قضیه : هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی فشرده دارای نقطه حدی است.

اثبات:

قضیه: هر مجموعه‌ی فشرده بسته است.

اثبات:

تعریف: مجموعه‌ی E را در فضای متریک $(X\ ,d)$ کران‌دار گوییم هرگاه $p \in E$ و عدد حقیقی $M > ۰$ وجو داشته باشد به طوری که $E \subseteq N_M(p)$

قضیه: هر مجموعه‌ی فشرده کران‌دار است.

اثبات:

تعریف: مجموعه‌ی $I = [a_۱\ , b_۱] \times [a_۲\ , b_۲] \times \ldots \times [a_k\ , b_k]$ را یک حجره k بعدی در $\mathbb{R}^k$ می‌نامیم.

اگر $k = ۱$ ، I یک بازه بسته و کراندار و در حالت $k = ۲$، I یک مستطیل و در حالت $k = ۳$ این مجموعه یک مکعب مستطیل می‌باشد.

قضیه: فرض کنید $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ گردایه‌ای از بازه‌های بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد به طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $I_{n+۱} \subseteq I_n$ در اینصورت $\bigcap_{n=۱}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

اثبات:

نتیجه: اگر $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ گردایه‌ای از حجره‌های k بعدی در $\mathbb{R}^k$ باشند که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $I_{n+۱} \subseteq I_n$ در اینصورت $\bigcap_{n=۱}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

اثبات:

قضیه: هر حجره k بعدی فشرده است.

اثبات: فرض می‌کنیم $I = [a_1 , b_1] \times [a_2 , b_2] \times \ldots \times [a_k , b_k]$ و قرار می‌دهیم:

$$\delta = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_k - b_k)^2}$$

به ازای هر $x , y \in I$ داریم $||x - y|| \leq \delta$

برهان خلف: فرض می‌کنیم I فشرده نباشد پس خانواده‌ای از مجموعه‌های باز مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha \epsilon A}$ وجود دارد که پوششی برای I هستند اما هیچ تعداد متناهی از این خانواده I را نمی‌پوشاند.

قرار می‌دهیم $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ برای هر i که $1 \leq i \leq k$

بدین ترتیب بوسیله بازه‌های $[a_i , c_i]$, $[c_i , b_i]$ ، حجره I تبدیل به 2^k حجره k بعدی می‌شود که حداقل یکی از آنها توسط تعداد متناهی از G_α ها پوشیده نمی‌شود این حجره را با I_1 نمایش می‌دهیم مانند قبل I_1 را نیز به 2^k حجره k بعدی تقسیم می‌کنیم و I_2 را حجره‌ای می‌گیریم که توسط تعداد متناهی از G_α ها پوشیده نمی‌شود.

با ادامه این روند یک دنباله $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ از حجره‌ها بدستِ می‌آوریم که

1) $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$
2) I_n ها با هیچ تعداد متناهی از G_α ها پوشیده نمی‌شوند.
3) $\forall\, x , y \epsilon I_n \quad : \quad ||x - y|| \leq \frac{\delta}{2^n}$,

بنا بر قضیه قبل وجود دارد $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. همچنین وجود دارد $\alpha \in A$ به طوری که $x^* \in G_\alpha$. چون G_α باز است

$$\exists\, r > 0 \quad : \quad N_r(x^*) \subseteq G_\alpha$$

بنا بر خاصیت ارشمیدسی $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{\delta}{2^m} < r$

بنابراین $I_m \subseteq G_\alpha$ که این با اینکه I_n ها با هیچ تعداد متناهی از G_α ها پوشیده نمی‌شوند در تناقض است پس فرض خلف باطل و I فشرده است.

نتیجه: هر مجموعه‌ی بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}^k$ فشرده است.

اثبات : تمرین

قبلا ثابت کردیم که در هر فضای متریک هر مجموعه‌ی فشرده بسته و کران‌دار است. فضاهای متریکی وجود دارند که عکس این مطلب در آنها برقرار نیست.

قضیه هاینه – بورل: یک مجموعه در $\mathbb{R}^k$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کران‌دار باشد.

قضیه استون وایراشتراس: هر مجموعه‌ی کران‌دار و نامتناهی در $\mathbb{R}^k$ دارای نقطه حدی است.

اثبات: