سری فوریه و تبدیل لاپلاس

نویسندگان

پل بنیچو ، روزان بنیچو ، نوربرت بوی ، ژان پیر پوژه

مترجمان

محمود تقی زاده منظری، مهرداد تقی زاده منظری

مقدمه نویسندگان

کتاب حاضر در دو فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول بسط توابع متناوب به سری فوریه و در فصل دوم تبدیل لاپلاس توابع سببی آورده شده است. در هر دو مبحث ضرورتهای لازم برای بسطها و یا قضایای بکار رفته هیچگاه از یاد نرفته و همواره مد نظر قرار گرفته است. قسمتهای بزرگی از کتاب به حل مثالهایی اختصاص یافته است که در هر مورد تصویری فوری از نتایج مطالب مطرح شده را در اختیار خواننده قرار میدهد.

همچنین در کتاب تمرین ها و مسائلی حل شده و در آخر هر فصل نیز تمرین ها و مسائل حل نشده متنوعی از مدلسازی مسائل مهندسی مختلف درباره الکترونیک، الکتروتکنیک و سیگنالها طرح گردیده که در درک و یادگیری مطالب میتواند کاملاً موثر واقع شود. در بخشهایی از کتاب به توابع و علائمی بر میخوریم که خوانندگان را با فیزیک آشنا میکند. این کتاب میتواند برای دانشجویان رشته های مختلف مهندسی مورد استفاده قرار گیرد.

همه نمودهای طبیعت نتایج ریاضی معدودی از قوانین تغییر ناپذیرند...
آنچه میدانیم ناچیز است و آنچه نمیدانیم عظیم...

سخنانی از پیر سیمون لاپلاس (۱۸۲۷- ۱۷۴۹)

مقدمه مترجمان:

کتاب حاضر طوری تنظیم گردیده که با آشنایی به ریاضیات متوسطه، میتوان از آن استفاده نمود. خاصه با توجه به مثالهایی که در زمینه های مختلف کتاب مطرح و حل گردیده، میتوان با همان اطلاعات گفته شده به مباحث مطرح شده در کتاب آگاهی و تسلط کافی یافت. لازم به ذکر است از آنجاییکه همواره تصور بر این بود که شایسته است همه قسمتهای کتاب مستدل و بدون ابهام باشد، مترجمین با افزودن توضیحات لازم و همچنین اثبات برخی از مطالب اثبات نشده در کتاب سعی بر نیل به این مهم نمودند. با این وصف شک نیست که هرگز ادعایی مبنی بر بی نقص بودن کتاب وجود ندارد. اما از آنجاییکه مطمئناً خواننده گرامی با حوصله و دقت کافی خویش بهتر میتواند به خطاهای موجود در کتاب آگاهی یابد، حق این است که بر مترجمین منت نهاده و هر گونه نقصان یا اشتباهی را از طریق آدرس mtmanzari@sharif.edu یادآور شوند، تا با امتنان و استقبال در نسخه‌های بعدی نسبت به رفع آن اقدام گردد.
مترجمین نهایت امیدوارند که خواندن این کتاب یا هر کتاب علمی دیگر در خواننده عزیز، خاصه در دانشجوی مطالعه کننده آنچنان اثر مثبتی به جا گذارد که در ازدیاد هر چه بیشتر آگاهیهای علمی خویش تلاشی دو چندان نموده و خود را با پیشرفتهای علمی بی‌سابقه ای که با سرعت حیرت آور در جهان متمدن و پر شتاب امروز در حال انجام است همراه و همگام نماید. باشد که از این راه ایران و ایرانی جایگاه علمی رفیعی بدست آورند.

به امید آن روز ...

