\eta\rho dV$$

(اختصار CV به معنی کنترل حجم می باشد)

و عبارت چهارم در سمت راست را برای (۳-۷) بیانگر مقدار جریان خروجی N از حجم کنترل است و می توان نوشت :

$$\lim_{st\to 0}\frac{\left(\int_{\mathrm{III}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}=\int_{out\,flowarea}\eta\rho\vec{V}.d\vec{A}=\int\eta\rho V\,Cos x\,dA \qquad (۳-۸)$$

که درآن $d\vec{A}$ بردار سطح خروجی جریان است (شکل ۲-۳ ج) . بردار $d\vec{A}$ عمود بر سطح خروجی حجم کنتـرل است و هنـگامی که به سـوی خـارج باشد , مثبت خواهد بود و x زاویه بیـن بردار سرعت و بردار سطح می باشد . آخرین عبارت رابطه ی (۳-۷) میزان جریان ورودی به حجم کنترل است و در حالت حدی برابر خواهد شد با :

(۳-۹)

$$\lim_{st\to 0}\frac{\left(\int_{\mathrm{I}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}=-\int_{in\ flowarea}\eta\rho\vec{V}.d\vec{A}$$

$$=-\int\eta\rho V\, Cos x\, dA$$

دو رابطه ی (۳-۸) و (۳-۹) را می توان به صورت یک عبارت درآورد و از آن در روی سطح کل حجم کنترل (cs) انتگرال گرفت:

$$\lim_{st\to 0}\left[\frac{\left(\int_{\mathrm{III}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}=-\frac{\left(\int_{\mathrm{I}}\eta\rho dV\right)_{t+\delta t}}{\delta t}\right]$$

$$=\int_{CS}\eta\rho\vec{V}.d\vec{A}=\int_{CS}\eta\rho V\cos x dA$$

توجه داریم اگر هیچ جریانی به حجم کنترل داخل یا خارج نشود $\vec{V}.d\vec{A}=0$ خواهد بود

اکنون رابطه ی (۷-۳) را در حالت حدی به صورت زیر بیان می شود:

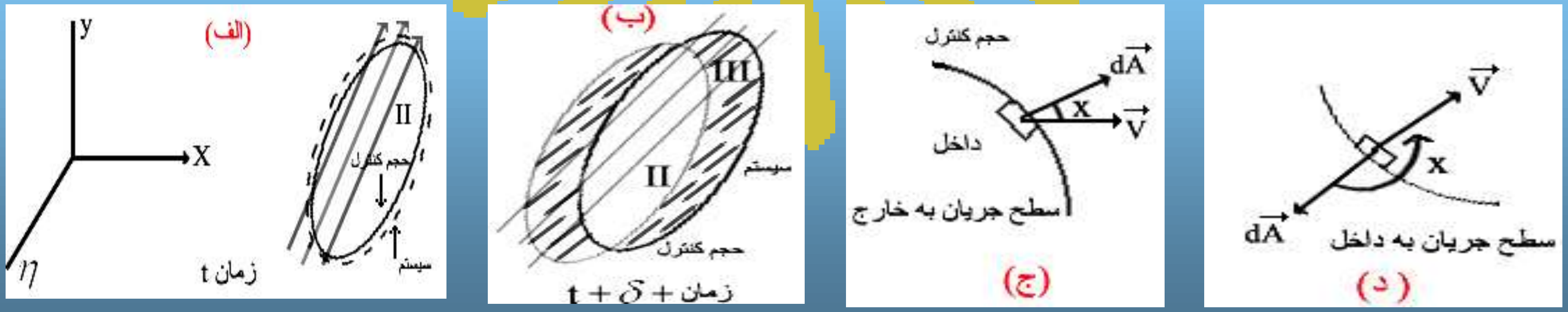
$$\frac{dN}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\eta\rho dv+\int_{CS}\eta\rho\vec{V}.d\vec{A} \qquad (۹-۳)$$

از معادله ی (۹-۳) متوجه می شویم که میزان افزایش کمیت فیزیـکی N در سیستم دقیقا برابر با مجموع میزان افزایش ویژگی N در حـجم کنترل و میزان خالص جریان N از مرزهای حجـم کنـترل مـزبور است . در این فصل از معادله ی (۹-۳) استفاده خواهد شد . روش حـجم کنـترل را روش اویلـر می نامند و در این روش سیستم به حجم کنترل ثابت خواهد بود. چون محورهای xyz می تواند با سرعت ثابت دلخواه حرکت کند و هیچ تاثیری بر دینامیک سیستم و محیط آن نگذارد , بنابراین معادله ی (۹-۳) برای حالتی که شکل و اندازه ی حـجم کنترل ثابـت باشد و با سرعت یکسانی انتقال یابد نیز معتبر خواهد بود .

۳-۳-1 کاربرد حجم کنترل

اکنون به کاربـرد حجـم کنترل در مورد پیوستگی , انرژی و تکانه خطی می پردازیم .

(ا) پیوستگی



شکل ۲-۳ سیستمهایی با حجم کنترل یکسان در زمان t در میدان سرعت

معادلات پیوستگی از قانون کلی پایستگی جرم معـادله ی (۵-۳) بدست می آید . این قانون می گوید که جـرم درون سـیستم نسـبت به زمان ثابت خواهد ماند یعنی

$$\frac{dm}{dt}=0$$

اکنون در معـادله (۹-۳) فـرض می کنیم N=m باشد , بنابراین η جرم در واحد حجم یا $\eta=1$ خواهد بود .

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho\vec{V}.d\vec{A}$$

(۱۰-۳)

از معادله ی (۱۰-۳) معلوم می شود که میزان افزایـش جرم در حجم کنترل دقیقا برابر با میزان جرم خالص ورودی به حجم کنترل می باشد.

(II) معادله انرژی

از قانون اول ترمودیـنا مـیک می دانیـم که تفاضـل QH گرمـای اضافه شده به سیستم و W کاری که سیـستم انجام داده است , فقط بستگی به حالتهای اولیه و نمایـی آن دارد و این حـالت ها ویـژ گی سیـستم اسـت و تفـاوت آنها مستقل از مسیری است که بین دو حالت اولیه و نهـایی طی می شـود . این ویژ گی را انرژی داخلی E می نامند. یعنی داریم :

$$QH-UV=E_2-E_1$$

(۱۱-۳)

E را انرژی داخلی در واحد جرم می گیریم . با استفاده از معادله ی (۹-۳) و جایگزینی N=E و $\eta = \frac{\rho e}{P}$ داریم :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \rho e \vec{V}.d\vec{A}$$

با جایگزینی رابطه ی (۱۱-۳) در این رابطه داریم :

$$\frac{\delta QH}{\delta t} - \frac{\delta w}{\delta t} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \rho e \vec{V}.d\vec{A} \qquad (۳-۱۲)$$

اکنون کاری را که سیستم انجام می دهد به دو قسمت تقسیم می کنیم : Wpr کار نیروهای فشاری بر مرزهای متحرک و Ws کار نیروهای برشی ,اما کار نیروهای فشاری در زمان δt برابر است با :

$$\delta wpr = \delta + \int pvdA$$

با استفاده از تعریف کار , معادله ی (۱۲-۳) به صورت زیر در می آید :

$$\frac{\delta QH}{\delta t} - \frac{\delta ws}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} (\frac{p}{\rho} + e) P\vec{V}.dA \qquad (۳-۱۳)$$

اگر بتوانیم از اثرات هسته ای , الکتریکی , مغناطیسی , کشش سطحی صرف نظر کنیم , انرژی داخلی e ماده ای خالص برابر با جمع انرژی پتانسیل , جنبشی و ذاتی خواهد بود .

اما انرژی ذاتی در واحد جرم u ناشی از نیروهای بین مولکولی است و بستگی به پارامترهای T , ρ , P دارد :

$$e = gz + \frac{v^2}{2} + U$$

(III) معادله ی تکانه خطی

فرض می کنیم N برابر با تکانه ی خطی سیستم , (mv). η و η تکـانه ی خطی در واحد جرم باشد . با استفاده از معادله های (۶–۳)و(۹–۳) داریم :

$$\Sigma F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho v dV + \int_{CS} \rho v \quad V.d\vec{A}$$

(۳–۱۵)

از این معادله معلوم می شود که نیروی وارد بـه حـجم کنـترل بـرابـر با مجموع افزایش تکانه ی خطی در حجم کنـترل و مـقدار خالـص تـکانه ی خروجی از حجم کنترل است .

۳–٤ معادله ی پیوستگی

اکنـون در ایـن بـخش کاربـرد مـعـادلـه ی (۱۰–۳) را بـررسی می کنیم. فرض کنید جریان یکنواختی از درون بخشی از لولـه بـگذرد (شکل ۳–۳) ، بنابراین اولین عبارت معادله ی (۱۰–۳) برابر با صفر خواهد شد بنابراین :

$$\int_{cs} \rho \underset{\sim}{\vec{v}} . d\underset{\sim}{\vec{A}} = \circ$$

(۳–۱۶)

از این معادله مشخص می شود که جرم خالص خروجی از حجم کنترل باید برابر صفر باشد.اما در قطع ۱ جریان خالص خروجی برابر با $\rho_1 \vec{v}_1 . d\vec{A} = -\rho_1 v_1 dA_1$ و در مقطع ۲ مقدار آن برابر با $\rho_1 \vec{v}_2 . d\vec{A}_2 = -\rho v_2 dA_2$ است . چـون از دیواره ی لوله هیچ جریانی نمی گذرد بنابراین داریم:

$$\rho_1 \vec{V}_1 . d\vec{A}_1 = -\rho v_2 dA_2$$

(۳–۱۷)

اما اگر سطح مقطع لولــه ها تغـییر کنــد (مانند شکل ٤-۳) و ρ_1 چگالی متوسط در مقطع ۱ و ρ_2چگالی متوسط درمقطـع ۲ باشــد داریم:

$$\dot{m} = \rho_1 \bar{v}_1 A_1 . \rho_2 \bar{v}_2 A_2$$
(۳-۱۸)

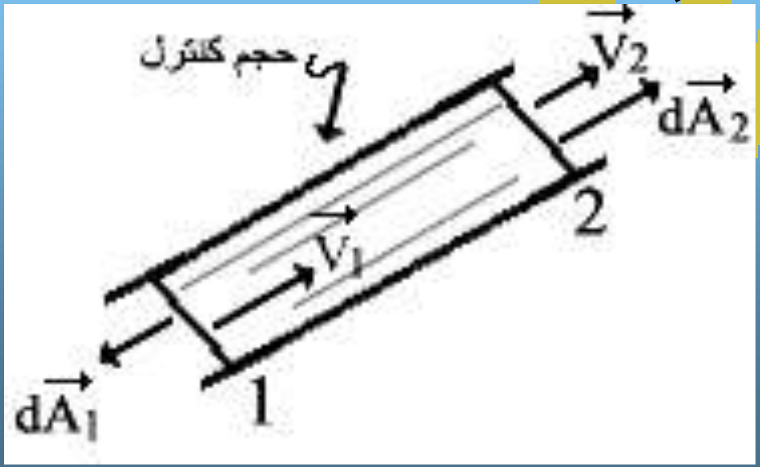
که در آن $\bar{v}_1 ,\ \bar{v}_2$ سرعـت های متوسط در دو مقطع و $\dot{\mathrm{m}}$ دبــی جرمی است . توجه داریم سرعت متوسط در روی سطح مقطع از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

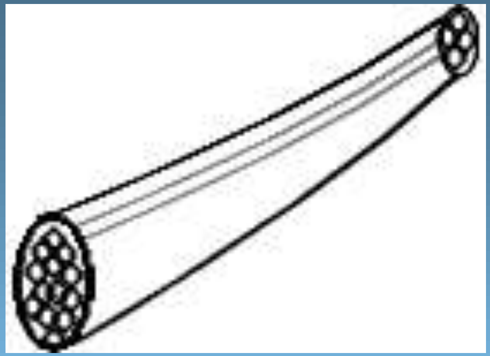
$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{\mathrm{A}} \int \mathrm{V dA}$$
(۳-۱۹)

اگر دبی Q به صورت زیر تعریف شود

$$\mathrm{Q} = \mathrm{A} \overline{\mathrm{V}}$$
(۳-۲۰)

شکل ۳-۳- جریان یکنواخت در لوله ی جریان





شکل ٤-٣ مجموعه ی لول هایی با جریان ثابت بین مرزها

معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید.

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$

(٣-٢١)

اما اگر جریان تراکم ناپذیر دائمی باشد، رابطه ی زیر شکل بهتری ازمعادله ی پیوستگی است.

$$Q = A_1 \overline{V}_1 = A_2 \overline{V}_2$$

(٣-٢٢)

مثال ٢

لوله ای آب را منتقل می کند در مقطع ١ سرعت $^{m}\!/\!_{s}$ ٣ و قطر ٢m و در مقطع ٢ قطر ٣m می باشد، دبی لوله و سرعت را در مقطع ٢ بیابید.

حل

$$Q = \overline{V}_1 / A_1 = (3/0)\pi = 9/42 m^3/s$$

از معادله ی (٣-٢٢) داریم

$$\overline{v}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{9/42}{2/25\pi} = 1/33 m/s$$

در بررسی جریانهای دو یا سه بعـدی باید از شکـل دیفرانسیـلی معادله ی پیوستگی استفاده کرد. اگر دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را بکار بریم، معادله ی (۱۰–۳) برای حجم کنترلی به انبار $\delta x \delta y \delta z$ و مرکزی در x, y, z داشـته بـاشـد بـکار می رود. (شکل ۵–۳) مولفه های سـرعت در ایـن حـجم کنتـرل به ترتیب u,v,wو چگالی جریان ρ فرض می شود . ابتدا جریان خروجی از دو قطعی که عمودبر محور x است در نظر بگیریم. درسمت راست عبور جریان برابر است با :

$$\left[\ \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{\delta x}{2})\right]\delta_y \delta_{\Im}$$

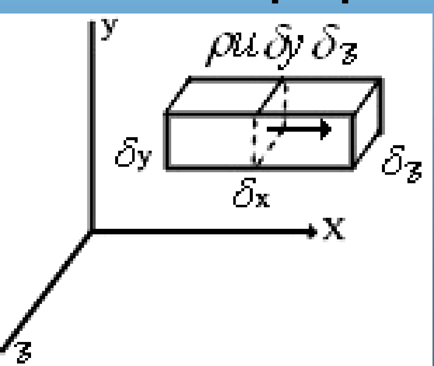
در این رابطه $\rho u \delta y \delta_{\Im}$ بیانگر فشار جرمی عبوری از سطح عمود بر محور x است. جمله دوم به نشانه ی میزان افزایش فشار جرمی نسبت به x که در فاصله ی $\frac{\delta x}{2}$ ضرب شده است همین طور برای قطع سمت چپ داریم:

$$\left[\rho u - \frac{\delta}{\partial x}(\rho u)\frac{\delta x}{2}\right]\delta_y \delta_{\Im}$$

در نتیجه فشار خالص گذرا از دو سطح مقطع برابر است با :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\delta_x \delta_y \delta_{\Im}$$

در دو مـحور دیـگر مخـتصـات نـیز رابـطه های مـشابهی چون رابطه بالا بدست می آید . بنابراین جرم خالص گذار از حجم کنترل برابر است با :



$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial \Im}(\rho u)\right]\delta x \delta y \delta_{\Im}$$

شکل ۵–۳ حجم کنترل در دستگاه محققان دکارتی

سمت راست معادله ی (۱۰-۳) برای یک جزء کوچک حجم به صورت زیر در می آید.

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x \delta y \delta_{\mathfrak{z}}$$

حال با فرض این که $\delta x \delta y \delta_{\mathfrak{z}}$ به سمت میل کند رابطه ای پیوستگی در فضای ۳ بعدی دکارتی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\delta}{\delta y}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial_{\mathfrak{z}}}(\rho w)=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

سمت چپ این معادله را می توان با استفاده از عملگر ρ به صورت زیر درآورد.

$$\underset{\sim}{\rho}.(P\underset{\sim}{V})=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(3-23)

و این معادله دیفرانسیل پیوستگی در فضای سه بعدی است. برای جریان تراکم ناپذیر رابطه بالا به صورت زیر در می آید.

(۳-۲٤)

$$\underset{\sim}{\rho}.\underset{\sim}{v}=\circ \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial_{\mathfrak{z}}}=\circ$$

توجه داریم که $\vec{V}, \underset{\sim}{\vec{V}}$ را واگرایی یا دیورژانس بردار سرعت می گویند.

مثال ۳

توزیـع سرعت در یـک جـریان دو بـعدی تراکم ناپذیر به صورت زیر است:

$$u=-\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ \ V=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

نشان دهید این روابط می تواند در معادله ی پیوستگی صدق کند.

حل

با استفاده از معادله (۲٤-۳) ، برای جریان دو بعدی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

اکنـون با مشـتق گـیری از v,u نـشان می دهـیم که در رابـطه ی بالا صدق می کند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

وحکم ثابت می شود.

۳-۵ معادله کویلر و رابطه ی آن با قوانین ترمودینامیک

علاوه بر معادله ی پیوستگی ، معادلات کنتــرلی مانند معادله ی اویلر ، معادله برنولی ، مــعادله تــکانه و مــعادلــه ی انرژی که مبــتــنی بر قوانین اول و دوم ترمودینامیک است نــیز وجــود دارنــد . دراین بــخــش به مــعادله ی اویــلر می پردازیم و سپس رابطه ی آن با قوانین ترمودینامیک نشان خواهیم. اکنون به مــعادله ی اویــلر بــرای جــریــانی که در امــتداد خط جریان است خواهیم پرداخت. در شــکل (۶-۳) حجم کنترل محدود بــسیــارکوچکی با سطح مقطع ∂A و طول ∂s نشان داده شده است. فرض می کنیم سرعت سیال در امتداد خط جریان می باشد. اگر چسبندگی صفر یا سیال بی اصــطکاک باشــد ، تــنها نیرویی که در امتداد x به حــجــم کــنــترل وارد مــی شــود دو نــیــروی وزن ونیروهای فشار در سطح مقطع هاست. معادله ی تکانه (۱۵-۳) را در امتداد S و برای حجم کنترل بکا رمی بریم

$$\sum F_s = \frac{\partial}{\partial t}\partial(\rho V)\delta s\delta A + \sum_{CS}\rho V V.dA$$

(۳-۲۵)

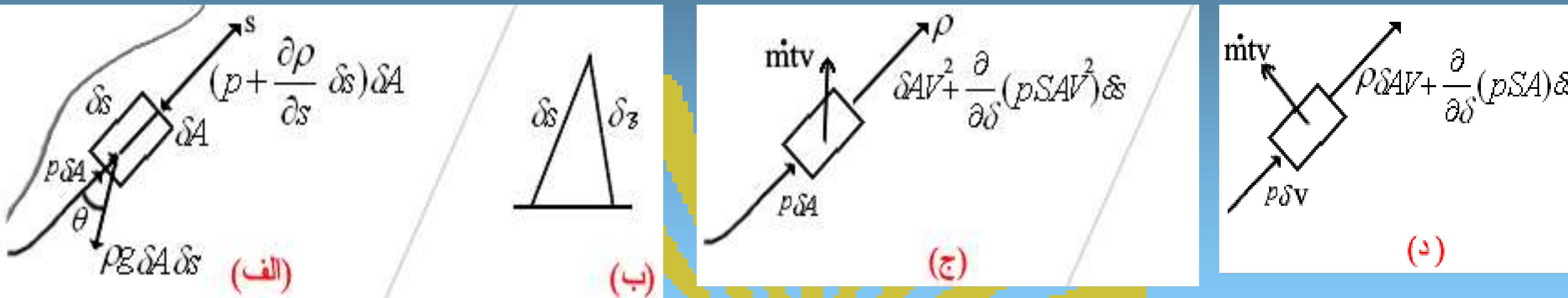
که در آن ss و sA تابع زمان نیستند . نیروهای وارد بر حجم کنترل عبار تنــد از :

$$\sum F_s = pSA - (pSA + \frac{\partial \rho}{\partial s}\partial s\partial A) - \rho g\delta s\delta A\cos\theta$$

$$= -\frac{\partial \rho}{\partial s}\delta s\delta A - \rho y\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s}\rho y\delta s\delta A$$

(۳-۲۶)

توجه داریم $\theta = {}^{\partial z}\!/_{\partial s}$ C است. برای فشار خالص تکانه ، باید جریان گذرا از سطح بدنه استوانه ($\dot{m}t$) و جریان سطوح انتهایی را در نظر گرفت.



شکل ۶-۳ کاربرد معادلات پیوستگی و تکانه دریک جسم کنترل در جهت S

$$\sum_{CS}\rho v\vec{v}.d\vec{A}=\dot{m}\tau v+\rho\delta Av^2+\left[\rho\delta Av^2+\frac{\partial}{\partial s}(\rho\delta Av^2)\delta s\right]$$

اکنون برای تعیین $\dot{m}\tau$ معادله پیوستگی (۱۰-۳) را برای حجم کنترل بکار می بریم:

$$\circ=\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\delta A\delta s+\dot{m}\tau+\frac{\partial}{\partial s}(\rho v)\delta A\delta s$$

و با حذف $\dot{m}\tau$ از دو معادله ی اخیر و اندکی عملیات جبری بدست می آید:

$$\sum_{CS}\rho v\vec{v}.\int\vec{A}=\left(\rho v\frac{\partial v}{\partial s}-v\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\right)\delta A\delta s \qquad (۳-۲۷)$$

سرانجام با جایگزین (۳-۲۶) (۳-۲۷) (۳-۲۵) نتیجه می شود:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}+\rho g\frac{\partial_{\Im}}{\partial s}+\rho v\frac{\partial v}{\partial s}+\rho\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)\delta A\delta s=\circ$$

با تقسیم رابطه بالا بر $\rho\delta A\delta s$ و میل مقادیر δAو δA به سوی صفر ,
معادله ی آسانی به شکل زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+g\frac{\partial_{\Im}}{\partial s}+v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial \tau}=\circ \qquad (۳-۲۸)$$

توجه داریم این معادله بر اساس دو فرض استوار است : (۱) جریان در امتداد خط جریان است (۲) جریان بی اصطکاک است. حال اگر جریان دائمی باشد، معادله ی (۳-۲۸) به صورت زیر ساده می شود.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+g\frac{\partial_{\Im}}{\partial s}+V\frac{\partial v}{\partial s}=\circ$$

چون در معادله ی بالا تنها متغییر مستقل S است، بنابراین می توان از شکل دیفرانسیل کامل استفاده کرد و نوشت:

$$\frac{d\rho}{\rho}+gd\Im+VdV=\circ \qquad (۳-۲۹)$$

اکنون به بررسی ارتباط بین معادله ی اویلر و قوانین ترمودینامیک می پردازیم.
بااستفاده از معادله ی (۱۳-۳) برای حجم کنترل شبیه شکل (۷-۳) که دارای جریان دائمی است، انتگرال حجم از بین می رود و معادله تبدیل می شود به

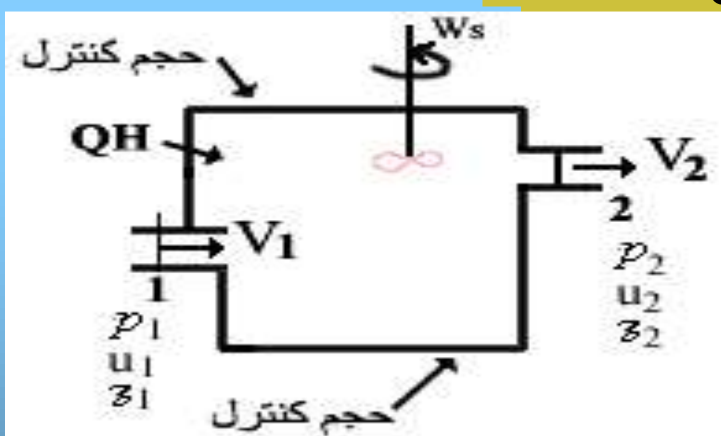
$$\frac{\delta QH}{\delta\tau}+\left(\frac{\rho_1}{\rho_1}+g\Im_1+\frac{V_1^2}{2}+u_1\right)\rho_1 v_1 A_1=\frac{\delta ws}{\delta\tau}+\left(\frac{\rho_2}{\rho_2}+g\Im_2+\frac{V_2^2}{2}+u_2\right)\rho_2 v_2 A_2$$

بهتر است این معادله را بر دبی جرم در واحدزمان تقسیم $\left(\rho_1 A_1 v_1=\rho_2 A_2 v_2\right)$ در نتیجه داریم:

$$qH+\frac{p_1}{\rho_1}+g\Im_1+\frac{v_1^2}{2}+u_1=ws+\frac{p_2}{\rho_2}+g\Im_2+\frac{u_2^2}{2}+u_2$$

(۳-۳۰)

شکل ۷-۳ حجم کنترل با جریان محور بر سطح کنترل



که در آن qH حرارت اضافه شده در واحد جرم سیال و Ws کار محور در ازای واحد جرم سیال می باشد. معادله ی فوق معادله ی انرژی برای جریان دائمی درون حجم کنترل. ما در بخش بعدی راجع به معادله ی انرژی مفصل تر بحث خواهیم کرد

شکل دیفرانسیلی معادله ی (۳۰-۳) در حالتی که جریان لوله ای فـاقد کـار محـوری است، چنین خواهد بود.

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right)+gd\Im+Vdv+du-dqH=0$$

که با اندکی فکر به صورت زیر در می آید

$$\frac{dp}{\rho}+gd\Im+Vdv+du+pd\left(\frac{1}{\rho}\right)-dqH=0$$

با توجه به معادله ی اویلر، برای جریان بی اصطحکاک مجموع سه جمله ی اول برابر با صفر خواهد بود و به عبارت بعدی صورت دیگری از قانون اول ترمودینامیک برای سیستم است:

$$\mathrm{dq}_{\mathrm{H}}=\rho\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\mathrm{du} \qquad (۳-۳۲)$$

اگر کار محوری وجود داشته باشد , قانون اول ترمودینامیک با استفاده از معادله ی (۳-۳۱) بدست می آید:

$$dws+\frac{dp}{\rho}+vdv+gd\Im+du+pd\left(\frac{1}{\rho}\right)-dq_H=0$$

به جای $\mathrm{du}+\mathrm{pd}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ از معادله ی(۳-۳۳) مقدار Tds را قرار می دهیم.

$$dws+\frac{dp}{\rho}+vdv+gd\Im+Td-dq_H=0 \qquad (۳-۳٤)$$

اما از نا مساوی کلازیوس داریم :

$$ds \geq \frac{dq_H}{T}$$

و یا

$$Tds \geq dqH \rightarrow Tdds - dqH \geq 0$$

(۳-۳۵)

[بعد از رابطه ی (۳-۳۲) بیاید]

در جریان برگشت پذیر Sآنتروپی در واحد جرم به صورت زیر تعریف می شود.

$$ds = \left(\frac{dq_H}{T}\right)_{rev}$$

(۳-۳۳)

که در آن T دمای مطلق و آنتروپی یک ویژگی سیال است و در درس ترمودینامیک به تفصیل راجع به آن بحث شده است. چون معادله ی (۳-۳۲) برای سیال بی اصطکاک (برگشت پذیر) می باشد می توان dqH را از دو معادله ی (۳-۳۲) و (۳-۳۳) حذف کرد تا نتیجه شود:

$$Tds = du + p\,d\left(\frac{1}{p}\right)$$

علامت تساوی مربوط به فرآیندهای برگشت پذیر است اگر مقدار برگشت ناپذیری یا اتلاف به صورت زیر بیان شود:

$$d(\text{اتلاف}) \equiv Tds - dqH$$

(۳-۳۶)

و با جایگزینی این رابطه در (۳۴–۳) داریم

$$dw_s+\frac{dp}{p}+vdv+gd\Im+d(\text{اتلاف})=0 \quad (۳–۳۷)$$

و این معادله بسیار مهم از کاربر معادله ی اویلر در ترمودینامیک می باشد.

