به همین ترتیب:

$$S_2^+ = 0.1197,\ S_3^+ = 0.0580,\ S_4^+ = 0.1009$$
$$S_2^- = 0.0439,\ S_3^- = 0.0920,\ S_4^- = 0.0458$$

گام ۶. گزینهٔ برتر را با رتبه‌بندی آن‌ها تعیین کنید.

ملاک رتبه‌بندی و انتخاب گزینهٔ برتر براساس میزان نزدیک بودن هر گزینه به جواب ایده‌آل مثبت و دور بودن آن در جواب ایده‌آل منفی است که برمبنای رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

میزان نزدیکی نسبی به جواب ایده‌آل: $$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+}$$

پس:

$$C_1 = \frac{0.0983}{0.0983 + 0.0545} = 0.643$$
$$C_2 = 0.268,\ C_3 = 0.613,\ C_4 = 0.312$$

هر اندازه میزان نزدیکی نسبی به جواب ایده‌آل (C_i) محاسبه‌شده برای هر گزینه بیش‌تر باشد آن گزینه بهتر است. به این ترتیب، گزینه‌ها به شرح زیر رتبه‌بندی می‌شوند: A_1 رتبهٔ اول، A_2 رتبهٔ چهارم، A_3 رتبهٔ دوم، A_4 رتبهٔ سوم
چهارم

۴.۵ تصمیم‌گیری با اهداف چندگانه

در شرایط واقعی وضعیت‌هایی رخ می‌دهد که مدل ریاضی طراحی شده تنها با یک هدف، بیانگر واقعیت و خواسته‌های موردنظر تصمیم‌گیرنده نیست و این امر کارایی و مطلوبیت نتایج حاصل از مدل را کاهش می‌دهد.

مسائل بسیاری در عالم واقع می‌توان یافت که همزمان تحت تأثیر چند هدف قرار می‌گیرند. مثلاً در هر کارخانه اهداف متعدد و بعضاً متناقضی برای قسمت‌های مختلف می‌توان یافت:

در قسمت تولید اهدافی مانند حداکثر کردن درآمد، حداقل کردن هزینه، حداکثر کردن استفاده از ظرفیت تولید، حداقل کردن میزان موجودی.

در قسمت کنترل کیفیت اهدافی مانند حداقل کردن هزینه‌های کنترل کیفیت و میزان ضایعات.

در قسمت نگهداری و تعمیرات اهدافی مانند حداکثر کردن زمان استفاده از ماشین‌آلات و حداقل کردن موجودی قطعات یدکی.

در قسمت فروش اهدافی مانند تنوع محصولات، حداقل کردن هزینه‌های فروش.

۱.۴.۵ مدل‌های چندهدفه

در مدل‌سازی‌های چندهدفه عموماً اهداف متضاد است و بهبود یک هدف می‌تواند بر اهداف دیگر تأثیر منفی بگذارد.

شکل ریاضی مسائلی با اهداف چندگانه به‌صورت زیر است:

$$\text{Max (Min)}Z = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_p]$$
$$Z_1 = Z_1(x_j)$$
$$Z_2 = Z_2(x_j)$$
$$\vdots$$
$$Z_p = Z_p(x_j)$$
$$g_i(x_j) \le b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

که $Z_p(x_j)$ها و $g_i(x_j)$ها توابعی خطی از متغیر تصمیم x_j هستند و b_i مقداری غیرمنفی و ثابت است. این مدل p تابع هدف، m محدودیت و n متغیر دارد. جواب ایده‌آل برای این مدل، مجموعه مقادیر اختصاص‌یافته به متغیرهای تصمیم یعنی x_j است که در تمامی m محدودیت صدق و همزمان p تابع هدف را حداکثر (حداقل) کند. با این همه جوابی موجه که به بهینه شدن یک هدف بینجامد، به علت وجود اهداف متضاد در مدل، ممکن است نتواند سایر اهداف را بهینه کند.

مدل‌های ساخته‌شدهٔ چندهدفه برای مسائل واقعی به‌ندرت دارای جواب ایده‌آل هستند، پس در هر حال روش‌های زیر آن‌گاه به‌کار گرفته می‌شوند که مسئله جواب ایده‌آل نداشته باشد.

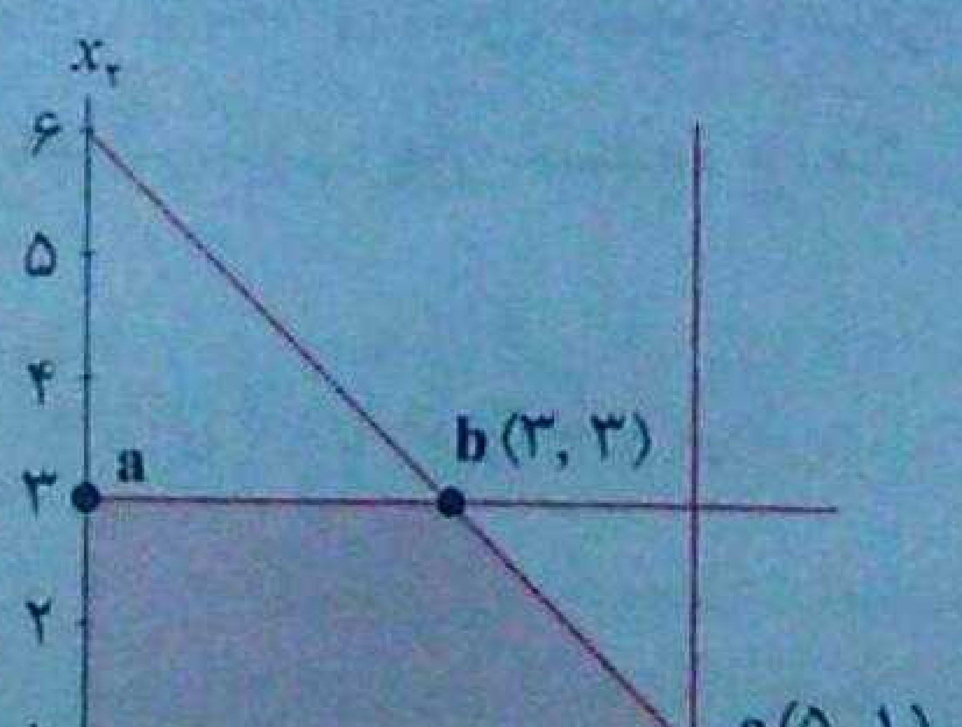
برای تشخیص وجود جواب ایده‌آل در یک مسئله کافی است که هر بار مسئله را با یک تابع هدف حل کرد. اگر نقطهٔ بهینهٔ به‌دست‌آمده برای تمامی مدل‌ها یکسان باشد، آن جواب، ایده‌آل است در غیر این صورت مسئله جواب ایده‌آل ندارد.

دو جواب نسبت به هم غیرمسلط خوانده می‌شوند، اگر هر یک حداقل از نظر یک تابع هدف بهتر از دیگری و از نظر دیگر اهداف بدتر از آن باشند. اما اگر یک جواب از نظر تمامی اهداف بهتر از دیگری باشد، آن را **مسلط**[1] بر جواب دیگری می‌نامند.

مثال ۴.۵

مسئلهٔ دوهدفهٔ زیر و منطقهٔ موجه آن را درنظر بگیرید:

$$\text{Max}\, Z = [Z_1, Z_2]$$
$$Z_1 = 5x_1 + x_2$$
$$Z_2 = x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_2 \le 3$$
$$x_1, \; x_2 \ge 0$$



1. dominate.

این مسئله پنج نقطهٔ گوشهٔ موجه دارد که مقادیر توابع هدف به‌ازای این نقاط در جدول زیر ارائه شده است:

جدول ۳۷.۵ نقاط گوشهٔ موجه و مقادیر توابع هدف.

نقاط گوشهٔ موجه	$Z_۱$	$Z_۲$
o (۰, ۰)	۰	۰
a (۰, ۳)	۳	۱۲
b (۳, ۳)	۱۸	۱۵*
c (۵, ۱)	۲۶*	۹
d (۵, ۰)	۲۵	۵

دقت کنید: این مسئلهٔ دوهدفه، جواب ایده‌آل ندارد. زیرا یک نقطهٔ گوشه که همزمان دو هدف $Z_۱$ و $Z_۲$ را بهینه کند وجود ندارد، نقطهٔ c تابع هدف اول و نقطهٔ b تابع هدف دوم را بهینه می‌کند. این دو جواب، غیرمسلط‌اند، چون جواب نقطهٔ b از نظر تابع هدف دوم، $Z_۲^* = ۱۵$، بهتر از جواب نقطهٔ c ، یعنی $Z_۲ = ۹$، است و نقطهٔ b از نظر تابع هدف اول، $Z_۱ = ۱۸$، بدتر از جواب نقطهٔ c، یعنی $Z_۱^* = ۲۶$، است.

در توضیح جواب مسلط به دو نقطهٔ a و o توجه کنید؛ جواب نقطهٔ a هم از نظر $Z_۱$ و هم از نظر $Z_۲$ بهتر از جواب نقطهٔ o است، پس جواب a بر o مسلط است. همچنین به‌عنوان مثالی دیگر b، a را درنظر بگیرید. مقدار $Z_۱$ و $Z_۲$ برای b از a بهتر است. پس b بر a مسلط است. اگر یک جواب موجه بر تمامی جواب‌های موجه مسلط باشد، آن جواب، جواب ایده‌آل است. برای درک بهتر مطلب به مثال زیر توجه کنید.

اولویت مطلق

مثال ۵.۵

شخصی با در اختیار داشتن مبلغی معادل ۱۰۰۰ واحد پولی مایل به سرمایه‌گذاری در دو طرح مختلف است. سود ناشی از سرمایه‌گذاری در طرح اول ۶٪ و ریسک آن معادل ۴٪ است. اما سرمایه‌گذاری در طرح دوم بدون ریسک و دارای سودی معادل ۳٪ است. حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در هرکدام از طرح‌ها به ترتیب ۲۰۰ تا ۷۰۰ واحد پولی است. در صورتی که اهداف تصمیم‌گیرنده حداکثر کردن سود و حداقل کردن ریسک سرمایه‌گذاری باشد، مدل این مسئله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max } Z = [Z_۱, -Z_۲]$$

هدف اول حداکثر کردن سود

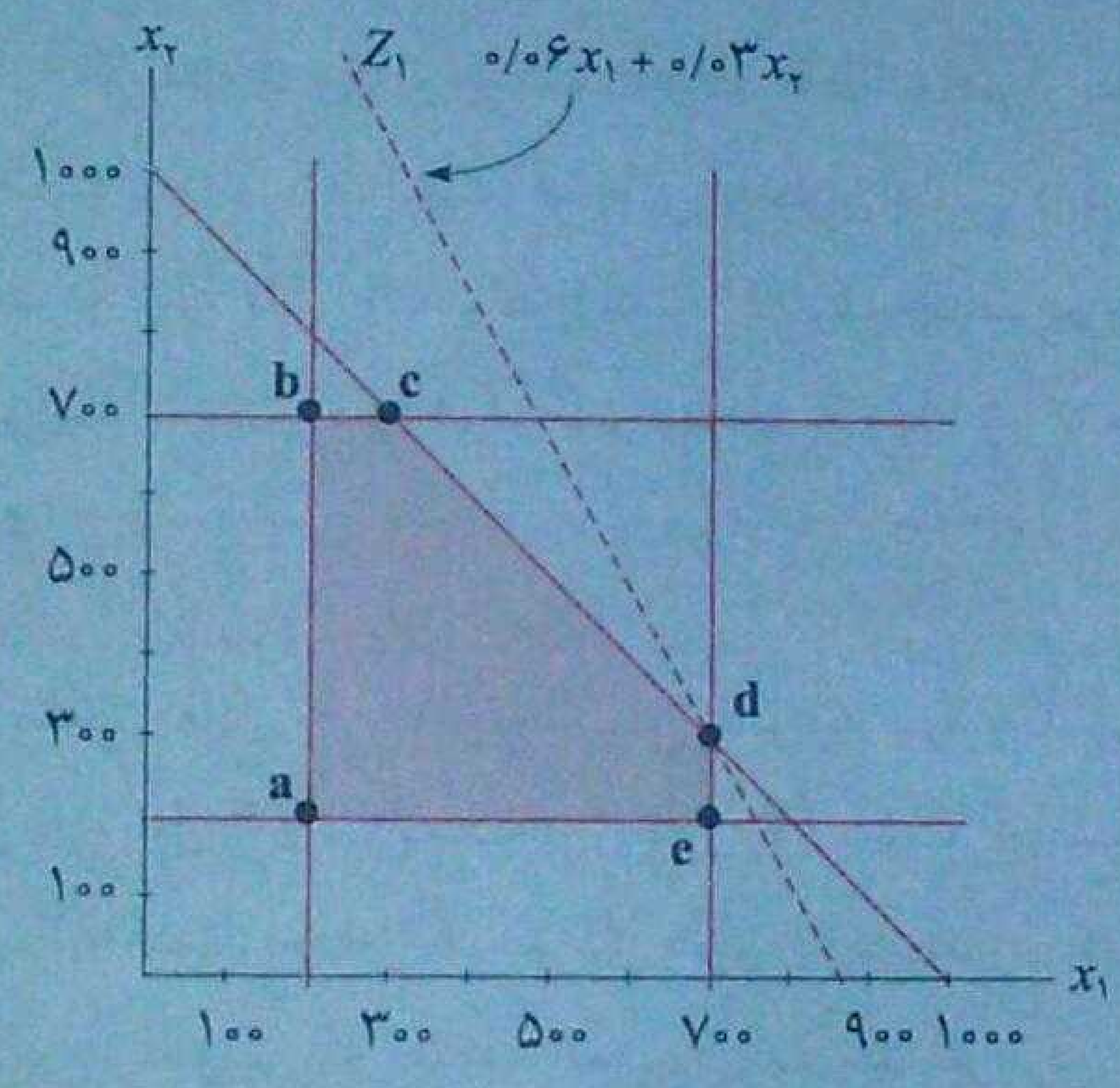
$$\begin{aligned}
Z_۱ &= ۰/۰۶\, x_۱ + ۰/۰۳ x_۲ \\
-Z_۲ &= -۰/۰۴\, x_۱ \\
& x_۱ + x_۲ \le ۱۰۰۰ \\
& x_۱ \le ۷۰۰ \\
& x_۲ \le ۷۰۰ \\
& x_۱ \ge ۲۰۰ \\
& x_۲ \ge ۲۰۰ \\
& x_۱, \ x_۲ \ge ۰
\end{aligned}$$

