فصل دوم

تحلیل مدارهای مقاومتی

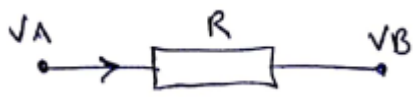
این فصل برای تحلیل جامع مدار های الکتریکی به روش گره و مش ابتدا مدارهای مقاومتی که شامل مقاومت و منابع هستند بررسی خواهند شد. مدارهای واقعی مقاومتی خالص نیستند، بلکه المانهای دیگر نیز وجود دارد، ولی برای تحلیل اولیه مدارهای الکتریکی از مدارهای مقاومتی آغاز می کنیم. دو روش اصلی و روتین به نام روش گره و مش وجود دارد،که در این بخش ارائه میشوند.

۱-روش تحلیل گره

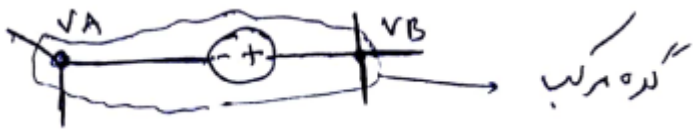
در این روش متغیر های اصلی ولتاژ های گره ها هستند و معادلات KCL برای مدار نوشته میشود. مراحل این روش به شرح زیر است:

۱. ابتدا یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب کنید و (پتانسیل) ولتاژ آن را صفر در نظر بگیرید.
۲. همه ی گره ها ار شماره گذاری کنید. (بجز گره مبنا)
۳. ولتاژ گره ها نسبت به گره مبنا که پتانسیل صفر دارد متغیر های اصلی مدار هستند.
۴. قانون KCL را برای همه ی گره ها بجز گره مبنا بنوسید .سعی کنید معادلات منحصراً بر حسب ولتاژ گره ها باشند. یعنی متغیر های دیگر را بر حسب ولتاژ گره ها بنویسید.
۵. ولتاژ هر شاخه تفاضل ولتاژ گره های دو سر آن و جریان هر شاخه برای نوشتن KCL به صورت زیر است:

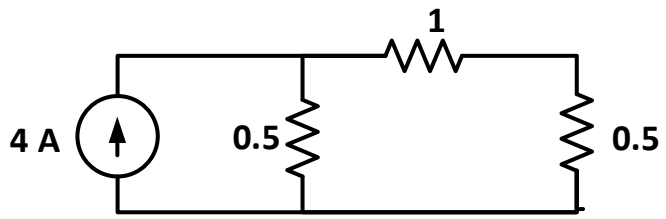
$$I = \frac{V_A - V_B}{R}$$



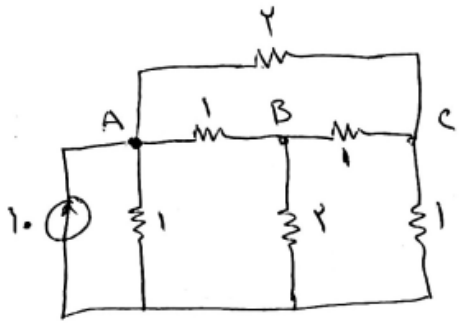
۶. منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر بگیرید و سعی کنید فقط متغیر ها ،ولتاژ گره ها باشند
۷. در حالت کلی $(n-1)$ معادله ی $(n-1)$ مجهول را حل کنید. n تعداد گره های اصلی است.
۸. اگر بین ۲ گره، منبع ولتاژ باشد برای اینکه جر یان آن متغیر جدید نباشد KCL را در گره مرکب بنویسید.



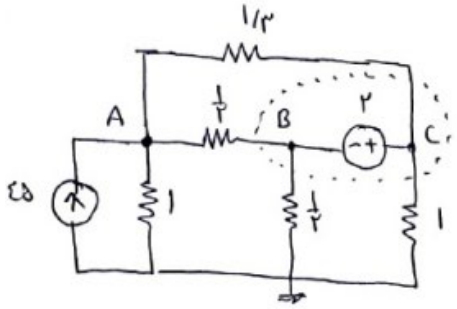
مثال ۱- در مدار شکل زیر اختلاف پتانسیل گره ها را تعیین کنید.



مثال۲- در مدار زیر پتانسیل گره ها را بدست آورید ؟



مثال ۳- در مدار زیر پتانسیل گره ها را بدست آورید.