۶–۳ معادله ی برنولی

اگر از معادله ی (۲۹–۳) در حالتی که چگال ثابت باشد، انتگرال بگیریم ، منتهی به معادله ی برنولی می شود:

$$g\Im+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\text{ثابت} \quad (۳–۳۸)$$

توجه داشته باشید که چهار فرض انجام شده است. تا معادله ی برنولی بدست آید. هر جمله ی بعد نیوتون ـ متر بر کیلوگرم دارند یعنی

$$\mathrm{mN}/\mathrm{kg}=\frac{\mathrm{m.kg.}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}}=\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

بنابراین معادله ی (۳۸–۳)، انرژی در واحد جرم است. اگر این معادله را بر g تقسیم کنیم:

$$\Im+\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}=\text{ثابت} \quad (۳–۴۰)$$

و معادله ی بالا انرژی در واحد زمان می باشد . این معادله در حالتی که مایع سطح آزاد دارد، مناسب است.
از ضرب معادله ی (۳-۳۹) در p بدست می آید:

$$\gamma\Im + \rho\frac{v^2}{2} + P = \text{ثابت}$$

(۳-٤۱)

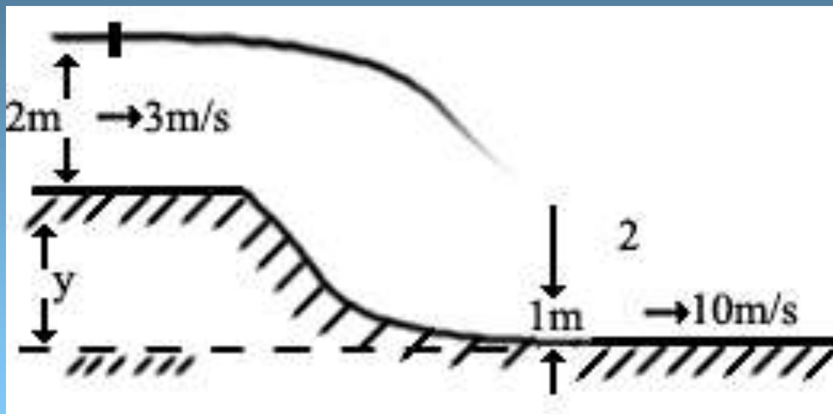
این معادله برای گازها مناسب است , زیرا در مورد گازها، تغییرات ارتفاع مهم نیست و می توانz γ را حذف کرد. در معادله ی بالا هر جمله ی آن انرژی در واحد حجم است.
هر جلمه ی معادله ی برنولی بیانگر یک نوع انرژی است : اولین عبارت به نشانه ی انرژی پتانسیل درواحد جرم وجمله بعدی همان انرژی جنبش ذره و آخرین جمله انرژی جریان در واحد جرم است.

مثال ٤

آب داخل کانال بازی به عمق 2m با سرعت $^{m}/_{s}$ ۳ جریان دارد (شکل ۸-۳) سپس این آب به درون کانال وارد می شود که افت آن ۱m و سرعت آب $^{m}/_{s}$ ۱۰ می شود . فرض کنید جریان بی اصطحکاک باشد و اختلاف ارتفاع کف کانالها را بدست آورید (سرعت در سطح مقطع ثابت و فشار هیدرواستاتیکی است)
حل
اگر ارتفاع کف کانالها y باشد، با استفاده از معادله ی برنولی داریم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + \Im_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \Im_2$$

$$\frac{3^2}{2\times 9/807}+0+y+2=\frac{10^2}{2\times 9/806}+0+1$$



شکل ۸-۳ جریان در کانال باز

و در نتیجه g =۶٤/۳m

مثال ۵

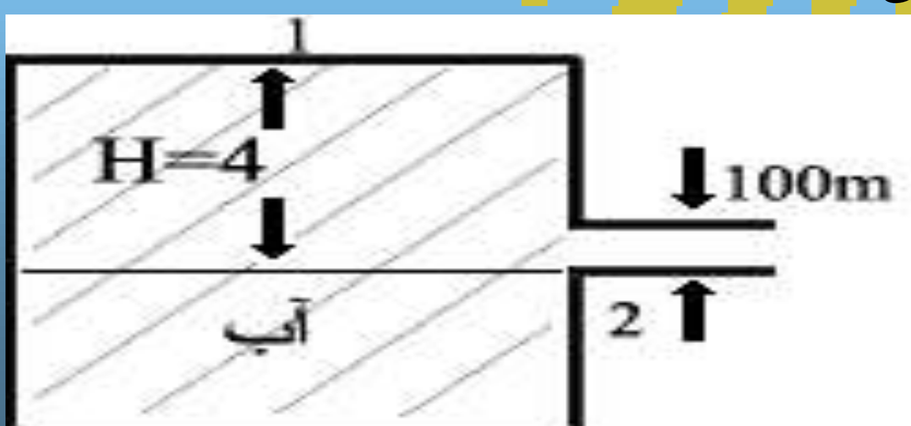
با توجه به مخزن شکل (۹-۳) سرعت خروجی از نازل و دبی آن را محاسبه کنید.

حل

معادله ی برنولی را برای دو سطح ۱و۲ می نویسیم

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+\Im_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+\Im_2$$

شکل ۹-۳ جریان در نازل خروجی مخزنی



فشار جو را مبنا می گیریم بنابراین $p_1 = p_2 = 0$ و $\Im_2 = 0 \quad , \quad \Im_1 = H$ سرعت درسطح مخزن برابر صفر است. بنابراین

$$0 + 0 + H = \frac{v_2^{\,2}}{2g} + \ldots \rightarrow V_2 = \sqrt{2gH} = 8/89 \, {}^{m}\!/_{s}$$

از رابطه ی بالا معلوم می شود که سرعت خروجی برابر با سرعت سقوط آزاد و از سطح مخزن است و آن را فرضیه ی توریچلس می نامند.
برای محاسبه ی دبی باید سرعت خروجی را در مساحت قطع جریان ضرب کنیم.

$$Q = A_2 V_2 = n(0/05)^2 (8/86) = 0/07 \, {}^{m^3}\!/_{s} = 70 \, {}^{L}\!/_{s}$$

7–۳– کاربرد معادله ی تکانه ی خطی : رانش جهت و مکانیک راکتها

در بخش (۳–۳) با استفاده از قانون دوم نیوتن ، معادله تکانه ی فعلی بدست آمد.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{CV} \rho v dv + \int_{CS} \rho v \vec{v} . d\vec{A}$$

و این یک رابطه برداری است. اگر فقط جهت X مورد نظر باشد داریم.

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{CV} \rho v_x dv + \int_{CS} \rho v_x \vec{v} . d\vec{A} \qquad (۳–۴۰)$$

اگر می خواهیم حجم کنترل را انتخاب کنیم بهتر است در محل هایی که جریان سطح را قطع می کند سطوح را عمود برجهت سرعت بگیریم . حتی اگر سرعت در تماس سطوح ثابت باشد دیگر نیازی به بکارگیری انتگرال سطحی نیست . در شکل (۱۰-۳) برای جریان دائمی، سطح کنترل نشان داده شده است . و نـیـروهای وارد برحجم کنترل(Fx) از معادله ی (۴۰-۳) محاسبه می شود.

$$Fx = \rho_2 A_2 v_2 Vx2 - \rho_1 A_1 V_1 x1$$

به طوری که جرم ورودی و خروجی از حجم کنترل برابر است با $\rho Q = \rho_1 Q = \rho_2 Q_2$

حال اگر سرعت در نمای سطح مقاطع کنترل ثابت نباشد ، با استفاده از ضـریب تعیین تکانه P میتوان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$\int \rho v^2 dA = \beta \rho \overline{V}^2 A$$

(۴۱-۳)

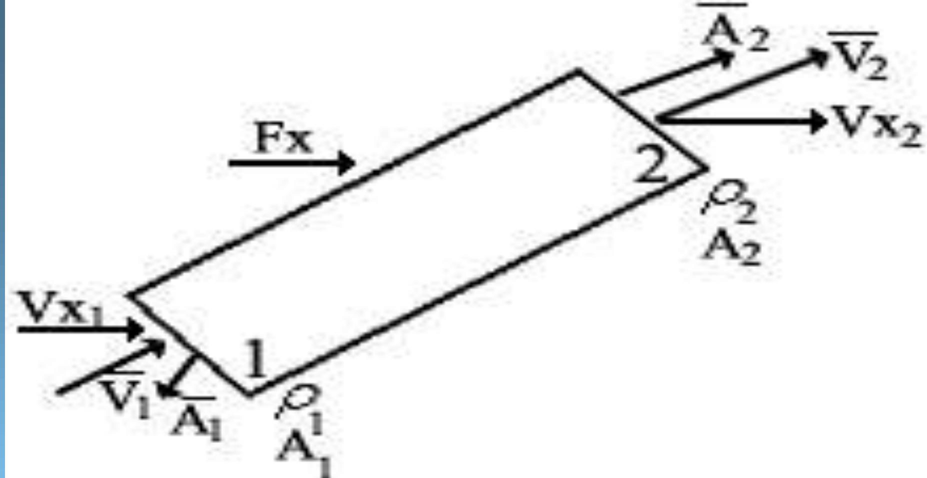
در معادله بالا β بدون بعد است و داریم:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\nu} \right)^2 dA$$

(۴۲-۳)

از تجربه مشخص شده است که β برابر $4/3$ است . برای جریان یکنواخت تعداد β برابر است و هرگز از یک درهر حالتی نمی تواند کمتر باشد.

به هنگام استفاده از معادله ی تکانه باید دقت داشت که حجم کنترل و نـیروهـای وارد به آن به وضوح مشخص شده باشد و باید به علامت جملات توجه کرد.



شکل ۱۰-۳ حجم کنترل با جریانهای ورودی و قربالی یکنواخت عمود بر سطح کنترل

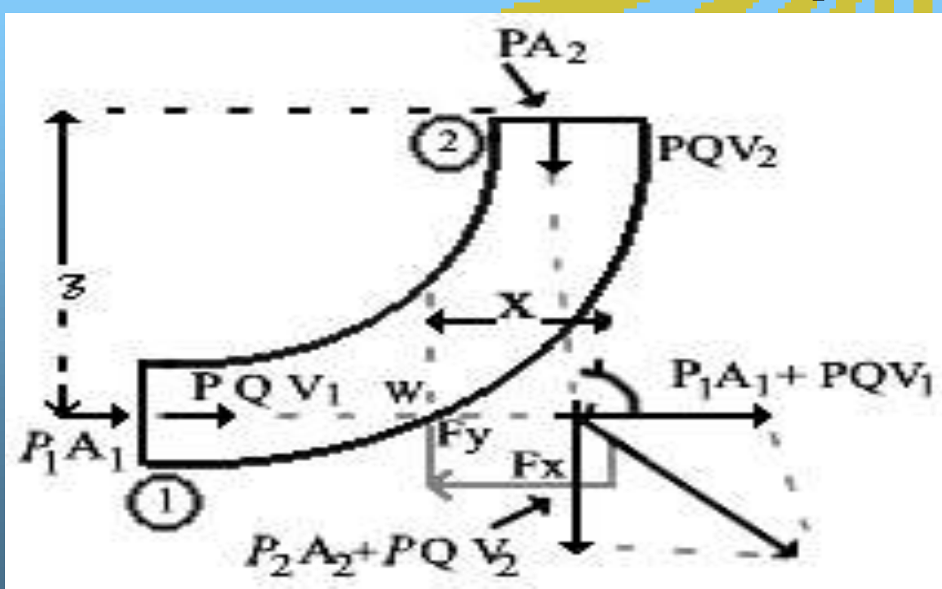
مثال ۶

زانوی نشان داده شده در شکل (۱۱-۳) در صفحه ی قائم قرار دارد. درون این زانو آب جریان دارد و

$$Q = 8/5 m^3/s \quad , \quad D2 = 1/3m \quad , \quad D_1 = 2m$$

$$x = 2m \quad , \quad \Im = 3m \quad , \quad \theta = 120^\circ \quad , \quad p_1 = 280kpa \quad , \quad W = 80k8$$

و $\beta_1 = \beta_2 = 1$ و اتلاف درون زانو برابر با $\frac{0/57_2{}^2}{2g}\frac{m.N}{N}$ است. مقادیر Fx و Fy و خط اثرنیروی برآیند را تعیین کنید.



شکل ۱۱-۳ نیروهای وارد به زانویی که باعث کاهش سطح مقطع می شود.

حل

سطح داخلی زانو شامل آن قسمت از سطح کنترل است که جریانی از آن عبــور نمی کند مقاطع محوری ۱ و ۲ سطح کنترل را کامل می کند.

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{8/5}{\pi} = 2/706 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A^2} = \frac{8/5}{\pi(1/3)\,{}^{2}\!/\!_{4}} = 6/404 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$ (۳-۳۷)

با استفاده از معادله ی و تعیین آن برای سیال تراکم ناپذیر ، داریم :

$$\frac{P_1^2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2y} + z_2 + \text{افت} \quad 1-2$$ (۳-٤۲)

اکنون داده ها را جایگزین در معادله ی بالا می کنیم تا p2 به دست آید.

$$\frac{280}{9806} + \frac{(2/706)^2}{2\times 9/806} + 0 = \frac{p_2}{9806} + \frac{(6/404)^2}{2\times 9/806} + 3 + \frac{(6/404)^2}{2\times 9/806}$$

و با اندکی محاسبه نتیجه می شود $P2 = 223apK$ برای محاسبه Fx از معـادله (۳-٤۰) داریم:

$$p_1 A_1 - P_2 A_2 Cos\theta - Fx = \rho Q) v_2 Cos\theta - v_1$$

$$280000\pi - 223500\,{}^{\pi}\!/\!_{4}\,(1/3)^2 Cos120 - Fx$$

$$= 1000 \times 8/5\,(6/404\,Cos120 - 2/706)$$

و یا $Fx = 1/078apm$ همین طور برای محور y داریم

$$\sum \mathrm{Fy} = \rho \mathrm{Q}(\mathrm{vy}_2 \mathrm{vy}_1)$$

$$Fy - w - p_2 A_2 \delta in\,\theta = \rho Q v_2 Sin\,\theta$$

$$Fy - 80000 - 223500\frac{n}{4}(1/3)^2 \times 0/866 = 1000 \times 8/5 \times 6/404 \times 0/866$$

و یا $Fy =$ ۳۸٤ KN

در تعیین خط اثر برآیند نیروها از بردارهای تکانه و داده های زیر استفاده می شود . (شکل ۱۱-۳):

$$\rho_2 A_2 = 297KN \quad , \quad P_1 A_1 = 880KN \quad , \quad \rho Q v_1 = 23KN \quad , \quad \rho Q v_2 = 45/4KN$$

با ترکیب این نیروها و بردار وزن w نیروی نهایی برابر با ۱٤٦/۱MN بدست می آید که در خلاف جهت Fx و Fy است.

مثال ۷

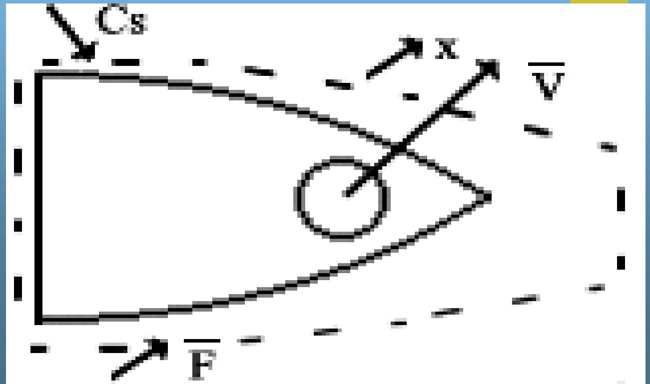
از درون نازلی که سدی قایقی سوار شده است، نواری آبی با قطر ۸۰mm و سرعت ٤۰ m/s درجهت افقی خارج می شود. چه نیرویی لازم است تا قایق را ساکن نگه دارد؟

حل

اگر حجم کنترل را مانند شکل (۱۲-۳) بگیریم ، فشار خالص تکانه برابر خواهد بود:

$$Fx = \rho Q(vx_2 - vx_1) = \rho Q v = 1000 \times \frac{\pi}{4}(0/08)^2 (40)^2 = 8/04KN$$

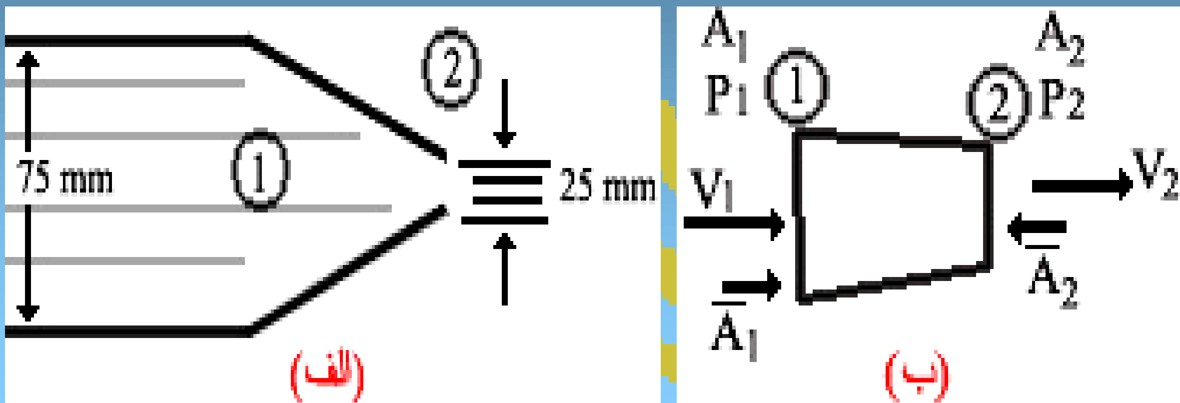
نیروی وارد بر قایق در جهت x برابر با 8/04 kN خواهد بود.



شکل (۱۲-۳) نازل نصب شده روی قایق

مثال ۸

نیروی وارد از طرف نازل به لوله ی شکل (۱۳-۳)الف را محاسبه کنید. سیال روغنی با S=۰/۸۵ و P1=۷/۰mpa است. از اتلاف صرف نظر کنید.



شکل ۱۳-۳ ناز ل در انتهای لوله

حل

برای تعیین دبی ، معادله ی بهتری را بین قطع ۱ و نقطه ای از پایین دست جریان که فشار آن صفر است می نویسیم:

$$\Im_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{700000}{0/85(9806)} = \Im_2 + \frac{v_2^2}{2g} + 0$$

چون $\Im_1 = \Im_2$ **و** $v_2 = (D_1 / D_2)^2 V_1 = 9V_1$ **است داریم**

$$\frac{\mathrm{v}_1^2}{2\mathrm{g}}(1-81) + \frac{700000}{0/85(9806)} = 0$$

بنابراین داریم m/s **V1 =۸۳۷/٤ و V2 =۸۳۳/٤۰**

$$Q = 4/537\frac{\pi}{4}(0/075)^2 = 0/02004\, m^3/s$$

فرض می کنیم Px (مطابق شکل ۱۲-۳ ب) نیروی اعمالی از طرف نازل به حجم کنـتـرل مـایع باشد. با استفاده از معادله ی (۴۰-۳) داریم.

$$\left(0/7\right)\frac{n}{4}\left(0/075\right)^{2}-Rx=\left(1000\right)\left(0/85\right)\left(0/02004\right)$$

$$\left(40/833-4/537\right)$$

به آسانی نتیجه می شود:

Px=۲٤۷٤N

سینی روغن نیرویی برابر ۲٤۷٤N از راست به چپ به نازل وارد می کند و نازل نـیــز نـیـروی کشش ۲٤۷٤N را به لوله اعمال می دارد.

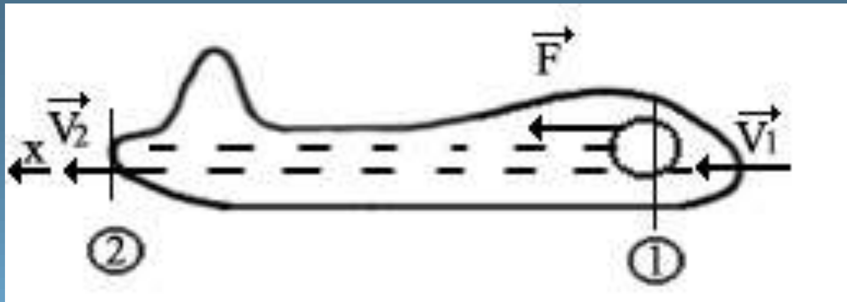
۱-۷-۳ رانش جت

پروانه یک نوع رانش فواره ای است که در آن فواره ی تولید شده باعث ایـجاد نیروی رانش می شود. در موتورهای جت، هوا به داخل موتور مکیده می شود و با مـقـدار کـمـی سوخت محترق می شود. سپس گازها با سرعت خیلی بیشتر از سرعت جـریـان لـغزشی پروانه ها به خارج رانده می شود. قطر فواره باید کوچکتر از جریان لغزشی پروانه باشد . اگر از جرم مواد سوزا صرف نظر شود نیروی پروانه ای F را می توان از معادله ی (۴۰-۳) چنین بدسـت آورد:

$$F=\rho Qvabs \qquad (۳-٤٤)$$

که در آن $vabs=\Delta v$ برابر با سرعت مطلق سیال جت و ρQ برابر با جرم خروجی در واحد زمان می باشد (شکل ۱٤-۳)

شکل ۱٤-۳



جداره های مسیر گذر

جریان موتورهای جت بافرض حالت پایدار به عـنـوان سـطح کنترل هواپیما مد نظر گرفته شده است . بازده ی مکانیکی جت ها مانـند بـازده ی پروانه هاست و آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$e=\frac{\text{توان خروج}}{\text{توان خروج}+\text{افت}}=\frac{271}{v_2+v_1}=\frac{1}{1+\Delta v/2v_1}$$

(۳-٤۵)

اما برای محاسبه وزن مواد سوزا در هواپیمایی , فـرض مــی کنیم هر $\dot{m}$ جـرم هوا در واحد زمان و r نسبت جرم مواد سوزا به هوا باشد. با توجه به شکل (۳-۱۳) مقدار نیروی رانش برابر است با

$$F=\dot{m}_{\text{هوا}}\left(v_2-v_1\right)+r\,\dot{m}_{\text{هوا}}\;v_2$$

جمله دوم در سمت راست این معادله برابر با جرم مواد سوزا در واحد زمان ضرب در تغییر سرعت سوخت می باشد. با فاکتور گیری داریم:

$$F=\dot{m}_{\text{هوا}}\left[v_2(1+r)-v_1\right]$$

(۳-٤۶)

اکنون بازده مکانیکی را به صورت نسبت کار مفید بــه مـجـمـوع کــار مفید و انرژی جنبش باقی مانده تعریف می کنیم. در نتیجه داریم.

(۳–۴۷)

$$e = \frac{Fv_1}{Fv_1 + \dot{m}_{\text{هوا}} \quad (1+v)(v_2 - v_1)^2/2}$$

سرانجام با جایگزین (۳–۴۶) در (۳–۴۷) بدست می آوریم:

$$e = \frac{1}{1 + (1+v)[(72/v_1) - 1]^2/2 [(1+r)(v_2/v_1) - 1]}$$

اگر $V_1 = V_2$ باشد بازده برابر واحد خواهد شد. در این حالت مـحـصولات احتراق به حالت سکون در می آید و هیچ انرژی جنبشی در فواره باقی نخواهد ماند.

مثال ۸

هواپیمایی به ازای ۲۰ کیلوگرم، یک کیلوگرم مواد سوزا مصرف می کند و گازهای داغ را با سرعت m/s ۱۸۰۰=V از لوله ی عقب خارج می کند بازده ی این هواپیما را به ازای سرعت ۱۰۰ و ۱۵۰ m/s به دست می آورید.

حل

به ازای m/s ۳۰۰ =V داریم r= ۰/۰۵ و ۶=۳۰۰/۱۸۰۰ = ۷۱/۷۲ در نتیجه از معادله ی (۳–۴۷) داریم:

$$e = \frac{1}{1 + (1+0/05)(6-1)^2[(2/6(1_y05) - 1]} = 0/287$$

همچنین به ازای m/s ۱۵۰= Vمقدار ۱۲ = $\frac{1800}{150}$ = ۷۱/۷۲ خواهد شد پس

$$e=\frac{1}{1+(1+0/05)(12-1)^2[(2/12(1+0/05)-1]}=0/154$$

2-۷-۳ مکانیک راکتها

موتور راکت یک جسم اکسید کننده را با خود حمل می کند. این جسم با مواد سوزا مخلوط می شود و تولید نیروی رانشی می کند. نیروی رانشی بستگی به ماده ای که راکت در آن حرکت می کند ندارد. چون در توربین ها گاز، سوخت با هوا مخلوط می شود، جرم گازهای داغ خارجی ازتوربین گازی چندین برابر جرم مواد سوزایی است که راکت حمل می کند. در تعیین شتاب راکت به هنگام پرواز، بهتر است حجم کنترل را منطبق بر سطوح خارجی راکت و صفحه ی عمود بر فواره ی خروجی از نازل بگیریم. (شکل ۱۵-۳) سرعت حجم کنترل برابر با سرعت راکت می باشد . اگر R مقاومت هوا و Mr جرم بدنه ی راکت و m جرم مواد سوزا و $\dot{m}$ سرعت اشتعال سوخت و Vr سرعت گاز خروجی نسبت به راکت و V_1 برابر با سرعت حقیقی راکت (وسرعت دستگاه مرجع) و V برابر با سرعت راکت نسبت به دستگاه مرجع مختصات باشد. در این صورت V برابر با صفر و $dv/d\tau = dv/d\tau$, برابر با شتاب راکت خواهد شد. معادله اصلی تکانه را برای محور قائم می نویسیم.

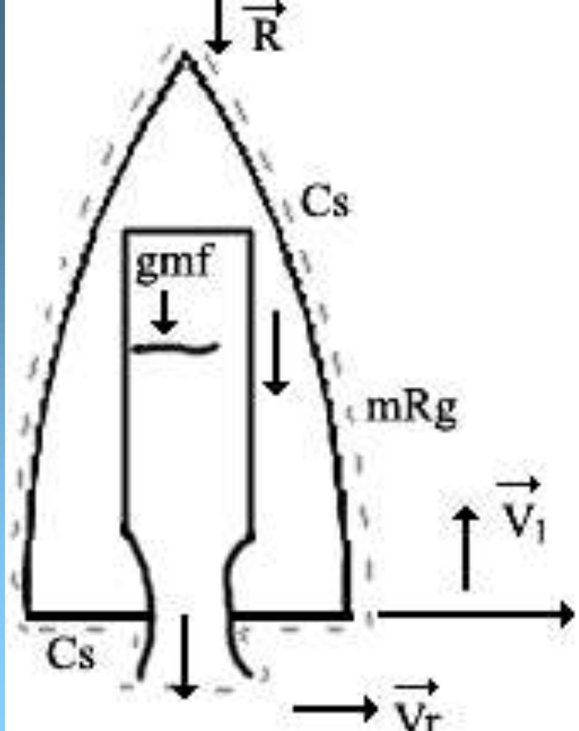
$$\sum Fy=\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{cv}\rho vy dv\tau \int_{cs}\rho vy\vec{V}.d\vec{A}$$

در نتیجه داریم:

$$-R-(m_R+m_f)y=\frac{\partial}{\partial\tau}[m_R+m_f)v]-mv_r$$

(۳-۴۹)

شکل ۱۵-۳ سطح کنترل برای تجزیه و تحلیل شتاب گیری راکت.



اما V تنها تابعی از t است بنابراین معادله ی بالا را می توان به صورت دیفرانسیلی زیر درآورد.

(۳-۵۰)

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{dv_1}{d\tau}=\frac{\dot{m}r_r-g(mf+mR)-R}{mR+mf}$$

اگر $\dot{m}$ دبی ثابت سوخت باشد $mf=mf_{\circ}-\dot{m}\tau$ خواهد بود که $mf_{\circ}$ جرم اولیه مواد سوزا و اکسید کننده است.

حال جرم راکت و مواد سوزا را باهم در نظر می گیریم . تفاضل نیروی رانش ($\dot{m}vr$) و مجموع وزن و مقاومت هوا دقیقاً برابر با حاصل ضرب جرم کلی حرکت و مواد

سوزا در شتاب راکت می باشد. از تجربه مشخص شده است

که با افزایش سرعت راکت بازده های موتور راکت نیز افزایش می یابد. اگر E انرژی مفید در واحد جرم ماده سوزا باشد به هنگامی که ماده سوزا مشتعل می شود ،انرژی مفیدی تبدیل به انرژی جنبشی $E=\frac{Vr^2}{2}$ خواهد شد که vr سرعت فواره نسبت به راکت خواهد بود.

برای راکتی که سرعت آن نسبت به محورهای ثابت روی زمین V1 باشد ، توان مفید برابر $\dot{m}V_1V_1$ خواهد بود . مقداری از انرژی جنبش به صورت موادسوزای محترق نشده تلف میشود. $(\dot{m}v_1{}^2/2)$ و مقداری از آن دراثر احتراق از بین می رود ($\dot{m}E$) بنابراین نتیجه می گیریم:

$$\dot{m}(E+\frac{V_1^2}{2})$$ = انرژي مفید ورودی در واحد زمان (۳-۵۱)

و بازده ی مکانیکی از رابطه زیر بدست می آید.

$$e=\frac{\dot{m}v_1\sqrt{2E}}{\dot{m}(E+V_1{}^2/2)}=\frac{2\sqrt{2/V_1}}{1+(V\pi/V_1)^2} \quad V\pi \qquad (۳-۵۲)$$

به ازای $V\pi/V_1=1$ ، بازده ی حداکثر e=1 بدست می آید و در این حالت سرعت مطلق گاز خروجی صفر خواهد بود.