در مدل فوق x_1 میزان سرمایه‌گذاری در طرح ۱ و x_2 میزان سرمایه‌گذاری در طرح ۲ را نشان می‌دهد.

اگر سرمایه‌گذار در مدل خود ریسک یا تابع هدف دوم B را درنظر نگیرد، مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_1 = ۰/۰۶x_1 &+ ۰/۰۳x_2 \\ x_1 + \quad & x_2 \leq ۱۰۰۰ \\ x_1 \quad & \quad \leq ۷۰۰ \\ & x_2 \leq ۷۰۰ \\ x_1 \quad & \quad \geq ۲۰۰ \\ & x_2 \geq ۲۰۰ \\ x_1, \quad & x_2 \geq ۰ \end{aligned}$$

حل ترسیمی این مدل مانند شکل ۷.۵ است.



شکل ۷.۵ نمایش ترسیمی مثال ۵.۵ با هدف حداکثرکردن سود.

نقطهٔ d با مختصات $x_2^* = ۳۰۰$ و $x_1^* = ۷۰۰$ نقطهٔ بهینه و حداکثر سود معادل ۵۱ است. جواب بهینهٔ مسئلهٔ فوق بدون توجه به ریسک محاسبه شده است. میزان ریسک با توجه به جواب بهینهٔ این مدل و قرار دادن مختصات نقطهٔ d در Z_2 به‌دست می‌آید:

$$۰/۰۴x_1 = ۰/۰۴(۷۰۰) = ۲۸$$

هدف دوم حداقل کردن ریسک

یک بار دیگر مسئله را درنظر بگیرید، اما با این تفاوت که هدف فقط کاهش میزان ریسک است و حداکثرکردن سود

مدنظر نیست. مدل مسئله به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad Z_۲ &= ۰٫۰۴x_۱ \\
x_۱ + x_۲ &\leq ۱۰۰۰ \\
x_۱ &\leq ۷۰۰ \\
x_۲ &\leq ۷۰۰ \\
x_۱ &\geq ۲۰۰ \\
x_۲ &\geq ۲۰۰ \\
x_۱, \quad x_۲ &\geq ۰
\end{aligned}
$$

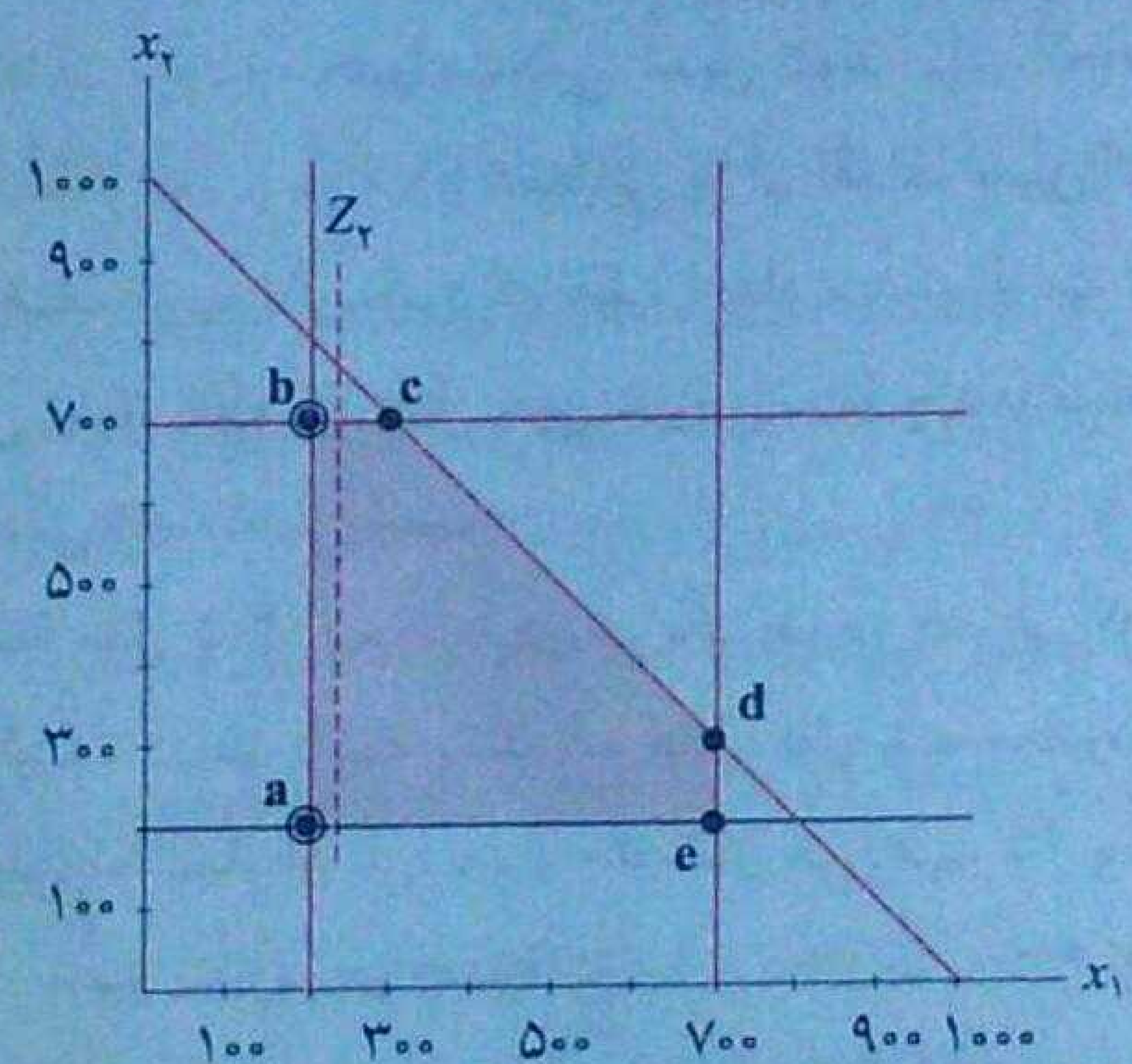
مسئله دارای جواب بهینهٔ چندگانه است، پس برای هدف حداقل کردن ریسک، تمامی نقاط روی پاره‌خط **ab** بهینه‌اند و البته دارای دو نقطهٔ گوشهٔ بهینهٔ **a** و **b** است.

$$\mathbf{a}: (x_۱ = ۲۰۰, x_۲ = ۲۰۰, Z_۲ = ۸)$$

و

$$\mathbf{b}: (x_۱ = ۲۰۰, x_۲ = ۷۰۰, Z_۲ = ۸)$$

نمایش ترسیمی این مدل مطابق شکل ۸.۵ است.



شکل ۸.۵ نمایش ترسیمی مثال ۵.۵.

در هرکدام از دو نقطهٔ **a** و **b** میزان ریسک به حداقل ممکن می‌رسد. اما در نقطهٔ **a** میزان سود برابر است با:

$$Z_۱ = ۰٫۰۶\ x_۱ + ۰٫۰۳\ x_۲ = ۰٫۰۶(۲۰۰) + ۰٫۰۳(۲۰۰) = ۱۸$$

و در نقطهٔ **b** سود معادل $Z_۱ = ۰٫۰۶x_۱ + ۰٫۰۳x_۲ = ۰٫۰۶(۲۰۰) + ۰٫۰۳(۷۰۰) = ۳۳$ خواهد بود. در مقایسهٔ نقاط **a** و **b** با درنظر گرفتن میزان سود، نقطهٔ **a** به هیچ وجه نباید انتخاب شود، زیرا **a** نسبت به **b**

ریسکی یکسان و سودی کم‌تر ارائه می‌کند. در این حالت گفته می‌شود که نقطهٔ b بر نقطهٔ a «مسلط» شده است. نقطه‌ای را مسلط گویند که با ریسک یکسان سودی بیش‌تر و یا برعکس با سودی یکسان، ریسکی کم‌تر ارائه کند. این سرمایه‌گذار با دو شیوهٔ تصمیم‌گیری مواجه است که یکی از این دو را باید انتخاب کند:

شیوه	$x_۱$	$x_۲$	$Z_۱$	$Z_۲$
۱	۷۰۰	۳۰۰	۵۱	۲۸
۲	۲۰۰	۷۰۰	۳۳	۸

شیوهٔ اول سرمایه‌گذاری به سود بیش‌تر می‌انجامد و ریسک بالاتری دارد، اما شیوهٔ دوم ریسک پایین‌تری دارد و سود کم‌تری نیز عاید می‌کند. کدام شیوه باید انتخاب شود؟ در این وضعیت در مقابل تصمیم‌گیرنده دو عامل سود و ریسک قرار دارد، به‌طوری که هدف افزایش سود با هدف کاهش ریسک متضاد است، اهداف عکسِ هم عمل می‌کنند. پس تصمیم‌گیرنده باید بین این دو هدف توازنی ایجاد کند. برای نیل به این منظور به شیوه‌های حل مسائل با چندین تابع هدف مانند تبدیل توابع هدف به محدودیت، روش وزن دادن به اهداف، روش اولویت مطلق، روش معیار جامع و برنامه‌ریزی آرمانی توجه کنید.

۱. تبدیل توابع هدف به محدودیت

در این روش تصمیم‌گیرنده از میان توابع هدف مسئله تنها یکی را انتخاب می‌کند تا همچنان به‌عنوان تابع هدف به‌کار گرفته شود و دیگر توابع هدف باید به محدودیت‌هایی تبدیل شوند. برای انجام این تبدیل تصمیم‌گیرنده باید «حداقل» و «حداکثر» توقع و انتظار خود را در میزان دستیابی به آن اهداف تعیین کند. البته می‌تواند میزانی دقیقاً معادل یک عدد را برای توابع هدف نیز درنظر بگیرد که نقش اعداد سمت راستِ توابع هدفی را خواهند داشت که قرار است به محدودیت‌هایی تبدیل شوند. با عمل بدین شیوه، مسئلهٔ چندهدفه به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود که حل آن به‌سادگی انجام‌شدنی است.

برای توضیح مطلب، مسئلهٔ مثال ۴.۵ را مجدداً درنظر بگیرید. در صورتی که $Z_۱$ میزان سود و $Z_۲$ میزان اشتغال را نشان دهد و تصمیم‌گیرنده درنظر داشته باشد تابع هدف اول را به محدودیت تبدیل کند و حداقل سود درخواستی او از تولید و محصولی که مقدار آن را با $x_۱$ و $x_۲$ نشان می‌دهیم، ۲۵ باشد، مدل تک‌هدفهٔ آن که یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی است، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z_۲ = x_۱ &+ ۴x_۲ \\
۵x_۱ + x_۲ &\geq ۲۵ \quad \text{تابع هدف تبدیل‌شده به محدودیت} \\
x_۱ + x_۲ &\leq ۶ \\
x_۱ &\leq ۵ \\
x_۲ &\leq ۳ \\
x_۱, x_۲ &\geq ۰
\end{aligned}$$

جواب بهینهٔ این مسئله عبارت است از:

$$x_1^* = ۴/۷۵,\ x_2^* = ۱/۲۵,\ Z_2^* = ۹/۷۵,\ Z_1 = ۲۵$$

این روش در طبقه‌بندی روش‌های MODM در زمرهٔ روش‌های «کسب اطلاع از تصمیم‌گیرنده قبل از حل مدل» قرار می‌گیرد. اطلاعاتی که از تصمیم‌گیرنده باید کسب کرد «انتخاب توابع هدفی که باید به محدودیت تبدیل شوند» و تعیین «حداقل، حداکثر یا مقداری که برای هر تابع هدف» است.