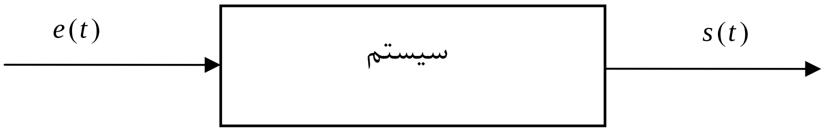
فهرست مطالب

ضمیمه ها

فصل اول
سری فوریه

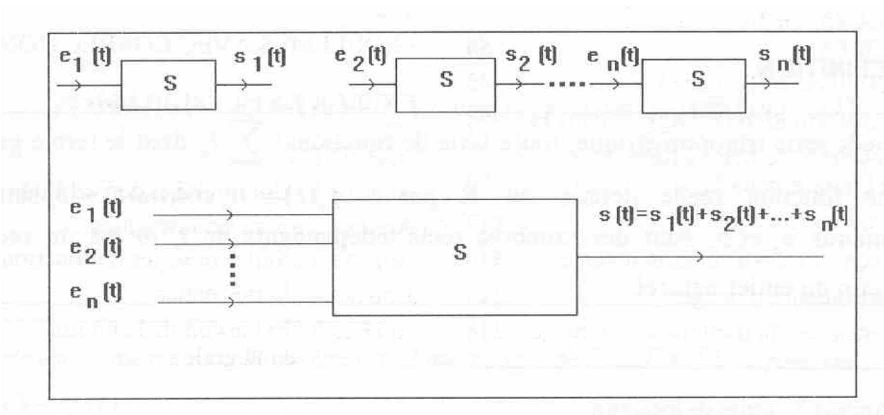
۱-۱- مقدمه

در قلمروهای مختلف علم فیزیک به بررسی سیستمهایی پرداخته میشود که آنها را میتوان بصورت نشان داده شده در شکل ۱-۱ نمایش داد.



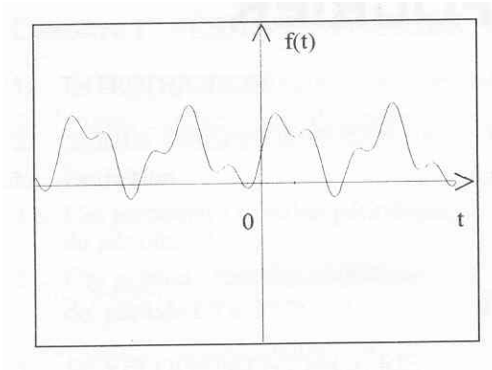
شکل ۱-۱: نمایش یک سیستم و ورودی و خروجی آن

در این شکل $e[t]$ ورودی سیستم و $s[t]$ خروجی سیستم است.
شکل ۱-۲ نمونه خاصی از این سیستمها را که سیستم خطی نامیده میشوند، نشان میدهد. در این سیستم سیگنال خروجی $s[t]$ که مربوط به وجود چندین سیگنال ورودی است، برابر است با مجموع سیگنالهای خروجی بازای هر یک از ورودیها وقتی بطور جداگانه به سیستم اعمال شوند.



شکل ۱-۲: نمایش یک سیستم خطی با ورودیهای متعدد و یک خروجی

از نقطه نظر ریاضی، تعیین سیگنال خروجی بستگی به این دارد که سیگنال ورودی تابع ثابتی باشد یا تابعی متناوب با دوره تناوب T . البته تابع متناوب لزوماً تابع سینوسی نیست. شکل ۱-۳ نمونه ای از توابع متناوب غیر سینوسی را نشان میدهد. منحنی نشان داده شده در این شکل از مجموع توابع $t \mapsto 1$ ، $t \mapsto \sin 2t$ و $t \mapsto \frac{1}{2}\sin 5t$ تشکیل یافته است.



شکل ۱-۳: نمونه ای از توابع متناوب غیرسینوسی

<u>یادداشت تاریخی</u>: بارون ژوزف فوریه ریاضی دان فرانسوی (۱۸۳۷-۱۷۶۸ میلادی) به این موضوع توجه کرد که تابع متناوب با دوره تناوب T را میتوان به یک تابع ثابت و تعداد نامحدودی از توابع سینوسی تجزیه نمود. به این ترتیب او کار اولر در زمینه بسط توابع به سریهای مثلثاتی را تکمیل نمود. همچنین فوریه از سریها در بسط توابع ناپیوسته استفاده کرد که بعدها دیریکله (Dirichlet) کار او را به پایان رساند.

۱-۲- سریهای مثلثاتی

در اینجا توابع مورد بررسی توابع حقیقی هستند. در مورد توابع مختلط، چنانکه در ادامه خواهد آمد، از تجزیه تابع به قسمتهای حقیقی و مجازی استفاده خواهد شد.