مثال ۱۰

(الف) زمان احتراق راکتی را حساب کنید که وزن اولیه آن ۹۰۳/٤ MN باشد و ۷۰٪ وزن آن را ماده سوزا تشکیل دهد. این راکت سوخت را با دبی ثابت مصرف می کند و رانش اولیه ای ۱۰٪ بیشتر از وزنش می باشد و $\frac{m}{s}$ Vr =۳۳۰۰ (ب) با فرض ثابت بودن g و این که در هنگام پرواز قائم هیچ مقاومتی وجود نداشته باشد ، سرعت راکت و ارتفاع آن را از بین در لحظه ای پایان مواد سوزا و اوج راکت را بدست آورید.

$$(g = 9/8\, m/s^2)$$

(الف) با استفاده از رابطه رانش داریم:

$$\dot{m}v_r = 1/1W\partial = 1/1(4/903)N = 5/393MN = \dot{m}3300$$

بنابراین $\frac{kg}{s}$ $\dot{m}$ =۳/۱۶۳٤ (جرم مفید مواد سوزا ۳۵۰۰۰۰kg می باشد). حال زمان احتراق را می توان بدست آورد:

$$\frac{350000}{1634/3} = 214/26$$

(ب) از معادله ی (۵۰-۳) داریم

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1634/3 \times 3300 - 9/8[350000 - (1634/3)t + 150000]}{150000 + 350000 - (1634/3)t}$$

با اندکی عملیات جبری بدست می آید.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{299/95 + 9/8t}{305/94 - t} = -9/8 + \frac{3298/16}{305/94 - t}$$

و با انتگرال گیری نتیجه می شود

$$V_1 = -9/8 + -(3298+16)In(305/94 - t) + \text{مقدار ثابت}$$

می دانیم به ازای $V_1 = 0, t = 0$ است پس

$$V_1 = 9/8t - (3298/16)\ln(1 - \frac{t}{305/94})$$

حال به ازای $t = 214/2$, V_1 محاسبه می شود : V1 =۲٤/۱۸۷۳ $^{m}/_{s}$

و ارتفاع راکت به ازای این زمان نیز بدست می آید.

$$y = \int_0^{214/2} vdt = -9/8\frac{t2}{2}\int_0^{214/2} -3298/16\int_0^{214/2} \ln(1 - \frac{t}{305/54})dt \;=117/22km$$

اما پس از اتمام موادسوزا راکت می تواند تا ارتفاع $^{v_1^2}/_{2g}$ بالاتر برود پس اوج راکت برابر است با :

$$H = 117220m + \frac{(1873/24)^2}{2\times 9/8} = 296/25km$$

تست های فصل ۳

۱-۲-۳ جریان یک بعدی عبارت است از

الف) جریان دائمی یکنواخت

ب) جریان یکنواخت

√ج) جریانی که در آن از تغییرات شیب صرف نظر می شود

د) جریان که مجبور است به خط مستقیم حرکت کند.

۲-۲-۳ جریان ایزوتروپیک عبارتست از

الف) جریان بی دررو با برگشت پذیر

ب) جریان گاز کامل

ج) جریان سیال آرمانی

√د) جریان بی در روی برگشت پذیر

۳-۲-۳ در جریان تلاطمی

الف) ذرات سیال منظم حرکت می کند

ب) انتقال تکانه فقط در حدود مولکولی روی می دهد

ج)یک لایه سیال به آرامی روی لایه دیگر می لغزد

√د) معمولاً تنش های برشی بزرگتر از جریان آرام مشابه است

۴-۲-۳ در جریان تلاطمی، ضریب $\eta = \delta / (du/dy)$

الف) یک خاصیت فیزیکی است

√ب) وابسته به جریان و چگالی است

ج) تابعی از دما و فشار سیال می باشد

د) مستقل از ماهیت جریان است.

۵-۲-۳ در جریان آرام

√الف) قانون چسبندگی نیوتون بکار می رود

ب) وزارت سیال در مسیرهای نامنظم و تصادفی حرکت می کند

ج) چسبندگی بی اهمیت است

د) ضریب $\delta / (du/dy)$ بستگی به جریان دارد.

۶-۲-۳ سیال آوانی کدام است؟

الف) یک سیال خیلی چسبناک است

ب) سیالی است که از قانون چسبندگی نیوتون پیروی می کند

ج) فرض مفیدی است که در مسایل جریان در کانالها بکار می رود

√د) سیالی است بدون اصطکاک و تراکم ناپذیر

۳-۲-۷ جریان دائمی هنگامی روی می دهد که

√الف) شرایط در هیچ نقطه ای نسبت به زمان تغییر نکنند .

ب) شرایط به طور یکنواخت نسبت به زمان تغییر کند

ج) شرایط در نقاط مجاور در هر لحظه یکسان باشد

د) $\partial v/\partial t$ ثابت بماند

۳-۲-۸ جریان یکنواخت کی اتفاق می افتد؟

الف) جریان یکنواخت باشد ب) $\partial v/\partial t$ در تمام نقاط صفر باشد

ج) بردار سرعت در هر نقطه ثابت بماند √د) $\partial v/\partial s$ باشد

۳-۲-۹ کدام جریان دائمی نایکنواخت است؟

الف) حرکت آب در اطراف کشتی در دریاچه

√ب) حرکت رودخانه در اطراف پایه های پل

ج) افزایش یکنواخت جریان داخل یک لوله

د) کاهش یکنواخت جریان داخل یک مسیر همگرا

۱۰-۲-۳ در جریان دو بعدی اطراف یک استوانه، فاصله خطوط جریان در فاصله ای دور از استوانه که سرعت $^{m}\!/\!_{s}$ ۱۰۰ است ، برابر با ۵۰mm می باشد. در نقطه ای نزدیک به استوانه فاصـله خـطوط ۵/۳۷mm می شود ، سرعت متوسط برابر است با (برحسب $^{m}\!/\!_{s}$)

الف) ۷۵ √ب) $^{m}\!/\!_{s}$ ۱۳۳ ج) ۱۵۰ د) ۲۰۰

۱۱-۲-۳ یک خط جریان

الف) خط ارتباطی مرکز سطح مقطع های عبور جریان است.

ب) تنها در مورد جریان یکنواخت تعریف می شود

ج) عمود بر بردار سرعت در هر نقطه رسم می شود

√د) در جریان دائمی در فضا ثابت می باشد.

۱-۳-۳ در سیستم باز

الف) یک سطح آزاد وجود دارد

ب) جرمی معینی موجود است

√ج) یک حجم کنترل وجود دارد

د) هیچ ارتباطی بین سیستم و محیط وجود ندارد

۲-۳-۳ حجم کنترل عبارتست از

√الف) ناحیه ای ثابت در فضا

ب) جرم مشخص

ج) یک سیستم بسته

د) یک سیستم مجزا

۳-۳-۳ قانون اول ترمودینامیک برای جریان یکنواخت :

√الف) شامل تمام انرژی های ورودی و خروجی حجم کنترل می شود

ب) عبارتست از توازن انرژی برای حجم مشخص از سیال

ج) بیانگر پایستگی تکانه ی خطی است.

د) اصولاً مرتبط به انتقال حرکت است

۱-٤-۳ معادله ی پیوستگی ممکن است به این صورت باشد:

الف) Q=PAV   ب) $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$ ج) √$P_1 A_1 V_1 = P_2 A_2 V_2$ د) $AV_1 = A_2 V_2$

۲-٤-۳ معادله ی پیوستگی

الف) محتاج است که قانون سوم نیوتن برای تمام نقاط سیال صادق باشد

ب) بیانگر ارتباط بین انرژی و کار است

ج) تکانه در واحدحجم بین دو نقطه سیال را بهم مرتبط می کند

د) در ارتباط با دبی جرمی جریان در امتداد لوله است √

۳-٤-۳ دو لوله ای به قطر ۵۰cm ، سرعت متوسط آب $^{m}/_{s}$ ۳ است دبی لوله برحسب متر مکعب در ثانیه برابر است با

√الف) ۵۸۹/۰ ب)۵۰/۱ ج)۳۵۶/۲ د)۷۱/٤

٤-٤-۳ معادله ی پیوستگی در جریان سیال حقیقی

√الف) بیانگر این است که دبی خالص ورودی به هر حجم کوچکی باید صفر باشد ب) تنها در هنگامی که پتانسیل سرعت وجود داشته باشد، صادق است ج) تنها برای جریان بی گردش بکار می رود

د) بیانگر این است که انرژی در امتداد خط جریان ثابت است.

۱-۵-۳ معادله ی Tds =(اتلاف) d محدود است به

الف) جریان ایزوتروپیک ب) جریان برگشت پذیر

ج) جریان بی دررو √د) جریان گاز کامل

۲-۵-۳ در یک فرآیند برگشت پذیر لازم است که :

الف) انتقال دما وجود نداشته باشد ب) قانون چسبندگی نیوتن صادق باشد ج)دمای سیستم و محیط برابر باشد

√د) در سیستم اصطکاک چسبندگی یا خشک وجود نداشته باشد .

۳-۵-۳ آنتروپی در فرآیند برگشت پذیر بدین صورت تعریف می شود.

الف) $ds = du + \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right)$

ب) $ds = \mathrm{Td}\int \mathrm{H}$

ج) $s = u + pv_s$

د)√ $ds = d\int H/T$

۱-۶-۳ بعد معادله ی ثابت = $\text{э} + P/\gamma + V^2/2g$ **برابر است:**

الف) $m.N/s$ **ب)N** **ج)** $m.N/kg$ **د)√** $m.N/N$

۲-۶-۳ کاری که مایع با استفاده از فشار انجام می دهد برحسب نیوتن ـ متر بر نیوتن عبارتست از

الف) Z **ب)P** **ج)√ P/γ** **د)** $v^2/2g$

۱-۷-۳ در معادله $\sum Fx = \rho Q(V_{xovt} - V_{zin})$ **کدام دو فرض از فرضهای زیر صادق است؟**

۱- سرعت درروی مقاطع پایان ثابت است **۲- جریان دائمی**

۳- جریان یکنواخت **٤- سیال بی اصطکاک**

الف)√ ۱و ۲ **ب) ۱و ٤** **ج) ۱و ۳** **د)۲و ٤**

۲– ۷–۳ ضریب تعیین تکانه با کدامیک از عبارتهای زیر بیان می شود

الف) $\frac{1}{A}\int_A \frac{V}{V} dA$

√ب) $\frac{1}{A}\int_A (\frac{V}{V})2dA$

ج) $\frac{1}{A}\int_A (\frac{V}{V})^3 dA$

د) $\frac{1}{A}\int_A (\frac{V}{V})^4 dA$

۳–۷–۳ سرعت روی یک سوم مساحت یک سطح صفر و در روی باقی مانده ی سطح یکسان می باشد. ضریب تقسیم تکانه برابر است با

الف) ۱   ب) ٤/ ۳   √ ج) ۳/ ۲   د) ۲

٤–۷–۳ برای زانویی °۹۰ که قطر آن ۲۰۰mm و فشار درون آن Mpa ۹۸/۰ است، مقدار نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن زانو در هنگامی که جریان از آن نمی گذرد برابر است با (برحسب KN):

الف) ۵/۶۱   √ب) ۵/۴۳   ج) ۸/۳۰   د) صفر

۵–۷–۳ زانویی 90° با قطر ۳۰cm آب را با سرعت $^{m}/_{s}$ ۵ و فشار ۳۵kpa– انتقال می دهد . مولفه ی نیروی لازم بر حسب نیوتن برای این که زانو درجای خود نگه داشته شود برابر است با:

الف) صفر ب) ۵/۷۰ ج)√ ۱٤۱ د) ۵۱۵

۶–۷–۳ توان مفید در فواره ی آبی که مساحت مقطع آن m^2 ۰/۰۰٤ و سرعت $^{m}/_{s}$ ۲۰ می باشد ، برابر است با :

الف) ۴۹۵/۰ ب)√ ۰/۱۶ ج) ۲/۱۷ د) ۳

فصل ۴

پس از مطالعه ی کامل این فصل باید بتوانید یکاها و ابعاد کمیت های فیزیکی مورد استفاده در مکانیک سیالات را تعریف کنید رابطه های مربوط را بنویسید و همچنین پارامترهای بی بعد مهم در مکانیک سیالات را با فرمولهای مربوطه تعریف و در حل مسایل از آنها استفاده کنید.

٤-١ مقدمه

پارامترهای بی بعد درک و فهم را از پدیده های ناشی از جریان سیال عمیق تر می کند. در بالا بر هیدرولیکی، نسبت قطر پیستونها که عددی بدون بعد است مزیت مکانیکی را بدست می دهد . همچنین عددهای بدون بعدی موجب آن می شود که بتوان نتایج آزمایشگاهی را برای شرایطی که با شرایط آزمایشگاهی متفاوت باشند نیز بکار برد. بسیاری از پارامترهای بی بعد نسبت دو نیروی سیال است.

مقدار نسبی این نسبت ها بیانگر اهمیت نسبی یکی از نیروها به دیگری است. اگر در مورد خاصی بعضی از نیروها خیلی بزرگتر از دیگر نیروها باشند، اغلب می توان از اثر نیروهای کوچکتر چشم پوشی کرد و پدیده مزبور را بر حسب نیروهای عمده بررسی کرد. دراین صورت می توان برای حل مساله از روشهای ازمایشگاهی مناسب و ریاضی آسان تری استفاده کرد. در حالتی که چندین نیرو با ارزش یکسانی وجود داشته باشند مانندنیروهای لختی، چسبنده و گرانشی از روشهای خاصی استفاده می شود. در این فصل راجع به اهمیت پارامترهای بی بعد می پردازیم. ابتدا کمیت های مهمی که در مکانیک سیالات بکار می رود با نماد و ابعاد آنها ارائه می شود.

۲–۴ یکاها و ابعاد

می دانیم ابعاد مکانیکی عبارتست از نیرو، طول و جرم و این ابعاد از قانون دوم نیوتن بایکدیگر ارتباط دارند.

$$F=ma \quad (٤\text{-}١)$$

پیش از این با یکاهای نیرو و جرم آشنا شدیم. برای تمام دستگاههای فیزیکی ضروری است که حداقل دو بعد در نظر گرفته شود. یکی در ارتباط با الکترومغناطیس ودیگری با اثرات گرمایی. برای کار تراکم پذیر، ضرورتی ندارد یکای گرمایی را منظور کنیم زیرا معادلات حالت ,ارتباط بین فشار، چگالی و دما را بیان می کند.

شکل ابعادی قانون دوم نیوتن به صورت زیر است.

$$F = MLT^{-2}$$

(۲-٤)

از این معادله ملاحظه می شود که تنها سه بعد مستقل وجود دارد که در آن F بعد نیرو ، M بعد جرمL , بعد طول و T بعد زمان است. در جدول (١-٤) بعضی از کمیتهای مورد استفاده در مکانیک سیالات با نماد و رابطه ی ابعادی آنها آمده است.

جدول ۱–٤ کمیت های فیزیکی مورد استفاده در مکانیک سیالات

کمیت	نماد	ابعاد
طول	l	L
زمان	t	T
جرم	m	M
نیرو	F	MLT^{-2}
سرعت	V	LT^{-1}
شتاب	a	LT^{-2}
سطح	A	L^2
دبی تخلیه	Q	L^3T^{-1}
فشار	ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
گرانی	g	LT^{-2}
چگالی	ρ	ML^{-3}
وزن مخصوص	γ	$ML^{-2}T^{-2}$
چسبندگی دینامیکی	μ	$ML^{-1}T^{-2}$
چسبندگی سینماتیکی	ν	L^2T^{-1}
کشش سطحی	δ	MT^{-2}
مدول کشسانی حجمی	K	$ML^{-1}T^{-2}$

۳–۴ پارامترهای بی بعد

در ارتباط با داده های آزمایشگاهی ، پنج پارامتر بی بعد: ضریب فشار، عدد رینولدز، عدد فرود ,عدد وبر و عدد ماخ بااهمیت اند. در بخش راجع به این پنج پارامتر بحث می کنیم و در فصلهای بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد.

الف) ضریب فشار

ضریب فشار برابر است با نسبت فشار به فشار دینامیکی:

$$\Delta p / (\rho V^2 / 2) \qquad (۳-٤)$$

اگر این مقدار را در مساحت سطح ضرب کنیم نتیجه برابر با نسبت نیروی فشار به نیروی

لختی است. یعنی $\left(\rho V^2 / 2\right) A$ برابر با نیروهای لازم جهت کاهش سرعت تا نزدیکی صفر خواهد شد.

اما معادله دارسی ـ وایسباخ رابطه ای بین h1 اتلاف با طول L و قطر Dو سرعت V

است ,این معادله به صورت زیر است:

$$h_1 f \frac{L}{D} V^2 \big/ 2g$$

(٤–٤)

اگر به صورت مجهول معادل $f\,{}^{L}\!/_{D}$ را بدست آوریم:

$$f\,{}^{L}\!/_{D} = {}^{h_1}\!/_{V^2 / 2g}$$

(٤–٥)

ملاحظه می شود که سمت راست رابطه ی بالا همان ضریب فشار است در

صورتی که آن را بر γ تقسیم می کردیم. پس نتیجه می گیریم $f\,{}^{L}\!/_{D}$ برابر با ضریب

فشار است. در این رابطه f ضریب اصطکاک بدون بعد می باشد.

ب) عدد ماخ

اگر K برابر مدول حجمی کشسانی باشد، می دانیم سرعت صورت دریک مایع از رابطه ی $\sqrt{K/\rho}$ بدست می آید. از سوی دیگر این سرعت برابر است با $C = \sqrt{KRT}$ که در آن K ضریب گرمای ویژه و T دمای مطلق گاز کامل می باشد. نسبت V/C یا $V\sqrt{K/\rho}$ را عدد ماخ می گویند و آن سنجه نسبت نیروهای لختی به نیروهای کشسانی است.

اگر V/C را مجذور کنیم و صورت و مخرج این کسر را در $\rho A/2$ ضرب کنیم، آنگاه صورت کسر جدید برابر با نیروی دینامیکی و مخرج برابر نیروی دینامیکی در جریانی که سرعت صوت دارد، خواهد شد.

همچنین می توان نشان داد که عدد ماخ سنجه نسبت انرژی جنبشی جریان به انرژی داخلی سیال است. اثرات عدد ماخ در جریان گازهایی که افت فشار زیادی دارند (یعنی به هنگامی که عدد ماخ نزدیک به یک است) می تواند اهمیت زیادی داشته باشد. همچنین اگر سرعتها نزدیک یا بیشتر از سرعت صوت باشد، این عدد مهمترین ارتباطی است.

ج) عدد رینولدز

نسبت $\mathrm{VD}\,\rho/\mu$ را عدد رینولدز می گویند و برابر با نسبت نیروهای لختی به نیروهای چسبنده است . عدد رینولدز بحرانی بیانگر نوع جریان در لایه های مرزی و اطراف جسم غوطه ور می باشد. در جریانهای تراکم پذیر، معمولاً عدد ماخ مهمتر از عدد رینولدز است.

د) عدد فرود

نسبت $\mathrm{V}\sqrt{ge}$ را عدد فرود می نامند. اگر این نسبت را مجذور و صورت و مخرج کسر را در ρA ضرب کنیم نتیجه برابر است با نسبت نیروی دینامیکی به وزن می باشد در جریان مایعاتی که سطح آزاد دارند، ماهیت جریان (تند یا کند) بستگی به این دارد که عدد فرود بزرگتر یا کمتر از یک باشد.

این عدد درمحاسبات جهش هیدرولیکی ، طراحی سازه های هیدرولیکی و کششی مفید می باشد.

هـ) عدد وبر

این عدد برابر با $V^2\ell\,\rho/\delta$ است و بیانگر نسبت نیروهای لختی به نیروهای کشش سطحی می باشد. در سطح مشترک گاز – مایع یا مایع به مایع عدد وبر اهمیت دارد.

۴–۴ چکیده

ابعاد مکانیکی نیرو F و جرم M و طول t است رابطه ی بین آنها از قانون دوم نیوتن مشخص می شود: F=ma

بنابراین رابطه ی ابعادی نیرو برابر با MLT^{-2} می باشد. در جدول (۱–٤) دیگر کمیت های مهم فیزیکی که در مکانیک سیالات مورد استفاده می باشند,آمده است.

پنجم پارامتر بدون بعد مهم در مکانیک سیالات عبارتند از

(آ) ضریب فشار $\Delta P/(\rho v^2\!/2)$

(ب) عدد ماخ $V\sqrt{K/\rho}$

(ج) عددرینولدز $VD\rho/\mu$

(د) عدد فرود $V/\sqrt{ge}$

(هـ) عدد وبر $V^2\ell\,\rho/\delta$

تست های فصل ٤

١-٢-٤ یک ترکیب بدون بعد از $\Delta P, \rho, \ell, Q$ کدام است؟

الف) $\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}\frac{Q}{L^2}$ ب) $\Delta P\,\ell Q/P$ ج) $PQ/\Delta P\ell^2$ د) √ $\sqrt{\frac{\ell}{\Delta P}}\frac{Q}{L^2}$

١-٣-٤ کدام عبارت بیانگر عدد رینولدز است ؟

الف√) $u\ell/V$ ب) $VD\mu/p$ ج) V/gD د) $\frac{\Delta P}{PV^2}$

٢-٣-٤ ضریب فشار را می توان به کدام صورت زیر نوشت ؟

الف) $\Delta P/\gamma H$ ب) $\Delta P/pv^2/2$ ج√) $\frac{\Delta P}{\ell\mu V}$ د) $\Delta P\frac{P}{\mu^2\ell^4}$

٣-٣-٤ ضریب فشار برابر است با نسبت نیروهای فشاری به

الف) نیروهای چسبنده √ ب) نیروهای لختی

ج) نیروهای گرانی د) نیروهای کشش سطحی

٤-٣-٤ در جریان آرام بین دو صفحه ی موازی کدام دو نیرو با اهمیت تراند؟

الف) لختی و چسبنده

ب)فشاری و لختی

ج) گرانی و فشار

√د) چسبنده و فشار

فصل ۵

مقاومت سیال

۵-۱ مقدمه

در فصل معادلات بنیادی و مهم در تجزیه وتحلیل جریان سیالات راارائه کردیم و در آنجا فرض کردیم که سیال بدن اصطکاک باشد.در این فصل راجع به سیالات واقعی بحث خواهیم کرد. یعنی وضعیتی را مطرح می کنیم که بازگشت ناپذیری عاملی مهم باشد و چسبندگی سیال عامل ایجاد برگشت ناپذیری و اتلاف خواهد بود. بدون چسبندگی در یک سیال, هیچ مقاومتی مشاهده نخواهد شد. حالتهای آسان تری چون جریان دائمی ، آرام را ابتدا بررسی می کنیم و سپس مقاومت در مقابل جریان دائمی، یکنواخت، تراکم ناپذیر در کانالهای باز و بسته مطرح خواهد شد. و سرانجام بخشی به پدیده انتقال اختصاص داده خواهد شد.
معادلات حرکت یک سیال واقعی را می توان از اثر نیروهای وارد بر جزء کوچکی از سیال که شامل تنشهای برشی ناشی از حرکت سیال و چسبندگی است ، بدست آورد.
چگونگی تعیین این معادلات را که معادلات ناویر ـ استوکس می نامند، از سطح درس بالاتری باشد و مطرح نمی شود. اما با روش آسانی می توان چنین گفت که اگر قانون اول نیوتن را در مورد چسبندگی (درک معادله ۱-۱) در جریان آرام یک بعدی را به جریان سه بعدی تعمیم دهیم، داریم:

$$\delta xy = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad , \quad \delta y\Im = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial \Im}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad , \quad \delta\Im x = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \Im}\right) \qquad (۵-۱)$$

سه رابطه بالا را قانون چسبندگی استوکس می نامند. در این سه رابطه زیرنویس اول بیانگر تنش برشی در جهت عمود بر صفحه ای است که مولفه ی برشی درآن وجه عمل می کند و

زیرنویس دوم جهت مولفه ی برشی را مشخص می کند.

در فصل ۳ به هنگام بحث راجع به معادلات اویلر و انرژی ، $\Im$ را مختص عمودی در نظر گرفتیم و بنابراین $\Im$ اندازه ای از انرژی پتانسیل در واحد وزن بود.در این فصل سیستم مختصات را راستگرد فرض می کنیم تا محاسبه آسان شود. می دانیم نیروی گرانی همواره رو به پایین عمل می کند، بنابراین b را به عنوان جهتی در نظر می گیریم که به سمت بالا مثبت باشد و $\partial h/\partial x$ کسینوس زاویه ی بین محور x و محور h خواهد بود. همین موضوع را می توان برای y و نیز عمل کرد. اگر معادلات ناویرـ استوکس را محدود به سیالات تراکم ناپذیر کنیم، داریم:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\gamma h\right)+\nu\nabla^2 u=\frac{du}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\gamma h\right)+\nu\nabla^2 v=\frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\gamma h\right)+\nu\nabla^2 w=\frac{dw}{dt}$$

(۵-۲)

در معادلات , V چسبندگی سینماتیکی است و ثابت فرض می شود، d/dt مشتق گیری نسبت به حرکت است.

$$\frac{d}{dt}=u\,\partial/\partial x+v\,\partial/\partial y+w\,\partial/\partial\Im+\partial/\partial t$$

(۵-۳)

و عملگر ∇^2 چنین تعریف می شود:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\Im^2}$$

(۵-٤)

برای سیال ناچسبنده، معادلات ناویر استوکس به معادلات اویلر برای حرکت سه بعدی تبدیل می شود.

اگر جریان یک بعدی را برای سیال واقعی در جهت ℓ وقتی که h درجهت عمودی و روبه بالا و y عمود بر ℓ باشد (یعنی $\frac{\partial u}{\partial \ell}=0\ ,\ w=0\ ,\ v=0$) (شکل ۱-۵) آنگاه در نظر بگیریم معادلات ناویر ـ استوکس به صورت زیر خواهند آمد:

$$1\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \ell}(p+\gamma h)+\frac{u}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{du}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(p+\gamma h)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(p+\gamma h)=0$$

(۵-۵)

و برای جریان دائمی داریم

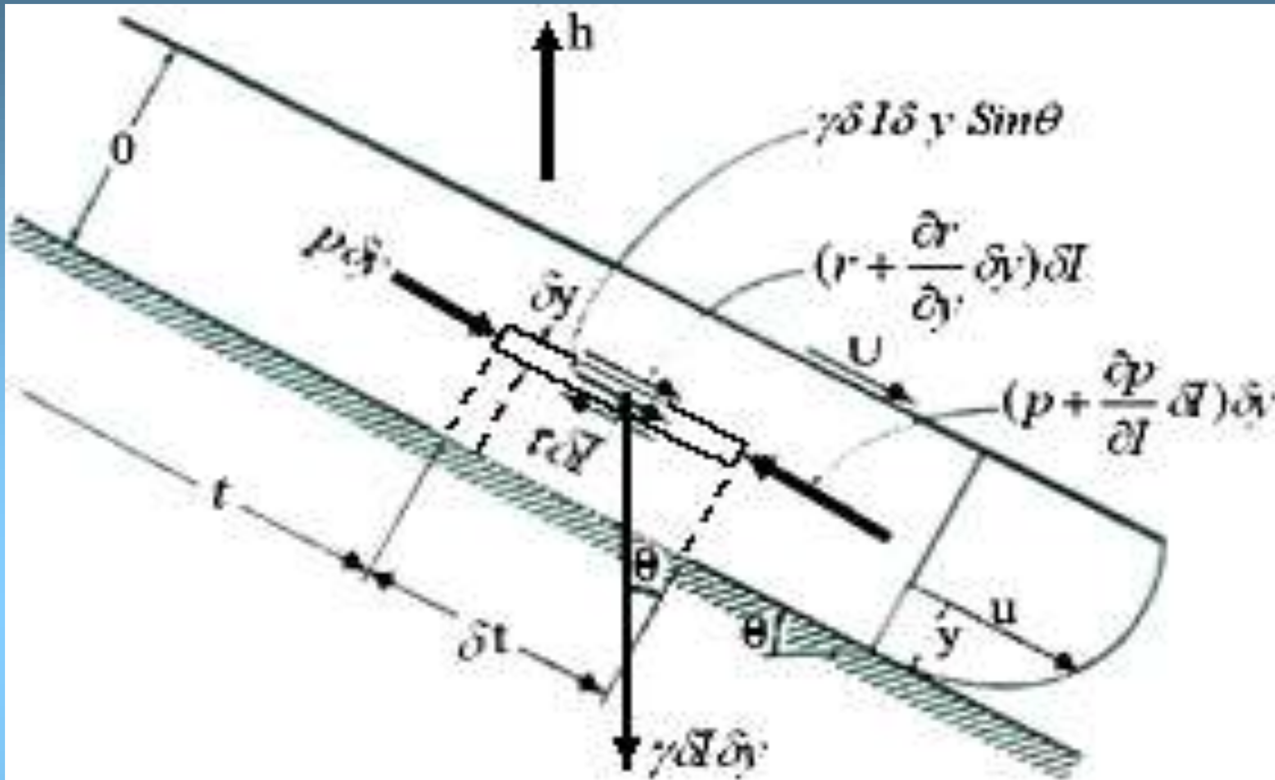
$$\frac{\partial}{\partial \ell}(p+\gamma h)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

و $(p+\gamma h)$ فقط تابعی از ℓ خواهد بود. از آنجا که u فقط تابعی از y و برای جریان یک بعدی است، $\delta=\mu \,{}^{du}\!/_{dy}$ نتیجه می شود:

$$\frac{d\delta}{dy}=\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)$$

(۵-۶)

شکل ۱-۵ جریان سیال بین صفحات موازی شیبدار با صفحه ی فوقانی در حال حرکت



۲-۵ جریان آرام، تراکم ناپذیر ودائمی بین صفحات موازی

فرض می کنیم جریان آرامی بین دو صفحه ی موازی شیبدار به صورت دائمی جاری و صفحه فوقانی سرعت ثابت U داشته باشد (شکل ۱-۵) در این شکل صفحه ی فوقانی موازی با جهت سیال حرکت دارد بنابراین درجهت تغییر فشار وجود دارد. اکنون لایه ی نازکی با پهنای واحد در مسیر جریان در نظر می گیریم.در جریان یکنواخت این لایه با سرعت ثابت U حرکت می کند:

$$p\delta y-\left(p\delta y+\frac{dp}{dt}\delta\ell\,\delta y\right)-\varsigma\delta\ell+\left(\varsigma\delta\ell+\frac{d\varsigma}{dy}\delta y\,\delta\ell\right)$$

$$+\gamma\delta\ell\,\delta y\ \sin\theta=0$$

می دانیم $\theta = -\partial h/\partial \ell$ s و رابطه ی بالا برابر عنصر حجم تقسیم می کنیم تا بدست آید:

$$\frac{d\delta}{dy} = \frac{\partial}{\partial \ell}(p+\gamma h)$$

(۵–۷)

اما u تابعی از y است بنابراین $\partial\varsigma/\partial y = d\varsigma/dy$ می باشد، و $p+\gamma h$ از نظر مقدار در جهت y تغییر نمی کند (زیرا شتاب وجود ندارد) ، $p+\gamma h$ فقط تابعی از ℓ است. پس

$$\partial(p+\gamma h)/\partial \ell = d(p+\gamma h)/d\ell$$

در نتیجه معادله ی (۵–۷) به صورت زیر در می آید:

$$d\varsigma/dy = \mu\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)$$

(۵–۸)

از معادله ی بالا نسبت به y انتگرال می گیریم.

$$\mu\frac{du}{dy} = y\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h) + A$$

بار دیگر انتگرال می گیریم تا بدست آید

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$$

(۵–۹)

توجه داریم B,A دو ثابت انتگرال گیری است. با جایگزینی (Y=0,U=0) و U=u,y=a در رابطه ی (۵–۹) نتیجه می شود:

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)a^2 + \frac{Aa}{\mu} + B$$ و B=0

سر انجام با حذف A و B در معادله ی (۵–۹) بدست می آید:

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)(ay - y^2)$$

(۵–۱۰)

اگر صفحات افقی باشند ، دیگر گرادیان ناشی از فشار یا ارتفاع وجود ندارد، یعنی توزیع فشار هیدرولیکی $p+\gamma h=c$ است و توزیع سرعت به خط مستقیم خواهد بود. اما اگر صفحات شیبدار ولی ثابت باشند U=0 است و در نتیجه توزیع سرعت سهوی شکل خواهد شد.
برای تعیین مقدار دبی خروجی در سطح مقطع ثابت کافی است از معادله ی (۵–۱۰) نسبت به y انتگرال بگیریم.