دقت کنید که این روش از نظر تکنیکی جزء ساده‌ترین روش‌های تصمیم‌گیری چندهدفه است که جواب‌های آن نسبت به اطلاعات کسب‌شده از حساسیت نسبتاً بالایی برخوردارند.

۲. روش وزن دادن به اهداف

در این روش تصمیم‌گیرنده به اهداف مختلف وزن می‌دهد و از ترکیب اهداف وزن‌داده‌شده یک تابع هدف به‌دست می‌آورد. به این ترتیب، مدلی با یک تابع هدف ایجاد می‌شود که مانند مسائل برنامه‌ریزی خطی حل‌شدنی خواهد بود. برای وزن هرکدام از اهداف مقادیری غیرمنفی فرض و مجموع وزن‌های داده‌شده برابر یک درنظرگرفته می‌شود. به این ترتیب، هرگاه در مدلی اهمیت هدف اول چهار برابر هدف دوم باشد، وزن هرکدام از اهداف با «نرمال» کردن وزن‌ها به‌دست می‌آید. برای این کار کافی است مجموع اهمیت هر دو هدف ($۵ = ۱ + ۴$) را پیدا کنید. وزن هدف اول را از تقسیم اهمیت آن هدف بر مجموع حاصل، یعنی $۰/۸ = \frac{۴}{۵}$، به‌دست آورید. پس، وزن هدف دوم برابر $۰/۲ = \frac{۱}{۵}$ خواهد شد، بنابراین تابع هدف مسئله چنین است:

$$\text{Max}\ \ (\text{Min})\ Z = ۰/۸\ \ (\text{تابع هدف اول})\ \ +\ ۰/۲\ \ (\text{تابع هدف دوم})$$

نکتهٔ مهم در به‌کارگیری این روش آن است که ضرایب متغیرهای تصمیم در هر تابع هدف با تابع هدف دیگر باید یک رده و بزرگی داشته باشد. مثلاً اگر ضرایب تابع هدف اول ۲ و ۱ و به‌صورت $Z_1 = ۲x_1 + x_2$ و تابع هدف دوم دارای ضرایب بزرگی، مانند ۲۱۰ و ۳۲۰ و به‌صورت $Z_2 = ۲۱۰x_1 + ۳۲۰x_2$ باشد، آن‌گاه وزن‌های ضرب‌شده در توابع هدف تأثیر واقعی وزن‌ها را بیان نمی‌دارد. به تابع هدفی که به‌اشتباه به‌صورت زیر ارائه شده است توجه کنید:

$$Z = ۰/۸(۲x_1 + x_2) + ۰/۲(۲۱۰x_1 + ۳۲۰x_2)$$

در تابع هدف Z آیا اهمیت تابع هدف اول چهار برابر تابع هدف دوم است؟

هرگاه ضرایب یک تابع هدف از توابع هدف دیگر بزرگ‌تر باشد ضرایب توابع هدف را باید نرمال‌سازی کرد. برای این کار هرکدام از ضرایب متغیرهای تصمیم یک تابع هدف را بر مجموع ضرایب آن تابع هدف تقسیم می‌کنند. در مثال فوق ضریب x_1 در تابع هدف اول برابر با $(\frac{۲}{۲+۱})$ و ضریب x_2 در همین تابع هدف برابر با $(\frac{۱}{۲+۱})$ است. برای تابع هدف دوم، ضریب نرمال‌شدهٔ x_1 معادل با $(\frac{۲۱۰}{۲۱۰+۳۲۰})$ و ضریب x_2 برابر با $\frac{۳۲۰}{۲۱۰+۳۲۰}$ می‌شود و تابع هدف مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Z = ۰/۸\left[\frac{۲}{۳}x_1 + \frac{۱}{۳}x_2\right] + ۰/۲\left[\frac{۲۱۰}{۵۳۰}x_1 + \frac{۳۲۰}{۵۳۰}x_2\right]$$

مثال ۶.۵

مثال ۵.۵ را مجدداً درنظر بگیرید و فرض کنید اهمیت حداکثرکردن سود سه برابرکاهش میزان ریسک است برای ایجاد تابع هدف به طریق زیر عمل می‌شود.

۱. از آن‌جا که یک تابع هدف Max و دیگری Min است، باید تابع هدف Min به Max تبدیل شود تا این‌که هر دو تابع هدف Max شوند. در این‌جا تابع هدف $\text{Min } Z_۲ = ۰/۰۴x_۱$ به Max تبدیل شده است: $\text{Max } -Z_۲ = -۰/۰۴x_۱$.

۲. وزن هر یک از دو تابع هدف محاسبه می‌شود.

$$w_۱ = \frac{۳}{۳+۱} = ۰/۷۵$$
$$w_۲ = \frac{۱}{۳+۱} = ۰/۲۵$$

آن‌گاه تابع هدف به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\text{Max } Z = ۰/۷۵ \ (\text{سود}) + ۰/۲۵ \ (\text{ریسک})$$

یا

$$\begin{aligned}\text{Max} &= ۰/۷۵(۰/۰۶x_۱ + ۰/۰۳x_۲) + ۰/۲۵(-۰/۰۴x_۱)\\ &= ۰/۰۳۵x_۱ + ۰/۰۲۲۵x_۲\end{aligned}$$

حال به این مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی می‌رسیم.

$$\begin{aligned}\text{Max } Z_۲ = ۰/۰۳۵x_۱ &+ ۰/۰۲۲۵x_۲\\ x_۱ + x_۲ &\le ۱۰۰۰\\ x_۱ &\le ۷۰۰\\ x_۲ &\le ۷۰۰\\ x_۱ &\ge ۲۰۰\\ x_۲ &\ge ۲۰۰\\ x_۱, x_۲ &\ge ۰\end{aligned}$$

- **گام‌های وزن دادن به اهداف**

گام ۱. اهمیت هر هدف را نسبت به هدف یا اهداف دیگر مشخص و وزن‌ها را تعیین کنید.

گام ۲. مطمئن شوید که ضرایب هر تابع هدف نسبت به دیگر توابع هدف یک درجهٔ بزرگی دارند. اگر این‌گونه نبود، ضرایب هر تابع هدف را نرمال‌سازی کنید.

گام ۳. تمامی توابع هدف را به‌صورت Max درآورید.

گام ۴. با ضرب کردن وزن‌ها در توابع هدف یک تابع هدف تکی ایجاد کنید.

گام ۵. مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی به‌دست‌آمده از گام ۴ را حل کنید.

گام ۶. جواب بهینهٔ به‌دست‌آمده از حل مسئلهٔ گام ۵ را در هرکدام از توابع هدف قرار دهید و Z_p^* را به‌دست آورید.

این روش از جمله روش‌های «کسب اطلاع از تصمیم‌گیرنده قبل از حل مدل» است که میزان اهمیت توابع هدف نسبت به هم و به عبارت دیگر، وزن اهداف اطلاعی را تعیین می‌کنند که باید قبل از حل مدل از تصمیم‌گیرنده گرفت.

۳. روش اولویت مطلق [1]

گاهی مدیران، علاقه‌مند به تعیین وزن برای اهداف مختلف نیستند و این کار را امری ذهنی به‌شمار می‌آورند. در چنین وضعیتی، تعیین اولویت مطلق بین اهداف نسبت به تعیین وزن، مناسب‌تر است.

گام‌های حل مسائلی با چندین هدف با به‌کارگیری این روش عبارت است از:

گام ۱. اولویت اهداف را از مهم‌ترین به کم‌اهمیت‌ترین، رده‌بندی کنید.

گام ۲. با استفاده از تابع هدف دارای بالاترین اولویت، مسئله را حل کنید و جواب بهینه را بیابید.

دستور توقف: در صورتی که جواب بهینهٔ به‌دست‌آمده منحصربه‌فرد بود توقف کنید، جواب بهینهٔ گام ۲، جواب نهایی است. اما اگر جواب بهینهٔ گام ۲ حالت خاص «جواب بهینهٔ چندگانه» داشته باشد به گام ۳ بروید.

گام ۳. تابع هدف گام دوم را با مساوی قرار دادن مقدار تابع هدف اول با مقدار بهینهٔ به‌دست‌آمده از گام قبل، به محدودیت تبدیل کنید و به گام ۲ برگردید.

مثال ۷.۵

مسئلهٔ زیر را با دو تابع هدف درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z = [Z_۱, -Z_۲] \\
&Z_۱ = ۰/۰۶x_۱ + ۰/۰۳x_۲ \\
&Z_۲ = ۰/۰۴x_۱ \\
&x_۱ + x_۲ \leq ۱۰۰۰ \\
&x_۱, \quad \leq ۷۰۰ \\
&x_۲ \leq ۷۰۰ \\
&x_۱, \quad x_۱ \geq ۲۰۰ \\
&x_۲, \quad x_۲ \geq ۲۰۰ \\
&x_۲, \quad x_۲ \geq ۰
\end{aligned}$$

حل

گام ۱. اولویت اول: تابع هدف $Z_۲$ است: $\text{Min } Z_۲ = ۰/۰۴x_۱$

اولویت دوم: تابع هدف $Z_۱$ است: $\text{Max } Z_۱ = ۰/۰۶x_۱ + ۰/۰۳x_۲$

1. absolute prioritise approach.

گام ۲. اولین مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی، با تابع هدفِ دارای اولویت اول را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z_۲ = \; & ۰/۰۴x_۱ \\
& x_۱ + x_۲ \le ۱۰۰۰ \\
& x_۱ \le ۷۰۰ \\
& x_۲ \le ۷۰۰ \\
& x_۱ \ge ۲۰۰ \\
& x_۲ \ge ۲۰۰ \\
& x_۱, \; x_۲ \ge ۰
\end{aligned}
$$

این مسئله حالت خاص جواب بهینهٔ چندگانه دارد و نمایش ترسیمی آن در شکل ۸.۵ به نمایش درآمده است. جواب‌های بهینهٔ چندگانه نقاط $a(۲۰۰, ۲۰۰)$ و $b(۲۰۰, ۷۰۰)$ هستند که به‌ازای این نقاط مقدار بهینهٔ تابع هدف با اولویت اول $Z_۲^* = ۸$ است. پس به گام ۳ می‌رویم.

گام ۳. دومین مسئله با استفاده از تابع هدف دارای اولویت دوم به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z_۱ = \; & ۰/۰۶\, x_۱ + ۰/۰۳x_۲ \\
& x_۱ + x_۲ \le ۱۰۰۰ \\
& x_۱ \le ۷۰۰ \\
& x_۲ \le ۷۰۰ \\
& x_۱ \ge ۲۰۰ \\
& x_۲ \ge ۲۰۰ \\
& ۰/۰۴x_۱ = ۸ \\
& x_۱, \; x_۲ \ge ۰
\end{aligned}
$$

با حل مسئلهٔ فوق از آن‌جا که محدودیت $۰/۰۴x_۱ = ۸$ به مدل اضافه شده است، اولویت اول تمام و کمال برقرار شده و $Z_۱$ به حداقل مقدار ممکن خود خواهد رسید. حال با اضافه شدن این محدودیت جدید به مدل فوق، مسئله مجدداً حل می‌شود که جواب بهینه عبارت است از:

$$x_۱^* = ۲۰۰, \; x_۲^* = ۷۰۰, Z_۱^* = ۳۳, \; Z_۲^* = ۸$$

این روش از جمله روش‌های کسب اطلاع از تصمیم‌گیرنده قبل از حل جدول بوده است که اطلاع کسب‌شده «اولویت اهداف» است.

۴. روش معیار جامع[1]

روش معیار جامع درصدد حل مسئله به گونه‌ای است که تفاوت بین هر تابع هدف و مقدار بهینهٔ آن به حداقل ممکن

---
1. global criterion method.