۱-۲-۱- تعریف: هر سری از توابع $\sum f_n$ که جمله عمومی آن f_n یک تابع حقیقی و معین روی $\mathbb{R}$ بوده و بصورت $f_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ تعریف شود، سری مثلثاتی نام دارد. a_n و b_n مقادیر حقیقی و مستقل از t بوده و ω یک عدد حقیقی مثبت و داده شده و n نیز یک عدد طبیعی است.

۱-۲-۲- حالت خاص: تابع متناوب با دوره تناوب 2π. در اینحالت بجای ω، یک قرار میدهیم.

۱-۲-۲-۱- خواص تناوب: توابع $t \mapsto f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ توابعی تناوبی با دوره تناوب 2π هستند زیرا برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $f_n(t+2\pi) = f_n(t)$. از این مطلب نتیجه میگردد که سری $\sum f_n$ روی I همگرای ساده است. ضمناً در این باره یادآور میشویم که توابع f_n روی $\mathbb{R}$ معین و پیوسته بوده و نیز دارای مشتق پیوسته اند.

۱-۲-۲-۲- محاسبه ضرایب a_n و b_n ($n \in \mathbb{N}$): سری مثلثاتی $\sum f_n$ را با فرض اینکه روی $\mathbb{R}$ همگراست در نظر میگیریم. تابع مجموع f برای هر t در $\mathbb{R}$ بصورت

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \qquad (۱)$$

تعریف میگردد. طبق قرارداد $b_0 = 0$ است. برای هر p در $\mathbb{N}$ داریم:

$$f(t)\cos pt = a_0 \cos pt + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\cos pt \tag{۲}$$

و

$$f(t)\sin pt = a_0 \sin pt + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\sin pt \tag{۳}$$

فرض کنیم طرفهای دوم روابط (۲) و (۳) را بتوان جمله به جمله روی بازه $[0,2\pi]$ انتگرال گرفت. خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos pt\,dt = a_0\int_0^{2\pi}\cos pt\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nt\cos pt\,dt + b_n\int_0^{2\pi}\sin nt\cos pt\,dt\right]$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin pt\,dt = a_0\int_0^{2\pi}\sin pt\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nt\sin pt\,dt + b_n\int_0^{2\pi}\sin nt\sin pt\,dt\right]$$

به این ترتیب برای $n \neq 0$ و $p \neq 0$ داریم: (محاسبه این انتگرالها با تبدیل حاصلضربها به مجموع به آسانی انجام میگیرد)

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\cos pt\,dt = \begin{cases}0 & n \neq p\\ \pi & n = p\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nt\sin pt\,dt = \begin{cases}0 & n \neq p\\ \pi & n = p\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin nt\cos pt\,dt = 0$$

بنابراین تساویهای زیر را برای هر n در $\mathbb{N}^*$ و انتخاب $p = n$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \pi a_n$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = \pi b_n$$

a_0 نیز با محاسبه $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ و با فرض اینکه همواره میتوان از طرف دوم رابطه (۱) جمله به جمله انتگرال گرفت، بدست میآید. در نتیجه خواهیم داشت: $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\;dt\;,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\,,\quad b_0 = 0$$

<u>تبصره</u>: از آنجائیکه تابع $f(t)$ مجموع یک سری مثلثاتی متناوب با دوره تناوب 2π است، توابع $t \mapsto f(t)\cos nt$ و $t \mapsto f(t)\sin nt$ نیز چنین خواهند بود. لذا انتگرالهایی را که در محاسبه a_0، a_n و b_n بکار رفته اند، میتوان با انتگرالهایی که حدود آنها α و $\alpha + 2\pi$ باشد (α عددی حقیقی و غیر مشخص است) جانشین نمود. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt\,,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\cos nt\;dt\;,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\sin nt\,dt\,,\quad b_0 = 0$$

اثبات موضوع فوق در مورد a_n بقرار زیر است:

داشتیم $\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$، از اینرو خواهیم داشت:

$$\pi a_n = \int_0^{\alpha} f(t)\cos nt\,dt + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad (1)$$

حال با انجام تغییر متغیر $t = u + 2\pi$ در انتگرال سوم رابطه فوق، نتیجه میگیریم:

$$\int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \int_{\alpha}^{0} f(u+2\pi)\cos(nu+2n\pi)\,du = \int_{\alpha}^{0} f(u)\cos nu\,du$$

لذا

$$\int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = -\int_0^{\alpha} f(u)\cos nu\,du = -\int_0^{\alpha} f(t)\cos nt\,dt$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده بجای انتگرال سوم در رابطه (۱) حکم ثابت میشود.