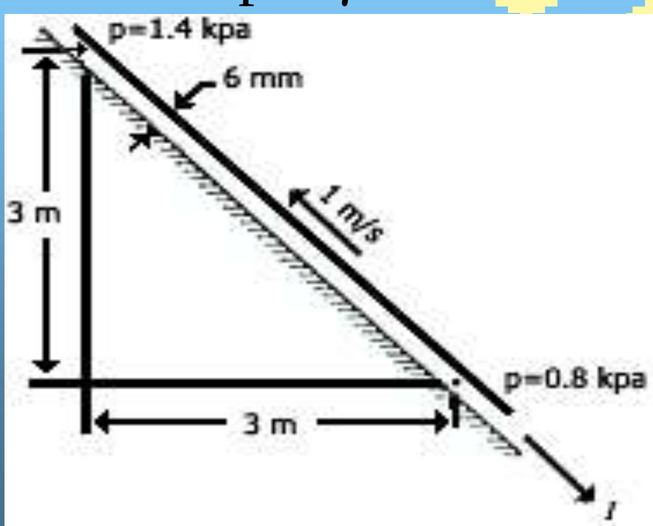
$$Q=\int_{\circ}^{a} u\,dy=\frac{Ua}{2}-\frac{1}{12\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)a^{3}$$ (۵–۱۱)

و توجه داریم در حالت کلی، سرعت پیشینه در صفحه ی میانی نیست.

مثال ۱

در شکل (۵–۲) ، یک صفحه نسبت به دیگری حرکت می کند. $\mu=0/08\,Pa.s$ و $\rho=850\,{}^{ky}\!/_{m^{3}}$ ، توزیع سرعت، دبی خروجی و تنش برشی وارد بر صفحه ی فوقانی را محاسبه کنید.
حل در صفحهٔ فوقانی داریم :

$p+\gamma h$ =۱٤۰۰+۸۵۰×۸۰۶/۹×۳=۲۶٤۵۰ pa



شکل ۵–۲ جریان روی صفحات شیبدار

و در نقطه پایینی: $p+\gamma h$ =۸۰۰pa

بنابراین

$$\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)=\frac{800-26405}{3\sqrt{2}}=-6035\ N/m^3$$

با توجه به شکل مزبور $U=-1\,m/s$ و a=۰۰۶/۰m است بنابراین از معادله ی (۵-۱۰) داریم:

$$U=\frac{(-1)(y)}{0/006}+\frac{6035}{2(0/08)}(0/006y-y^2)$$

$$U=59/646y-37718y^2$$

سرعت پیشینه هنگامی پیش می آید که $du/dy=0$ باشد و یا y=۰۰۰۷۹/۰ در نتیجه Umax =۰۲۳۶/۰ m/s خواهد شد.

Q مقدار دبی خروجی در واحد پهنا برابر است با

$$Q=\int_0^{0/006} udy=29/832y^2-12573y^3]_0^{0/006}=0/00164\ m^2/s$$

که رو به بالا می باشد. اکنون تنش برشی بر صفحه ی فوقانی را محاسبه می کنیم.

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0/006}=59/646-75436y\Big|_{y=0/006}=-392/97s^{-1}$$

و

$$\varsigma=\mu\frac{du}{dy}=0/08\ (-392/97)=-31/44pa$$

لذا نیروی برشی در صفحه ی فوقانی برابر با ٤٤/٣١pa است که در مقابل حرکت صفحه مقاومت می کند.

٣-٥ جریان آرام در لوله ها و در فاصله ی بین دولوله ی هم محور

برای جریان آرام، تراکم ناپذیر و یکنواخت درون لوله یا در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور یک جزو استوانه ای را مطابق شکل (٣-٥) به عنوان جسم آزاد در نظر می گیریم. شتاب را برابر صفر فرض می کنیم و معادله ی حرکت را در جهت ℓ بکار می بریم:

$$2\pi r\delta r p-(2\pi r\delta r p+2\pi r\delta r\frac{dp}{d\tau}\delta\ell)+2\pi r\delta\ell\varsigma$$

$$-\left[2\pi r\delta\ell\varsigma+\frac{d}{dr}(2\pi r\delta\ell\varsigma)\delta r\right]+\gamma 2\pi r\delta\ell\delta r\,Sin\theta=0$$

می دانیم $\sin\theta=-{}^{dh}/_{d\ell}$ و رابطه ی بالا بر حجم جسم آزاد یعنی $(2\pi r\delta r\delta\ell)$ تقسیم می کنیم. در نتیجه بدست می آید:

$$\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\varsigma r)=0$$

(٥-١١)

اما $d(p+\gamma h)/d\ell$ تابع r نیست، بنابر این معادله بالا را در $r\delta r$ ضرب و نسبت به r انتگرال می گیریم تا معادله ی حرکت به صورت زیر در آید:

$$\frac{r^2}{2}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)+\varsigma r=A$$

(۵-۱۲)

که در آن A مقدار ثابت انتگرال گیری است. برای یک لوله با قاعده ی مستدیر شکل این معادله در صورتی که r=0 باید صدق کند پس A=0 با جایگزینی

$$\delta=-\mu\frac{du}{dr}$$

در رابطه ی (۵-۱۲) داریم (توجه شود که علامت منفی ضروری است زیرا u با افزایش r کاهش می یابد):

$$du=\frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)rdr-\frac{A}{\mu}\frac{dr}{r}$$

و با انتگرال گیری مجدد رابطه ی برای u بدست می آید.

$$u=\frac{r^2}{4\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)-\frac{A}{\mu}\ell nr+B$$

(۵-۱۳)

حال اگر سیال در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور جریان داشته باشد، می دانیم اگر r=b (شعاع داخلی لوله) u=0 و به اجزای r=a و u=0 خواهد بود.

بنابراین با این شرایط در معادله برای A و B بدست می آید و سرانجام با جایگزینی در معادله ی (۵-۱۳) نتیجه می شود:

$$u=-\frac{1}{4\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)(a^2-r^2+\frac{a^2-b^2}{\ell n\, b/a}\ell n\, a/2)$$

(۵-۱٤)

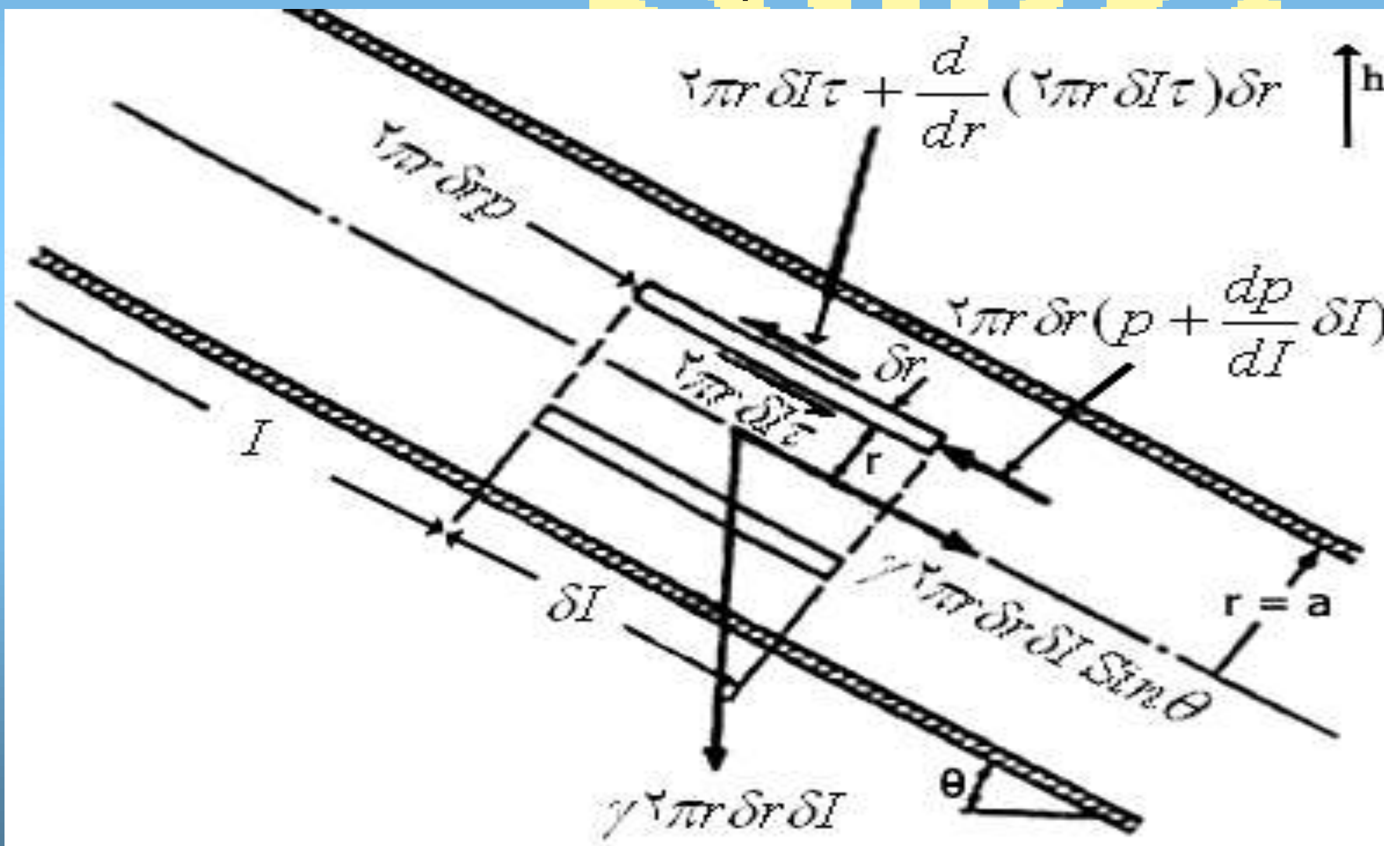
معادله ی (۵-۱٤) همان معادله ی سرعت سیال در فاصله ی بین دو لوله محور است.

اکنون Q دبی خروجی را برای این حالت محاسبه می کنیم (شکل ٤-۵):

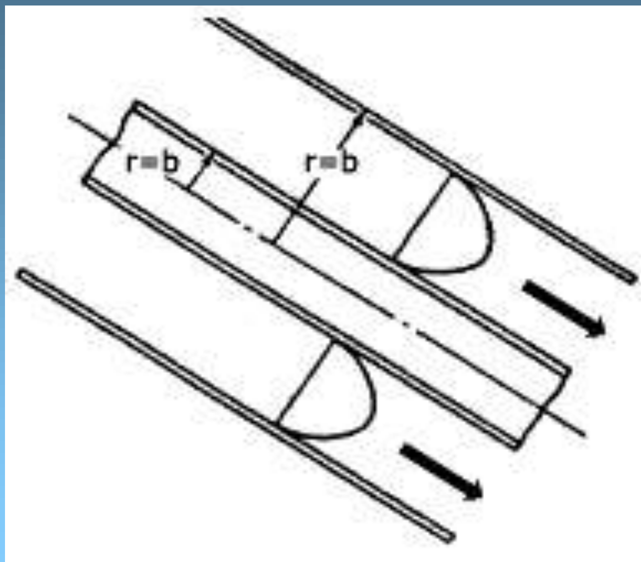
$$Q=\int_b^a 2\pi r u\,dr=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)\left[a^4-b^4+\frac{(a^2-b^2)^2}{\ell n\, b/a}\right]$$

(۵-۱۵)

شکل ۳-۵ نمودار آزاد یک جزء استوانه ای در جریان آرام درون لوله ی شیبدار



شکل ٤–۵ جریان در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور



لوله ای با قاعده ی مستدیر

برای لوله های معمولی در معادله ی (۵–۱۳) A=0 است و به ازای r=a ، u=0 خواهد شد:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

(۵–۱۵)

و این سرعت سیال درون لوله ای با قاعده ای به شعاع a است.

به ازای r=0، سرعت بیشینه umax بدست می آید:

$$u\max = -\frac{a^2}{4\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

(۵–۱۶)

چون توزیع سرعت سهمی وار است، حجم آن برابر با نصف حجم استوانه محاط بر آن است.

بنابراین سرعت متوسط آن برابر با نصف بیشینه سرعت خواهد شد:

$$V = \frac{a^2}{8\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

(۵–۱۷)

و مقدار دبی خروجی برابر با $V\pi a^2$ است:

$$Q = -\frac{\pi a^2}{8\mu}\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)$$

(۵-۱۸)

مورد خاص: لوله های افقی

مقدار دبی خروجی را می توان با انتگرال گیری از u روی سطح مزبور بدست آورد (برای لوله های افقی ثابت= h است):

$$Q = \int_0^a u\,2\pi r\,dr$$

(۵-۱۹)

با توجه به این که افت فشار $\Delta\rho$ در طول L از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\Delta\rho}{L} = -\frac{d\rho}{d\ell}$$

(۵-۲۰)

و اگر قطر لوله برابر با D باشد داریم:

$$Q = \frac{\Delta\rho\pi D^4}{128\ \mu L}$$

(۵-۲۱)

و رابطه ی سرعت متوسط با دبی خروجی به صورت زیر است:

$$V = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

(۵-۲۲)

اگر معادله ی را برای افت فشار حل کنیم، نتیجه می شود:

$$\Delta P = \frac{128 \quad \mu L Q}{\pi D^4}$$

(۵-۲۳)

از رابطه ی بالا مشاهده می شود که افت فشار با چسبندگی ، طول و دبی خروجی نسبت مستقیم و با توان چهارم قطر لوله نسبت عکس دارد. توجه داریم که زبری لوله در این معادلات مطرح نشده است. معادله ی(۵-۲۲) را در سال ۱۸۳۹ هاگن به صورت تجربی بدست آورد و چندین سال بعد، ویدمآن در سال ۱۸۵۶ آن را به روش تحلیلی نتیجه گرفت. نتایج بدست آمده از معادله ی (۵-۱۲) تا (۵-۲۲) برای دهانه ی ورودی لوله معتبر نیست. اگر جریانی از مخزنی از مدخلی کاملاً مدور وارد لوله ای شود، سرعت در ابتدا یکنواخت خواهد بود. اثر تنش برشی باعث کاهش سرعت سیال در نزدیکی جداره می شود، L طول گذار برای ایجاد سرعت سهموی تابع از عدد رینولدز است.لانگهار برای نخستین بار رابطه ی نظری به صورت زیر بدست آورد:

$$L'/D = 0/058\, R$$

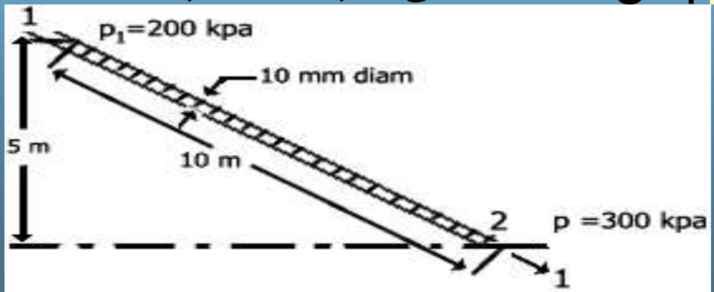
(۵-۲٤)

که امروزه با مشاهدات عملی توافق دارد و آن را رابطه ی لانگهار می نامند.

مثال ۲

جهت جریان را در لوله ی شیبدار شکل (۵-۵) تعیین کنید.

در صورتی $\gamma = 8000 N/m^3$, $\mu = 0/04 Pa.s$ باشد. همچنین مقدار کمی جریان را بر حسب لیتر در ثانیه و عدد رینولدز جریان را تعیین کنید.



شکل ۵-۵

حل

در نقطه ی ۱:

$$P+\gamma h=200000+(8000)(5)=240\ kPa$$

در نقطه ی ۲:

$$p+\gamma h=300kPa$$

اگر مبنای ارتفاع را در نقطه ی ۲ بگیریم ، جریان از ۲ به ۱ است، زیرا انرژی در نقطه ی ۲ بیشتر است.

اکنون مقدار جریان را محاسبه می کنیم:

$$\frac{d}{d\ell}(p+\gamma h)=\frac{300000-240000}{10}=6000\ {}^{N}\!/\!_{m^2}$$

توجه داریم مقدار از ۱ به ۲ مثبت است. با جایگزینی در معادله ی (۱۸–۵) بدست می آ

$$Q=-\frac{\pi(0/005)^4}{8(0/04)}$$ ۶۰۰۰ =- ۰۰۰۰۰۳۶۸/۰ $^{m^3}\!/\!_{s}$ = -۰۳۶۸/۰ $^{L}\!/\!_{s}$

و سرعت متوسط از معادله ی $Q=V\pi a^2$ محاسبه می شود:

$$V=\frac{0/0000368}{\pi(0/005)^2}$$ =۴۶۸۶/۰ $^{m}\!/\!_{s}$

اکنون برای محاسبه ی عدد رینولدز داریم:

$$R=VD\ {}^{\rho}\!/\!_{\mu}=\frac{(0/4686)(0/01)}{(0/04)}\left(\frac{8000}{9/806}\right)=95/6$$

۵-٤ نیروی کشش بر اجسام غوطه ور

نیروی کششی مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال متحرک به جسم وارد می شود و موازی سرعت نزدیکی نسبی است. نمودارهای ضریب کشش کره ودیسک های سندیر در شکل (۵-۶) ارائه شده است و در شکل (۵-۷) نمودار ضریب کشش برای استوانه ی مستدیر با طول بینهایت نسبت به عدد رینولدز رسم شده است . در هر حال CD ضریب کشش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{نیروی کشش} = C_D A \frac{\rho U^2}{2} \qquad (۵-۲۵)$$

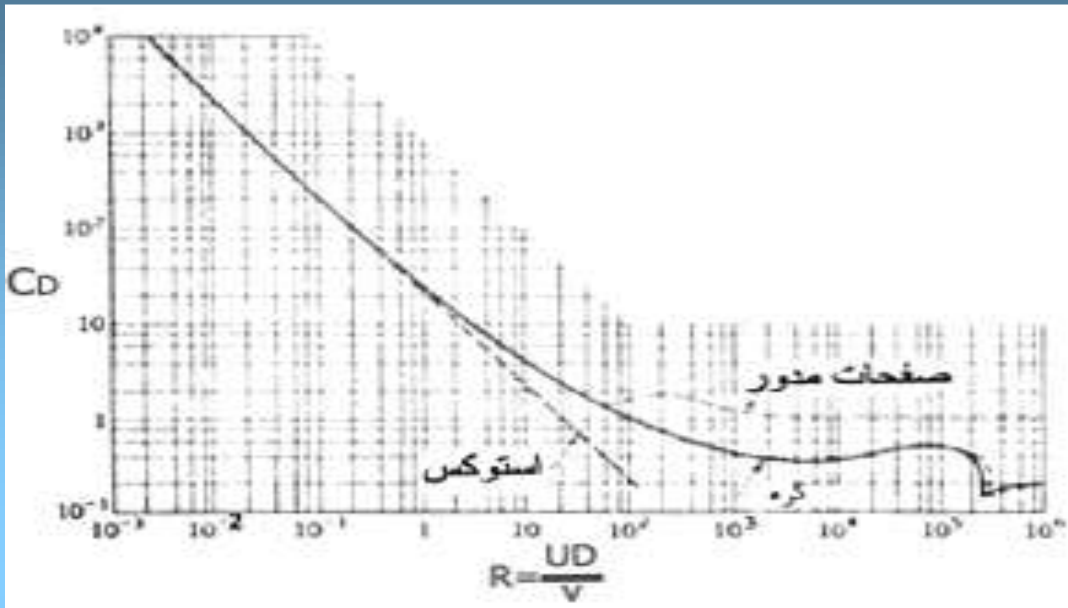
که در آن A تصویر سطح جسم روی صفحه ای عمود بر مسیر جریان است. در جدول (۵-۱) ضرایب کشش نمونه ای برای چندین استوانه داده شده است. در حالت کلی این تصاویر برای آن برد اعداد رینولدز داده شده است که در آن ضرایب کشش با عدد رینولدز اندکی تغییر میکند.

نمودار نیروی کشش و نیروی بالابر برای یک سطح آیرودینامیکی در شکل (۵-۸) دیده میشود. نیروی بالابر مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال به جسم تحت زاویه ی قائم نسبت به سرعت نزدیک نسبی وارد می شود. ضریب نیروی بالابر CL به صورت زیر تعریف می شود.

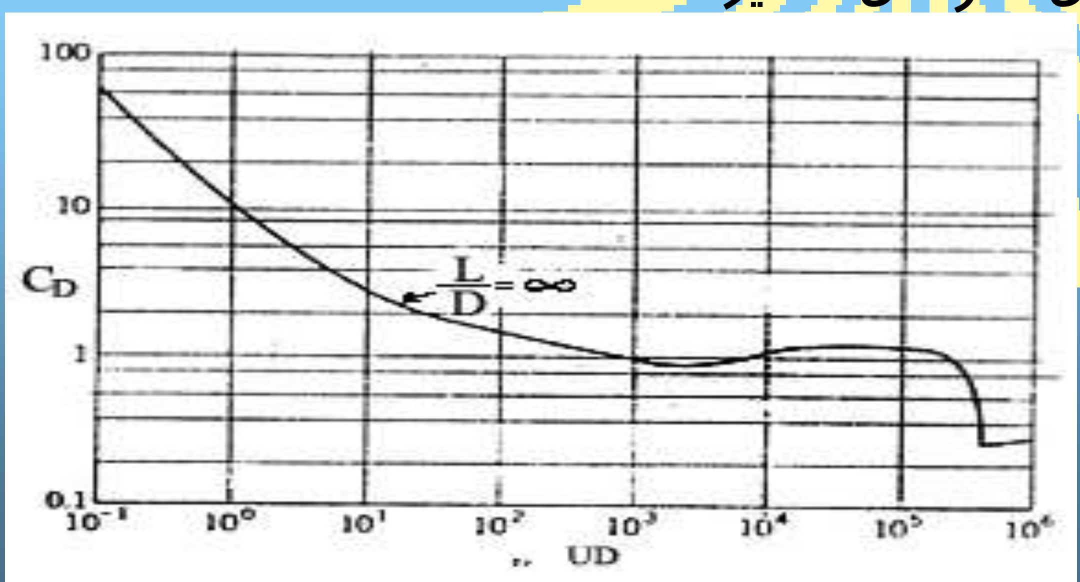
$$\text{نیروی بالابر} = C_L A \frac{\rho U^2}{2} \qquad (۵-۲۶)$$

که در آن Aمربوط به طول قوس ضربدر طول بال برای نیروی کشش و نیروی بالابر در سطح آیرودینامیکی است.

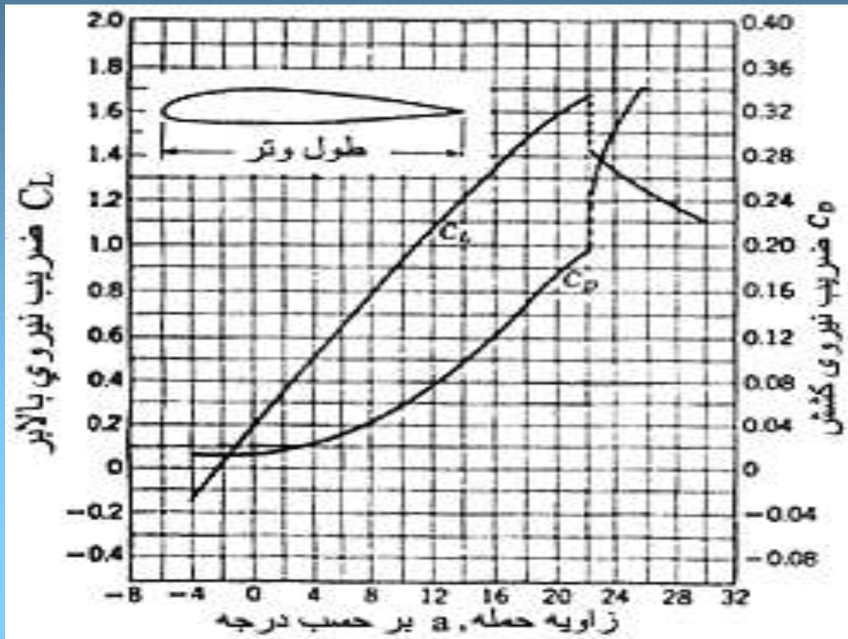
شکل (۶-۵) ضرایب نیروی کشش برای کره ودیسکهای سندیر



شکل (۷-۵) ضرایب نیروی کشش برای استوانه ی ستدیر



شکل ۸-۵ ضرایب نیروی کشش ونیروی بالابر برای تشکیل آیرودینامیکی



جدول ۱-۵ ضرایب نیروی کشش برای انواع استوانه ها در دو بعدی

_ _ _ _ _؟_ _ _ _

اثر تراکم پذیری بر نیروی کشش

در تعیین کشش براي جریان گاز با سرعت بالا، اثر تراکم پذیري كه با عدد ماخ بیان مي شود ، مهم تر از عدد رینولدز است. M عدد ماخ نسبت سرعت سیال به سرعت صوت در سیال تعریف مي شود. اگر جریان در سرعت بحراني C باشد، همان سرعت موج صوت را دارد و بنابراین امواج فشاري كوچكي نمي توانند به سوي بالا دست جریان حركت كنند.