برسند. مسائلی با p تابع هدف خطی، که همه محدودیت‌های آن نیز خطی هستند، به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = [Z_۱, Z_۲ \cdots Z_p] \\ &g_i(x_j) \le b_i \qquad (i = ۱, ۲, \cdots, m) \\ &x_j \ge ۰ \qquad (j = ۱, ۲, \cdots, k) \end{aligned}$$

حل این مسئله ابتدا مستلزم حل p مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی است که هر مسئله فقط با یک تابع هدف حل می‌شود. در صورتی که جواب بهینهٔ هر کدام از مسائل با Z_t^* نشان داده می‌شود $(t = ۱, ۲, \cdots, p)$، آن‌گاه جواب نهایی مسئله از حل مسئلهٔ زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z' = \sum_{i=۱}^{t} \left[\frac{Z_t^* - Z_t(x_j)}{Z_t^*} \right] \\ &g_i(x_j) \le b_i \qquad (i = ۱, ۲, \cdots, m) \\ &x_j \ge ۰ \qquad (j = ۱, ۲, \cdots, k) \end{aligned}$$

حل این مسئله با استفاده از روش معیار جامع مستلزم به‌کارگیری سه گام زیر است:

گام ۱. p مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی را که هر کدام فقط یک تابع هدف از p تابع هدف را دربرمی‌گیرد، حل کنید.

گام ۲. جدولی از جواب‌های به‌دست‌آمده در گام ۱ را تشکیل دهید.

گام ۳. با به‌کارگیری مدل زیر، جواب نهایی را به‌دست آورید.

$$\begin{aligned} &\text{Min } Z' = \sum_{i=۱}^{t} \left[\frac{Z_t^* - Z_t(x_j)}{Z_t^*} \right] \\ &g_i(x_i) \le b_i \\ &x_j \ge ۰ \end{aligned}$$

مثال ۸.۵

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = [Z_۱, Z_۲] \\ &Z_۱ = ۰/۴x_۱ + ۰/۳x_۲ \\ &Z_۲ = x_۱ \\ &x_۱ + x_۲ \le ۴۰۰ \\ &۲x_۱ + x_۲ \le ۵۰۰ \\ &x_۱, \; x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

گام ۱. در این گام دو مسئلهٔ برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنید:

$$\begin{array}{ll}
\text{Max } Z_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 & \qquad \text{Max } Z_2 = x_1 \\
x_1 + x_2 \leq 400 & \qquad x_1 + x_2 \leq 400 \\
2x_1 + x_2 \leq 500 & \qquad 2x_1 + x_2 \leq 500 \\
x_1, \ x_2 \geq 0 & \qquad x_1, \ x_2 \geq 0
\end{array}$$

جواب بهینه:

$$x_1^* = 100, \ x_2^* = 300, \ Z_1^* = 130$$

$$x_1^* = 250, \ x_2^* = 0, \ Z_2^* = 250$$

گام ۲. مقدار Z_2 را به‌ازای جواب بهینهٔ مسئلهٔ اول و مقدار Z_1 را به‌ازای جواب بهینهٔ مسئلهٔ دوم محاسبه کنید.

$$Z_1 = 130, \ x_1 = 100, \ x_2 = 300 \Rightarrow Z_2 = 100$$

و

$$Z_2 = 250, \ x_1 = 250, \ x_2 = 0 \Rightarrow Z_1 = 100$$

جواب‌های هر دو مسئله در جدول زیر ارائه شده است:

جدول ۳۸.۵ ماتریس نتایج.

	x_1	x_2	Z_1	Z_2
مسئلهٔ اول	۱۰۰	۳۰۰	۱۳۰	۱۰۰
مسئلهٔ دوم	۲۵۰	۰	۱۰۰	۲۵۰

گام ۳. مسئلهٔ زیر را حل کنید.

$$\text{Min } Z' = \frac{130 - (0.4x_1 + 0.3x_2)}{130} + \frac{250 - x_1}{250} = 2 - 0.00708\, x_1 - 0.00231 x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1, \ x_2 \geq 0$$

درنتیجه، جواب نهایی عبارت است از:

$$x_1 = 250, \ x_2 = 0, \ Z_1 = 100, \ Z_2 = 250$$

این روش در مجموعه تکنیک‌های «حل مسئله بدون کسب اطلاع از تصمیم‌گیرنده» قرار داده می‌شود.

۵. برنامه‌ریزی آرمانی[1]

یکی از روش‌های تصمیم‌گیری با اهداف چندگانه، برنامه‌ریزی آرمانی است که اول‌بار در دههٔ ۱۹۶۰ م. چارنس[2] و کوپر[3] آن را ابداع کردند و ایگنیزیو[4] و لی[5] آن را توسعه دادند. همان طورکه از نام این روش پیداست، در برنامه‌ریزی آرمانی تصمیم‌گیرنده برای هر هدف یک آرمان تعیین می‌کند. به‌منظور درک بهتر مفاهیم برنامه‌ریزی آرمانی، آشنایی با واژه‌های زیر ضرورت دارد.

هدف عبارات و روابطی ریاضی است که منعکس‌کنندهٔ خواسته‌های تصمیم‌گیرنده است. این خواسته‌ها ممکن است «حداکثر کردن سود» و یا «حداقل کردن هزینه» باشد.

سطح تمایل ارزش تعیین‌شده‌ای است که تصمیم‌گیرنده در پی کسب آن برای هدف موردنظر است.

آرمان هدفی است که برای آن سطح تمایل تعیین شده است، مثلاً آرزوی کسب سودی حداقل معادل x ریال و یا کاهش هزینه‌ای معادل y ریال آرمان نامیده می‌شود. به این ترتیب، حداکثرکردن سود هدف است، اما کسب سودی معادل ۱۰۰۰ واحد «آرمانی» است که سطح تمایل تصمیم‌گیرنده را برای به‌دست آوردن سود مشخصی بیان می‌دارد.

متغیرهای انحراف از آرمان[6] دست‌یابی به سطح تمایل تعیین‌شده در هدف، وابسته به امکانات، منابع و محدودیت‌هایی است و در عمل ممکن است تصمیم‌گیرنده به سطح تمایل تعیین‌شده دست بیابد یا نیابد. در بسیاری موارد ممکن است بین آرزوها، تمایلات و خواسته‌های تصمیم‌گیرنده و آنچه در عمل به‌دست می‌آورد، تفاوت و اختلاف وجود داشته باشد. این میزان تفاوت را در مدل برنامه‌ریزی آرمانی با متغیری به نام انحراف از آرمان، اندازه‌گیری می‌کنند. به عبارت دیگر تفاوت بین مکتسبات و خواسته‌ها را انحراف از آرمان می‌نامند. مثلاً، در صورتی که آرمان شرکتی تولیدی کسب سودی معادل ۱۰۰۰ واحد باشد و در عمل سود این شرکت ۸۰۰ واحد شود، میزان متغیر انحراف از آرمان، که با d نشان داده می‌شود، برابر با ۲۰۰ است و اگر سود شرکت ۱۰۰۰ واحد شود، میزان متغیر انحراف از آرمان صفر است و شرکت کاملاً به آرمان کسب سود خود دست یافته است. سطح دستیابی ممکن است بیش‌تر یا کم‌تر از آرمانِ تعیین‌شده باشد. در صورتی که سود کسب‌شده ۸۰۰ واحد باشد، میزان انحراف از آرمان ۲۰۰ است. این انحراف را با حالتی که مقدار سود ۱۲۰۰ می‌شود و انحراف آن نیز ۲۰۰ است، نباید اشتباه کرد. به‌منظور تفکیک این دو حالت از هم، میزان فزونی از آرمان را با d^+ و میزان عدم دستیابی به آرمان را با d^- نشان می‌دهند. مثلاً $d^+ = 300$ به معنی دستیابی به سودی معادل ۱۳۰۰ و $d^- = 150$ بیانگر کسب سودی معادل ۸۵۰ است. d^- و d^+ را به ترتیب متغیرهای انحراف از آرمان منفی و مثبت می‌نامند.

اگر در یک مدل $d^+ = 0$ و $d^- = 0$، آن گاه آرمان تعیین‌شده دقیقاً حاصل شده است. به‌طور کلی، برای d^+ و d^- چهار حالت متصور است که سه حالت امکان‌پذیر و حالت چهارم امکان‌ناپذیر است. این وضعیت در جدول ۳۹.۵ نشان داده شده است.

---

1. goal programming. 2. Charnes. 3. Cooper. 4. Ignizio. 5. Lee. 6. goal deviation.

جدول ۳۹.۵ رابطهٔ بین متغیرهای انحراف از آرمان مثبت و منفی.

حالت	وضعیت متغیرهای انحراف از آرمان	توضیح
اول	$d^- = 0$ و $d^+ = 0$	دستیابی کامل و دقیق به آرمان تعیین‌شده
دوم	$d^- = 0$ و $d^+ \neq 0$	پیشی گرفتن از آرمان تعیین‌شده
سوم	$d^- \neq 0$ و $d^+ = 0$	دست نیافتن به آرمان تعیین‌شده
چهارم	$d^- \neq 0$ و $d^+ \neq 0$	این حالت امکان‌پذیر نیست، چون نمی‌شود هم به آرمان نرسید و هم از آن پیشی گرفت.

دقت کنید؛ متغیرهای انحراف از آرمان همواره متغیرهایی غیرمنفی هستند.

الف) مدل‌سازی آرمانی

فرض کنید نمایش ریاضی pامین تابع هدف با متغیرهای تصمیم به‌صورت زیر است:

$$Z_p = (x_j), \quad j = (1, 2, \cdots, n)$$

b_p: میزان سطح تمایل هدف pام

به این ترتیب سه شکل مختلف زیر را برای آرمان می‌توان درنظر گرفت:

- $Z_p(x_j) \leq b_p$؛ به این معنا که تصمیم‌گیرنده حداکثر مایل به کسب ارزشی معادل b_p است.
- $Z_p(x_j) \geq b_p$؛ به این معنا که تصمیم‌گیرنده حداقل مایل به کسب ارزشی معادل b_p است.
- $Z_p(x_j) = b_p$؛ به این معنا که تصمیم‌گیرنده دقیقاً مایل به کسب ارزشی معادل b_p است.

مثال ۹.۵

اگر سود شرکتی به‌صورت تابع هدف زیر بیان شود:

$$Z_1 = 5x_1 + 7x_2$$

و سطح تمایل آن کسب سودی حداقل معادل ۱۰۰۰ واحد پولی باشد، محدودیت این هدف به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$5x_1 + 7x_2 \leq 1000$$

اگر d_1^+ میزان کسب سودی بیش از آرمان (۱۰۰۰ واحد پولی) و d_1^- میزان عدم دستیابی به آرمان سود را نشان دهد، در صورتی که هیچ انحرافی چه مثبت و چه منفی از آرمان مجاز نباشد، یعنی $d_1^- = d_1^+ = 0$، آن‌گاه آرمان به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$5x_1 + 7x_2 = 1000$$

و در صورتی که بخواهیم امکان کسب سودی بیش از ۱۰۰۰ واحد پولی وارد معادله یا محدودیت آرمانی شود،

باید این میزان افزایش، که با $d^+ > 0$ نشان داده می‌شود، به سمت راست معادلهٔ آرمانی اضافه شود.

$$5x_1 + 7x_2 = 1000 + d_1^+$$

و در حالتی که بخواهیم کسب سودی کم‌تر از ۱۰۰۰ واحد پولی نیز به معادلهٔ آرمانی اضافه و محدودیت آرمانی را تکمیل کنیم یعنی انحراف مثبت و منفی مجاز باشد، باید متغیر $d^- > 0$، که میزان کاهش را نشان می‌دهد از سمت راست معادله کم کنیم. توجه کنید که متغیرهای انحراف از آرمان مثبت و منفی نمی‌توانند همزمان مقداری مثبت داشته باشد (حالت چهارم، جدول ۳۹.۵).

$$5x_1 + 7x_2 = 1000 + d_1^+ - d_1^-$$

در صورتی که d_1^+ و d_1^- به سمت چپ منتقل شوند، معادلهٔ آرمان مطابق رابطهٔ زیر خواهد بود:

$$5x_1 + 7x_2 - d_1^+ + d_1^- = 1000$$

از آن‌جا که خواستهٔ تصمیم‌گیرنده کسب حداقل سودی معادل ۱۰۰۰ است، بنابراین باید در عملیات ریاضی و حل مسئله‌ای که بعداً خواهد آمد میزان d_1^- را که به آن «متغیر انحراف از آرمان نامطلوب» گفته می‌شود حداقل کرد.

مثال ۱۰.۵

اگر هزینه‌های تولید دو محصول شرکتی به‌صورت $Z_2 = x_1 + 2x_2$ بیان شود و خواستهٔ شرکت هزینه کردن حداکثر ۵ واحد پولی باشد، آن‌گاه محدودیت و آرمان هزینه به‌صورت زیر است:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad \text{یا} \quad x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 5$$

که d_2^+ مقدار هزینهٔ انجام‌شده بیش از ۵ واحد و d_2^- میزان هزینهٔ انجام‌شدهٔ کم‌تر از ۵ را نشان می‌دهد. از آن‌جا که خواستهٔ شرکت حداقل کردن هزینه است، پس d_2^+، یعنی میزان هزینهٔ انجام‌شدهٔ بیش از ۵ واحد که متغیر انحراف از آرمان نامطلوب است را باید حداقل کرد.