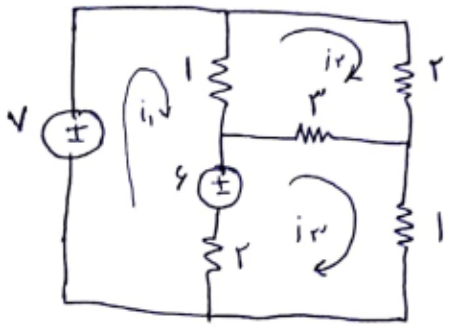


۲- روش تحلیل مش

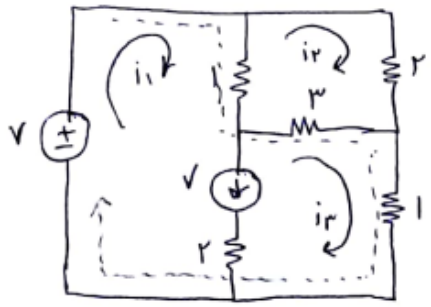
در این روش متغیرهای اصلی مسئله جریان مش ها (حلقه ها) هستند و برای این منظور معادلات KVL نوشته میشود. با مشخص شدن جریان حلقه ها، میتوان جریان شاخه ها و در نتیجه ولتاژ ها را بدست آورد. این روش دارای مراحل زیر است :

۱. حلقه ها را شماره گذاری کنید و جریان هر حلقه را در جهت عقربه های ساعت به عنوان متغیر های اصلی در نظر بگیرید .
۲. جریان شاخه ای که فقط در یک حلقه قرار دارد برابر جریان حلقه و جریان شاخه ای که در هر دو حلقه وجود دارد (شاخه مشترک) برابر تفاضل جریان آن دو حلقه است.
۳. قانون KVL را در کلیه حلقه ها بنویسید و سعی کنید معادلات منحصرا بر حسب جریان حلقه ها باشد. یعنی متغیر های دیگر بر حسب جریان حلقه ها بدست آورید.
۴. منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر بگیرید و پس از اعمال KVL در حلقه ها سعی کنید کلیه متغیر ها بر حسب جریان حلقه ها باشد .
۵. برای نوشتن KVL، ولتاژهر المان برابر با جریان آن شاخه در مقاومت آن المان است .
۶. در حالت کلی مسئله به n معادله، n مجهول تبدیل میشود. n تعداد مش های اساسی است.
۷. اگر شاخه ای تنها از یک منبع جریان تشکیل شود و این شاخه فقط در یک مش باشد، جریان آن مش معلوم است و نیازی به نوشتن KVL در آن مش نیست. اما اگر منبع جریان شاخه مشترک ۲ مش باشد، تفاضل جریان ۲ مش معلوم است.و به جای نوشتن KVL در هر یک از آن دو مش، KVL را در حلقه متشکل از آن ۲ مش را می نویسیم .

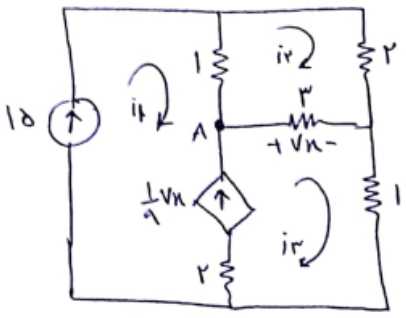
مثال ۴- با استفاده از تحلیل مش جریان های i_1 و i_2 و i_3را بیابید.



مثال ۵-جریان هر حلقه را بدست آورید ؟

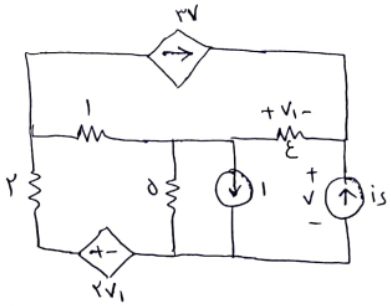


مثال۶- جریان هر حلقه را بدست آورید ؟

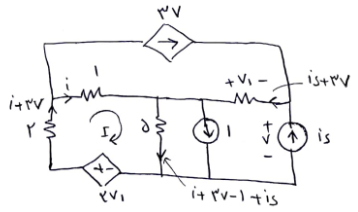


❖ همانطور که در مثال قبل (۶) مشاهده شد تحلیل مدار ها فقط با KVL یا KCL ممکن نیست بلکه باید ترکیبی آن هر دو معادلات را تشکیل داد. یک روش مناسب تعیین جریان شاخه های مختلف روی مدار با استفاده از KCL و در نهایت نوشتن معادله ی KVL است.