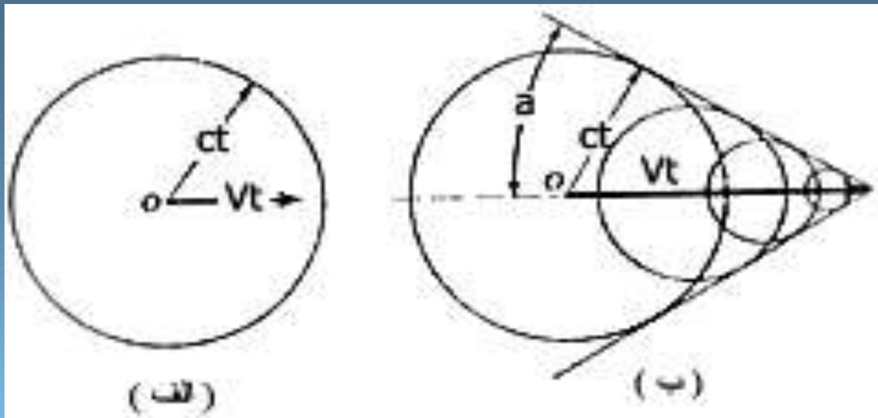
در این شرایط M=1 است و اگر M بزرگتر از ۱ باشد، جریان مافوق صوت و اگر M كمتر از ۱ باشد جریان مادون صوت است. هر نوع اغتشاش كوچكي با سرعت صوت انتشار مي یابد . به عنوان مثال اغتشاش در هواي ساكن به شكل موج فشاري كروي به طرف خارج حركت مي كند

در حالی که منبع تولید اغتشاش با سرعتی کمتر از c حرکت می کند. در شکل (۹-۵) این موضوع نشان داده شده است. چون موج جلوتر از جسم متحرک قرار گیرد . مادامی که جسم فاصله ی Vtرا طی می کند ، موج اغتشاش به مقدار r=ctازنقطه ی O دور شده است. در تمام موارد مادون صوت، این امواج همواره داخل اولین موج کروی ایجاد شده قرار می گیرند. اما در حرکت مافوق صوت جسم سریعتر از امواج کروی ارسالی حرکت می کند و در نتیجه امواج مخروطی شکل با یک راس در جسم ایجاد می شود. نصف زاویه ی α را زاویه ماخ گویند.

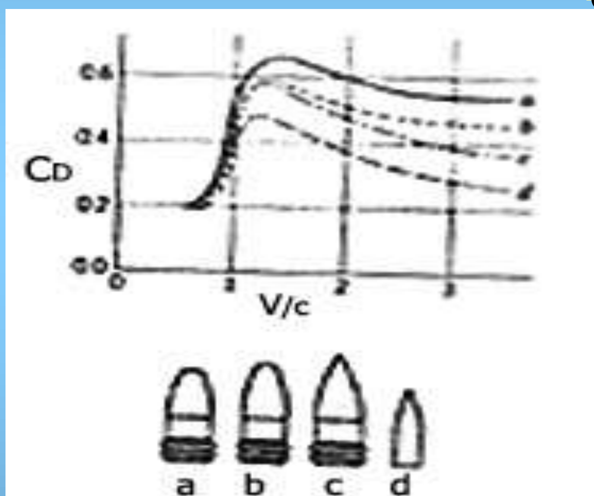
$$\alpha = \sin^{-1} {ct}/{vt} = \sin^{-1}\frac{C}{V} \qquad (۵-۲۷)$$

نیروی کشش بر اجسام به مقدار زیادی تحت تاثیر عدد ماخ است و اگر تراکم پذیری مهمتر شود، وابستگی خود را به عدد رینولدز از دست می دهد. در شکل (۱۰-۵) ضرایب کشش برای ٤ جسم پرتابه ای نسبت به عدد ماخ رسم شده است. برای اعداد ماخ کوچک، جسم باید دارای پیشانی مدور و دماغه ای پهن و بدنه ای مخروطی شکل کشیده داشته باشد تا نیروی کشش به کمیته برسد. به ازای اعداد ماخ بزرگ (۷ یا بیشتر)نیروی کشش به سرعت زیاد می شود و در این صورت جسم دماغه ای تیز داشته و لبه های جلویی آن نازک است.

شکل ۹-۵ گسترش موج حاصل از یک متحرک الف با سرعت مادون صوت وب سرعت مافوق صوت



شکل ۱۰-۵ ضرایب کشش گلوله ها به صورت تابعی از عدد ماخ



قانون استوکس

استوکس در سال ۱۸۵۱ ، جریان سیالات تراکم ناپذیر چسبنده را در پیرامون کره با ۱ عدد رینولدز متفاوت ($U\,{}^{2a}\!/_{\nu}$) کمتر از ۱ حل کرد. او دریافت که کشش (نیروی وارد برکره توسط جریان سیال پیرامونش) برابر است با :

نیروی کشش $= 6\pi a\mu U$ **(۵-۲۸)**

که در آن a شعاع کره و U سرعت کره نسبت سیال در فاصله ی زیاد می باشد در محاسبه سرعت نهایی کره ای که در سیال سقوط می کند (فرض می کنیم سیال ساکن باشد) ، نیروی شناوری به اضافه ی نیروی کشش باید برابر با وزن کره باشد:

$$\frac{4\pi}{3}\pi a^{3}\gamma + 6\pi a\mu U = \frac{4}{3}\pi a^{3}\gamma_{s}$$ (۵-۹)

که در آن γ وزن مخصوص مایع و γ_s وزن مخصوص کره است. از حل این رابطه ، سرعت نهایی U بدست می آید:

$$U = \frac{2}{9}\frac{a^{2}}{\mu}(\gamma_{s} - \gamma)$$ (۵-۳۰)

درشکل (۶-۵) ، خط راست بیانگر قانون استوکس است. کاربرد قانون استوکس درجداسازی سرد کننده از ذرات براده های فلزی در ماشینکاری ، نمک زدایی جریان رودخانه ها و در بهداشت محیط زیست جهت تصفیه آبها و فاضلابها است.

مثال ۳

از هواپیمای جتی ، ذرات جامدی به قطر $10\mu m$ و s=2/5 در ارتفاع ۱۱۰۰ متری، ذرات جامدی به درون جت ریخته می شود. اگر μ چسبندگی هوا از رابطه ی $\mu = 1/75\times10^{-6} - 3/06\times10^{-10}y$ بدست آید که در آن y بر حسب متر نسبت به سطح دریا اندازه گیری می شود. زمان لازم را برای این که ذرات به سطح دریا برسند محاسبه کنید. از جریان هوا و اثرات باد چشم پوشی شود.

حل

اگر معادله ی (۳۰-۵) $U = \frac{-dy}{dt}$ را جایگزین کنیم و وزن مخصوص هوا بسیار کمتر از وزن مخصوص ذرات جامد باشد، آنگاه داریم:

$$-\frac{dy}{dc}=\frac{2}{9}\frac{a^2\gamma_s}{\mu}$$

$$\int_0^T dt=-\int_{1100}^{0}\frac{9}{2}(1/78\times10^{-3}-3/06\times10^{-10}y)\times\frac{1}{(5\times10^{-6})2}\cdot\frac{1}{2/5\times9806}dy$$

$$T=\frac{1}{86400}\left[1/78y-\frac{3/06\times10^{-5}y^2}{2}\right]_0^{11000}\times73/45=15/07$$

۵-۵ مقاومت در برابر جریان درهم سیالات در مجاری باز و بسته

در جریان تراکم ناپذیر درهم و یکنواخت دائمی در مجرایی با سطح مقطع ثابت، تنش برشی جداره تقریباً متناسب بامجذور سرعت متوسط تغییر می کند:

$$\delta_\circ=\lambda\,\ell/2\,V^2$$

(۵-۳۰)

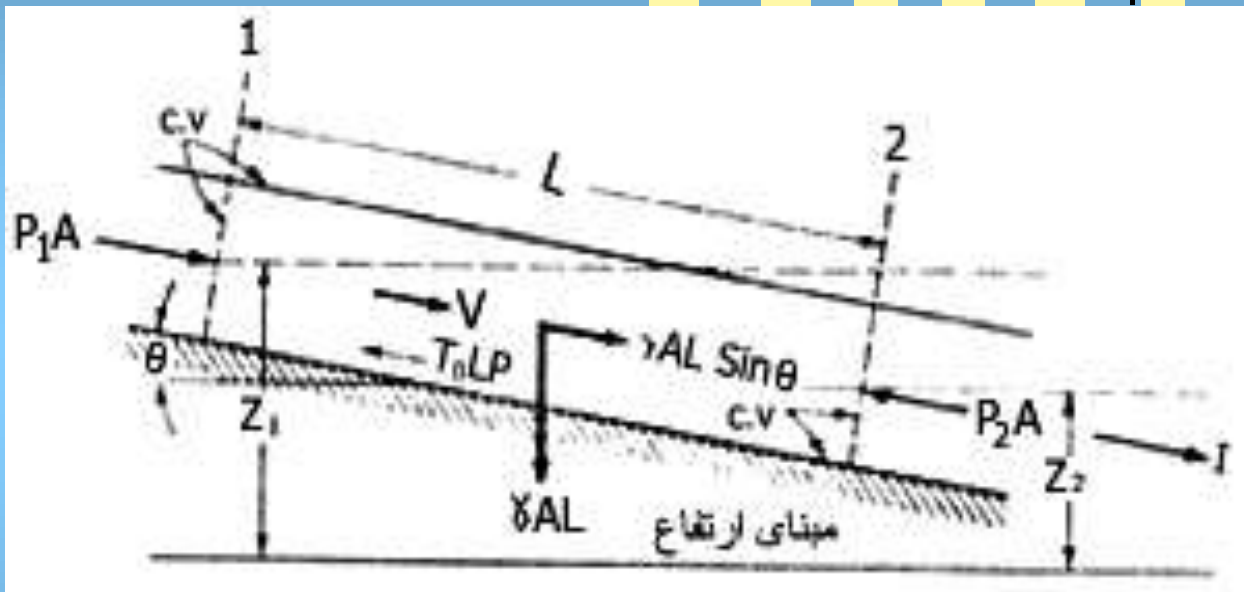
که در آن λ ضریب بدون بعدی است. در کانالهای باز ومجاری غیر مستدیر بسته، تنش برشی روی سطح ثابت نیست، در این موارد $\delta_\circ$ را به صورت مقدار متوسط تنش برشی درجداره بکار می برند.

در شکل (۵-۱۱) جریان یکنواختی در مجرایی باز یا بسته نشان داده شده است. در حالت باز بودن کانال P_1 برابر با P_2 است و جریان به دلیل کاهش انرژی پتانسیل به مقدار $Z_1-Z_2 m.N/N$ بوجود می آید. اما در مجرای بسته انرژی لازم جهت ایجاد جریان با افت انرژی پتانسیل و همچنین با افت فشار P_1 - P_2 تامین می شود. P_2 را می توان در جهت جریان افزایش داد ولی کاهش انرژی پتانسیل Z_1-Z_2 باید بیشتر از (P_2- P_1)/γ باشد تا انرژی لازم جهت غلبه بر تنش برشی جداره فراهم آید.

معادله ی انرژی در این حالت به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+ \text{افت ۱-۲} \qquad (۵-۳۱)$$

شکل ۱۱-۵ نیروهای محور بر حجم کنترل درون یک مجرا



نیروی بالابر

$$\text{نیروی بالابر} = C_L\frac{A\rho U^2}{2}$$

زاویه ماخ

$$\frac{\alpha}{2}=\sin^{-1}{C}/{V}$$

قانون استوکس (سیال تراکم ناپذیر چسبنده)

$$U=\frac{2}{9}\frac{a^2}{\mu}(\gamma_s-\gamma)$$

تنش برشی در جریان تراکم ناپذیر در هم و یکنواخت دائمی

$$Z_0 = \lambda \, {}^{\ell}\!/_{2} \, V^2$$

معادله انرژی در مجاری باز و بسته

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^{2}}{2y}+\Im_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^{2}}{2y}+\Im_2+\text{افت}\ 1-2$$

معادله افت

$$\text{افت}\ 1-2=\frac{p_1-p_2}{\gamma}+\Im_1-\Im_2=\frac{z\circ LP}{\gamma A}=\lambda \, {}^{\ell}\!/_{2} \, \frac{V^2 LP}{\gamma A}=\lambda\frac{L}{R} \, {}^{V^2}\!/_{2g}$$

افت در واحد وزن در واحد طول کانال

$$S=\frac{\lambda V^{2}}{R2g}$$

فرمول شزی

$$V=\sqrt{{}^{2g}\!/_{\lambda}}\,\sqrt{RS}=C\sqrt{RS}$$

چون حد سرعت ${}^{V^2}\!/_{2g}$ همانند است :

$$\text{افت}\ 1-2=\frac{p_1-p_2}{\gamma}+z_1-z_2$$

(۵-۳۲)

اگر جریان یکنواخت باشد ، معادله ی تکانه ی خطی درجهت ℓ بکاربرده می شود:

$$\sum F\ell = 0 = (p_1 - p_2)A + \gamma ALSin\theta - \varsigma \circ LP$$

(۵-۳۳)

که در آن P بخش از محیط که جداره درتماس با سیال است. چون $\theta = Z_1 - Z_2$ ςL بنابراین

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 = \frac{\varsigma_\circ LP}{\gamma A}$$

(۵-۳٤)

اگر از معادلات (۵-۳۲) و (۵-۳٤) و (۵-۳۰) استفاده کنیم نتیجه می شود:

$$\text{افت}\quad 1-2 = \frac{\varsigma_\circ LP}{\gamma A} = \lambda \frac{\rho}{2}\frac{V^2 LP}{\gamma A} = \lambda \frac{L}{R}\frac{V^2}{2g}$$

(۵-۳۵)

که در آن $R = A/P$ و شعاع هیدرولیکی مجرا نامیده می شود. برای لوله مستدیر ، شعاع هیدرولیکی برابر با $R = D/4$ است.

عبارت مربوط به افت در معادله ی (۵-۳۵) بر حسب متر ـ نیوتن بر نیوتن است و آن را hf یا افت هد ناشی از اصطکاک می نامند. اگر S را افت در واحد وزن در واحد طول کانال بگیریم:

$$S = {hf}/{L} = \frac{\lambda V^{-2}}{R2g}$$

(۵-۳۶)

و این معادله را برای V حل کنیم:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}\sqrt{RS} = C\sqrt{RS}$$

(۵-۳۷)

این معادله را فرمول شزی می نامند و ضریب λ یا C را باید به روش تجربی تعیین کرد.برای

لوله ها ، هنگامی که $\lambda = f/4$ و $R = D/4$ باشد، معادله ی دارسی ـ وایسباخ بدست می آید.

$$hf = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \tag{۵-۳۸}$$

که در آن D قطر داخلی لوله است. برای کانالهای باز این معادله به صورت زیر در می آید.

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{RS} \tag{۵-۳۹}$$

۵ -۶ جریان یکنواخت ـ دائمی در کانالهای باز

برای جریان دائمی تراکم ناپذیر در عمق ثابت درون کانال باز منشوری شکل فرمول مفینگ بکار برد می شود . این فرمول را با جایگزینی رابطه ی

$$C = \frac{Cm}{n}R^{1/6} \tag{۵-۴۰}$$

در فرمول شزی بدست آورده می شود:

$$V = \frac{Cm}{n}R^{2/3}S^{1/2} \tag{۵-۴۱}$$

مقدار Cm برابر با یک، V سرعت متوسط در سطح مقطع مزبور R , شعاع هیدرولیکی و S افت در واحد وزن در واحد طول کانال یا شیب کف کانال می باشد. به نظر می رسد که ضریب n ضریب زبری مطلق تنها و ابسته به زبری سطح باشد ، ولی n بستگی به نامعلومی به ابعاد و شکل سطح مقطع کانال دارد.

مقدار ضریب n را در چندین آزمایش در کانالهای واقعی بدست آورده اند که در جدول (۲-۵) آورده ایم توجه داریم این مقادیر در سیستم SI است.

جدول ۲-۵ مقادیر متوسط ضریب زبری سینگ مواد مختلف

_____؟_____

اگر معادله (۴۱-۵) را در سطح مقطع A ضرب شود، فرمول مفینگ به صورت زیردر می آید:

$$Q = \frac{Cm}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

(۴۲-۵)

که Qهمان دبی خروجی است.

مثال ٤

مقدار دبی خروجی از کانال ذوزنقه شکل (۱۲-۵) را که عرض قاعده b=3m و وجوه آن شیب یک به یک دارد بدست آورید. در صورتی که عمق کانال ۲m و شیب کف آن برابر ۰/۰۰۰۹ و سطح واقعی کانال از سیمان ساخته شده است.

حل

با استفاده از جدول (۲-۵) ۰/۰۱۲=h و مساحت برابر است :

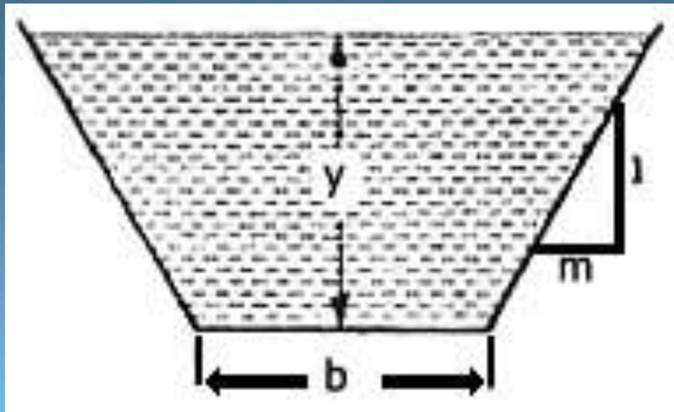
$$A = 3\times 2 + 2\times 2 = 10m^2$$

و محیط خیس :

$$p = 3 + 2\times 2\sqrt{2} = 8/66m$$

با جایگزینی در معادله (۴۲-۵) بدست می آید.

$$Q = \frac{1/0}{0/012} 10 \left(\frac{10}{8/66}\right)^{2/3} (0/0009^{1/2}) = 27/52 \, m^3/s$$



شکل ۵-۱۲ سطح مقطع ذوزنقه شکل

مثال ۶

به چه عمقی نیاز داریم اگر بخواهیم جریان $4 \, {m^3}/{s}$ در یک کانال چوبی مربع شکل به عرض ۲m و شیب کف معادل ۰/۰۰۲ بوجود آید؟

حل

اگر عمق را y بگیریم، A=2y و p=2+2y خواهد بود.

از جایگزینی دو معادله (۵-۴۲) نتیجه می شود:

$$4 = \frac{1/00}{0/012} 2y \left(\frac{2y}{2+2y}\right)^{2/3} 0/002^{1/2}$$

پس از ساده کردن :

$$f(y) = y \left(\frac{y}{1+y}\right)^{2/3} = 0/536$$

اگر y=1 آنگاه f(y) =۰/۶۳ پس با فرض y=۰/۸۹m و f(y) =۰/۵۳۸ می شود. بنابراین عمق

درست برابر ۰/۸۹m است.

مثال ۷

شخصی نیاز به کانال دارد که در آن از فرسایش خاک نیز جلوگیری شود. کانال ذوزنقه ای شکل و شیب ۰/۰۰۰۹ و قاعده ی آن ۳m و شیب وجوه آن ۲ به است (افقی به عمودی) . اگر او از قلوه سنگهای کروی زبر برای آستر کانال استفاده کند $C\gamma_s = 21200 \ N/m^3$ حداقل D_{50} قلوه سنگها که می تواند استفاده کند، چقدراست؟ دبی جریان در طراحی $28 \ m^3/3$ فرض شده است و تنشی که قلوه سنگها در مقابل آن مقاومت می کند با معادله ی

$$\delta = 0/040(\gamma_s - \gamma)D_{50} \qquad Pa$$

مشخص می شود که در آن γ_s واحد وزن قلوه سنگها و D_{50} قطر متوسط قلوه سنگها بر حسب متر است .

حل

با مراجعه به جدول (۲-۵) ضریب n قلوه سنگها برابر با ۰/۲۵ با جایگزینی در معادله ی (۴۲-۵)

$$28 = \frac{1/0}{0/03}\frac{[g(3+2y)]^{5/3}}{(3+2\sqrt{5}y)^{2/3}}0/25$$

بدست می آید.

از حل این معادله ,عمق y=۶۲۶/۲ و شعاع هیدرولیک R =۴۷/۱m بدست می آید. از معادلات (۳۵-۵) و (۳۶-۵) داریم:

$$\varsigma\circ = \gamma RS = 9806 \times 1/47 \times 0/0009 = 12/97 Pa$$

برای محاسبه ی D_{50} از برابری $\delta = \varsigma\circ$ داریم:

۰۴۰/۰(۲۱۲۰۰-۹۸۰۶)D50 =۹۷/۱۲

یا

D_{50} =۸۴/۲ cm

۵-۷ چکیده

توزیع سـرعت در جریـان آرام ، تراکم ناپـذیر دائمی بـین صـفحات موازی از رابـطه ی زیر بدست می آید:

$$u = \frac{uy}{\alpha} - \frac{1}{2\mu} \quad \frac{d}{d\ell}(\rho + \gamma h)(ay - a^2)$$

اگر صفحات افقی باشند توزیع فشار هیدرولیکی $P + \gamma h$ برابر با مقداری ثابت است و توزیع سرعت به خط مستقیم خواهد بود . اما اگر صفحات شیبدار ولی ثابت باشند U=0 و در نیجه سرعت سهموی شکل است. و مقدار دبی خروجی در سطح ثابت از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$Q = \int_0^A u\,dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \quad \frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)a^3$$

برای جریان آرام ، تراکم ناپذیر و یکنواخت بین دو لوله هم محور با شعاع داخلی b و شعاع خارجی , aتوزیع سرعت برابر است با

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)\left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln {}^{b}\!/_{a}} \ln {}^{a}\!/_{r}\right)$$

اما اگر فقط یک لوله مستدیر شکل به شعاع a داشته باشیم:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \quad \frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

و این سرعت سیال درون لوله مزبور است.

سرعت متوسط نیز چنین خواهد شد.

$$V = -\frac{a^2}{8\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

که برابر بانصف پیشینه سرعت سیال است و تعداد دبی خروجی برابر است با

$$Q = -\frac{\pi a^2}{8\mu}\frac{d}{d\ell}(p + \gamma h)$$

لانگهار برای نخستین بار رابطه ی نظری به صورت زیر بدست آورد:

$$L'/D = 0/058R$$

که L' طول گذار برای ایجاد سرعت سهوی است و R عدد رینولدز می باشد.
نیروی کشش به صورت زیر تعریف می شود.

نیروی کشش = $C_D A \frac{\rho U^2}{2}$

که درآن CD ضریب کشش و A تصویر سطح جسم روی صفحه ای عمود برمسیر جریان است . نیروی بالابر مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال به جسم تحت زاویه ای قائم نسبت به سرعت نزدیکی نسبی وارد می شود.

نیروی بالابر = $C_L \frac{A\rho U^2}{2}$

که در آن CL ضریب نیروی بالابر است و A مربوط به طول قوس ضربدر طول مایل برای نیروی کشش و نیروی بالابر در سطح آیرودینامیکی می باشد.

نصف زاویه α زیر را زاویه ی ماخ می نامند.

$$\alpha = \sin^{-1} {}^{ct}\!/_{vt} = \sin^{-1} {}^{c}\!/_{v}$$

استوکس دریافت که کشش ، نیروی وارد برکره توسط جریان سیال پیرامونش برابر است با :

نیروی کشش = $6\pi a\mu V$

که در آن a شعاع کره و u سرعت کره نسبت به سیال در فاصله ی زیادی باشد و رابطه ی زیر برای سرعت نهایی می باشد.

$$U = \frac{2}{9}\frac{a^2}{\mu}(\gamma_s - \gamma)$$

که در آن γ وزن مخصوص مایع و γ_s وزن مخصوص کره است.

در جریان تراکم ناپذیر درهم و یکنواخت دائمی در مجرایی با سطح مقطع ثابت، تنش برشی جداره از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$\varsigma\circ = \lambda \,{}^{\ell}\!/_{2} V^2$$

که در آن λ ضریب بدون بعدی است و معادله ی انرژی به صورت زیر در می آید.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \Im_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Im_2 + \text{افت}_{\;1-2}$$

اگر S را افت در واحد وزن در واحد طول کانال بگیریم ، داریم:

$$S= \lambda V^2 / R2g$$

و فرمول شزی به صورت زیر بدست می آید.

$$V \frac{\sqrt{2g}}{8} \sqrt{RS} = C\sqrt{RS}$$

برای جریان دائمی تراکم ناپذیر در عمق ثابت درون کانال باز منشوری شکل داریم.

$$V = \frac{cm}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

که در آن مقدار cm برابر با یک ، V سرعت متوسط در سطح مقطع مزبور و R شعاع هیدرولیکی و S افت در واحد وزن در واحد طول کانال یا شیب کف کانال می باشد و n ضریب زبری مطلق است (رجوع شود به جدول ۲-۵) و دبی خروجی برابر است با

$$Q = \frac{cm}{n} AR^{2/3} S^{1/2}$$

تست های فصل ۵

۱-۲-۵ تنش برشی در یک سیال که بین دو صفحه موازی جریان دارد :

الف) در تمام سطح مقطع ثابت است ب) در روی دو صفحه صفر است و تا نقطه ی مبنا به طور خطی افزایش می یابد.

ج) در سطح مقطع مورد نظر به شکل سهمی تغییر می کند

√د) در نقطه ی میانی صفر است و با افزایش فاصله از آن نقطه بطور خطی تغییر می کند

۲-۲-۵ توزیع سرعت برای جریان سیال بین دو صفحه موازی و ثابت:

الف) در تمام سطح مقطع ثابت است ب) در نزدیکی صفحات صفر است و به طور خطی به طرف مرکز افزایش می یابد

√ج) در سطح مقطع مورد نظر به شکل سهمی تغییر می کند

د) متناسب با توان ۲/۳ فاصله تا نقطه ی میانی تغییر می کند

۳-۲-۵ دبی خروجی سیال از بین دو صفحه موازی که فاصله ی آنها از یکدیگر a است و یکی از آنها سرعت u دارد و تنش برشی در صفحه ثابت صفر می باشد برابر است با :

√الف) ua/3 ب) ua/2 ج) 2ua/3 د) ua

۵–۲–٤ سیالی در بین دو صفحه موازی آرام حرکت می کـند . یکی از صفحات حرکت می کند و تحت گرادیان فشار قرار دارد به طوری که دبی خروجی از بین آنها در هر سطح مقطع ثابتی صفر اسـت . حداقل سرعت در نقطه ای روی می دهد که فاصله آن از صـفـحه ی ثـابـت برابر باشد با :

الف) a/6 √ب) a/3 ج) a/2 د) 2a/3

۵–۲–۵ در تست ۵–۲–٤ مقدار حداقل سرعـت بـرابـر اسـت بـا

الف) -3u/4 ب) -2u/3 ج) –u/2 د) –u/3

۵–۲–۶ رابطه ی بین فشار و تنش برشی در جریان آرام یک بعدی در جهت x کدام است؟

الف) $dp/dx = \mu dz/dy$ ب) $dp/dy = dz / dx$

ج) $dp/dy = \mu dz/dx$ √ د) $dp/dx = d z/ dy$

۱-۳-۵ تنش برشی در سیال جاری در لوله :
الف) در تمام سطح مقطع ثابت است   ب) در جداره صفر است و به طرف مرکز به طور خطی افزایش می یابد   √ج) در مرکز صفحه صفر و متناسب با شعاع به طور خطی زیاد می شود   د) به شکل سهمی تغییر می کند

۲-۳-۵ اگر افت فشار برای ۳۰ متر طول از یک خط لـولـه بـه قـطـر 900mm برابر 70Kpa باشد تنش برشی در جدار بر حسب پاسکال برابر است با :

الف) ۰   √ب) ۳۵۰   ج) ۷۰۰   د) ۱٤۰۰

۳-۳-۵ در جریان آرام در لوله ,دبی :
الف) بطور خطی با تغییر چسبندگی تغییر می کند
ب) متناسب با مربع شعاع تغییر میکند
ج) نسبت عکس با افت فشار دارد
د) نسبت عکس با چسبندگی دارد

۵-۳-٤ اگر لوله ای شیب دار باشد , بجای ρ–dp/d از کدام رابطه زیر استفاده می شود ؟

الف) –dh/d ρ   ب) _γdh/dρ   ج) –d(P+h)/d ρ   √د) –d(p+γh)/d ρ

۵-٤-۱ در جریان سیال با چسبندگی کم :

الف) اثر چسبندگی به طور چشم گیری کشش وارد بر جسم را افزایش نمی دهد

ب) قضیه ی پتانسیل بیانگر نیروی کشش بر جسم است

√ج) اثر چسبندگی محدود به ناحیه ای باریکی در پیرامون جسم می شود

د) کشش ناشی از تغییر شکل روی جسم همواره غالب می شود

۵-٤-۲ نیروی بالابر وارد بر جسم غوطهور در جریان سیال :

الف) ناشی از نیروی شناوری است

ب) همواره در جهت مخالف با جهت گرانی است

√ج) مولفه ی نیروی دینامیکی سیال وارد بر جسم عمود بر سرعت نزدیکی نسبی است

د) مولفه ی نیروی دینامیکی سیال وارد بر جسم موازی با سرعت نزدیکی نسبی است

۳-٤-۵ نیروی کشش فشاری ناشی از :
الف) اصطحکاک سطحی است ب) تغییر شکل است
√ج) جریان برگشتی است د) شکست جریان پتانسیلی در نزدیکی نقطه ی سکون پیکانی جسم است

٤-٤-۵ جسمی با دماغه ی محدود و دنباله ای دراز و مخروطی شکل همواره جهت :
الف) جریان آرام مناسب است √ب) جریان مادون صوت متلاطم مناسب است
ج) جریان مافوق صوت مناسب است د) جریان در سرعت صوت مناسب است

۵-٤-۵ اثر تراکم پذیری بر نیروی کشش عبارتست از :
√الف) افزایش آن به مقدار زیاد در نزدیکی سرعت صوت
ب) کاهش آن در نزدیکی سرعت صوت
ج) افزایش سریعتر آن متناسب با توان دوم سرعت به ازای اعداد ماخ بالا د) کاهش آن در تمامی محدوده ی جریان

۶-٤-۵ سرعت نمایی کره ای که درون سیال چسبنده ای رو به پایین سقوط می کند :

الف) با توان اول قطر آن تغییر می کند

√ب) به صورت عکس با چسبندگی سیال تغییر می کند

ج) به صورت عکس مربع قطر آن تغییر می کند

د) به صورت عکی قطر آن تغییر می کند

۱-۵-۵ شعاع هیدرولیک از

الف) محیط خیس تقسیم بر سطح بدست می آید

ب) سطح تقسیم بر مربع محیط خیس بدست می آید

ج) ریشه ی دوم مساحت مشخص می شود

√د) مساحت تقسیم بر محیط خیس تعیین می شود

۲-۵-۵ شعاع هیدرولیک یک کانال باز با عرض 60mm و عمق 120mm بر حسب میلی متر برابر است با:

الف) ۳۰ √ب) ۲٤ ج) ٤۰ د) ۶۰

۵–۶–۱ افت جریان در کانال باز به طور کلی

الف) متناسب با زبری به توان یک تغییر می کند

ب) متناسب با عکس زبری تغییر می کند

√ج)متناسب با مربع سرعت تغییر می کند

د) متناسب با سرعت تغییر می کند

۵–۶–۲ آسان ترین مورد محاسبه ی جریان کانال باز عبارتست از

√الف) یکنواخت دائمی ب) نایکنواخت دائمی ج) یکنواخت غیر دائمی د) به تدریج متغیر

۵–۶–۳ در کانال بازی با عرض زیاد , شعاع هیدرولیک برابر است با :

الف) y/3 ب) y/2 ج) 2y/3 √د) y

فصل ۶

جریان تراکم پذیر

پس از مطالعه ی این فصل باید بتوانید روابراگازهای کامل، آنتروپی، قانون اول و دوم ترمودینامیک ، سرعت امواج صوتی و عدد ماخ، جریان ایزوتوپی، شرایط بحرانی، خطوط ریلی و فانو، جریان بی دررو بااصطکاک در کانالها با فرضیات مربوط به آن، حداکثر طول دراین شرایط و جریان بی اصطکاک داخل کانالها با انتقال گرما بنویسید و بخوبی فراگیرید که چگونه د رحل مسائل از آنها استفاده می شود.