جدول ۴۰.۵ انواع آرمان‌ها، شکل محدودیت مربوط به آن‌ها و متغیرهایی را که باید حداقل شوند نشان می‌دهد.

جدول ۴۰.۵ صورت‌بندی آرمان.

متغیر انحراف از آرمان که حداقل می‌شود	شکل محدودیت آرمان	نوع آرمان
d_p^+	$Z_p(x_j) - d_p^+ + d_p^- = bp$	$Z_p(x_j) \leq b_p$
d_p^-	$Z_p(x_j) - d_p^+ + d_p^- = bp$	$Z_p(x_j) \geq b_p$
d_p^+ و d_p^-	$Z_p(x_j) - d_p^+ + d_p^- = bp$	$Z_p(x_j) = b_p$

ب) رسم معادلات آرمان

برای رسم معادلات آرمان به‌صورتی که در ادامه می‌آید، عمل کنید.

گام ۱. معادلات آرمان را بدون توجه به متغیرهای انحراف از آرمان رسم کنید.
گام ۲. خط رسم‌شده در گام ۱ فضا را به دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند. وضعیت متغیرهای انحراف از آرمان با توجه به نقاط روی خط یا در یکی از دو طرف خط، به یکی از سه صورت زیر خواهد بود:

الف) مقدار متغیرهای انحراف از آرمان به‌ازای هر نقطه روی خط برابر صفر است.

ب) عدد سمت راست معادلهٔ آرمانی رسم‌شده در گام ۱ را ذهنی افزایش دهید و جهت حرکت خط را مشخص کنید. مقدار d^+ در این جهت از صفر بیش‌تر است و هرچه فاصلهٔ نقاط از این خط بیش‌تر شود، مقدار d^+ بیش‌تر می‌شود.

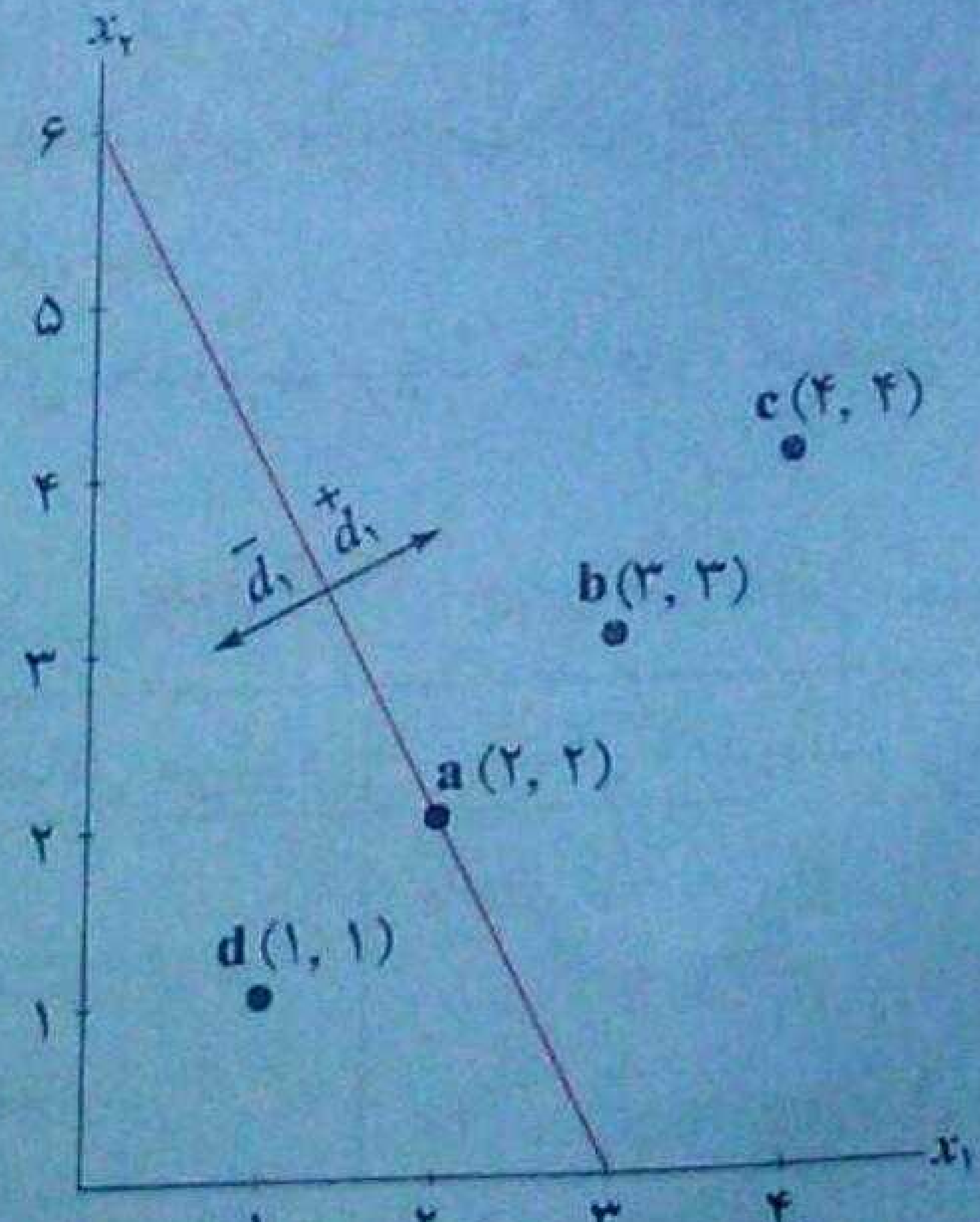
ج) عدد سمت راست معادلهٔ آرمانی رسم‌شده در گام ۱ را ذهنی کاهش دهید و جهت حرکت خط را مشخص کنید. مقدار d^- در این جهت بزرگ‌تر از صفر است و هرچه فاصلهٔ نقاط از این خط بیش‌تر شود، مقدار d^- نیز بیش‌تر می‌شود.

مثال ۱۱.۵

معادلهٔ آرمان زیر را رسم کنید:

$$۴x_۱ + ۲x_۲ + d_۱^- - d_۱^+ = ۱۲$$

گام ۱. معادلهٔ $۴x_۱ + ۲x_۲ = ۱۲$ را رسم کنید.
گام ۲. با افزایش عدد سمت راست، خط به سمت بالا حرکت می‌کند. پس در سمت راست خط، $d_۱^+$ مقداری غیرصفر خواهد داشت. این سمت با $\xrightarrow{d_۱^+}$ نشان داده می‌شود.



شکل ۹.۵ نمایش ترسیمی یک آرمان.

گام ۳. با کاهش عدد سمت راست، خط به سمت پایین حرکت می‌کند. پس در سمت پایین خط، d_1^- مقداری غیرصفر خواهد داشت. این سمت با $\xleftarrow{d_1^-}$ نشان داده می‌شود.

دقت کنید؛ به‌ازای هر نقطه در بالای خط مقدار d_1^- برابر صفر و به‌ازای نقاط زیر خط مقدار d_1^+ مساوی صفر خواهد بود و به‌ازای تمامی نقاط روی خط، $d_1^- = 0$ و $d_1^+ = 0$ است.

مقدار متغیرهای انحراف از آرمان در نقطهٔ a برابر صفر است، یعنی $d_1^+ = 0$ و $d_1^- = 0$ و از آن‌جا که نقطهٔ b در بالای خط قرار دارد، $d_1^- = 0$ و مقدار d_1^+ با قرار دادن مختصات نقطهٔ b در معادلهٔ آرمان به‌دست می‌آید.

$$(۴ \times ۳) + (۲ \times ۳) + ۰ - d_1^+ = ۱۲ \Rightarrow d_1^+ = ۶$$

در نقطهٔ c مقدار d_1^- برابر صفر است و مقدار d_1^+ با قرار دادن مختصات نقطهٔ c در معادلهٔ آرمان به‌دست می‌آید.

$$(۴ \times ۴) + (۲ \times ۴) + ۰ - d_1^+ = ۱۲ \Rightarrow d_1^+ = ۱۲$$

از آن‌جا که نقطهٔ d در زیر خط قرار دارد، $d_1^+ = 0$ و مقدار d_1^- با قرار دادن مختصات نقطهٔ d در آرمان به‌دست خواهد آمد.

$$(۴ \times ۱) + (۲ \times ۱) + d_1^- - ۰ = ۱۲ \Rightarrow d_1^- = ۶$$

ساختن مدل برنامه‌ریزی آرمانی، مشابهت زیادی با مدل‌سازی برنامه‌ریزی خطی دارد. به‌منظور آشنایی با این موضوع به مثال‌های زیر توجه کنید. این مثال‌ها به‌تدریج توسعه داده می‌شوند و مفاهیم مدل‌سازی آرمانی را تکمیل می‌کنند.

- **مدلی با یک آرمان**

مثال ۱۲.۵

یک شرکت تولیدکنندهٔ وسایل الکترونیکی دو نوع ماشین‌حساب معمولی و مهندسی مونتاژ می‌کند. تولید هر ماشین‌حساب مستلزم انجام عملیاتی در دو کارگاه مختلف A و B است. جدول ۴۱.۵ زمان استفاده از هر کارگاه را در هر هفته و زمان لازم برای انجام عملیات مونتاژ هر ماشین‌حساب را در هر کارگاه نشان می‌دهد.

جدول ۴۰.۵ داده‌های مربوط به مدلی با یک آرمان.

توضیحات	ماشین‌حساب معمولی	ماشین‌حساب مهندسی
زمان موردنیاز برای عملیات در کارگاه A	۱	۲
زمان موردنیاز برای عملیات در کارگاه B	۱/۵	۱/۵
سود هر واحد	۷/۵	۱۰

حداکثر زمان استفاده از هر کارگاه در هفته ۶۰ ساعت است.

حل

در صورتی که $x_۱$ را تعداد ماشین‌حساب‌های معمولی و $x_۲$ را تعداد ماشین‌حساب‌های مهندسی فرض کنیم، مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = ۷/۵x_۱ &+ ۱۰x_۲ \\ x_۱ + \quad ۲x_۲ &\leq ۶۰ \\ ۱/۵x_۱ + ۱/۵x_۲ &\leq ۶۰ \\ x_۱, \qquad x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

جواب بهینهٔ این مسئله عبارت است از:

$$x_۱^* = ۲۰ \quad \text{و} \quad x_۲^* = ۲۰,\ Z^* = ۳۵۰$$

حال با شیوهٔ مدل‌سازی برنامه‌ریزی آرمانی این مسئله آشنا می‌شوید. اگر در این مدل تنها آرمان، کسب سودی معادل ۱۰۰۰ واحد پولی درنظر گرفته شود، متغیرهای انحراف از آرمان را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

$d_۱^-$: میزان عدم دستیابی به آرمان ۱۰۰۰ واحد پولی سود (عدم موفقیت در رسیدن به آرمان)

$d_۱^+$: میزان سود بیش از ۱۰۰۰ واحد پولی (موفقیت بیش از آرمان)