مثال ۷- در مدار زیر مقدار جریان ورودی i_s را چنان تعیین کنید که جریان منبع ولتاژ وابسته صفر شود .



راهنمایی: جریان مقاومت ۱ اهمی را i در نظر میگیریم و جریان سایر شاخه ها را روی شکل مینویسیم. سپس با استفاده از ۱ یا ۲ KVL معادلات را بدست می آوریم.



روش KVL I $-۲V_۱ + ۲(i+۳V) + ۱\cdot i + ۵(i+۳V-۱+is) = ۰$

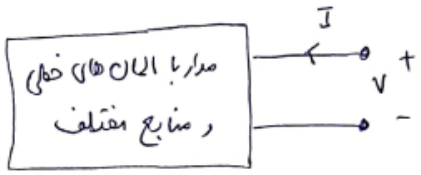
رابطه‌ی متغیر اضافی $V_۱$ $V_۱ = ۴(۳V+is)$

KVL برای متغیر اضافی V : $۵(i+۳V+is-۱) - V - V_۱ = ۰$

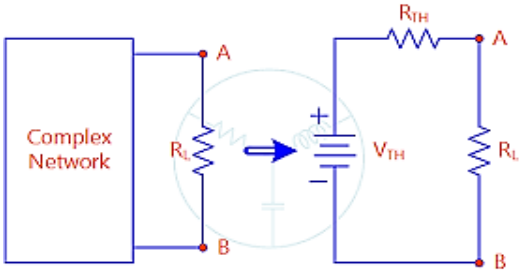
۳ معادله و ۴ مجهول بدست آمد، معادله چهارم فرض مسئله ← $i+۳V = ۰$

مدار های معادل تونن و نورتن

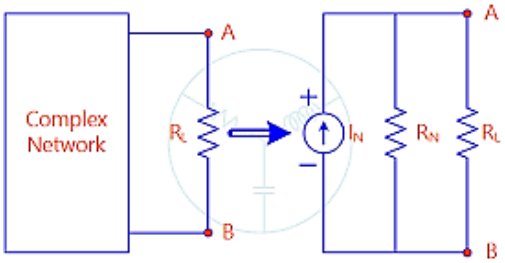
دو مدار در صورتی معادل هستند که رابطه ی بین ولتاژ و جریان آنها برقرار باشد. پس میتوان مدار زیر را با هر مدار دیگر که رابطه ولتاژ جریان آن مشابه باشد جایگزین کرد:



قضیه تونن (Thevenin Theorem) بیان می‌کند: «هر مدار خطی متشکل از منابع ولتاژ و مقاومت‌ها را می‌توان با یک منبع ولتاژ با مقاومت سری با آن جایگزین کرد». به عبارت دیگر، می‌توان هر مدار الکتریکی را بدون توجه به میزان پیچیدگی، با یک مدار دو سر شامل منبع ولتاژ و مقاومت یا امپدانس سری با آن ساده کرد. به عبارت دیگر هر شبکه خطی را میتوان با یک منبع ولتاژ (V_{th}) و یک امپدانس (در اینجا منظور مقاومت است) سری با آن (R_{th}) مدل کرد. شکل زیر این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.

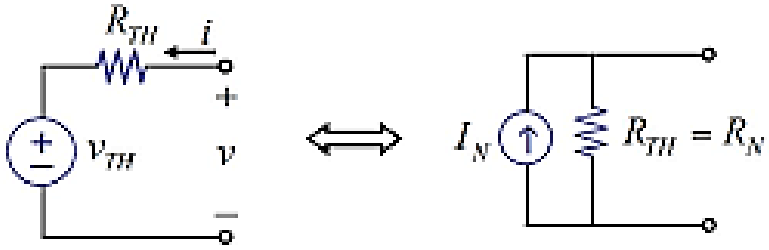


قضیه نورتن (Nortons Theorem) دوگان قضیه تونن است و بیان می‌کند: هر مدار خطی از منابع انرژی و مقاومت‌ها را می‌توان به یک منبع جریان موازی با مقاومت کاهش داد.