۱-٦ مقدمه

در فصل قبلی راجع به جریان تراکم ناپذیر و چسبنده بحث کردیم. دراین فصل به جریان تراکم پذیر می پردازیم و متغییر جدیدی به نام چگالی و معادله ای دیگر به نام معادله ی حالت که رابطه ی بین فشار و چگالی را مشخص می کنیم. ارائه خواهد شد. در تجزیه و تحلیل جریان سیال تراکم پذیر از معادلات دیگری چون پیوستگی، تکانه و قانون اول و دوم ترمودینامیک استفاده می شود در بررسی جریان یکنواخت یک بعدی ، سرعت و چگالی درهر مقطعی ثابت است. اگرتغییرات چگالی به تدریج و ناچیز باشد، می توان از چگالی متوسط استفاده کرد و سیال را تراکم ناپذیر فرض کرد.

۲-۶ روابط گاز کامل

در فصل ۱ ملاحظه شد که گاز کامل به صورت سیالی است که ثابتهای گرمای ویژه دارد و از قانون گاز زیر پیروی می کند.

$$P = \rho RT$$

(۱-۶)

که در آن ρ فشار، T دما، هم چگالی و R ثابت گاز است. در این بخش نسبت گرمای ویژه و رابطه ی ثابت گرماهای ویژه و ثابت گاز ارائه خواهد شد و رابطه ی انرژی داخلی با آنتالپی و دما مطرح می شود و سرانجام روابط مربوط به آنتروپی و فرآیندهای ایزونتروپی و پلی تروپی برگشت پذیر معرفی می شوند.

C_v گرمای ویژه در حجم ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

(۲-۶)

که در آن u انرژی داخلی باید به واحد جرم گاز اضافه شود (در حجم ثابت) تا دمای گاز را یک درجه بالا ببرد.

Cp گرامی ویژه در فشار ثابت از رابطه زیر بدست می آید.

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

(۳-۶)

که در آن h آنتروپی درواحد جرم است و از رابطه ی $h = u + p/\rho$ بدست می آید. اما $p/\rho = RT$ و u برای گاز کامل فقط تابعی از دماست. بنابراین h فقط به دما بستگی دارد.

در بعضی از گازهای معمولی چون بخار آب، هیدروژن، اکسیژن، و منواکسید کربن و هوا تغییرات گرمای ویژه بین دمای ۰ تا ۳۰۰ بسیار کم است بنابراین برای آنها مقدار متوسطی در نظر گرفته می شود و مانند گاز کامل از آنها استفاده می کنند.

در جدول (۱-۶) گرمای ویژه ـ برخی از گازهای معمولی دردمای $۷/۲۶^\circ C$ ارائه شده است.

جدول ۱-۶ خواص گازها درفشار کم و دمای $۷/۲۶^\circ C$

گاز	فرمول شیمیایی	جرم مولکولی نسبی	R ثابت گاز j/kg.k	گرمای ویژه Kj/kg.k Cp	Cv	گرمای ویژه K
Air		29.0	287	1.004	0.716	1.40
Carbon Monoxide	CO	28.0	297	1.043	0.745	1.40
Helium	He	4.00	2077	5.233	3.153	1.66
Hydrogen	H_2	2.02	4121	14.361	10.216	1.40
Nitrogen	N_2	28.0	297	1.038	0.741	1.40
Oxygen	O_2	32.0	260	0.917	0.657	1.40
Water vapor	H_2o	18.0	462	1.863	1.403	۱.۳۳

برای گازهای کامل، معادله (۲-۶) و (۳-۶) را به صورت زیر می نویسند:

$$du = c_v dT \ , \ \ dh = c_p dT \qquad (۶-٤)$$

و از رابطه ی (۳–۶) داریم:

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + QT \qquad (۶–۵)$$

و یا مشتق گیری

$$dh = du + RdT$$

و از جایگزینی (٤–۶) در رابطه ی بالا نتیجه می شود

$$C_P = C_V + R \qquad (۶–۶)$$

معادله ی بالا برای تمام گازهایی که از معادله ی (۱–۶) پیروی می کنند ، برقرار است و k نسبت دمای ویژه به صورت زیر تعریف می شود.

$$k = {c_p}/{c_v} \qquad (۶–۷)$$

با استفاده از این معادله ومعادله (۶–۶) داریم

$$C_V = \frac{R}{k-1} \quad , \quad C_P = \frac{K}{K-1}R \qquad (۶–۸)$$

رابطه ی آنتروپی

از قانون اول ترمودینامیک می دانیم، گرمای اضافه شده به سیستم برابر با کار انجام شده ی آن سیستم به اضافه افزایش انرژی داخلی سیستم می باشد. اگر S را آنتروپی بگیریم این قانون به صورت زیر در می آید.

$$Tds = du + p\,d\frac{1}{\rho} \qquad (۶–۹)$$

این رابطه برای تمام خالص برقرار است. تغییر انرژی داخلی گاز کامل برابر است با

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

(۶-۱۰)

و تغییر آنتالپی :

$$h_2 - h_1 = Cp (T_2 - T_1)$$

(۶-۱۱)

بنابراین تغییر در آنتروپی برابر است با

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} d \frac{1}{\rho} = C_v \frac{dT}{T} + R\rho d \frac{1}{\rho}$$

(۶-۱۲)

و سرانجام با انتگرال

$$S_2 - S_1 = C_V \ln {T_2}/{T_{1_1}} + R - \ln {\rho_1}/{\rho_2}$$

(۶-۱۳)

و به کمک معادلات (۶-۶) و (۶-۸) نتیجه می شود:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho 2} \right)^{k-1} \right]$$

(۶-۱۳الف)

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho 2} \right)^{k} \right]$$

(۶-۱٤ ب)

$$S_2 - S_1 = C_V \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{K}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1-K}\right]$$

(۶-۱۵ ج)

معادلات (۶-۱٤)، صورتهای مختلف قانون دوم ترمودینامیک است.

اگر فرآیند برگشت پذیر باشد $ds = {dqH}/{T}$ و بی دررو باشد dqH=0 خواهد بود. بنابراین در فرآیند بی در رو برگشت پذیر ds=0 و یا مقدارثابت= S خواهد بود. پس یک فرآیند بی دررو برگشت پذیر، ایزوتروپی می باشد با استفاده از این شرط $s_2=s_1$ و یا

$$\frac{P_1}{\rho_1^{\,k}} = \frac{P_2}{\rho_2^{\,k}}$$

(۶-۱۵)

از ترکیب معادله ی (۶-۱۵) با قانون عمومی گازها به نتیجه زیر می رسیم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_{-2}}{P_{-1}}\right)^{(K-1)/K} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1}$$

(۶-۱۶)

تغییر آنتالپی برای فرآیند ایزوتروپی برابر است با

$$h_2 - h_1 = C_P(T_2 - T_1) = C_P T_1\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right] = C_P T_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(K-1)/K} - 1\right]$$

(۶-۱۷)

توجه داریم فرآیند پلی تروپی با رابطه ی زیر تعریف می شود:

$\frac{P}{\rho^{n}}$ = **مقدار ثابت**

(۶-۱۸)

رابطه ی بالا تقریبی برای فرآیندهای واقعی است.

مثال ۱

برای هلیم $^{kJ}/_{kg.K}$ C_P=۲۳/۵ و $^{kJ}/_{kg.K}$ R=۰۷۷/۲ است ، مقدار C_V و Kرا بدست آورید.

حل

$$K=\frac{C_P}{C_P-R}=\frac{5/23}{5/23-2/077}=1/66$$

می دانیم

$$C_V=\frac{C_P}{K}=\frac{5/23}{1/66}=3/15$$

مثال ۲

مقدار R را برای هوا با استفاده از K و C_P در جدول(۱–۶) بدست آورید.

$$R=\frac{k-1}{k}C_P=\frac{1/4-1}{1/4}(1/004)=0/287\ ^{kJ}/_{kg.K}$$

مثال ۳

تغییرات آنتالپی ۵ کیلوگرم اکسیژن را که در آغاز abs =۱۳۰kPa p_1و $t_1=10^\circ C$ و در پایان abs p_2=۵۰۰kPa و $t_1=95^\circ C$ باشد، محاسبه کنید.

حل

آنتالپی فقط تابعی از دماست ، با توجه به معادله ی (۱۱–۶) داریم:

$$H_2-H_1=(5)\left[C_P(T_2-T_1)\right]=5\times 0/917(95-10)=389/7\quad kJ$$

مثال ٤

تغییرات آنتروپی ۵ کیلوگرم بخار آب را در شرایط p1 =٤۲ kPa , $t_1 = 43^\circ C$ p2=280kPa و $t_2 = 3\ ^\circ C$ تعیین کنید.

حل

با استفاده از معادله ی (٦-١٤ ج) و جدول (١-٦) داریم:

$$S_2 - S_1 = 1/403 \ln\left[\left(\frac{273+3}{273+43}\right)^{1/33}\left(\frac{280}{42}\right)^{-0/33}\right] = -1/131\ {kJ}/{kg.K}$$

$$S_2 - S_1 = 4\times(-1/131) = -4/524\ {kg}/{k}$$

مثال ۵

استوانه هاوی ۲kg نیتروژن تحت فشار abs ۱٤/۰ Mpa ودمای ۵ $^\circ C$ قرار دارد. اگر فشار به طور ایزونتروپی به ۳/۰Mpa برسد، دمای نهایی و کار انجام شده را محاسبه کنید.

حل

$$T_2 = T_1\left({P_2}/{\rho_1}\right)^{(k-1)/K}$$

از رابطه ی (١۶-۶) داریم

$$= (273+5)\left(\frac{0/3}{0/14}\right)^{(1/4-1)/1/4} = 345/6^\circ K = 72/6^\circ C$$

بنابر پایستگی انرژی، کار انجام شده روی گاز باید برابر با افزایش انرژی داخلی باشد. بنابراین از فرآیند ایزونتروپی هیچ انتقال گرمایی انجام نمی گیرد، یعنی

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = {\text{کار}}/{kJ}$$

$$\text{کار} = (2)(0/741)(345/6 - 278) = 100/2kJ$$

مثال ۶

٤٤kg هوا فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر را طی می کندو درآن شرایط اولیه از p_1=٨٥kPa و $t_1 = 17^\circ C$ به p_2 = ١٤٠kPa تغییر می کند. حجم هوا برابر $28/3m^3$ است. مطلوبست تعیین (الف) فرمول این فرآیند (ب) کارانجام شده روی هوا (ج) تعداد انتقال گرما و (د) تغییرات آنتروپی

حل

(الف)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{85}{0/287(273+16)} = 1/025 \, {}^{\text{kg}}\!/_{\text{m}^3}$$

همچنین

$$\rho_2 = \frac{44}{28/3} = 1/555 \, {}^{\text{kg}}\!/_{\text{m}^3}$$

از معادله ی (۱۸-۶) داریم:

$$\frac{P_1}{\rho_1{}^n} = \frac{P_2}{\rho_2{}^n}$$

از این معادله n را بدست می آوریم.

$$n = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(\rho_2/\rho_1)} = \frac{\ln(140/85)}{\ln(\frac{1/55}{1/025})} = 1/20$$

بنابر این مقدار ثابت = $\frac{p}{\rho^{1/2}}$ که بیانگر فرآیند پلی تروپی است.

ب) کارانجام شده هوا $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV =$

ولي

$$P_1 V_1^{\ n} = p_2 V_2^{\ n} = PV^n$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم :

$$W = P_1 V_1^{\ n} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n} = \frac{mR}{1-n}(T_2 - T_1)$$

ابتدا V_1 رامحاسبه می کنیم.

$$V_1 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/n} = 28/3 \left(\frac{140}{85}\right)^{1/1/2} = 42/89 m^3$$

در نتیجه کار بدست می آید.

$$W = \frac{140 \times 28/3 - 85 \times 42/89}{1-1/2} = -1582\ kJ$$

بنابراین کار انجام شده روی گاز برابر با ۱۵۸۲Kj+ می باشد.
ج) با توجه به قانون اول ترمودینامیک . گرمای اضافه شده منهای کار انجام شده توسط گاز باید برابر با افزایش انرژی داخلی باشد:

$$QH - W = U_2 - U_1 = C_v m\,(T_2 - T_1)$$

ابتدا T_2 را محاسبه می کنیم

$$T_2 = \frac{P_2}{\rho_2 R} = \frac{140000}{1/555 \times 287} = 313/7K$$

در نتیجه داریم QH = −۱۵۸۲ +۰ /۷۱۶ × ٤٤(۷/۳۱۳ −۲۸۹)= − ۸۰۶Kj یعنی مقدار

۸۰۶Kj گرما از هوا انتقال یافته است.

(د) برای محاسبه تغییرات آنتروپی از معادله ی (۱٤–۶ ب) استفاده می کنیم.

$$S_2 - S_1 = 0/716 \ln\left[\frac{140}{85}\left(\frac{1/025}{1/555}\right)^{1/4}\right] = -0/0605 \; {}^{kJ}\!\big/_{kg,K}$$

و یا

$$\mathrm{S_2 - S_1 = -0/605 \times 44 = -2/662\, {}^{kJ}\!\big/_{K}}$$

۳–۶ سرعت امواج صوتی و عدد ماخ

سرعت یک اغتشاش کوچک را می توان با بکار گیری معادله ی تکانه و معادله ی پیوستگی تعیین کرد. اکنون سئوالی پیش می آید و آن مربوط به امکان وقوع در کانالی است که آیا امکان تغییر کوچک مانایی در سرعت ، فشار و چگالی وجود دارد؟

با توجه به شکل (۱–۶) ، معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید.

$$\rho VA = (\rho + dp)(V + dV)A$$

که در آن A سطح مقطع کانال است و این معادله ساده می شود.

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

هنگامی که معادله تکانه را برای حجم کنترل درون خط چین بکار بریم، داریم

$$PA - (P + dp)A = \rho VA(V + dV - V)$$

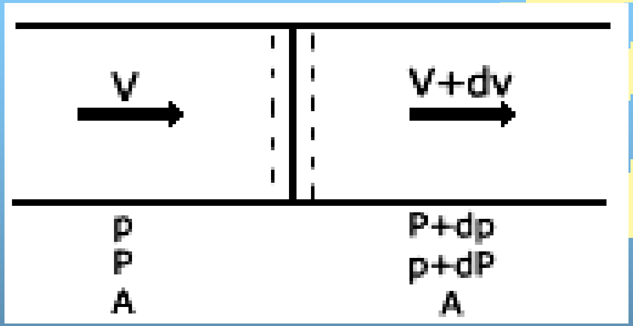
$$dp = -\rho V dV$$

اگر ρdV را از دو معادله ی اخیر حذف کنیم نتیجه می شود.

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho} \qquad (۶-۱۹)$$

شکل ۱-۶

جریان یکنواخت در کانال منشوری همراه با تغییر ناگهانی و کوچک سرعت ، فشار و چگالی



بنابراین اغتشاش کوچک یا تغییر ناگهانی در شرایط جریان پایدار فقط وقتی روی می دهد که سرعتی معادل $V = \sqrt{dp/d\rho}$ وجود داشته باشد.

اکنون این مساله را می توان به جریان ناپایدار با اغتشاش کوچک در سیال ساکنی تبدیل کرد و این عمل از برهمتهی تمام سیستم و محیط آن (با بردن سرعت V به سمت چپ) انجام می شود. این سرعت را سرعت صوت در محیط C می نامند. اغتشاش از یک منبع نقطه ای باعث امواج کروی می شود ولی در فاصله ی از منبع این امواج به صورت خطی یا یک بعدی می باشد. معادله ی سرعت به صورت زیر است:

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (۶-۲۰)$$

مدول کشسانی حجمی به صورت زیر تعریف می شود.

$$K = -\frac{dp}{dV/V} \quad (۶-۲۱)$$

که در آن V حجم سیالی است که تحت تغییرات فشار dp قرار گرفته است. اما

$$\frac{dV}{V} = \frac{dVs}{Vs} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

بنابراین این مدول به صورت زیر در می آید.

$$k = \frac{\rho dP}{d\rho} \quad (۶-۲۲)$$

در نتیجه معادله ی (۶-۲۰) چنین می شود:

$$c = \sqrt{k/\rho} \quad (۶-۲۳)$$

این معادله برای مایعات و هم گازها بکار برده می شود.
به علت گذر امواج صوتی، تغییرات فشار و دما بسیار کوچک است. بنابراین فرآیند مزبور تقریباً برگشت پذیر است. همچنین وقتی فرآیند گذر موج نسبتاً سریع و تغییرات دما ناچیز باشد، آن را بی دررو در نظر می گیرند. در حد، این فرآیند را می توان ایزوتروپی گرفت، یعنی

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{Kp}{\rho}$$

یا

$p\rho^{-k}$= مقدار ثابت

پس

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

(۶-۲۲)

و با استفاده ازقانون گاز کامل یعنی $p = \rho RT$ داریم :

$$C = \sqrt{KRT}$$

(۶-۲۳)

یعنی سرعت صوت در گاز کامل فقط تابعی از دماست. در نتیجه در جریان تکدما، سرعت صوت ثابت باقی می ماند.
اما در فصل ٤ ملاحظه کردیم که عدد ماخ نسبت سرعت سیال به سرعت موضعی صوت درهمان محیط تعریف می شود.

$$M = V/C$$

(۶-۲٤)

بنابراین مجذورعددماخ یعنی را می توان نسبت انرژی جنبشی سیال به انرژی گرمایی آن در نظر گرفت.

عددماخ سنجه ی قدر تراکم پذیری را نشان می دهد. در سیال تراکم ناپذیر k نامتناهی است و m=0 اما برای گاز کامل

$$K=kp \qquad (۶-۲۵)$$

می باشد. هنگامیکه تراکم به صورت ایزونتروپی باشد.

مثال ۷

مدول کشسانی حجمی و چگالی تترا کلرید کربن به ترتیب برابر با ۲٤/۱Gpa و ۱۵۹۳ $^{kg}/_{m^3}$ می باشد. سرعت صوت را در این محیط بدست آورید.

حل

$$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}}=\sqrt{\frac{1/124\times10^{9}}{1593}}=840\,{}^{m}/_{s}$$

مثال ۸

سرعت صوت در هوای خشک سطح دریا به ازای $t=20^{\circ}C$ و در طبقه ی فوقانی جو به ازای $t=-20^{\circ}C$ چقدر است؟

حل در سطح دریا :

$$C=\sqrt{1/4\times287(273+20)}=343\,{}^{m}/_{s}$$

در طبقه ی فوقانی جو :

$$C=\sqrt{1/4\times287(273-20)}=319\,{}^{m}/_{s}$$

۶-٤ جریان ایزونتروپی

جریان ایزونتروپی یا بی دررو بدون اصطکاک ، جریانی آرمانی است که در جریان گازهای حقیقی نمی توان به آن دست یافت. اما به هنگام گذر جریان از شیپورها و ونتوری مترها که در آنها اثرات اصطحکاک بدلیل کوتاهی مسیر ناچیز است و انتقال گرما به دلیل تغییرات بسیار کم ذرات کم است و کوچک بودن گرادیان دما تا حدودی می توان به جریان ایزونتروپی نزدیک شد. دراین بخش راجع به جریان دائمی یک بعدی گاز کامل درکانالهای همگرا و واگرا ـ همگرا بحث می شود.

با چشم پوشی از تغییرات ارتفاع به معادله اویلر به صورت زیر در می آید:

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \qquad (۶-۲۵)$$

و معادله ی پیوستگی عبارتست از :

$$\rho AV = \text{مقدارثابت} \qquad (۲۶/۶)$$

از رابطه بالا دیفرانسیل می گیریم و سپس بر ρAV تقسیم می کنیم:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad (۶-۲۷)$$

اکنون از معادله ی (۶-۲۰) $d\rho$ را بدست می آوریم و آن را در معادله ی (۶-۲۵) جایگزین میکنیم.

$$VdV + C^2\frac{dp}{\rho} = 0 \qquad (۶-۲۸)$$

از حذف $\frac{d\rho}{\rho}$ در دو معادله ی (۶-۲۷) (۶-۲۸) نتیجه می شود:

$$\frac{dA}{dV}=\frac{A}{V}\left(\frac{v^2}{v^2}-1\right)=\frac{A}{V}(M^2-1)$$ (۶-۲۹)

توجه داریم معادله اخیر بر این فرض استوار است که جریان دائمی و بی اصطحکاک باشد.
از معادله (۶-۲۹) معلوم می شود که اگر جریان مادون صوت (M<1) باشد، مقوله dA/dv همواره منفی است. یعنی سطح کانال برای افزایش سرعت باید کاهش یابد. اما اگر m=1 باشد، $\frac{dA}{dv}=0$ و سرعت فقط تا سطح مقطع کمینه یا گلوگاه افزایش می یابد. همچنین برای اعداد ماخ بزرگتر از واحد dA/dv مثبت است برای افزایش سرعت باید سطح مقطع افزایش یابد. بنابراین سیالی که در یک منبع در حالت سکون قرار دارد، برای این که به سرعت مافوق صوت برسد باید ابتدا از داخل یک کانال همگرا و سپس از داخل یک کانال واگرا گذر کند.
اگر جریان ایزونتروپی باشد، معادله ی (۶-۱۵) را می توان به صورت زیردر آورد:

$$p=p_1p_1^{-K}\rho^{K}$$ (۶-۲۸)

با مشتق گیری از رابطه ی بالا و جایگزین dp در معادله ی (۶-۲۵) نتیجه می شود:

$$VdV+K\frac{P_1}{\rho_1^{K}}\rho^{K-2}d\rho=0$$ (۶-۲۹)

اکنون انتگرال می گیریم:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{K}{K-1}\frac{P}{\rho_1^{K}}\rho^{K-1}=$$ مقدار ثابت (6/30)

و یا

$$\frac{v_1^{\ 2}}{2}+\frac{k}{k-1}\ \frac{p_1}{\rho_1}=\frac{V_2^{\ 2}}{2}+\frac{K}{K-1}\ \frac{P_2}{\rho_2}$$

(۶-۳۱)

اگر این معادله بر حسب دما بیان شود بسیار مفید است ($P=\rho RT$):

$$\frac{V_1^{2}}{2}+\frac{K}{K-1}RT_1=\frac{V_2^{2}}{2}+\frac{K}{K-1}RT_2$$

(۶-۳۲)

برای جریان بی دررویی از یک منبع با شرایط P0 و p0 وT0 در هر سطح مقطعی داریم :

$$\frac{V^{\ 2}}{2}=\frac{KR}{K-1}(T_0-T)$$

(۶-۳۳)

اکنون روابط قبلی را بر حسب عدد ماخ C2=KRT می نویسیم ، ابتدا داریم:

$$M^2=\frac{v^2}{c^2}=\frac{2kR(T\circ-T)}{(K-1)kRT}=\frac{2}{K-1}\left(\frac{T\circ}{T}-1\right)$$

$$\frac{T\circ}{T}=1+\frac{K-1}{2}M^2$$

(۶-۳٤)

به کمک این معادله و معادله ی (۱۶-۶) به معادلات جریان ایزونتروپی می رسیم:

$$\frac{P\circ}{P}=\left(1+\frac{K-1}{2}M^2\right)^{K/(K-1)}$$

(۶-۳۵)

و

$$\frac{\rho_\circ}{\rho}=\left(1+\frac{K-1}{2}M^2\right)^{1/(K-1)}$$

(۶–۳۶)

هنگامیکه سرعت برابر سرعت صوت شود، شرایط در گلوگاه را شرایط بحرانی گویند و در متن این شرط را با علامت ستاره نشان می دهیم. یعنی به ازای $c^*=v^*=\sqrt{KRT}\,, M=1$ معادلات (۶–۳۴) تا (۶–۳۶) در گلوگاه در شرایط بحرانی به ازای K =۴/۱ به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{T^*}{T_\circ}=\frac{2}{K-1}=0/833$$

(۶–۳۷ الف)

$$\frac{P^*}{P_\circ}=\left(\frac{2}{K+1}\right)^{K/(K-1)}=0/528$$

(۶–۳۷ ب)

$$\frac{\rho^*}{\rho_\circ}=\left(\frac{2}{K+1}\right)^{1/(K-1)}=0/634$$

(۶–۳۷ ج)

از این روابط مشخص می شود که برای جریان هوا ، دمای مطلق تا ۱۷ درصد از مخزن تا گلوگاه کاهش می یابد. و فشار بحرانی ۸/۵۲ درصد فشار مخزن است و چگالی به حدود ۳۷ درصد کاهش می یابد.

تغییر سطح را می توان به کمک عدد ماخ و معادله پیوستگی برای شرایط بحرانی بدست آورد.

$$\rho AV = \rho^* A^* V^*$$

(۶-۳۸)

که در آن برای گلوگاه کمینه است. رابطه بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V}$$

(۶-۳۸الف)

اکنون $V^* = c^* = \sqrt{KRT^*}$, $v = cM = M\sqrt{KRT}$ پس :

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M}\left\{\frac{1+[(K-1)/2]M^2}{(k+1)/2}\right\}^{1/2}$$

(۶-۳۹)

به همین روش برای ρ داریم:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_\circ}\frac{\rho_\circ}{\rho} = \left\{\frac{1+[(k-1)/2]M^2}{(k+1)/2}\right\}^{1/(k-1)}$$

(۶-۴۰)

با جایگزینی (۶-۳۹) و (۶-۴۰) در (۶-۳۸) نتیجه می شود:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left\{\frac{1+[(K-1)/2]M^2}{(K+1)/2}\right\}^{(K+1)/2(K-1)}$$

(۶-۴۱)

معادله اخیر تغییرات سطح کانال را بر حسب عددماخ بدست می دهد. توجه داریم A/A^* هرگز نمی تواند کمتراز واحد شود و به ازای هر مقدار بزرگتر از واحد دو مقدار برای عدد ماخ بدست می آید : یکی کمتر از واحد و دیگری بزرگتر از واحد . به ازای K=۴۰/۱ معادله (۶-۴۱) به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{A}{A^*}=\frac{1}{M}\left(\frac{5+M^2}{6}\right)^3$$ (۶–۴۲)

پیشینه ی آهنگ جریان جرم $\dot{m}_m$ بر حسب مساحت گلوگاه و شرایط مخزن برابر است با :

$$\dot{m}_m = \rho^* A^* V^* = \rho_\circ \left(\frac{2}{K+1}\right)^{1/(k-1)} A^* \sqrt{\frac{kR2T_\circ}{K+1}}$$ (۶–۴۲)

اگر در این رابطه جای $\rho_\circ$ را با $\rho_\circ / RT_\circ$ عوض نتیجه می شود:

$$\dot{m}_{max} = \frac{A^* P_\circ}{T_\circ}\sqrt{\frac{k}{R}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(l+1)/(k-1)}}$$ (۶–۴۳)

اکنون به ازای k=٤/١ نتیجه می شود:

$$\dot{m}_{max} = 0/686\,\frac{A^* P_\circ}{\sqrt{RT_\circ}}$$ (۶–٤٤)

بنابراین ملاحظه می شود که آهنگ جریان جرم به طور خطی با $P_\circ, A^*$ تغییر می کند و نسبت عکس با جذر $T_\circ$ دارد.