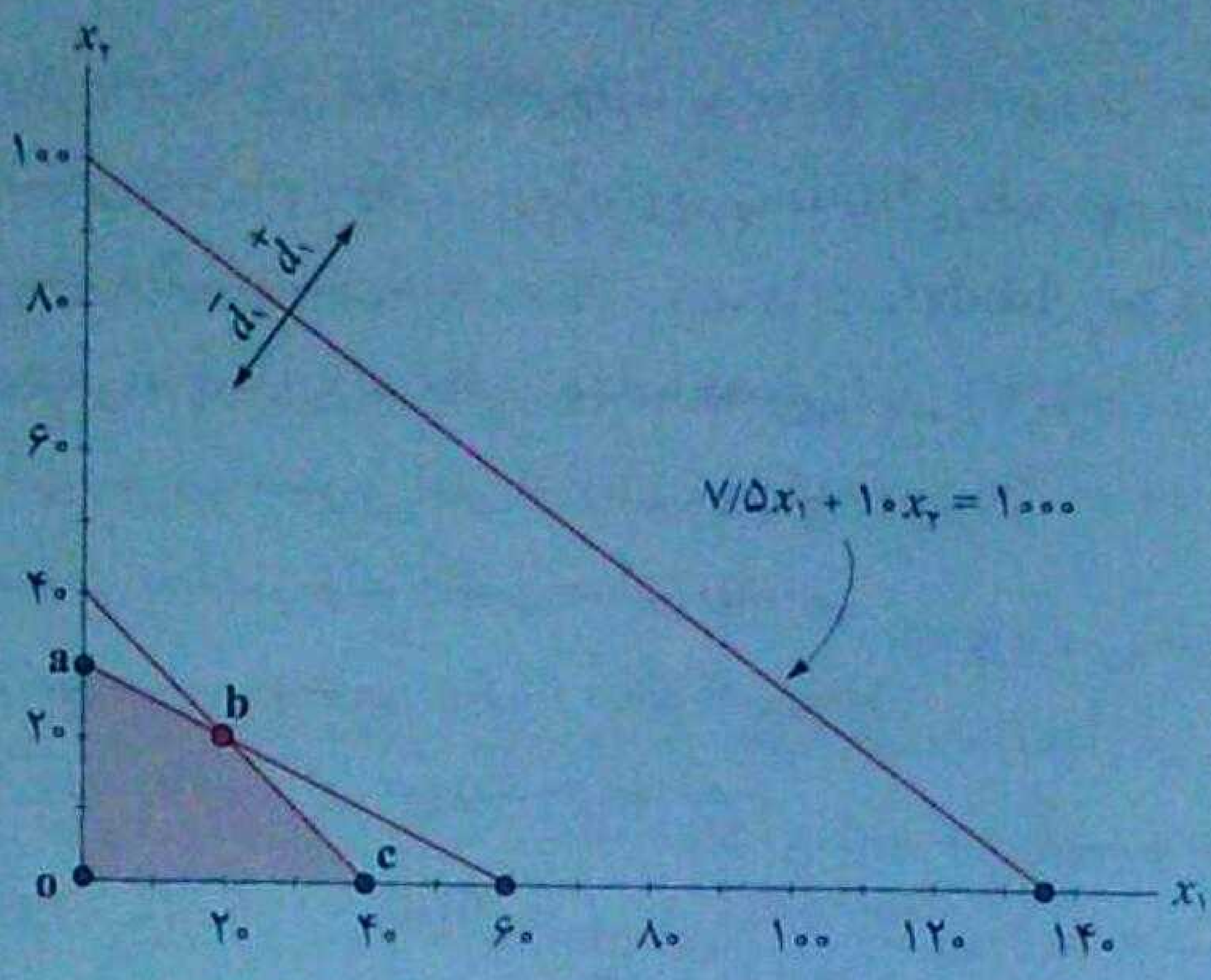
بنابراین، معادلهٔ آرمان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ + d_۱^- - d_۱^+ = ۱۰۰۰$$

از آن‌جا که شرکت خواهان حداقل کردن میزان عدم موفقیت در دستیابی به آرمانِ تعیین‌شده است، متغیر انحراف از آرمانِ نامطلوب، یعنی $d_۱^-$ باید حداقل شود. در مسائل برنامه‌ریزی آرمانی حداقل کردن انحرافات نامطلوب هدفی است که همواره در تابع هدف ظاهر می‌شود. پس مدل برنامه‌ریزی آرمانی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & \qquad\qquad d_۱^- \\ ۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ + d_۱^- - d_۱^+ &= ۱۰۰ && (۱.۵) \\ x_۱ + ۲x_۲ &\leq ۶۰ && (۲.۵) \\ ۱/۵x_۱ + ۱/۵x_۲ &\leq ۶۰ && (۳.۵) \\ x_۱,\ x_۲,\ d_۱^-,\ d_۱^+ &\geq ۰ \end{aligned}$$

مسائل برنامه‌ریزی آرمانی با دو متغیر تصمیم را می‌توان به روش ترسیمی حل کرد. برای رسم معادلهٔ آرمان سود معادلهٔ (۱.۵) ابتدا باید معادلهٔ $۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ = ۱۰۰۰$ رسم شود. دقت کنید که متغیرهای انحراف از آرمان درنظر گرفته نشده است.



شکل ۱۰.۵ نمایش ترسیمی مدلی با یک آرمان.

متغیرهای انحراف از آرمان به‌ازای هر نقطه روی خط $۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ = ۱۰۰۰$ برابر صفر است. اما به‌ازای هر نقطه در زیر این خط مقدار $d_۱^-$ در معادلهٔ (۱.۵) بزرگ‌تر از صفر شده و $d_۱^+ = ۰$ است. به همین ترتیب، مقدار $d_۱^+$ به‌ازای هر نقطه در بالای خطِ رسم‌شده مقداری بزرگ‌تر از صفر دارد و $d_۱^- = ۰$ است. با رسم دو محدودیت (۲.۵) و (۳.۵) نمایش ترسیمی مسئله به‌صورت شکل ۱۰.۵ خواهد بود. هر نقطه با مشخصات $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲)$ و $x_۱, x_۲ \geq ۰$ است و در داخل چهارضلعی oabc در دو محدودیت آخر صدق می‌کند. اما از آن‌جا که هدف حداقل کردن $d_۱^-$ است، باید در چهارضلعی oabc نقطه‌ای را انتخاب کرد که حداقل فاصله را تا خط $۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ = ۱۰۰۰$ داشته باشد.

بنابراین نقطهٔ $\mathbf{b}^* = (۲۰, ۲۰)$ که هم در دو محدویت آخر صدق می‌کند و هم کم‌ترین مقدار $d_۱^-$ را دارد. هرچه فاصلهٔ انتخابی از خط $۷/۵x_۱ + ۱۰x_۲ = ۱۰۰۰$ بیش‌تر باشد، $d_۱^-$ بیش‌تر است. از آن‌جا که این نقطه در منطقهٔ $d_۱^-$ قرار دارد، مقدار $d_۱^+$ برابر صفر است و برای به‌دست آوردن $d_۱^-$ کافی است مقدار $x_۱^* = ۲۰$ و $x_۲^* = ۲۰$ را در معادلهٔ (۱.۵) قرار داد.

$$(۷/۵ \times ۲۰) + (۱۰ \times ۲۰) + d_۱^- - ۰ = ۱۰۰۰ \Rightarrow d_۱^- = ۶۵۰$$

و این بدان معناست که ۶۵۰ واحد از آرمانِ ۱۰۰۰ واحد پولی کم‌تر به‌دست خواهد آمد. به این ترتیب، سود حاصل برابر با $۱۰۰۰ - ۶۵۰ = ۳۵۰$ واحد پولی خواهد بود.

- **مدلی با چند آرمان**

مثال ۱۳.۵

در مثال قبل فرض کنید مدیر شرکت علاوه‌بر داده‌های قبلی، تولید حداقل ۱۰ عدد از هر نوع ماشین‌حساب را مدنظر داشته باشد. در این وضعیت شرکت سه آرمان دارد: آرمان سود و آرمان‌های تولید دو نوع ماشین‌حساب.

بنابراین متغیرهای انحراف از آرمان به شرح زیر خواهد بود:

$d_۱^-$: میزان عدم دستیابی به آرمان سود

$d_۱^+$: میزان افزایش سود از آرمانِ تعیین‌شده

$d_۲^-$: میزان عدم دستیابی به آرمان تولید ماشین‌حساب معمولی

$d_۲^+$: میزان تولید ماشین‌حساب معمولی بیش از آرمان تعیین‌شده

$d_۳^-$: میزان عدم دستیابی به آرمان تولید ماشین‌حساب مهندسی

$d_۳^+$: میزان تولید ماشین‌حساب مهندسی بیش از آرمانِ تعیین‌شده

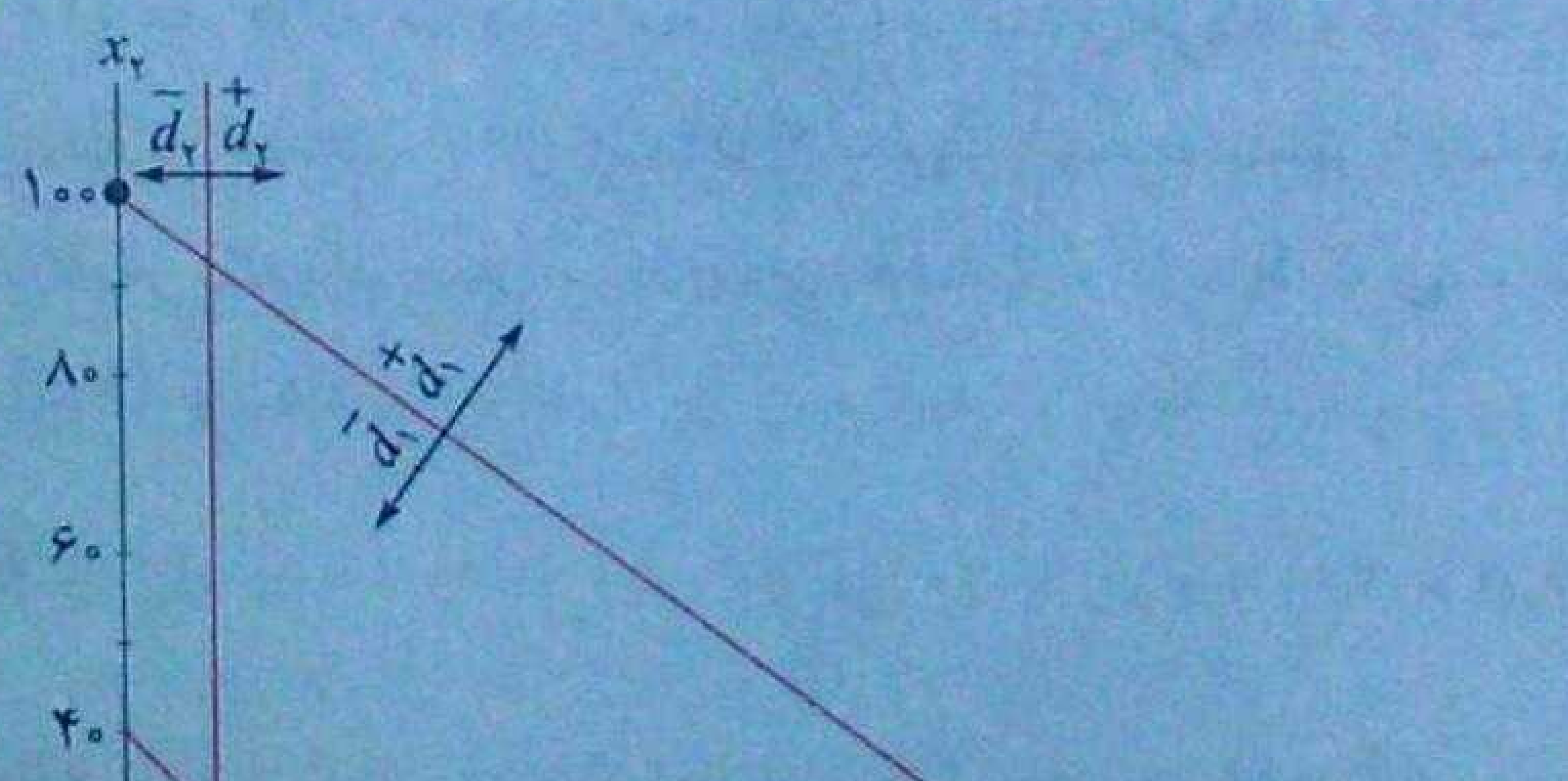
به این ترتیب، مدل برنامه‌ریزی آرمانی به این صورت خواهد شد:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } Z = \quad d_۱^-, \quad d_۲^-, \quad d_۳^- \\
۷/۵\, x_۱ + ۱۰\, x_۲ + d_۱^- - d_۱^+ = ۱۰۰۰ \\
x_۱ + d_۲^- - d_۲^+ = ۱۰ \\
x_۲ + d_۳^- - d_۳^+ = ۱۰ \\
x_۱ + ۲x_۲ \leq ۶۰ \\
۱/۵x_۱ + ۱/۵x_۲ \leq ۶۰ \\
x_۱,\ x_۲,\ d_۱^-,\ d_۱^+,\ d_۲^-,\ d_۲^+,\ d_۳^-,\ d_۳^+ \geq ۰
\end{array}
$$

•

از آن‌جا که واحدهای اندازه‌گیری $d_۱^-$، ریال و $d_۲^-$ و $d_۳^-$، مقدار ماشین‌های معمولی و مهندسی باهم متفاوت‌اند، جمع کردن این متغیرها صحیح نیست و بین آن‌ها در تابع هدف آرمانی «ویرگول» گذاشته شده است.

نمایش ترسیمی مسئله به‌صورت زیر است:



شکل ۱۱.۵ نمایش ترسیمی مدلی با چندین آرمان.

