

به غیر از سوال کی ۲۸، ۲۹، ۳۰ که متوسط و زمانید بودند
بقیه سوالات ساره ارزیابی می شوند.

در کل پنج سوال معادلات ارزش حواصدا ۱۴۰۲ ساره بون

عدم طرح سوال از مباحث: (۱) مرتبه اول خطی (۲) برون (۳) مرتبه غیر فعلی
با یک معادلات ما به راحتی به هر ۱۰ سوال معادلات می رسیدید در فقط ۲۰ ساعت آموزش

ریاضیات (معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مهندسی):

۲۶- یک عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $x^2 y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ کدام است؟

مرتبه اول
(ساره)

$$x^2 y^3 dx + (x + xy^2) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3} + (1+\alpha)x^{\alpha}y^{2+\beta}$$

$$\frac{1}{y^3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x^3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x^2 y} \quad (4)$$

$$\frac{1}{xy^3} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= (\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3} + (1+\alpha)x^{\alpha}y^{2+\beta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \rightarrow \mu = x^{-1}y^{-3} = \frac{1}{xy^3}$$

۲۷- با تغییر متغیر $y = z^\alpha$ معادله $(x^2 y^2 - 1) dy + 2xy^2 dx = 0$ به یک معادله همگن تبدیل می‌شود. مقدار α

$$y' = \frac{2xy^3}{1-x^2y^2}$$

$$\frac{z=-1}{\text{نزن}} \rightarrow y = z^{-1} \rightarrow -z^{-2} z' = \frac{2xz^{-3}}{1-x^2z^{-2}} = \frac{2xz^{-1}}{z^2-x^2}$$

$$\rightarrow z' = \frac{2xz}{x^2-z^2} \quad \checkmark \text{ همن} \quad \checkmark$$

- کدام است؟
- (۱) -۱
 - (۲) -۱/۲
 - (۳) -۲
 - (۴) -۱/۳

مرتبه اول
همگن
سه

۲۸- جوابی از معادله $(x^2 - x \ln xy)y' + y(x-1) = 0$ که از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد، کدام است؟ $(x \neq 0)$

$$\rightarrow (yx - y) dx + (x^2 - x \ln xy) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x - 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - \ln xy - 1$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -x + \ln xy$$

$$y(x + \ln x) = 1 \quad (1)$$

$$y(x - \ln x) = 1 \quad (2)$$

$$y(x + \ln xy) = 2 - y \quad (3)$$

$$y(x - \ln xy) = 2 - y \quad (4)$$

$$x \frac{1}{y} = \frac{-(x - \ln xy)}{x(x - \ln xy)} = -\frac{1}{x} = P(x) \rightarrow \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$x \frac{1}{x} (y - \frac{y}{x}) dx + (x - \ln xy) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$y^2 + 4y = 0 \rightarrow t^2 + 4 = 0 \rightarrow t = \pm 2i$$

$$\rightarrow y_h = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

$$c_1 = -\int \frac{\cos 2x \cdot \frac{1}{2} 2x}{-2} dx$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \int 2x \cos 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x$$

$$c_2 = \int \frac{\sin 2x \cdot \frac{1}{2} 2x}{-2} dx = -\frac{1}{2} \int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} \ln |\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{2} \sin 2x)$$

$$-\cos 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x| \quad (1)$$

$$-\frac{1}{4} \cos 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x| \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x| \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \sin 2x \ln |\sec 2x + \tan 2x| \quad (4)$$

مرتبه اول
همگن
سه

مرتبه اول
لاگرانژ
سه

۳۰- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 10e^{2x}$ کدام است؟

$$\rightarrow D^3 y - 4D^2 y + 5Dy - 2y = 10e^{2x}$$

$$\rightarrow y = \frac{10e^{2x}}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2}$$

$$D=2 \rightarrow y = \frac{x(10e^{2x})}{3D^2 - 8D + 5}$$

$$D=2 \rightarrow y = \frac{10xe^{2x}}{1}$$

- (۱) $y_p = 5xe^{2x}$
- (۲) $y_p = 10x^2 e^{2x}$
- (۳) $y_p = 5x^2 e^{2x}$
- (۴) $y_p = 10xe^{2x}$

مرتبه اول
لاگرانژ
سه

۳۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 0$ کدام است؟

$$x+2=u \rightarrow u^2 y'' - uy' + y = 0$$

$$\rightarrow m(m-1) - m + 1 = 0 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\rightarrow (m-1)^2 = 0 \rightarrow m=1 \rightarrow y_h = c_1 u^1 + c_2 u^1 \ln u$$

- (۱) $y = (c_1 + c_2(x+2))e^{(x+2)}$
- (۲) $y = (c_1 + c_2(x+2))(x+2)$
- (۳) $y = (c_1 + c_2 \ln(x+2))(x+2)$
- (۴) $y = (c_1 + c_2(x+2)) \ln(x+2)$

مرتبه اول
لاگرانژ
سه

$$\rightarrow y_h = c_1(x+2) + c_2(x+2) \ln(x+2) = (x+2) [c_1 + c_2 \ln(x+2)]$$

۳۲- با تغییر متغیر $t = x^{-1}$ ، معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 2x y' - 4y = 0$ ، به چه صورت تبدیل می‌شود؟

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot (-x^{-2})$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 t}{dx^2}$$

$$= \frac{d}{dt} (-y'_t \cdot x^{-2}) \frac{dt}{dx} + y'_t \cdot (+2x^{-3})$$

$$= (-y''_t) (-x^{-4}) + 2y'_t (x^{-3})$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 4y = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4y = 0 \quad (4)$$

تغییر متغیر متوسط

تبدیل لاپلاس تابع $y'' + 2xy' - 2xy' - 4y = 0$

۳۳- تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$ کدام است؟

تبدیل لاپلاس تابع

$$\frac{1 + se^{-\pi s}}{s^2 + 1} \quad (1)$$

$$\frac{-1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \quad (2)$$

$$\frac{se^{-\pi s} - 1}{s^2 + 1} \quad (3)$$

$$\frac{e^{-\pi s} + 1}{s^2 + 1} \quad (4)$$

لاپلاس (0)

$$f(x) = \sin x + (0 - \sin x) u_{\pi}(x)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \mathcal{L}(\sin(x + \pi))$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

۳۴- پاسخ معادله انتگرال $y(x) = x + e^x \int_0^x y(t) e^{-t} dt$ کدام است؟

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + [\mathcal{L}(y) \times \mathcal{L}(e^x)]$$

$$\int_0^x y e^{-t} dt$$

$$y(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$y(x) = \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$y(x) = -\frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{2s} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4s^2} + \frac{1}{2}(s-2) - \frac{1}{4}(s-2)$$

$$s^2(s-2)$$

لاپلاس (تبدیل)

۳۵- معادله دیفرانسیل $2x^2 y'' + (2x^2 - x) y' + y = 0$ را در همسایگی $x = 0$ در نظر بگیرید. ریشه‌های معادله

$$y'' + \frac{2x-1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = 0$$

مشخصه کدام است؟

$$1, \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-1, -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2}, 1 \quad (3)$$

$$-\frac{3}{2}, -1 \quad (4)$$

ریشه (ساده)

$$P. = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{2x-1}{2x} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$Q. = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{1}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$m^2 - m - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow m^2 - \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = 1/2 \end{cases}$$