برای جریان مادون صوت در کانال همگرا ـ واگرا ، سرعت در گلوگاه باید کمتر از سرعت صوت یا $Mt \langle 1$ باشد (زیر نویس t به معنی گلوگاه است). آهنگ جریان جرم از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\dot{m} = \rho VA = A\sqrt{2P_\circ\rho_\circ}\,\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{p_\circ}\right)^{2/k}\left[1-\left(\frac{\rho}{p_\circ}\right)^{(k-1)/k}\right]$$ (۶–٤۵)

این معادله برای هر سطح مقطعی برقرار است و مادامی که سرعت در گلوگاه مادون صوت است بکار می رود.
جدول (۲-۶) در حال مسائل که در آنها جریان ایزونتروپی و k =٤/١ می باشد بسیار مفید است.

مثال ۹

در طرحی برای کانال که بتواند عدد ماخ ۳/۱ در خروجی ایجاد کند ، مورد نظر است. به ازای فشار $p_{\circ} = 90\mathrm{kPa}$ و دمای $t_{\circ} = 25^{\circ}C$ آهنگ جریان جرم برابر $1\ {}^{kg}\!/\!{}_{s}$ است. مطلوبست محاسبه ی (الف) سطح مقطع گلوگاه (ب) سطح مقطع خروجی (ج) سرعت، فشار و دما و چگالی خروجی

جدول ۲-۶ رابطه های ایزونتروپی یک بعدی (برای گاز کامل با k=٤/١)

M	A/A^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0	M	A/A^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0.00	.....	1.000	1.000	1.000	0.78	1.05	0.669	0.750	0.891
0.01	57.87	0.9999	0.9999	0.9999	0.80	1.04	0.656	0.740	0.886
0.02	28.94	0.9997	0.9999	0.9999	0.82	1.03	0.643	0.729	0.881
0.04	14.48	0.999	0.999	0.9996	0.84	1.02	0.630	0.719	0.876
0.06	9.67	0.997	0.998	0.999	0.86	1.02	0.617	0.708	0.871
0.08	7.26	0.996	0.997	0.999	0.88	1.01	0.604	0.698	0.865
0.10	5.82	0.993	0.995	0.998	0.90	1.01	0.591	0.687	0.860
0.12	4.86	0.990	9.993	0.997	0.92	1.01	0.578	0.676	0.855
0.14	4.18	0.986	0.990	0.996	0.94	1.00	0.566	0.666	0.850
0.16	3.67	0.982	0.987	0.995	0.96	1.00	0.553	0.655	0.844
0.18	3.28	0.978	0.984	0.994	0.98	1.00	0.541	0.645	0.839
0.20	2.96	0.973	0.980	0.992	1.00	1.00	0.528	0.632	0.833
0.22	2.71	0.967	0.976	0.990	1.02	1.00	0.516	0.623	0.828
0.24	2.50	0.961	0.972	0.989	1.04	1.00	0.504	0.613	0.822
0.26	2.32	0.954	0.967	0.987	1.06	1.00	0.492	0.602	0.817
0.28	2.17	0.947	0.962	0.985	1.08	1.01	0.480	0.592	0.810
0.30	2.04	0.939	0.956	0.982	1.10	1.01	0.468	0.582	0.805
0.32	1.92	0.932	0.951	0.980	1.12	1.01	0.457	0.571	0.799
0.34	1.82	0.923	0.944	0.977	1.14	1.02	0.445	0.561	0.794
0.36	1.74	0.914	0.938	0.975	1.16	1.02	0.434	0.551	0.788
0.38	1.66	0.905	0.931	0.972	1.18	1.02	0.423	0.541	0.782
0.40	1.59	0.896	0.924	0.969	1.20	1.03	0.412	0.531	0.776
0.42	1.53	0.886	0.917	0.966	1.22	1.04	0.402	0.521	0.771
0.44	1.47	0.876	0.909	0.963	1.24	1.04	0.391	0.512	0.765
0.46	1.42	0.865	0.902	0.959	1.26	1.05	0.381	0.502	0.759
0.48	1.38	0.854	0.893	0.956	1.28	1.06	0.371	0.492	0.753
0.50	1.34	0.843	0.885	0.952	1.30	1.07	0.361	0.483	0.747
0.52	1.30	0.832	0.877	0.949	1.32	1.08	0.351	0.474	0.742
0.54	1.27	0.820	0.868	0.945	1.34	1.08	0.342	0.464	0.736
0.56	1.24	0.808	0.859	0.941	1.36	1.09	0.332	0.455	0.730
0.58	1.21	0.796	0.850	0.937	1.38	1.10	0.323	0.446	0.724
0.60	1.19	0.784	0.840	0.933	1.40	1.11	0.314	0.437	0.718
0.62	1.17	0.772	0.831	0.929	1.42	1.13	0.305	0.429	0.713
0.64	1.16	0.759	0.821	0.924	1.44	1.14	0.297	0.420	0.707
0.66	1.13	0.747	0.812	0.920	1.46	1.15	0.289	0.412	0.701
0.68	1.12	0.734	0.802	0.915	1.48	1.16	0.280	0.403	0.695
0.70	1.09	0.721	0.792	0.911	1.50	1.18	0.272	0.395	0.690
0.72	1.08	0.708	0.781	0.906	1.52	1.19	0.265	0.387	0.684
0.74	1.07	0.695	0.771	0.901	1.54	1.20	0.257	0.379	0.678
0.76	1.06	0.682	0.761	0.896	1.56	1.22	0.250	0.371	0.672

حل

(الف) از معادله ی (٤٤–۶) داریم:

$$A^* = \frac{\dot{m}_{\max}\sqrt{RT}}{0/686\,p\circ} = \frac{(1)\sqrt{287(273+25)}}{0/686(90000)} = 0/00474 m^2$$

(ب) با استفاده از جدول (۲–۶) سطح مقطع خروجی محاسبه می شود:

$$\frac{A}{A^*} = 4/23 \rightarrow A = 423(0/00474) = 0/0200 m^2$$

(ج) بار دیگر از جدول مزبور داریم

$$\frac{p}{p\circ} = 0/027 \quad , \quad \frac{\rho}{\rho.} = 0/076 \quad , \quad \frac{T}{T\circ} = 0/357$$

با استفاده از قانون گاز کامل داریم

$$\rho. = \frac{P\circ}{RT\circ} = \frac{90000}{(287)(273+25)} = 1/0523 \, {}^{kg}\!/\!_{m^3}$$

بنابراین مقادیر خروجی بدست می آید:

p =۰۲۷/۰(۹۰۰۰۰)=٤۳/۲kPa
T=۳۵۷/۰(۲۷۳+۲۵)=۳۸۶/۱۰۶K=−۶/۱۶۶ $^\circ$C
ρ **=۰/ ۰۷۶(۰۵۲۳/۱)=۰۸۰۰/۰** ${}^{kg}\!/\!_{m^3}$

و سرانجام با استفاده از معادله ی پیوستگی ، سرعت خروجی را محاسبه می کنیم

$$V = \frac{\dot{m}_{\max}}{\rho} = \frac{1}{(0/08)(0/020)} = 925 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

مثال ۱۰

تونل واگرا ـ همگرایی هوا که سطح مقطع گلوگاه آن Cm^2 ۳۷۲ و سطح مقطع خروج آن Cm^2 ۹۲۹ است، در نظر بگیرید. فشار مخزان ۲۱۰kPa و در حال آن $^\circ C$ ۱۶ است. محدوده های عدد ماخ و فشار خروجی را برای جریان ایزونتروپی بدست آورید.

حل :

با استفاده از جدول (۲–۶) یا معادله ی (٤۲–۶) ۲٤ /۰ و M=٤٤/۲ بدست می آید. به ازای هر کدام از این عدد ماخ در خروجی شرایط بحرانی وجود دارد . بنابراین برد عدد ماخ برای جریان ایزونتروپی از ۰ تا ۲٤/۰ و تک تعداد ٤٤/۲ است. اما از همین جدول یا معادله ی (۳۷–۶ب) به ازای M=٤٤/۲ و p =٤٤/۱۳kPa و m=۲٤/۰ و p=۸/۲۰۱kPa می باشد. برد فشار پایین است از ۸/۲۰۱kPa تا ۲۱۰ می باشد و به ازای نقطه ای منحصر بفرد برابر با ٤٤/۱۳ kPa است.

از معادله ی (٤٤–۶) پیشینه آهنگ جریان جرم بدست می آید.

$$\dot{m}_{max} = \frac{0/686 \times 0/0372 \times 210000}{\sqrt{287(273+16)}} = 18/61 \, {}^{kg}\!/_{s}$$

مثال ۱۱–۶

کانال همگرا ـ واگرا در مسیر پایین دست جریان هوای خروجی از مخزنی با گلوگاهی به قطر ۵۰mm قرار دارد. آهنگ جریان جرم را به ازای $p_\circ$=۸/۰Mpa و $t_\circ = 33^\circ C$ و P=۵/۰ در گلوگاه به دست می آید.

حل : داریم

$$\rho_\cdot = \frac{P_\circ}{KT} = \frac{800000}{(287)(273+33)} = 9/109 \, {}^{kg}\!/_{m^3}$$

از معادله ی (۴۵-۶) نتیجه می شود:

$$\dot{m}=\frac{\pi}{4}(0/05)^2\sqrt{2(800000)(9/109)\frac{1/4}{1/4-1}\left(\frac{5}{8}\right)^{2/1/4}}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{8}\right)\frac{0/4}{1/4}}=3/554\ \ kg/s$$

۵-۶ امواج متحرک و خطوط ریلی و فانو

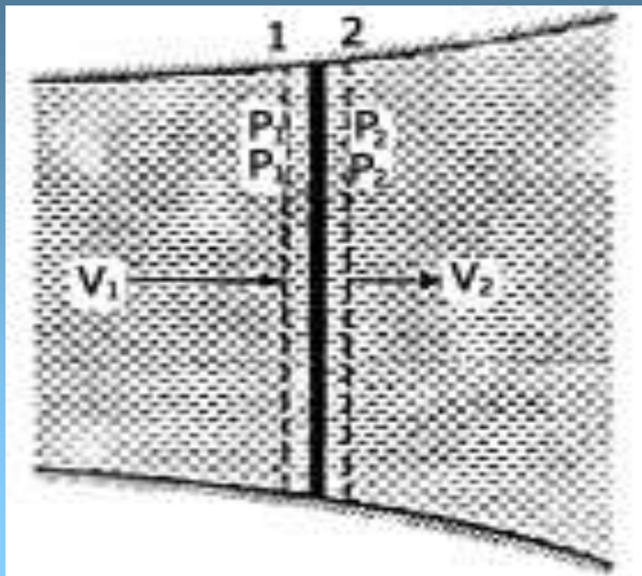
در جریان یک بعدی تنها نوع موج شوکی که پیش می آید موج سقوط تراکم عمودی است. در بحث کامل جریان همگرا ـ واگرا برای برد فشار پایین دست باید امواج شوک مایل که در خروجی بوجود می آید، در نظر گرفته شود. در بخش قبلی مربوط به جریان ایزونتروپی نشان داده شده که در کانال همگرا ـ واگرا به ازای برد فشار پایین است. جریان به مادون صوت است و در قسمت واگرا برای جریان مافوق صوت اتفاق می افتد. یعنی در جریان ایزونتروپی، موج شوک در جریان مافوق صوت اتفاق می افتد و جریان را به جریان مادون صوت تبدیل می کند. ضخامت موج شوک بسیار کوچک و از مرتبه‌ی پویش متوسط آزاد مولکول گاز است. با توجه به شکل (۲-۶)، معادلات حجم کنترل برای جریان بی دررو به صورت زیر می باشد:

پیوستگی : $$G=\frac{m^{\circ}}{A}=\rho_1 V_1=\rho_2 V_2 \qquad (۶-۴۶)$$

انرژی : $$\frac{V_1^2}{2}+h_1=\frac{V_2^2}{2}+h_2=h_o=\frac{V^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho} \qquad (۶-۴۷)$$

توجه داریم که در آن h آنتالپی است و از رابطه‌ی $h=u+\frac{p}{\rho}=C\rho T$ بدست می آید و ho مقدار آنتالپی در حال سکون است.

معادله‌ی (۶-٤۷) برای سیالات واقعی و برای بالا است و پایین است جریان برقرار می باشد.
شکل ۲-۶ موج شوک تراکمی عمودی



در بررسی دقیق تر طبیعت تغییر جریان در فاصله‌ی کوتاه عرض موج شوک که در آن سطح را می توان ثابت فرض کرد، معادلات پیوستگی و انرژی را برای جریان دائمی، بی اصطحکاک و بی دررو ترکیب می کنیم. اگر در شرایط بالا است جریان P_1 , V_1 , ρ_1 ثابت باشد، یک منحنی برای تمام شرایط ممکن در مقطع ۲ رسم می کنیم.

خطوطی را که برای جریان جرم ثابت G رسم می شود، خطوط فانو می نامند. اغلب این منحنی را در دستگاه آنتروپی ـ آنتالپی رسمی می کنند (نمودار hs).

از بخش ۱، معادله‌ی آنتروپی گاز کامل به صورت زیر است:

$$S - S_1 = C_V \ln[\frac{P}{P_1}(\frac{\rho_1}{\rho})^k] \qquad (۶\text{-}٤۸)$$

همچنین از معادله‌ی (۶–۴۷)، برای جریان بی دررو بدون تغییر ارتفاع داریم:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2} \tag{۶–۴۹}$$

و معادله‌ی پیوستگی به ازای هیچ تغییری در سطح مقطع (معادله‌ی ۶–۴۶):

$$G=\rho V \tag{۶–۵۰}$$

اما از معادله‌ی حالت می توان بر حسب kh بر حسب P و ρ به صورت زیر بیان کرد:

$$h = C_P T = \frac{C_P P}{R\rho} \tag{۶–۵۱}$$

از حذف V, ρ, P از این چهار معادله نتیجه می شود:

$$S = S_1 + C_V \ln\left[\frac{\rho_1^K}{P_1}\frac{R}{C_V}\left(\frac{\sqrt{2}}{G}\right)^{K-1}\right] + C_V \ln[h(h_\circ - h)^{(k-1)/2}] \tag{۶–۵۲}$$

که در شکل (۶–۳) بدون مقیاس این منحنی رسم شده است. اگر بخواهیم آنتروپی پیشینه را بدست آوریم از معادله‌ی (۶–۵۲) نسبت به h مشتق می گیریم و حاصل را برابر صفر قرار میدهیم.
(مقدار پیشینه را با زیرنویس a نشان می دهیم):

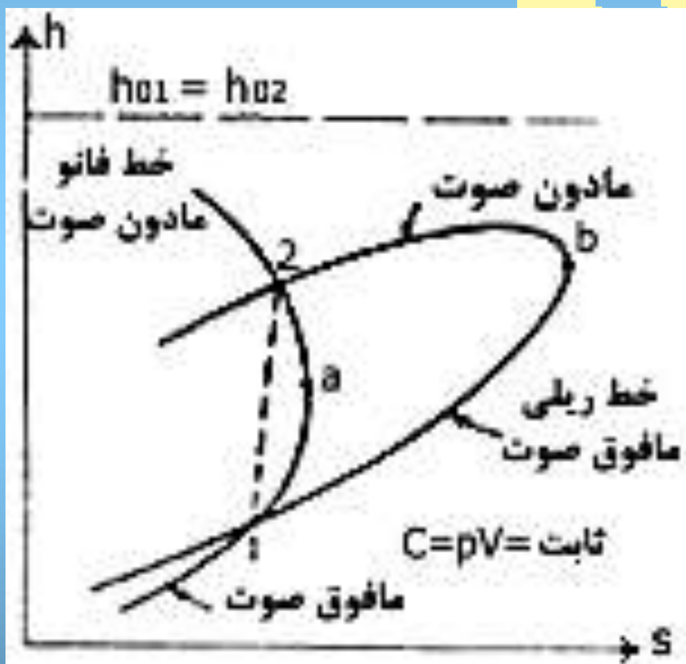
$$\frac{ds}{dh} = o = \frac{1}{ha} - \frac{k-1}{2}\frac{1}{h_o - h_a}$$ یا $$h_a = \frac{2}{k+1} h_o$$

$$h_o = \frac{K+1}{2} h_a = h_a + \frac{Va^2}{2}$$

بنابراین Va بدست می آید:

$$V_a^2 = (k-1)h_a = (k-1)C_p T_a = (k-1)\frac{KR}{k-1}T_a = KRT_a = C_a^2 \qquad (۶-۵۳)$$

شکل ۳-۶ خطوط ریلی و فانو



در نتیجه، آنتروپی پیشینه در نقطه‌ی a به ازای M=1 یا شرایط صوتی برقرار است و به ازای $h>ha$ جریان مادون صوت و $h<ha$ جریان مافوق صوت است. دو شرط، قبل و بعد از شوک باید روی خط فانو قرار گیرد . توجه شود که در بحث خطوط فانو از معادله‌ی تکانه استفاده نکرده ایم.

خطوط ریلی

شرایط قبل و بعد از شوک باید نیز در معادلات پیوستگی و تکانه صدق کنند. فرض می کنیم شرایط بالا دست جریان و سطح مقطع ثابت باشد. با استفاده از معادلات (۶-٤۸) و (۶-۵۰) و (۶-۵۱) و (۶-٤۶) خطوط ریلی بدست می آید. از حذف V در معادلات پیوستگی و تکانه نتیجه می‌شود:

$$P+\frac{G^2}{\rho}= \text{مقدار ثابت} = B \qquad (۶-۵٤)$$

اکنون P را از این معادله و معادله‌ی آنتروپی حذف می کنیم:

$$S=S_1+C_V\ln\frac{\rho_1^K}{P_1}+C_V\ln\frac{B-G^2/P}{\rho^K} \qquad (۶-۵۵)$$

آنتالپی را نیز بر حسب ρ و شرایط بالا دست جریان بیان می کنیم:

$$h=C_VT=C_V\frac{P}{RP^0}=\frac{CV}{R}\frac{1}{\rho}\left(B-{G^2}\big/{\rho}\right) \qquad (۶-۵۶)$$

از دو معادله‌ی اخیر S بر حسب h و پارامتر ρ تعیین می شود و نمودار آن در شکل (۶-۳) رسم شده است و این خط ریلی است. مقدار آنتروپی پیشینه از محاسبه ${ds}\big/{d\rho}$ و ${dh}\big/{d\rho}$ و تقسیم آن دو و برابری با صفر بدست می آید:

$$\frac{dS}{dh}=\frac{C_V}{C_P}R\rho_b\,\frac{G^2/[\rho_b(B-G^2/\rho_b)]-k}{2G^2/\rho_b-B}=\circ$$

توجه داریم باید مخرج کسر بالا مخالف صفر باشد. پس

$$k=\frac{G^2}{\rho_b\left(B-G^2/\rho_b\right)}=\frac{\rho_b^2V^2{}_b}{\rho_b p_b}$$

یا

$$V_b^2 = \frac{kPb}{\rho b} = C_b^2$$

(۶-۵۷)

یعنی M=1 می باشد. چون شرایط جریان باید روی هر دو منحنی قرار داشته باشد، بنابراین دقیقاً قبل و بعد از موج شوک، باید از یک نقطه تقاطع سریع به نقطه تقاطع دیگر تغییر کند. چون آنتروپی کاهش نمی یابد، نقطه بالا دست جریان باید در محل تقاطع با خط آنتروپی باشد. برای کلیه گازها، این تلاقی در قسمت مادون صوت، آنتروپی بزرگتر دارد. بنابراین شوک از مافوق به مادون صوت انجام می شود.

۶-۶ جریان بی در رو با اصطکاک در کانالها

ابتدا توجه داریم که در این بخش فرضهای زیر انجام می شود:

۱-گازکامل است یعنی گرمای ویژه ثابت می باشد.
۲-جریان دایمی و یک بعدی است .
۳-جریان بی در رو است .
٤-ضریب اصطحکام در سر تا سر طول لوله ثابت می باشد .
۵-قطر موثر کانال چهار برابر شعاع هیدرولیکی است (سطح مقطع تقسیم بر محیط) .
۶-تغیرات ارتفاع نا چیز است .
۷-هیچ کاری به جریان داده یا از آن گرفته نمی شود .

و معادلات کنترل عبارتند از: پیوستگی، انرژی تکانه و حالت و سطح مقطع کانال یا لوله ثابت فرض می شود. بنابراین یک ذره در انتهای بالا دست جریان درون کانال را می توان با نقطه ای روی خط فانو و با در نظر گرفتن آنتالپی سکون ho و آهنگ جریان جرم G در واحد سطح نشان داد.

همان طوری که ذره به پایین دست جریان حرکت می کند، خواص آن تغییر خواهد کرد، زیرا اصطحکاک یا بازگشت ناپذیری در جریان بی در رو باعث می شود آنتروپی همواره افزایش یابد. از این رو نقطه ای که بیانگر این ویژگی هاست در امتداد خط فانو به سوی بیشینه‌ی نقطه s حرکت می کند که در آن نقطه M=1 است. اگر کانال با شیپوره‌ی همگرا ـ واگرا جریان را هدایت کند و در آغاز جریان مافوق صوت باشد آنگاه سرعت در پایین دست جریان کاهش می یابد و همین طور بر عکس اگر جریان در آغاز مادون صوت باشد در پایین دست سرعت افزایش می یابد.

می توان طول یک لوله را با توجه به شرایط بالا دست جریان، آنچنان دقیق تعیین کرد که سرعت در پایین دست جریان لوله مساوی صوت M=1 شود. بنابراین برای لوله های کوتاه تر از این لوله، سرعت جریان در خروجی به سرعت صوت نمی رسد ولی برای لوله های طویل تر از لوله‌ی مزبور اگر جریان مافوق صوت باشد، امواج شوک و اگر جریان مادون صوت باشد، خفگی بوجود می آید. خفگی یعنی حالتی است که در آن آهنگ جریان جرم مشخص انجام نمی گیرد و جریان کمتری اتفاق می افتد.

در جدول (۳-۶) تغییر خواص گاز را در جریان بی در رو از درون کانالی با سطح مقطع ثابت نشان می دهد. توجه داریم در کانال با سطح مقطع ثابت، سرعت نمی تواند به تدریج از مادون صوت به مافوق صوت و برعکس تغییر کند.

معادله‌ی تکانه را برای طول δx کانال می نویسیم (شکل ٤-۶):

$$PA - CP + \frac{dP}{dx}\delta x)A - \varsigma_o \pi D \delta_x = \rho VA(V + \frac{dv}{dx}\delta x - V)$$

و یا

$$dp + \frac{3\varsigma_o}{D}dx + \rho V dv = o$$

(۶-۵۸)

اگر ς_o را بر حسب ضریب اصطکاک دارسی ـ وایسباخ f بنویسیم:

$$\varsigma_o = \frac{\rho f V^2}{8} \qquad (۶-۵۹)$$

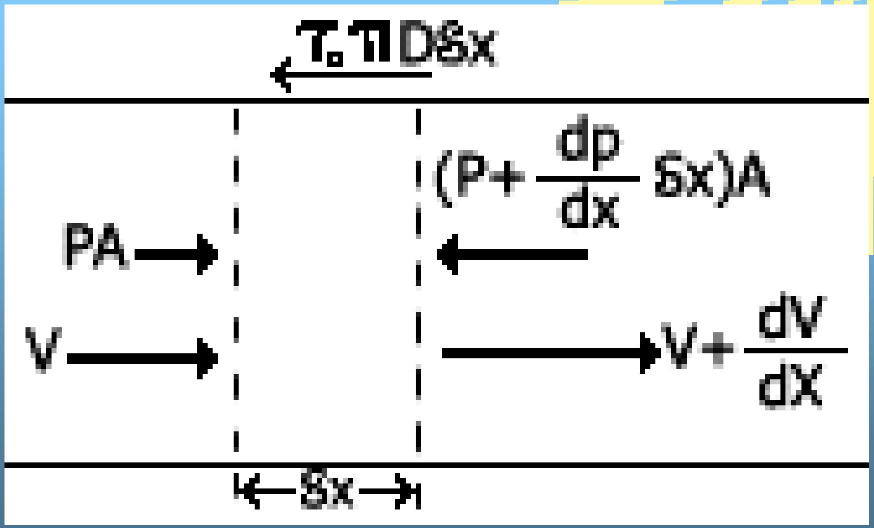
آنگاه نتیجه می شود

$$dp + \frac{fpv^2}{2D}dx + \rho V dv = o \qquad (۶-۶۰)$$

اگر f ثابت باشد، این معادله را می توان به معادله ای برحسب x به طوری که تابعی از عدد N باشد، تبدیل کرده برای این عمل، معادله‌ی بالا بر P تقسیم می کنیم:

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{2D}\frac{\rho V^2}{P}dx + \frac{\rho V}{P}dv = o \qquad (۶-۶۱)$$

شکل ٤-۶ کاربرد معادله‌ی تکانه



اکنون هر جمله را بر حسب M بیان می کنیم. درجمله‌ی میانی با استفاده از تعریف $M = {}^{V}\!/_{C}$ داریم:

$$V^2 = M^2 \frac{kp}{\rho} \qquad \text{(۶-۶۲ الف)}$$

یا

$$\frac{\rho V^2}{P} = kM^2 \qquad \text{(۶-۶۲ ب)}$$

همچنین معادله‌ی (۶-۶۲ الف) را به صورت زیر در می آوریم:

$$\frac{\rho V dv}{P} = kM^2 \frac{dV}{V} \qquad \text{(۶-۶۳)}$$

اکنون $\frac{dV}{V}$ را بر حسب M بیان می کنیم، از معادله‌ی انرژی زیر مشتق می گیریم:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2} = CpT + \frac{V^2}{2} \qquad \text{(۶-۶٤)}$$

یعنی

CpdT+ VdV=0 (۶-۶۵)

معادله‌ی بالا را بر $V^2 = M^2 KRT$ تقسیم می کنیم تا نتیجه شود.

$$\frac{C_P}{R}\frac{1}{kM^2}\frac{dT}{T} + \frac{dv}{V} = o \qquad \text{(۶-۶۶)}$$

اما $C_P R = {}^{K}\!/_{(k-1)}$ پس

$$\frac{dT}{T} = -M^2(k-1)\frac{dV}{V} \qquad \text{(۶-۶۷)}$$

همچنین با مشتق گیری از $V^2 = M^2 KRT$ و تقسیم آن بر V^2 نتیجه می شود:

$$2\frac{dV}{V} = 2\frac{dM}{M} + \frac{dT}{T}$$ (۶-۶۸)

اکنون $\frac{dT}{T}$ از دو معادله‌ی اخیر حذف می کنیم:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM/M}{[(k-1)/2]M^2 + 1}$$ (۶-۶۹)

و سرانجام از معادله‌ی اخیر و معادله‌ی (۶-۶۳) $\frac{dV}{V}$ را حذف می کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{\rho V}{P} dv = \frac{KMdM}{[(k-1)/2]M^2 + 1}$$ (۶-۷۰)

و بالاخره $\frac{dP}{P}$ را بر حسب M بیان می کنیم. از P=ρRT وC=ρV داریم.

(۶-۷۱)

PV=GRT

با مشتق گیری از آن داریم

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$ (۶-۷۲)

و از معادلات (۶-۶۷) و (۶-۶۹) استفاده کنیم تا $\frac{dT}{T}$ و $\frac{dV}{V}$ حذف شوند:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{(k-1)M^2 + 1}{[(k-1)/2]M^2 + 1}\frac{dM}{M}$$ (۶-۷۳)

اکنون با جایگزینی معادلات (۶-۶۲) و (۶-۷۰) و (۶-۷۳) در معادله‌ی (۶-۶۱) بدست می آید:

$$\frac{f}{D}dx = \frac{2(1-M^2)}{kM^3\{[k-1)/2]M^2+1}\quad dM \qquad (۶\text{-}۷۴\ \text{الف})$$

و یا

$$\frac{f}{D}dx = \frac{2dM}{kM^3} - \frac{k+1}{k}\frac{dM}{M\{[(k-1)/2]M^2+1\}} \qquad (۶\text{-}۷۴\ \text{ب})$$

اکنون از معادله‌ی (۶-۷۴) می توان انتگرال گرفت و با فرض (x=o , $M=M_o$) و (X=ℓ , M=M) نتیجه می شود:

$$\frac{f\ell}{D} = -\frac{1}{KM^2}\Bigg|_{M_o}^{M} - \frac{K+1}{2K}\ln\frac{M^2}{[(k-1)/2]M^2+1}\Bigg|_{M_o}^{M} \qquad (۶\text{-}۷۵\ \text{الف})$$

و یا

$$\frac{f\ell}{D} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{M_o^2}-\frac{1}{M^2}\right)+\frac{k+1}{2k}\ln\left[\left(\frac{M_o}{M}\right)^2\frac{(k-1)M^2+2}{(k-1)M_o^2+2}\right] \qquad (۶\text{-}۷۵\ \text{ب})$$

به ازای K =۱/٤ معادله‌ی بالا به صورت زیر در می آید:

$$\frac{f\ell}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_o^2}-\frac{1}{M^2}\right)+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{M_o}{M}\right)^2\frac{M^2+5}{M_o^2+5}\right] \qquad (۶\text{-}۷۶)$$

اگر M_o بزرگتر از ۱ باشد، M نمی تواند کمتر از ۱ شود و برعکس اگر M_o کمتر از ۱ باشد، M نمی تواند بزرگتر از ۱ شود. برای شرایط دومی M=1 و K =۱/٤ داریم:

$$\frac{fL_{\max}}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_o^2}-1\right)+\frac{6}{7}\ln\frac{6M_o^2}{M_o^2+5} \qquad (۶\text{-}۷۷)$$

مثال ۱۲

هوا از درون لوله ای به قطر داخلی ۵۰ میلی متر و f =۰/۰۲ جریان دارد. اگر عدد ماخ در ورودی لوله برابر با ۰/۳ باشد. حداکثر طول لوله را محاسبه کنید.

