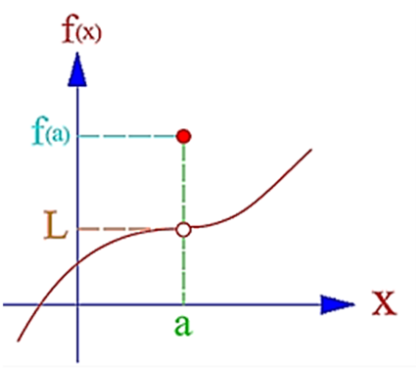
پیوستگی تابع در یک نقطه: تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هر گاه نمودارش در آن نقطه بریدگی یا انفصال نداشته باشد.



شرایط پیوستگی تابع f در نقطه $x=a$

الف) تابع f در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد. ($a \in D_f$ یا $f(a)$ موجود باشد)

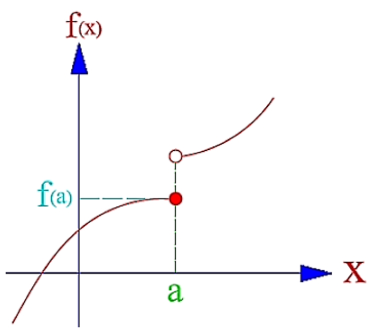
ب) تابع f در نقطه $x=a$ دارای حد باشد. $(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x))$

ج) حد تابع با مقدار تابع برابر باشد. $(\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a))$

نکته: در حل مسائل پیوستگی، این سه شرط بصورت زیر یکجا مورد بررسی قرار می گیرد.

$$\underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{(حد چپ)}} = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{(حد راست)}} = \underbrace{f(a)}_{\text{(مقدار تابع)}}$$

توجه: اگر تابع f هر کدام از سه شرط فوق را نداشته باشد، در نقطه $x=a$ ناپیوسته (منفصل یا گسسته) خواهد بود.

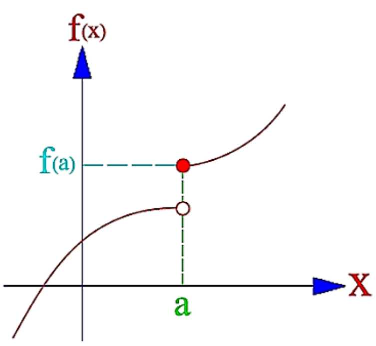


پیوستگی چپ یا راست تابع f در نقطه $x=a$

الف) تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ دارد هر گاه فقط حد چپ تابع با مقدار تابع برابر باشد. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

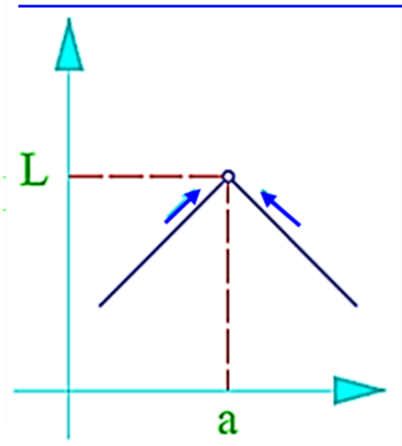
ب) تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی راست دارد هر گاه فقط حد راست تابع با مقدار تابع برابر باشد.

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$



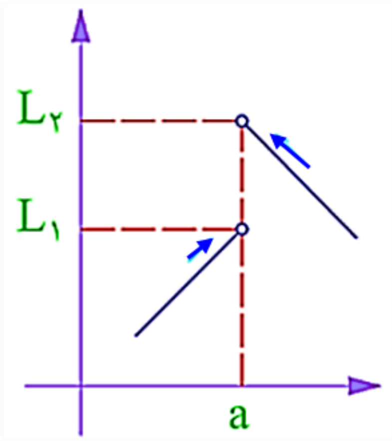
تذکر: اگر تابعی فقط پیوستگی چپ یا فقط پیوستگی راست داشته باشد پیوسته نیست.