محدودیت‌های استفاده از ظرفیت دو کارگاه منطقهٔ موجه **oabc** را تشکیل می‌دهد. در این منطقه، هدف حداقل کردن ($d_۱^-$، $d_۲^-$، $d_۳^-$) است. حال، هر نقطه در سمت راست یا روی خط $x_۱ = ۱۰$ موجب حداقل

شدن $d_{۲}^-$ می‌شود ($d_{۲}^- = ۰$) و مقدار $d_{۳}^-$ در هر نقطه یا روی خط $x_{۲} = ۱۰$ برابر صفر می‌شود. بنابراین، با انتخاب هر نقطه در منطقهٔ چهارضلعی **debf** می‌توان مطمئن شد که $d_{۲}^- = d_{۳}^- = ۰$ است. نکتهٔ مهم در این‌جا انتخاب نقطه‌ای از چهارضلعی **debf** است که مقدار $d_{۱}^-$ حداقل شود. این نقطه **b** است که نزدیک‌ترین نقطه به خط $۷/۵x_{۱} + ۱۰x_{۲} = ۱۰۰۰$ است. پس $x_{۱}^* = ۲۰$ ، $x_{۲}^* = ۲۰$ و $d_{۱}^- = ۶۵۰$، $d_{۱}^+ = ۰$ ، $d_{۲}^- = ۰$، $d_{۲}^+ = ۱۰$، $d_{۳}^- = ۰$، $d_{۳}^+ = ۱۰$ خواهد بود.

• **مدل برنامه‌ریزی آرمانی با اولویت**

در دو مثال قبل اولویتی برای آرمان‌ها درنظر گرفته نشده بود، در این‌جا با مدل‌های آرمانی اولویت‌دار مواجه خواهید شد. حال فرض کنید که تصمیم‌گیرنده با چندین هدف متضاد مواجه باشد. برای حل این مشکل، تصمیم‌گیرنده باید اولویت آرمان‌ها را نسبت به هم تعیین کند. در این‌جا مهم‌ترین آرمان دارای اولویت اول است و آرمان مهم بعدی دارای اولویت دوم است و به‌همین ترتیب تا آخر.

آرمان‌ها دارای اولویت مطلق هستند، یعنی آرمان با اولویت پایین‌تر هیچ‌گاه برآورده نخواهد شد، مگر این‌که آرمان با اولویت بالاتر برآورده شده باشد. به عبارت دیگر، برای بهبود آرمان با اولویت پایین‌تر نمی‌توان نقطه‌ای را برگزید که آرمان با اولویت بالاتر خدشه‌دار شود. در محاسبات، آرمان با اولویت اول با $p_{۱}$ و آرمان‌های بعدی با $p_{۲}$، $p_{۳}$، ... نشان داده می‌شوند.

مثال ۱۴.۵

مسئلهٔ تولید ماشین‌حساب را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید ظرفیت استفاده از هر کارگاه در هفته حداکثر ۴۰ ساعت درنظر گرفته شود. در عین حال اولویت‌های شرکت به شرح زیر تعیین شده باشد:

$p_{۱}$ (اولویت اول) : استفادهٔ حداکثر ۴۰ ساعت در هفته از هر کارگاه

$p_{۲}$ (اولویت دوم) : تولید حداقل ۱۰ واحد از هر نوع ماشین‌حساب. با این حال از آن‌جا که سود ماشین‌حساب مهندسی بیش از ماشین‌حساب معمولی است، مدیریت شرکت مایل است برای آرمان‌های تولید، وزنی متناسب با سود آن درنظر بگیرید.

$p_{۳}$ (اولویت سوم) : حداکثر کردن سود. از آن‌جا که ظرفیت استفاده از کارگاه‌ها از ۶۰ ساعت در هفته به ۴۰ ساعت کاهش یافته، شرکت آرمان سود را به ۵۰۰ واحد پولی کاهش داده است.

برای ساخت مدل علاوه‌بر تعریف متغیرهای تصمیم و انحراف از آرمان قبلی به تعریف دو متغیر جدید انحراف از آرمان نیاز داریم که بیانگر میزان ساعات کاری بیش از ۴۰ ساعت در هفته برای هر کارگاه است.

$d_{۴}^-$: میزان استفاده از کارگاه A کم‌تر از ۴۰ ساعت در هفته

$d_{۴}^+$: میزان استفاده از کارگاه A بیش از ۴۰ ساعت در هفته

$d_{۵}^-$: میزان استفاده از کارگاه B کم‌تر از ۴۰ ساعت در هفته

$d_{۵}^+$: میزان استفاده از کارگاه B بیش از ۴۰ ساعت در هفته

محدودیت‌های مدل با توجه به متغیرهای انحراف از آرمان به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
۷/۵\,x_۱ + ۱۰\,x_۲ + d_۱^- - d_۱^+ &= ۵۰۰\\
x_۱ + d_۲^- - d_۲^+ &= ۱۰\\
x_۲ + d_۳^- - d_۳^+ &= ۱۰\\
x_۱ + ۲\,x_۲ + d_۴^- - d_۴^+ &= ۴۰\\
۱/۵\,x_۱ + ۱/۵\,x_۲ + d_۵^- - d_۵^+ &= ۴۰\\
x_۱,\ x_۲,\ d_۱^-,\ d_۱^+,\ d_۲^-,\ d_۲^+, d_۳^-,\ d_۳^+,\ d_۴^-,\ d_۴^+,\ d_۵^-,\ d_۵^+ &\geq ۰
\end{aligned}
$$

برای نوشتن تابع هدف به‌صورت زیر اقدام می‌شود:

از آن‌جا که از هر کارگاه در هفته بیش از ۴۰ ساعت نمی‌توان استفاده کرد و متغیرهای $d_۴^+$ و $d_۵^+$ بیانگر امکان استفادهٔ بیش از ۴۰ ساعت در کارگاه‌های A و B هستند، باید این دو متغیر حداقل شوند، اما با توجه به اولویت اول بودن این متغیرها، برای این دو متغیر در تابع هدف، ضریب $p_۱$ درنظر گرفته می‌شود.

$$\text{Min } Z = p_۱ d_۴^+ + p_۱ d_۵^+ + \cdots$$ (تابع هدف که هنوز تکمیل نشده است)

معنی تابع هدف فوق آن است که در اولویت اول باید متغیرهای $d_۴^+$ و $d_۵^+$ به حداقل ممکن که صفر است، برسد و تا این دو متغیر مقدار صفر را در عملیات اختیار نکنند، برآورد اولویت‌های دوم و سوم نباید موجب بد شدن این اولویت شود.

اولویت دوم، فروش حداقل ۱۰ واحد از هر نوع ماشین‌حساب است، بنابراین متغیرهای انحراف از آرمانی که باید حداقل شوند $d_۲^-$ و $d_۳^-$ هستند که چون دومین اولویت را دارند، ضریب $p_۲$ را در کنار خود خواهند داشت ($p_۲ d_۲^-$ و $p_۲ d_۳^-$). اما با توجه به خواستهٔ مدیریت که وزن دادن به آرمان تولید ماشین‌حساب‌ها متناسب با سود هر واحد آن است، این قسمت از تابع هدف به‌صورت $۷/۵ p_۲ d_۲^- + ۱۰\, p_۲ d_۳^-$ خواهد شد. تابع هدف مدل تاکنون به‌صورت زیر است؛

$$\text{Min } Z = p_۱ d_۴^+ + p_۱ d_۵^+,\ ۷/۵ p_۲ d_۲^- + ۱۰\, p_۲ d_۳^- + \cdots$$ (تابع هدف که هنوز تکمیل نشده است)

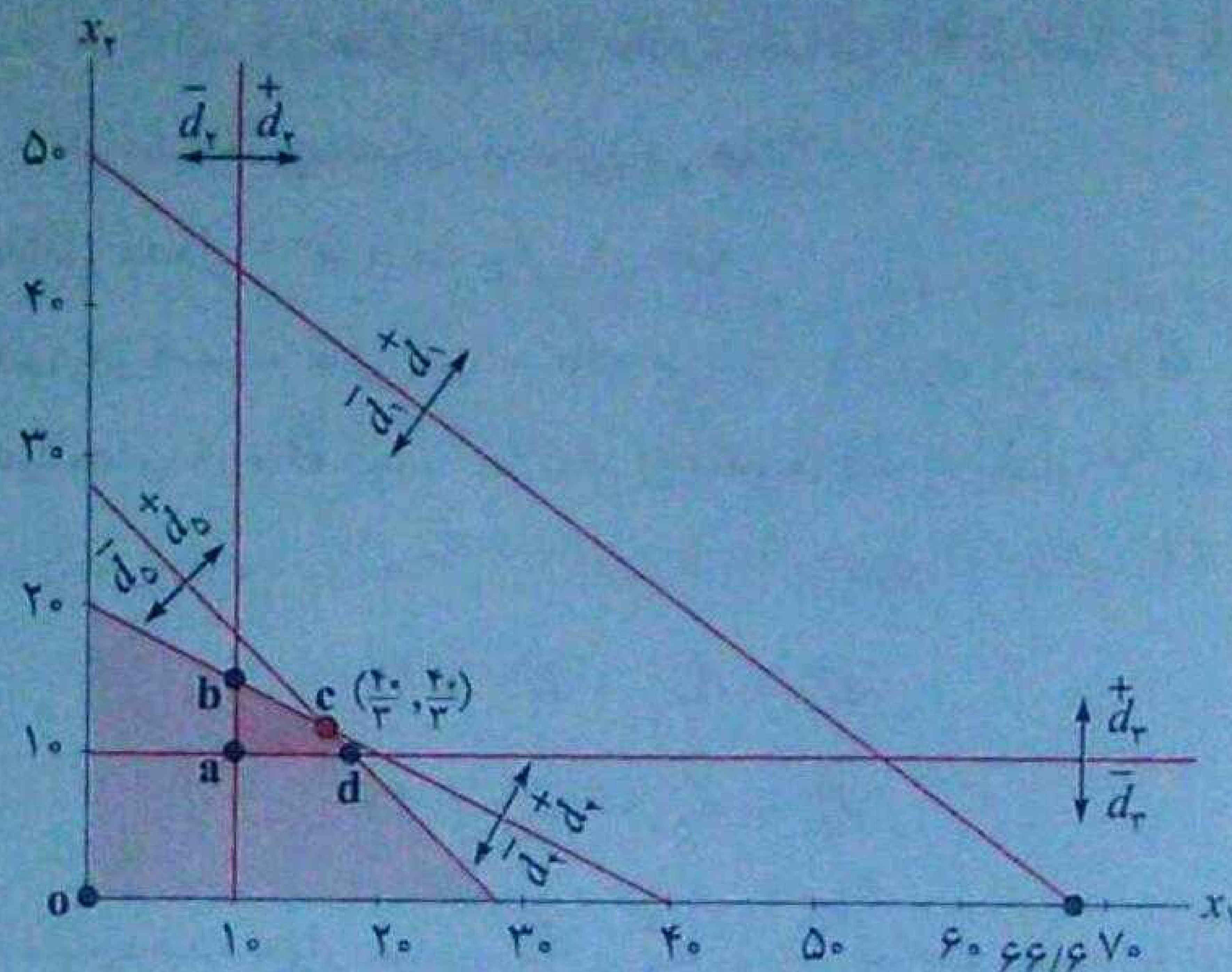
اولویت سوم حداکثر کردن سود است، بنابراین باید $d_۱^-$ حداقل شود و چون سومین اولویت است، پس ضریبی مثل $p_۳$ باید برای آن قائل شد ($p_۳ d_۱^-$). به این ترتیب، تابع هدف کامل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = p_۱ d_۴^+,\ p_۱ d_۵^+,\ ۷/۵ p_۲ d_۲^- + ۱۰\, p_۲ d_۳^-,\ p_۳ d_۱^-$$

به‌منظور حل ترسیمی این مدل، محدودیت‌های مسئله مانند قبل رسم می‌شود. شکل (۱۲.۵)

توجه کنید؛ در این مدل، محدودیت‌های موجود در مسئله تماماً شامل متغیرهای انحراف از آرمان است و محدودیت‌هایی شبیه محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی که آن‌ها را محدودیت کارکردی می‌نامیم، در آن وجود ندارد. با توجه به غیرمنفی بودن متغیرها، منطقهٔ موجه این مدل در ربع اول است. حال باید مدل را برای به‌دست آوردن جواب نهایی برحسب اولویت‌های مختلف تحلیل کرد. اولویت اول، به حداقل رساندن $d_۴^+$ و $d_۵^+$ است. پس باید منطقهٔ زیر خطوط $x_۱ + ۲x_۲ = ۴۰$ و $۱/۵x_۱ + ۱/۵x_۲ = ۴۰$ را درنظر داشت. این منطقه در شکل ۱۲.۵

با رنگ قرمز کم‌رنگ سایه زده شده است. به این ترتیب، هر نقطه که در این منطقه انتخاب شود، به ازای آن $d_۴^+$ و $d_۵^+$ برابر صفر خواهد بود و اولویت اول کاملاً برآورده می‌شود.



شکل ۱۲.۵ نمایش ترسیمی مدلی با آرمان‌های متضاد.