حل

از معادله‌ی (۷۷-۶) داریم:

$$\frac{0/02}{0/05}L_{\max} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{0/3^2}-1\right)+\frac{6}{7}\ln\frac{6\times 0/3^2}{0/3^2+5}$$

پس

Lmax=13/25 m

با انتگرال گیری، فشار و سرعت دما را نیز می توان بر حسب عدد ماخ بیان کرد. برای این که این عمل آسان شود، معادلات مزبور را بین شرایط بالا دست جریان و شرایطی که در آن M=1 باشد و با *P, *T, *V نشان داده شده است بدست می آوریم:

$$\frac{P^*}{P_o} = M_o\sqrt{\frac{(k-1)M_o^2+2}{k+1}} \qquad (۶-۷۸)$$

$$\frac{V^*}{V_o} = \frac{1}{M_o}\sqrt{\frac{(k-1)M_o^2+2}{k+1}} \qquad (۶-۷۹)$$

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{(k-1)M_o^2+2}{k+1} \qquad (۶-۸۰)$$

مثال ۱۳

در بالا دست جریان درون لوله ای به قطر داخلی ۱۰۰mm و ۰/۰۲ = f هوا با فشار ۱۰۰kPa و t=۱۶°C و عدد ماخ مساوی ۳ جریان دارد. مقادیر V^*, P^*, L_{max} , T^* را محاسبه کنید.

حل

از معادله‌ی (۶-۷۷) داریم:

$$\frac{0/02L_{\max}}{0/1}=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{6}-1\right)+\frac{6}{7}\ln\frac{6\times 3^2}{3^2+5}$$

پس

L_{max}= ۶۱/۲ m

سرعت ورودی برابر است با:

$$V=\sqrt{KRT}M=$$

$$=\sqrt{1/4\times 287(273+16)}\times 3=1022\,{}^{m}\!/_{s}$$

از معادله‌ی (۶-۷۸) داریم:

$$\frac{p^*}{100000}=3\sqrt{\frac{0/4\times 3^2+2}{2/4}}=4/583\rightarrow P^*=458kPa$$

و از معادله‌ی (۶-۷۹) نتیجه می شود:

$$\frac{V^*}{1022}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{0/4\times 3^2+2}{2/4}}=0/509\rightarrow V^*=520\,{}^{m}\!/_{s}$$

و سرانجام از معادله‌ی (۶-۸۰) داریم:

$$\frac{T^*}{289}=\frac{0/4\times 3^2+2}{2/4}=\frac{7}{3}\rightarrow T^*=674k$$

مثال ۱٤

با توجه به مثال ۱۳ مقادیر Po′ , To′, Vo′ و L را در جایی که M=۰/۲ است بدست آورید.

حل همان محاسبات مثال قبلی را انجام می دهیم ولی M=۲ می گیریم.

$$\frac{0/02}{0/1}L_{\max} = \frac{5}{7}(\frac{1}{4}-1)+\frac{6}{7}\ln\frac{6\times 2^2}{2^2+5}$$

و یا **L_{max}=۵۲۶/۱m**

بنابراین فاصله‌ی مقطعی که M=2 تا قسمت بالا دست جریان برابر است با

۶۱/۲-۵۳/۱=۰۸/۱ m

برای محاسبه‌ی To′, Vo′, Po′ داریم

$$\frac{458000}{P_o'} = 2\sqrt{\frac{0/4\times 2^2+2}{2/4}} = 2/45 \rightarrow P_o' = 187kPa$$

$$\frac{520}{V_o'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0/4\times 2^2+2}{2/4}} = 0/6124 \rightarrow V_o' = 849\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$\frac{674}{T_o} = \frac{0/4\times 2^2+2}{2/4} = \frac{3}{2} \rightarrow T_o' = 449k$$

۶-۷ جریان بی اصطکاک داخل کانالها با انتقال گرما

در این بخش جریان دائمی گاز کامل را داخل کانالی با سطح مقطع ثابت بررسی می کنیم. فرض می شود اصطکاک وجود نداشته باشد و هیچ کاری روی جریان یا توسط جریان انجام نگرفته باشد. معادلات لازم در تجزیه و تحلیل این به قرار زیر است.

پیوستگی $$G = \frac{m}{A} = \rho V$$ (۶-۸۱)

تکانه $$P + \rho V^2 = \text{مقدار ثابت}$$ (۶-۸۲)

انرژی $$q_H = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$$ (۶-۸۳)

$$= C_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = C_p (T_{o2} - T_{o1})$$

T_{o1} , T_{o2} دماهای سکون ایزونتروپی است یعنی: دماهای مقطعی که در آن جریان به طور ایزونتروپی به حالت سکون درآید.

خط ریلی که از حل معادلات تکانه و پیوستگی برای قطع ثابتی با چشم پوشی از اصطحکاک بدست می آید، بسیار مفید است. ابتدا V را در معادلات (۶-۸۱) و (۶-۸۲) حذف می کنیم. داریم.

$$P + \frac{G^2}{\rho} = \text{مقدار ثابت}$$ (۶-۸۴)

که همان معادله‌ی (۶-۵٤) است و نمودار آن مانند شکل (۶-۵) خواهد شد.
چون هیچ افقی نداریم، بنابراین آنتروپی زمانی افزایش می یابد که گرما اضافه شود و در نتیجه باید خواص گاز مطابق شکل (۶-۵) تغییر کند. یعنی به طرف نقطه ای که آنتروپی بیشینه را نشان می دهد، حرکت کند. در نقطه ای که آنتروپی حداکثر است، به ازای تغییرات کوچک h، آنتروپی تغییر نمی کند و شرایط ایزونتروپی در این نقطه بکار می رود. سرعت صوت در این شرایط از معادله‌ی $C = \sqrt{dP/d\rho}$ بدست می آید. از معادله‌ی (۶-۸٤) دیفرانسیل می گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{\rho^2} = V^2 \qquad (۶\text{-}۸۵)$$

بنابراین روی خط ریلی درنقطه ای که آنتروپی بیشینه است $V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ و M=1 خواهد شد یعنی شرایط صوتی برقرار است.
از معادله‌ی (۶-۸۳) ملاحظه می شود که افزایش در فشار سکون ایزونتروپی معیاری در مقدار گرمای اضافه شده می باشد. از رابطه‌ی گاز کامل و $V^2 = M^2 KRT$ و پیوستگی داریم

$$PV = GRT, \; pV^2 = Kpm^2$$

اکنون از معادله‌ی تکانه داریم

$$P_1 + KP_1 M_1^2 = P_2 + KP_2 M_2^2$$

و یا

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + KM_2^2}{1 + KM_1^2} \qquad (۶\text{-}۸۶)$$

و در حالت $P_2 = P*$ و M2=1 داریم.

$$\frac{P}{P*} = \frac{1+K}{1+KM^2}$$

(۶–۸۷)

که در آن P فشار هر نقطه ی کانال و M عدد ماخ همان نقطه است. در حالت مادون صوت، با افزایش M به سمت راست، P باید کاهش یابد و در حالت مافوق صوت، با کاهش M به سمت راست، P باید افزایش یابد.

در ادامه‌ی بحث، از معادله‌ی انرژی استفاده می کنیم.

$$CPT_o = \frac{KR}{K-1}T_o = \frac{KR}{K-1}T + \frac{V^2}{2}$$

که در آن T_o دمای سکون ایزونتروپی و T دمای جریان آزاد همان مقطع است. معادله‌ی بالا را در مقطع ۱ بکار می بریم، پس از تقسیم بر $KRT_1/(K-1)$ داریم.

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 1 + (K-1)\frac{M_1^2}{2}$$

(۶–۸۸)

و همین طور در مقطع ۲:

$$\frac{T_{o2}}{T_2} = 1 + (K-1)\frac{M_2^2}{2}$$

(۶–۸۹)

اگر دو معادله اخیر را بر هم تقسیم کنیم:

$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2}$$

(۶–۹۰)

اکنون ثبت $\frac{T_1}{T_2}$ را بر حسب اعداد ماخ بدست می آوریم:

قانون گاز کامل را برای دو حالت ۱ و ۲ می نویسیم و بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{\rho_2}{\rho_1}$$ (۶–۹۱)

از پیوستگی داریم $\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}$ و از تعریف عدد ماخ

$$M_1=\frac{V_1}{\sqrt{KRT_1}}$$ و $$M_2=\frac{V_2}{\sqrt{KRT_2}}$$

بنابراین

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

پس

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$ (۶–۹۲)

از دو معادله‌ی (۶–۹۱) و (۶–۹۲) $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ را حذف می کنیم تا بدست آید:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}\right)^2$$ (۶–۹۳)

با جایگزینی این معادله در (۶–۹۰) نتیجه می شود:

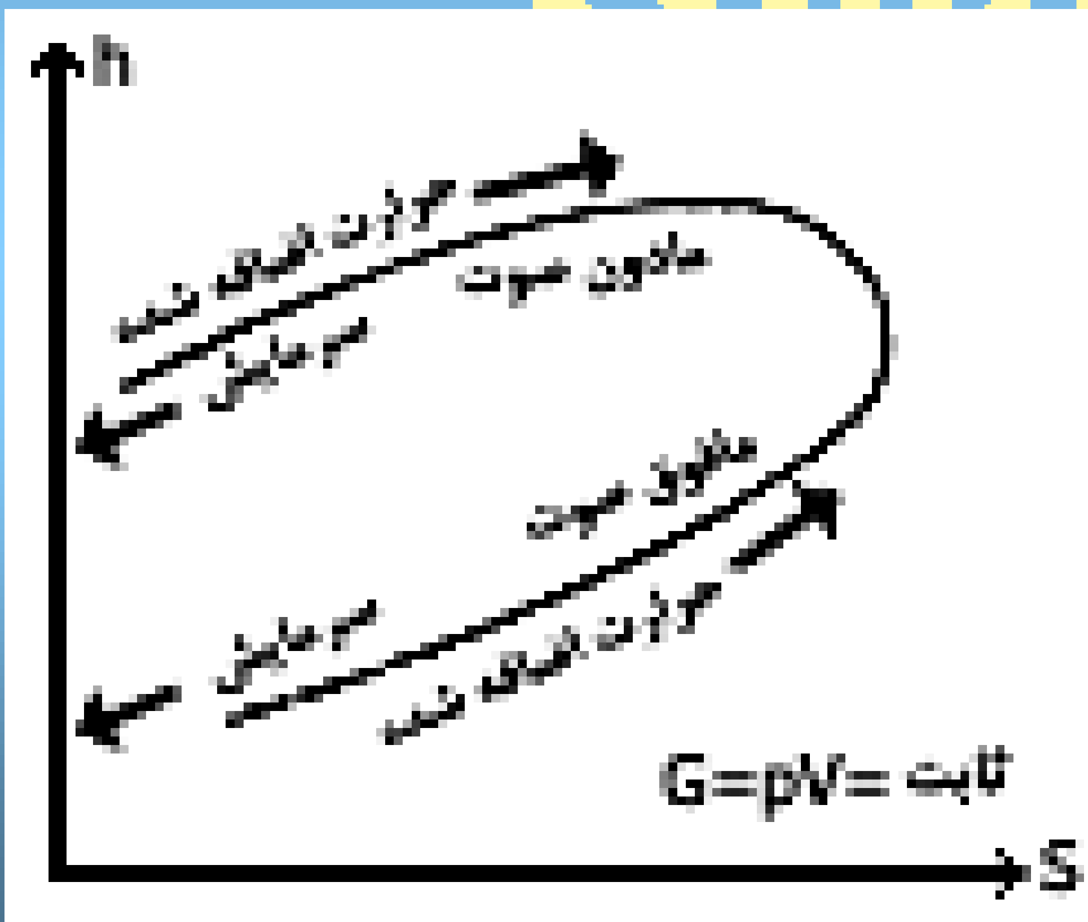
$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}}=\left(\frac{M_1}{M_2}\cdot\frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}\right)^2\frac{2+(k-1)M_1^2}{2+(k-1)M_2^2}$$ (۶–۹٤)

اگر این معادله برای مقطع پایین دست جریان به ازای $T_{o2}=T_o^*$ و $M_2=1$ بکار رود و زیرنویس را برای مقطع بالادست جریان حذف کنیم، بدست می آید:

$$\frac{T_o}{T_o^*}=\frac{M^2(k+1)[2+(k-1)M^2]}{(1+kM^2)^2} \qquad (۶-۹۵)$$

تغییرات خواص جریان در جدول (۶) آمده است.

شکل ۵-۶ خط ریلی



جدول ٤-٦ روند تغییرات خواص

_ _ _ _ _ _ ؟ _ _ _ _

مثال ۱۵

هوا با $V_1 = 91 m/s$ و P=280kPa و t=16°c در داخل کانالی به قطر ۱۰۰mm جریان دارد. اگر بخواهیم در خروجی شرایط صوتی داشته باشیم، چه مقدار انتقال گرما در واحد جرم لازم می باشد؟ فشار، دما و سرعت را در خروجی تعیین کنید.

حل

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{KRT_1}} = \frac{91}{\sqrt{1/4 \times 287(273+16)}} = 0/267$$

دمای سکون ایزونتروپی در ورودی برابر است با:

$$T_{o1} = T_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right) = 289(1+0/2\times 0/267^2) = 293k$$

دمای سکون در خروجی برابر است با:

$$T_o * = \frac{T_o(1+kM^2)^2}{(k+1)M^2[2+(k-1)M^2]}$$

$$= \frac{293(1+1/4\times 0/267^2)^2}{2/4\times 0/267^2[2+0/4\times 0/267^2]} = 1021K$$

گرمای انتقالی از یک کیلوگرم هوای جاری برابر است با:

$$q_H = C_p(T_o * - T_{o1}) = 1004(1021-293) = 731\ kJ/kg$$

و فشار خروجی (معادله‌ی ۸۷-۶):

$$P* = P\frac{1+kM^2}{k+1} = \frac{280}{2/4}(1+1/4\times 0/267^2) = 128/3\ kPa$$

و دما (معادله‌ی ۹۳-۶):

$$T^*=T\left[\frac{1+kM^2}{(k+1)M}\right]^2=289\left[\frac{1+1/4\times0/267^2}{2/4\times0/267}\right]^2=851/3k$$

و سرعت در خروجی:

$$V^*=C^*=\sqrt{kRT^*}=\sqrt{1/4\times287\times851/3}=585\,{}^{m}\!/_{s}$$

مثال ۱۶

با توجه به مثال قبلی فشار و دما و سرعت را در جایی که M=۷/۰ است محاسبه کنید.

حل

از معادله‌ی (۸۷-۶) داریم:

$$P=P^*\frac{k+1}{1+kM^2}=\frac{128/3\times2/4}{1+1/4\times0/7^2}=182/6\ kPa$$

و از معادله‌ی (۹۳-۶) دما را محاسبه می کنیم:

$$T=T^*\left[\frac{(k+1)M}{1+kM^2}\right]^2=851/3\left[\frac{2/4\times0/7}{1+1/4\times0/7^2}\right]=845\ k$$

و سرانجام سرعت را بدست می آوریم.

$$V=M\sqrt{KRT}=0/7\sqrt{1/4\times287\times845}=407/8\,{}^{m}\!/_{s}$$

۸-۶ چکیده

رابطه‌ی گاز کامل بصورت P=ρRT به کمک انرژی داخل و از آن گرمای ویژه در حجم ثابت

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{k-1}$$

گرمای ویژه در فشار ثابت

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \frac{k}{k-1}R$$

و نسبت گرمایی ویژه به صورت زیر تعریف می شود.

$$K = {C_P}\big/{C_V}$$

بدست می آید.

رابطه‌ی آنتروپی برای این گازها به صورت زیر است.

$$S_2 - S_1 = C_V \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1}\right] = C_V \ln\left[\frac{P_2}{P_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k}\right]$$

$$= C_V \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^k \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{1-k}\right]$$

رابطه‌ی فرآیند ایزونتروپی به صورت زیر است:

$$\frac{P_1}{\rho_1^k} = \frac{P_2}{\rho_2^k}$$

و فرآیند پلی تروپی با رابطه‌ی زیر تعریف می شود:

$\dfrac{P}{\rho^n}$ = مقدار ثابت

معادله‌ی سرعت صوت از رابطه‌ی مشخص می شود:

$$C = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{{k}\big/{\rho}} = \sqrt{KRT}$$

و مدول کشسانی حجمی چنین تعریف می شود:

$$K = -\frac{dP}{dV/V}$$

و عدد ماخ $M = V/C$ است.

معادلات جریان ایزونتروپی به صورت زیر می باشد.

$$\frac{P_o}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

پیشینه‌ی آهنگ جریان جرم از رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{m}_{\max} = A^* \frac{P_o}{T_o} \sqrt{\frac{K}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}$$

معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر تعریف می شود:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 v_1 = \rho_2 V_2$$

و معادله‌ی انرژی چنین می باشد:

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2 = h_o = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}$$

f ضریب اصطحکاک دارسی ـ وایسباخ از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$\varsigma_o = \frac{\rho f v^2}{8}$$

و رابطه‌ی حداکثر طول لوله را می توان چنین محاسبه کرد:

$$\frac{fL_{\max}}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_o^2} - 1\right) + \frac{6}{7}\ln\frac{6M_o^2}{M_o^2 + 5}$$

تست های فصل ۶

۱-۲-۶ گرمای ویژه در حجم ثابت با کدام رابطه تعریف می شود:

الف) KC_p ب) $\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P$ ج) $\left.\frac{\partial T}{\partial u}\right)_V$ د)√ $\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$

۲-۲-۶ گرمای ویژه در فشار ثابت گاز کامل برابر است با:

الف) KC_v ب)√ $\left.\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$ ج) $\frac{h_2 - h_1}{T_2 - T_1}$ د) $\frac{\Delta u + \Delta(p/\rho)}{\Delta T}$

۳-۲-۶ آنتالپی گاز کامل:

الف) همواره به علت افت افزایش می یابد.

ب) فقط به فشار بستگی دارد.

√(ج) فقط به دما بستگی دارد.

د) اگر انرژی داخلی کاهش یابد، ممکن است افزایش یابد.

٤-۲-۶ C_p و C_v با کدام رابطه به یکدیگر مربوط می شود؟

√(الف) $k = C_P/C_V$ ب) $k = C_P C_V$ ج) $k = C_V/C_P$ د) $C_P = (C_V)^k$

۵-۲-۶ اگر $C_P = 1/26\, {}^{kJ}\!/_{kg.K}$ و k =۶۶/۱ باشد Cv بر حسب ${}^{J}\!/_{kg.K}$ برابر است با:

الف) ۷۶/۰ ب) ۰۹/۲ ج)√ ۷۶۰ د) ۲۰۹۰

۶-۲-۶ اگر $C_V = 1/26\, {}^{kg}\!/_{kg.K}$ و ۳۳/۱= k باشد، ثابت گاز بر حسب ژول بر کیلوگرم بر درجه کلوین برابر است با:

الف) ۰۴۱۶/۰ ب) ۹۳۶/۲ ج)√ ۴۱۶ د) ۲۹۳۶

۷-۲-۶ اگر $Cp = 1/17\, {}^{kJ}\!/_{kg.K}$ و $R = 315\, {}^{J}\!/_{kg.K}$ باشد، k توان فرآیند ایزونتروپی چقدر است؟

الف) ۲/۱ ب)√ ۳۷/۱ ج) ۶۶/۱ د) ۸۹/۱

۸-۲-۶ نسبت گرمای ویژه از کدام رابطه زیر بدست می آید؟

الف)√ $\dfrac{1}{1-{}^{R}\!/_{Cp}}$ ب) $1+{}^{C_V}\!/_{R}$ ج) $\dfrac{C_P}{C_V}+R$ د) $\dfrac{1}{1-{}^{C_V}\!/_{R}}$

۹-۲-۶ تغییرات آنتروپی گاز کامل

(الف) همواره مثبت است.

(ب) فقط تابعی از دماست.

(ج) فقط تابعی از انرژی داخلی است.

√(د) یک ویژگی ترمودینامیکی است که به فشار و دما بستگی دارد.

۱۰-۲-۶ فرآیند ایزونتروپی همواره

(الف) برگشت پذیر و بی در رو است.

(ب) برگشت پذیر و تکدماست.

√(ج) آنتروپی ثابت است.

(د) بدون اصطکاک و برگشت ناپذیر است.

۱۱-۲-۶ رابطه‌ی ρ^{k} (مقدار ثابت)= P فقط برای فرآیندهایی برقرار است که:

(الف) پلی تروپی و برگشت پذیر باشد.

(ب) ایزونتروپی باشد.

(ج) تکدما بدون اصطکاک باشد.

(د) برگشت ناپذیر بی در رو باشد.

۱۲–۲–۶ فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر

(الف) بدون اصطکاک و بی در رو است.

(ب) با رابطه‌ی مقدار ثابت = P/ρ مشخص می شود.

(ج) با رابطه‌ی مقدار ثابت = $p\rho^k$ مشخص می شود.

√(د) با رابطه‌ی مقدار ثابت = P/ρ^n مشخص می شود.

۱۳–۲–۶ فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر با کدام رابطه مشخص می شود؟

√(الف) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}$ (ب) $\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{\rho_{21}}{\rho_1}\right)^{n}$ (ج) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{n-1}$ (د) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{(n-1)/n}$

۱–۳–۶ عبارتی که مفهوم سرعت امواج صوتی را نمی رساند مشخص کنید.

(الف) $\sqrt{KRT}$ √(ب) $\sqrt{k\rho/P}$ (ج) $\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$ (د) $\sqrt{\frac{KP}{\rho}}$

۲–۳–۶ سرعت صوت در آب تحت شرایط معمولی چقدر است؟ (بر حسب m/s)

(الف) ٤٦٩ (ب) ١٤٨٣ √(ج) ١٧٥٥ (د) ٤٦٩٠

۲-۳-۶ مجذور سرعت صورت در گاز آرمانی به طور مستقیم با:
(الف) چگالی تغییر می کند.
(ب) فشار مطلق تغییر می کند.
√(ج) دمای مطلق تغییر می کند.
(د) مدول کشسانی حجمی تغییر می کند.

۱-٤-۶ معادله‌ی دیفرانسیل انرژی جریان ایزونتروپی به کدام صورت بیان می شود؟

(الف) $dp + d(\rho V^2) = 0$ (ب) $\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0$

(ج) $2VdV + \frac{dP}{\rho} = 0$ √(د) $VdV + \frac{dP}{\rho} = 0$

۲-۵-۶ در جریان ایزونتروپی، پای آن
√(الف) از دمای منبع نمی تواند بیشتر باشد.
(ب) به عدد ماخ بستگی ندارد.
(ج) تنها تابعی از عدد ماخ است.
(د) در کانال ثابت می ماند.

۳-٤-۶ نسبت فشار بحرانی برای جریان ایزونتروپی منواکسید کربن برابر است با:

√(الف) ۰/۵۲۸ (ب) ۰/۶۳٤

(ج) ۰/۸۳۳ (د) ۰/۱

٤-٤-۶ با توجه به جریانی که داخل یک لوله همگرا ـ واگرا گذر می کند. کدام جمله صحیح‌ترین است؟

√(الف) اگر عدد ماخ در خروجی بزرگتر از واحد باشد، موج متحرک در لوله اتفاق نمی‌افتند.

(ب) هنگامی که نسبت فشار بحرانی زیاد می شود، عدد ماخ در گلوگاه بزرگتر از واحد است.

(ج) عدد ماخ در گلوگاه همواره واحد است.

(د) چگالی در پایین دست در امتداد مسیر قسمت همگرای لوله زیاد می شود.

۱-۵-۶ در اثر امواج شوک عمودی در جریان یک بعدی:

(الف) سرعت، فشار و چگالی زیاد می شود.

√(ب) فشار، چگالی و دما زیاد می شود.

(ج) سرعت، دما و چگالی افزایش می یابد.

(د) آنتروپی ثابت می ماند.

۲-۵-۶ یک موج شوک عمودی

(الف) بازگشت پذیر است.

(ب) ممکن است در لوله‌ی همگرا پیش بیاید.

√(ج) بازگشت ناپذیر است.

(د) ایزونتروپی است.

۳–۵–۶ در عرض موج عمودی که در یک نازل همگرا ـ واگرا روی می دهد، کدام گزاره صحیح است؟

(الف) معادلات پیوستگی، انرژی، معادله‌ی حالت، رابطه ایزونتروپی صادق اند.

(ب) معادلات انرژی، تکانه، معادله‌ی حالت و رابطه‌ی ایزونتروپی برقرارند.

√(ج) معادلات پیوستگی، انرژی، تکانه،معادله‌ی حالت، صادق اند.

(د) معادلات حالت، تکانه و رابطه‌ی ایزونتروپی و اصل پایستگی جرم برقرار اند.

٤–۵–۶ در مقطع موج شوک عمودی:

(الف) P, M , S افزایش می یابد.

√(ب) S, P افزایش ولی M کاهش می یابد.

(ج) P افزایش اما S, M کاهش می یابد.

(د) P, N, T افزایش می یابد.

۵-۵-۶ خط ریلی از معادلات زیر بدست می آید.

√(الف) تکانه و پیوستگی (ب) انرژی و پیوستگی

(ج) تکانه و انرژی (د) تکانه، پیوستگی و انرژی

۶-۵-۶ صحیح ترین گزاره درباره‌ی خطوط فانو و ریلی کدام است؟

(الف) دو نقطه که آنتروپی یکسانی دارند، شرایط قبل و بعد از شوک را نشان می دهد.

(ب) PV در طول خط ثابت نگه داشته می شود.

(ج) عدد ماخ همواره با آنتروپی افزایش می یابد.

√(د) آنتالپی در بخش مادون صوت منحنی از آنتالپی در بخش مادون صوت آن بیشتر است.

۱-۶-۶ خفگی در جریان داخل یک لوله به معنی اینست که:
(الف) یک شیر در مسیر بسته شده است.
(ب) انسدادی در مسیر جریان پیش آمده است.
√(ج) جریان جرم به مقدار معین شده بوجود نیاید.
(د) جریان مافوق صوت در جایی از مسیر پیش آمده است.

۲-۶-۶ در جریان بی در روی مادون صوت در درون یک لوله:
√(الف) M, S, V افزایش ولی P, T, ρ کاهش می یابد.
(ب) M, P, V افزایش اما T, ρ کاهش می یابد.
(ج) P, M, S افزایش ولی V, T, ρ کاهش می یابد.
(د) ρ , M, S افزایش اما V, T, P کاهش می یابد.

۳-۶-۶ در جریان بی در روی مافوق صوت در درون یک لوله:
(الف) V, M, S افزایش ولی P, T, ρ کاهش می یابد.
(ب) P, T, S افزایش اما V, ρ , M کاهش می یابد.
(ج) P, M, S افزایش ولی V, T, ρ کاهش می یابد.
√(د) P, T, ρ , S افزایش اما V, M کاهش می یابد.

۱-۷-۶ اگر در داخل کانالی جریان بی اصطکاک با انتقال گرما وجود داشته باشد، کدام گزاره صحیح ترین است؟

(الف) افزایش گرما به جریان مافوق صوت، عدد ماخ را زیاد می کند.

√(ب) افزایش گرما به جریان مادون صوت، عدد ماخ را زیاد می کند.

(ج) سرمایش جریان مافوق صوت، عدد ماخ را کاهش می دهد.

(د) دمای سکون ایزونتروپی در طول لوله ثابت می ماند.

۲-۷-۶ کدام گزاره در زیر تغییرات خواص جریان را در کانال بی اصطکاک با گرمای انتقالی به لوله ای که در آن $M<1$ است، نشان می دهد.

(الف) V, P افزایش و ρ , T, T_o کاهش می یابد.

(ب) T_o , V افزایش و P, ρ کاهش می یابد.

(ج) T, ρ , P افزایش و T_o , V کاهش می یابد.

(د) T, V افزایش و T_o, ρ , P کاهش می یابد.

۳-۷-۶ برای سرمایش در کانال بی اصطکاک با جریان $M>1$، صحیح ترین گزاره کدام است؟

الف) V افزایش و T_o , P, ρ , T کاهش می یابد.

ب) V,P افزایش و T_o , T, ρ کاهش می یابد.

ج) V, ρ , P افزایش و T_o , T کاهش می یابد.

د) ρ , P افزایش و T_o ,T, V کاهش می یابد.