تعریف حد و پیوستگی به کمک نمودار



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

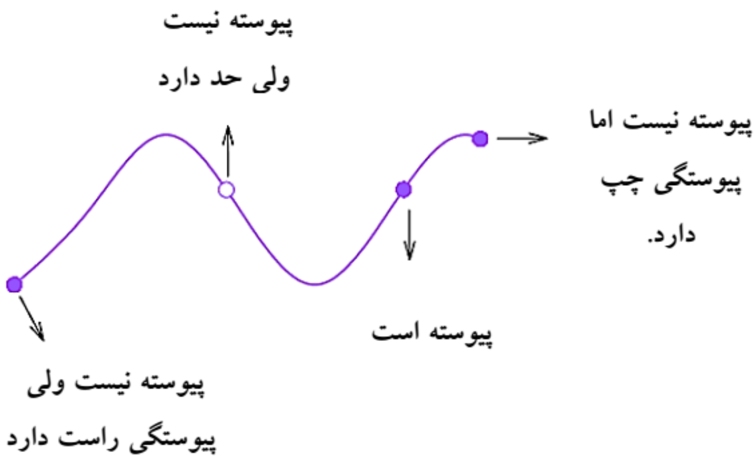
حد چپ و راست موجود و با هم برابر بوده و تابع در $x=a$ حد دارد.

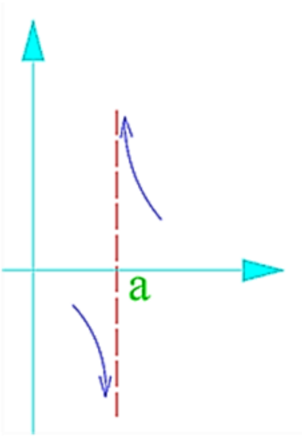


$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ «حد چپ»

$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ «حد راست»

حد چپ و راست موجود ولی نابرابرند و تابع در $x=a$ حد ندارد.





$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ « حد راست »

$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ « حد چپ »

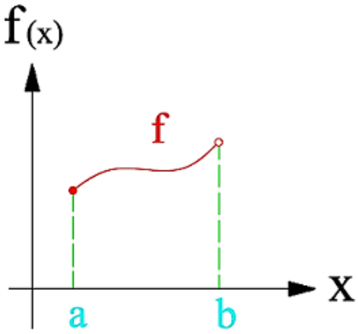
حد چپ و راست موجود نیست و تابع در $x=a$ حد ندارد.

09144101130

پیوستگی تابع در یک بازه : تابع **f** در بازه **[a,b]** پیوسته است هرگاه

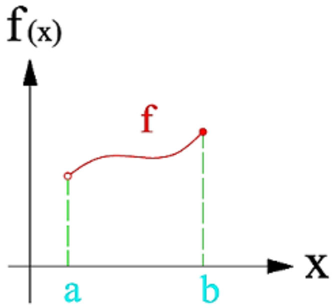
الف) در تمام نقاط بازه ی **(a,b)** پیوسته باشد یعنی: $\forall x_\circ \in (a,b) \to \lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=f(x_\circ)$

ب) تابع در $x=a$ از راست و در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.



نکته 1 : تابع **f** در بازه **[a,b)** پیوسته است هر گاه در بازه **(a,b)** پیوسته بوده و در **a** پیوستگی راست داشته باشد.

نکته 2: تابع **f** در بازه **(a,b]** پیوسته است هر گاه در بازه **(a,b)** پیوسته بوده و در **b** پیوستگی چپ داشته باشد.



نتیجه مهم: بطور کلی «هر تابع در دامنهٔ تعریفش پیوسته است»

نکته 3: سوالات نهایی مربوط به پیوستگی به یکی از سه نوع زیر خواهد بود.

الف) بررسی پیوستگی تابع **f** در یک نقطه (مانند مثال **1**)

ب) یافتن مقادیر **a** و **b** برای اینکه تابع **f** در یک نقطه مورد نظر پیوسته باشد. (مانند مثال **2**)

ج) یافتن فاصله پیوستگی تابع **f** با استفاده از دامنه تعریف آن (مانند مثال **3**)

مثال 1) پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+\dfrac{|۲x|}{x} & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید.

مثال 2) مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳-۲ax^۲ & x<-۱ \\ x+۱ & x=-۱ \\ b[x]+۱ & x>-۱ \end{cases}$ در نقطه $x=-۱$ پیوسته باشد.

مثال 3) فاصله پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ را بنویسید.

مثال 1) توابع زیر در چه فاصله ای پیوسته هستند.

الف) $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

ب) $f(x)=\dfrac{x+۵}{x^{۲}-۲x-۸}$

ج) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}$

2- نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۲}{x^{۲}+x-۲}$ را تعیین کنید.

3- b,a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+a & x<۲\\ ۴ & x=۲\\ |x-۲|+bx & x>۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد.

4- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱} & x\neq ۱\\ \dfrac{۱}{۲} & x=۱\end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

5- مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع **f** در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a|۱-۳x| & x>۱\\ [۲x+۲] & x=۱\\ bx^{۲}+x+۱ & x<۱\end{cases}$$

6- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۱} & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ را در نقطه ی **x =1** بررسی کنید.