دومین اولویت، حداقل تولید ۱۰ واحد از هر ماشین‌حساب است. پس باید $d_۲^-$ و $d_۳^-$ کاهش یابند و نقاط سمت راست و بالای خطوط $x_۱ = ۱۰$ و $x_۲ = ۱۰$ در قسمت سایه‌خورده انتخاب شوند. بنابراین، به‌ازای هر نقطهٔ انتخابی در منطقهٔ **abcd** مقادیر $d_۴^+$، $d_۵^+$، $d_۲^-$، $d_۳^-$ برابر صفر و اولویت‌های اول و دوم کاملاً برآورده می‌شوند.

نهایتاً، سومین اولویت حداکثرکردن سود است، پس $d_۱^-$ باید حداقل شود، اما چون هیچ نقطه‌ای در منطقهٔ **abcd** وجود ندارد که $d_۱^-$ را به صفر برساند، پس این اولویت کاملاً برآروده نمی‌شود؛ یعنی شرکت به سودی معادل ۵۰۰ دست نخواهد یافت. بهترین نقطه‌ای که $d_۱^-$ در آن به حداقل می‌رسد، نقطهٔ $c(\frac{۴۰}{۳}$ و $\frac{۴۰}{۳})$ است. به این ترتیب، جواب بهینه عبارت است از:

$$x_۱^* = \frac{۴۰}{۳},\ x_۲^* = \frac{۴۰}{۳},\ d_۱^- = ۲۶۶\frac{۲}{۳},\ d_۲^+ = \frac{۱۰}{۳},\ d_۳^+ = \frac{۱۰}{۳},\ d_۴^-,\ d_۴^+,\ d_۵^-,\ d_۵^+ = ۰$$

سود شرکت در این حالت ۲۳۳٫۳۳؛ یعنی ۲۶۶٫۶۷ واحد کم‌تر از آرمان است.

- **مدلی دیگر با آرمان‌های متضاد**

مثال زیر نمونه‌ای از مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی با آرمان‌های متضاد است.

مثال ۱۵.۵

مدل مثال قبل را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید شرکت تقاضایی برای خرید ۳۰ واحد ماشین‌حساب مهندسی دریافت کرده است. پاسخگویی به این مقدار تقاضا با استفاده از ۴۰ ساعت عملکرد هفتگی کارگاه‌های A و B ممکن نیست. بنابراین شرکت درصدد استفاده از حداکثر ۲۰ ساعت اضافه‌کاری در هفته در هر کارگاه برمی‌آید.

در این وضعیت اولویت‌های شرکت به شرح زیر تعیین شده است:

p_1 : حفظ زمان اضافه‌کاری در هر کارگاه تا میزان ۲۰ ساعت در هفته

p_2 : تولید حداقل ۳۰ واحد ماشین‌حساب مهندسی در هفته

p_3 : میزان استفاده از هر کارگاه در هفته در وقت عادی، حداکثر ۴۰ ساعت در هفته

p_4 : تولید حداقل ۱۰ واحد ماشین‌حساب معمولی در هفته

p_5 : کسب سود حداقل معادل ۵۰۰ واحد پولی در هفته

در این‌جا از متغیرهای تعریف‌شدهٔ قبلی نیز استفاده می‌شود. یادآوری می‌شود که d_4^+ و d_5^+ بیانگر ساعات اضافه‌کاری به‌ترتیب در کارگاه‌های A و B است. هر کدام از متغیرها باید به مقدار ۲۰ ساعت یا کم‌تر محدود شود، به این ترتیب:

$$d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 20$$

$$d_5^+ + d_{51}^- - d_{51}^+ = 20$$

که متغیرهای d_{41}^+ و d_{51}^+ نشان‌دهندهٔ میزان فزونی d_4^+ و d_5^+ از ۲۰ ساعت است. به این ترتیب، مدل به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\text{Min } Z = p_1(d_{41}^+ + d_{51}^+),\ p_2 d_3^-,\ p_3(d_4^+ + d_5^+),\ p_4 d_2^-,\ p_5 d_1^-$$

$$
\begin{array}{lr}
7.5x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 500 & (4.5) \\
x_1 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (5.5) \\
x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 & (6.5) \\
x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 & (7.5) \\
1.5x_1 + 1.5x_2 + d_5^- - d_5^+ = 40 & (8.5) \\
d_4^+ + d_{41}^- - d_{41}^+ = 20 & (9.5) \\
d_5^+ + d_{51}^- - d_{51}^+ = 20 & (10.5)
\end{array}
$$

$$x_1,\ x_2,\ d_1^-,\ d_1^+,\ d_2^-,\ d_2^+,\ d_3^-,\ d_3^+,\ d_4^-,\ d_4^+,\ d_5^-,\ d_5^+,\ d_{41}^+,\ d_{41}^-,\ d_{51}^-,\ d_{51}^+ \geq 0$$

به دو محدودیت آخر توجه کنید. در این دو محدودیت متغیر تصمیم x_1 و x_2 وجود ندارد، بنابراین برای حل ترسیمی این مسئله باید این دو محدودیت را برحسب متغیرهای تصمیم نوشت. برای این کار محدودیت چهارم را مجدداً درنظر بگیرید:

$$x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \quad \text{یا} \quad d_4^+ = x_1 + 2x_2 + d_4^- - 40$$

حال، مقدار d_4^+ در معادلهٔ (۹.۵) مدل جایگزین می‌شود:

$$x_1 + 2x_2 + d_4^- + d_{41}^- - d_{41}^+ = 60$$

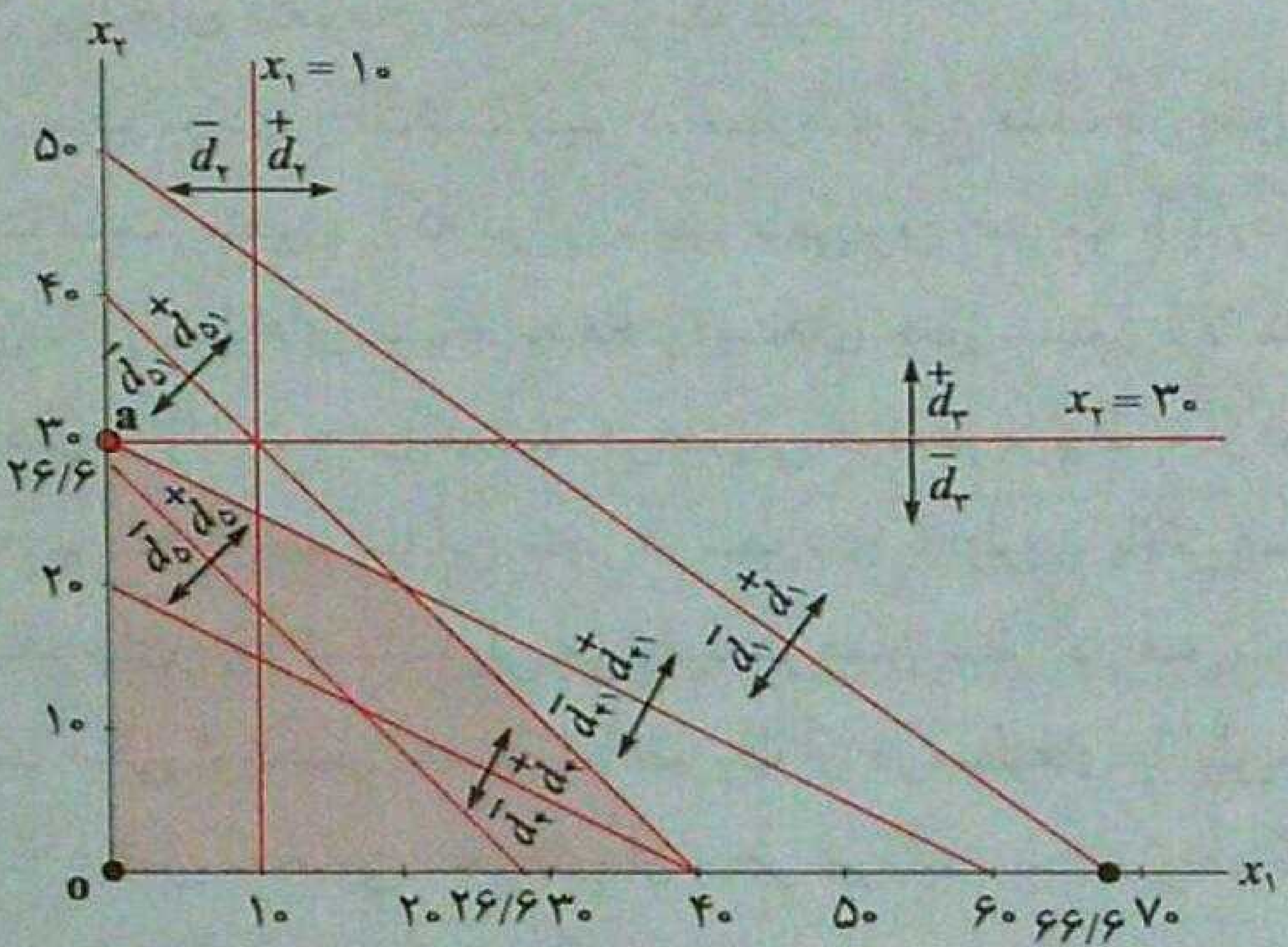
در این معادله که بیانگر محدودیت اضافه‌کاری است، وجود d_4^- بی‌معنی است، زیرا نشان‌دهندهٔ عدم دستیابی به استفاده از ظرفیت معمولی ۴۰ ساعت از هفته در کارگاه A است. به عبارت دیگر، اگر d_4^- مخالف صفر باشد، به معنی استفادهٔ کم‌تر از ۴۰ ساعت در هفته از کارگاه A است، که در این شرایط استفاده از ظرفیت اضافه‌کاری بی‌معنی است. بنابراین d_4^- مساوی صفر درنظر گرفته می‌شود، پس داریم:

$$x_1 + 2x_2 + d_{41}^- - d_{41}^+ = 60 \qquad (11.5)$$

با تکرار همین عملیات برای معادلهٔ (۱۰.۵) این معادله به‌صورت زیر خواهد شد:

$$1/5x_1 + 1/5x_2 + d_{51}^- - d_{51}^+ = 60 \qquad (12.5)$$

با جایگزینی معادلات (۱۱.۵) و (۱۲.۵) به‌جای (۹.۵) و (۱۰.۵)، نمایش ترسیمی مدل به‌صورت زیر خواهد شد:



شکل ۱۳.۵ نمایش ترسیمی مسئله با آرمان‌های متضاد و متعدد.

اولویت اول، زیاد نشدن اضافه‌کاری از ۲۰ ساعت در هفته در هر کارگاه است، یعنی d_{41}^+ و d_{51}^+ باید به صفر برسد، بنابراین منطقهٔ زیر خطوط $1/5x_1 + 1/5x_2 = 60$ و $x_1 + 2x_2 = 60$ را باید در ربع اول مدنظر قرار داد و نقطهٔ بهینه را در منطقه‌ای که در شکل ۱۳.۵ با سایه مشخص شده جستجو کرد.

اولویت دوم، تولید حداقل ۳۰ واحد ماشین‌حساب مهندسی است، بنابراین d_3^- باید به صفر برسد. تمامی نقاط زیر $x_1 = 30$ دارای مقادیر d_3^- بزرگ‌تر از صفر هستند و تنها نقطهٔ واقع در منطقهٔ سایه‌دار، که در آن $d_3^- = 0$، نقطهٔ a است. بنابراین $a = (0,\ 30)$ باید جواب بهینهٔ مسئله باشد. به این ترتیب، دیگر آرمان‌ها به‌طور تمام و کمال تحقق نمی‌یابند و نقطهٔ a فقط می‌تواند دو اولویت اول را کاملاً برآورده کند. پس جواب بهینهٔ مسئله عبارت است از:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 30,\ d_1^- = 200,\ d_1^+ = 0,\ d_2^- = 10,\ d_2^+ = 0,\ d_3^- = 0,\ d_3^+ = 0,$$
$$d_4^- = 0,\ d_4^+ = 20,\ d_5^- = 0,\ d_5^+ = 5,\ d_{41}^- = 0,\ d_{41}^+ = 0,\ d_{51}^- = 15,\ d_{51}^+ = 0$$

ج) روش سیمپلکس برنامه‌ریزی آرمانی

از این روش در حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی با n متغیر استفاده می‌شود که با وجود شباهت‌های زیاد با روش سیمپلکس معمولی، تفاوت‌هایی نیز با آن دارد. اولین تفاوت عمدهٔ آن استفاده از چندین سطر در جدول سیمپلکس برنامه‌ریزی آرمانی برای تابع هدف است، به‌طوری که به‌ازای هر اولویت یک سطر درنظر گرفته می‌شود. دومین تفاوت،