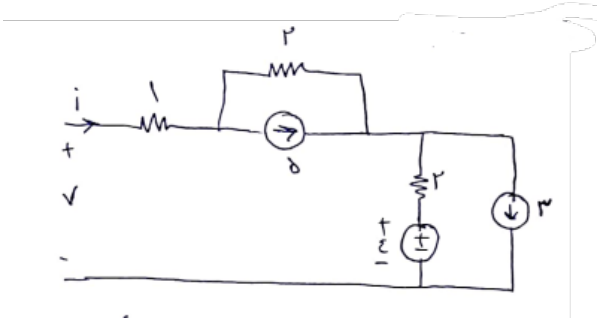


نکته : مدار معادل تونن و نورتن را می توان به یکدیگر تبدیل کرد :.

$$R_{th} = R_N \qquad I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

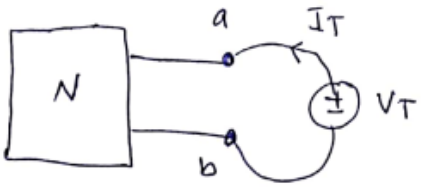


مثال ۸- مدار معادل مدار زیر را با استفاده از تبدیل تونن به نورتون و بر عکس بدست آورید ؟



راه حل کلی برای بدست آوردن معادل تونن

که یک منبع تست V_T به دو سمت مدار اضافه کرده و یک رابطه ی خطی بین V_Tو جریان I_T را با با KVL و KCL بدست می آوریم، که به صورت زیر خواهد بود .



$$V_T = \alpha\ I_T + \beta$$

در رابطه ای که با KVL و KCL بعد از قرار دادن منبع تست بین جریان و ولتاژ تست بدست آمد:

$R_{th} = \alpha$

$V_{th} = \beta$

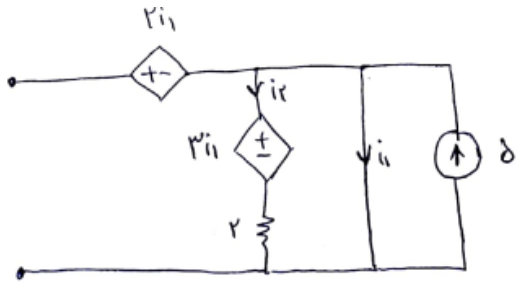
روش دوم (برای زمانی است که منبع وابسته نداشته باشیم)

برای محاسبه ی V_{th} با استفاده از KVL و KCL ولتاژ دو سر a و b را که ولتاژ مدار باز v_{OC} نام دارد بدست می آوریم

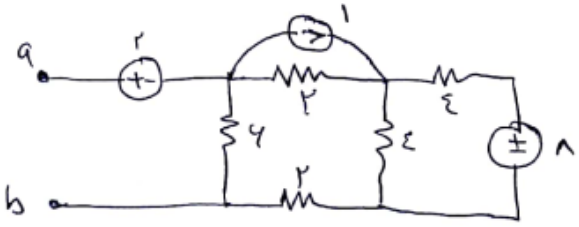
برای R_{th} منابع وابسته را صفر میکنیم و با ساده سازی مقاومت ها ،R_{th}را بدست می آوریم

نکته: مداری که منبع مستقل نداشته باشد V_{th} برابر با صفر است

مثال ۹- در مدار زیر V_{th}وR_{th} را بدست آورید ؟



مثال ۱۰-مقاومت معادل تونن از دید دو سر aو b بیابید ؟



روش کلی بدست آوردن معادل نورتن یک مدار

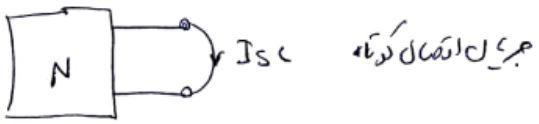
راه حل کلی برای بدست آوردن مدار معادل نورتن شبیه به روش روش تونن، یک منبع تست V_T با جریان I_T در مدار قرار میدهیم، ولی این بار رابطه بین این دو کمیت به صورت زیر است :

$$I_T = \frac{1}{\alpha} V_T - \beta$$

$$R_N = \alpha$$
$$I_N = \beta$$

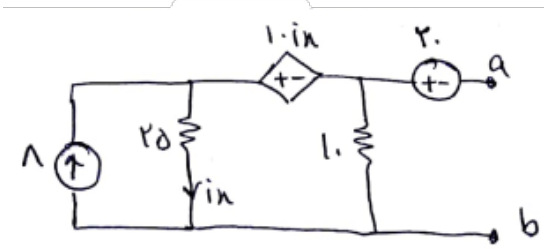
روش دوم (وقتی منبع وابسته نداشته باشیم)

دو سر مدار را اتصال کوتاه میکنیم و با KVL و KCL جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) را بدست می آوریم. این جریان همان I_N است.

