

مشتق مثلثاتی

سری و معکوس مثلثاتی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱۱۲



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مسئله

تابع f به صورت زیر تعریف شده است. حاصل مشتق این تابع در نقطه $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$$f(x) = \sin^{-1} \left(\cos \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) \right)$$

$$(۱) -4 \quad (۲) \frac{1}{2}$$

$$(۳) -2 \quad (۴) \text{ مشتق پذیر نیست}$$

۲ روش حل مسئله

 پاسخ: در این مسئله علاوه به مسلط بودن به مشتق مثلثاتی و معکوس مثلثاتی، باید از سری‌های هندسی هم کمک گرفته شود. به دلیل آنکه مشتق این تابع در $x = \frac{1}{2}$ خواسته شده است، عبارت داخل پرانتز معادل یک سری هندسی می‌باشد که جمله اول آن x و قدر نسبت آن هم x است.

 در یک سری هندسی که اندازه قدر نسبت کمتر از یک است، مقدار سری با عبارت زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

مسئله مورد نظر به صورت عبارت زیر ساده می‌شود:

$$f(x) = \sin^{-1} \left(\cos \frac{x}{1-x} \right)$$

 برای ساده کردن عبارت‌های شامل جملات مثلثاتی و معکوس مثلثاتی به مانند آنچه در این مسئله بدان رسیدیم به صورت زیر عمل می‌شود. تابع $\sin$ به دو طرف معادله اعمال می‌شود.

$$\sin f(x) = \sin \left(\sin^{-1} \left(\cos \frac{x}{1-x} \right) \right) = \cos \frac{x}{1-x}$$

رابطه فوق یک معادله مثلثاتی است.

💡 در معادلات مثلثاتی که یک طرف کسینوس و یک طرف سینوس است تلاش می‌شود به کمک روابط مثلثاتی، نسبت‌های همانم را ایجاد نمود.

💡 رابطه بین سینوس و کسینوس برای تبدیل شدن به هم به صورت زیر است:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

از رابطه فوق برای حل مسئله استفاده می‌شود:

$$\sin f(x) = \cos \frac{x}{1-x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x}\right)$$

💡 اگر سینوس دو زاویه با هم برابر باشند، یا آن دو زاویه با هم برابرند یا آنکه به اندازه ضریب زوجی از π با هم تفاوت دارند.

در اصل این مسئله مشکلی به وجود نمی‌آید که هر دو را برابر در نظر بگیریم:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1-x}, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

با جایگذاری $x = \frac{1}{2}$ مقدار این مشتق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

گزینه ۱ صحیح است.

۳ مسائل مشابه

در این بخش دو دسته از سوالات مطرح می‌شوند. در دسته اول حل یک سری هندسی بحث شده و در دسته دوم تبدیلات مربوط به جمله‌های مثلثاتی و معکوس مثلثاتی ارائه می‌شوند.

۱.۳ سری هندسی

با توجه به نکته ارائه شده در متن پاسخ مسئله، برای تعیین مجموع هندسی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$S = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}}$$

سری می‌تواند به فرم عددی باشد. اما گاهی با جمله مجهول بر حسب x نمایش داده می‌شود و اصطلاحاً سری توانی نامیده می‌شود، چون در آن x دارای توان است. تنها شرطی که برای مقدار x وجود دارد این است که اندازه قدر نسبت سری هندسی کمتر از یک باشد.

در ادامه چند مثال از این نوع سری و سری‌های عددی مطرح می‌شود.

مثال ۱:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = 9 + 1 + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{9}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81}{8}$$

مثال ۳:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n-1}} = 5 - \frac{1}{5} + \frac{1}{125} - \cdots = \frac{5}{1 - (-\frac{1}{25})} = \frac{125}{26}$$

مثال ۴:

$$|x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

مثال ۵:

$$|x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots = \frac{1}{1+x}$$

مثال ۶:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (-1)^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n \\ &= 1 - 3x + 9x^2 - \cdots \\ &= \frac{1}{1+3x} \end{aligned}$$

شرط مقادیر قابل قبول برای x به صورت زیر است:

$$|-3x| < 1, \quad \Rightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

مثال ۷:

$$|\theta| < \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n \theta = 1 + \sin \theta + \sin^2 \theta + \cdots = \frac{1}{1 - \sin \theta}$$

۲.۳ جمله‌های مثلثاتی و معکوس مثلثاتی

برای ساده کردن عبارت‌هایی که شامل آرگومان معکوس مثلثاتی هستند، می‌توان آن عبارت را تابعی مانند u نامید. آنگاه با استفاده از روابط مثلثاتی، عبارت u را ساده کرد. چند مثال که در ادامه آمده است به روشن شدن موضوع کمک می‌کنند.

مثال ۸:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^{-1}(\cos x), \quad \Rightarrow \quad u = \sin^{-1}(\cos x), \quad \Rightarrow \quad \sin u = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \Rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2} - x, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - x \quad x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

مثال ۹:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(\cos^{-1} x), \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(\underbrace{\cos^{-1} x}_u) \\ \cos^{-1} x = u, \quad \Rightarrow \quad x = \cos u \end{aligned}$$

صورت مسئله تبدیل به $f(x) = \sin u$ شده است. اما می‌دانیم $x = \cos u$ در نتیجه:

$$f(x) = \sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

مثال ۱۰:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(\tan^{-1} x), \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos(\underbrace{\tan^{-1} x}_u) \\ \tan^{-1} x = u, \quad \Rightarrow \quad x = \tan u \end{aligned}$$

صورت مسئله تبدیل به $f(x) = \cos u$ شده است. اما می‌دانیم $x = \tan u$ با نسبت مثلثاتی که بین

تانژانت و کسینوس وجود دارد خواهیم داشت:

$$1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad \Rightarrow \quad \cos u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

در نتیجه:

$$f(x) = \cos u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathcal{R}$$

کسانی که امروز رویاهای تو را مسافره
می‌کنند، وقتی به هدفت رسیدی برای
بقیه تعریف می‌کنند که روزی تو را
می‌شناختند!



 AvaEducation16.blog.ir

   @AvaEducation16

 AvaEducation16@gmail.com

 @AvaEducation16

  0935 210 4321