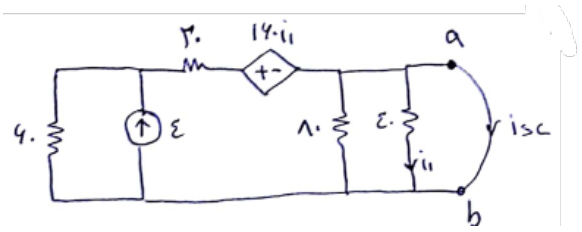


برای R_N منابع مستقل را صفر میکنیم و با ساده سازی R_N را بدست می آوریم.

مثال ۱۱- مدار معادل نورتن شکل زیر را بیابید ؟

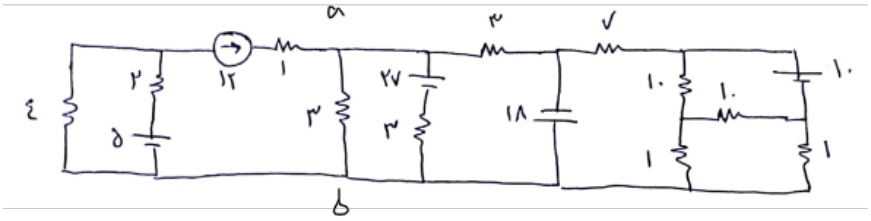


مثال ۱۲- مدار زیر مفروض است. جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) از دو سر a و b بیابید ؟

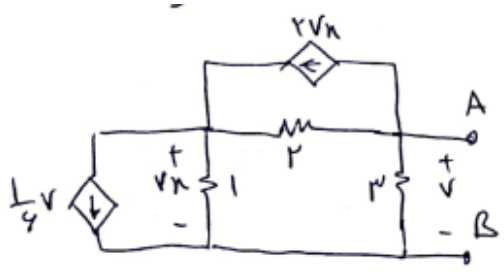


راهنمایی: هر المانی که با اتصال کوتاه موازی شود جریانی از آن نمیگذرد.

مثال ۱۳- مدار معادل شکل زیر را از دو سر a و b بیابید ؟ (معادل نورتن)



مثال ۱۴- در مدار زیر مقاومت تونن دیده شده از دو سر a و b را بیابید ؟

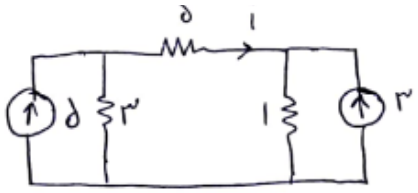


قضیه‌ی جمع آثار

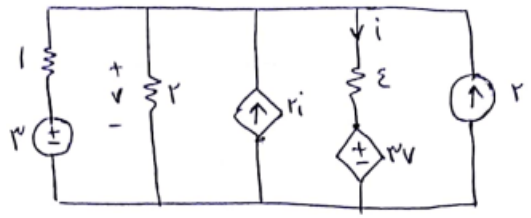
در هر مدار **خطی**، پاسخ مدار به ورودی های مختلف (منابع مختلف) برابراست با مجموع پاسخهای مدار به تک تک منابع، وقتی که به تنهایی در همان مدار هستند. به عبارتی در مدارهای **خطی** که دارای دو یا چند منبع ولتاژ یا جریان هستند، برای بدست آوردن کمیت مجهول، ابتدا یکی از منابع را نگه داشته و بقیه را صفر می کنیم و سپس مجهول را محاسبه می کنیم. حال منبعی که نگه داشته بودیم را صفر می کنیم و منبع دیگر را فعال و مجهول را محاسبه می کنیم و در پایان جواب های بدست آمده برای آن مجهول را با هم جمع میکنیم.

برای صفر کردن منبع ولتاژآن را **اتصال کوتاه** و برای صفر کردن منبع جریان آن را **مدار باز می کنیم** .

مثال ۱۵-با استفاده از قضیه جمع آثار ،جریان i را بدست آورید ؟



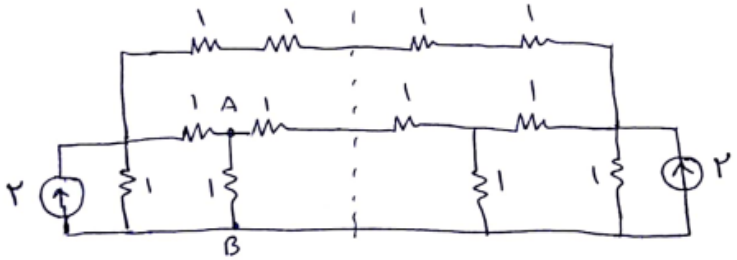
مثال ۱۶-در مدار زیر جریان i را با استفاده از جمع آثار بنویسید ؟ ب) اگر منبع جریان ۵ آمپر و منبع ولتاژ ۲ ولت شود، جریان i چقدر میشود؟



مدار های متقارن

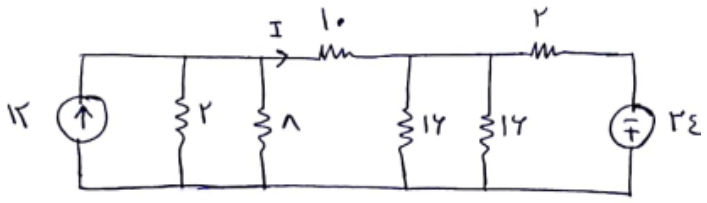
الف) اگر یک مدار از هر لحاظی حتی پلاریته منابع متقارن بود ،می توانیم مدار را از روی محور تقارن تا کنیم. به این ترتیب نصف مدار حذف میشود و مقاومت هایی که روی هم میافتند موازی شده و شاخه های میانی مدار باز می شوند و حذف می گردند.

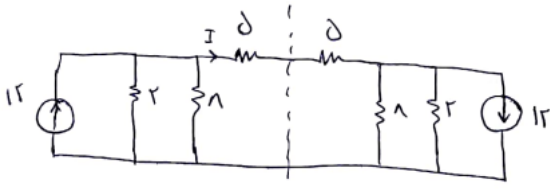
مثال ۱۷-در مدار زیر ولتاژ a وb را بیابید ؟



ب) اگر مدار کاملا متقارن اما پلاریته منابع متفاوت باشد. در محل تقارن پتانسیل صفر شده و می توان از محل خط تقارن، مدار به هم وصل کرد.

مثال ۱۸- مقدار I را در مدار زیر بیابید ؟



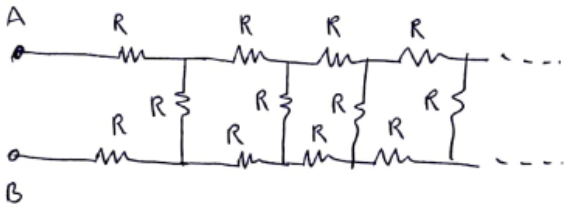


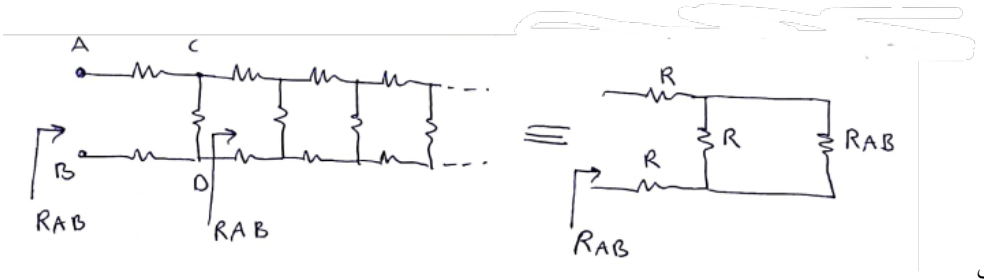
راهنمایی

مدارهای بی نهایت

برای مدار های بی نهایت یک قسمت از مدار که دوباره تکرار شده را در نظر می گیریم و با یک کمیت مناسب جایگذاری کرده و مدار را حل می کنیم.

مثال ۱۹- مقاومت دیده شده از دو سر A وB را بیابید؟





راهنمایی

نکته: میتوان منابع جریان و ولتاژ را جابجا کرد به شرطی که KVL و KCL تغییر نکند.