یادآوری: برای هر تابع $g(t)$ که پیوسته بوده و متناوب با دوره تناوب 2π باشد نیز با روشی مشابه میتوان ثابت نمود که

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g(t)\,dt$$

۱-۲-۳- حالت کلی: تابع متناوب با دوره تناوب T ($T \in \mathbb{R}^{*+}$)

اگر $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، نتایج بدست آمده در قسمت ۱-۲-۲ به این گروه از توابع نیز تسری می‌یابد. برای اثبات این موضوع، تابع $g(u) = f(Tu/2\pi)$ را که از $f(t)$ با تغییر متغیر $t = Tu/2\pi$ بدست آمده است، در نظر میگیریم. تابع $g(u)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب 2π. زیرا داریم:

$$g(u+2\pi) = f\left[\frac{T}{2\pi}(u+2\pi)\right] = f\left(\frac{T}{2\pi}u + T\right) = f(t+T) = f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) = g(u)$$

باین ترتیب با توجه به اینکه اثبات گردید که دوره تناوب تابع $g(u)$ نیز برابر با 2π است، میتوان از فرمولهای قسمت ۱-۲-۲ در مورد $g(u)$ استفاده نمود. لذا ضرایب سری فوریه مربوط به تابع $g(u)$ را میتوان چنین نوشت:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}u\right)du$$

اگر در انتگرال معین جدید، تغییر متغیر $u = \frac{2\pi}{T}t$ را بعمل آوریم، خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{T}{2\pi}\alpha}^{\frac{T}{2\pi}(\alpha+2\pi)} f(t)\frac{2\pi}{T}dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2\pi}\alpha}^{\frac{T}{2\pi}\alpha+T} f(t)\,dt$$

اما چون تابع $f(t)$ متناوب است، میتوان نوشت:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt \qquad \text{(آلفا عددی است حقیقی و دلخواه)}$$

بهمین ترتیب و با استدلالی مشابه به فرمولهای زیر می‌رسیم: ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt\,, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\,, \quad b_0 = 0$$

چنانچه $T=2\pi$ فرض شود، $\omega=1$ میگردد و همان فرمولهای قبلی نتیجه میشود.

۱-۳- بسط به سری فوریه

۱-۳-۱- توابع متناوب از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$

الف- ناپیوستگی نوع اول: تابع $g(t)$ را که روی بازه باز $\mathbb{I}$ از $\mathbb{R}$، باستثنای یک نقطه t_0 از $\mathbb{I}$ تعریف شده است (یا در t_0 نیز تعریف شده)، در نظر میگیریم. میگوئیم تابع g در t_0 دارای یک ناپیوستگی از نوع اول است، اگر در راست و در چپ t_0 دارای حدهای معین و محدود باشد (شکل ۱-۴). اگر g در t_0 تعریف شده باشد، به یکی از دو حالت زیر برمیخوریم:

$$g(t_0-0)=\lim_{t\to t_0^-} g(t) \neq g(t_0)$$

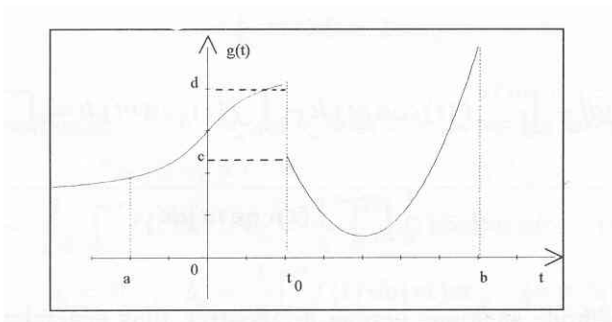
یا

$$g(t_0+0)=\lim_{t\to t_0^+} g(t) \neq g(t_0)$$

ب- تابع از کلاس C^1 قطعه ای روی فاصله $\mathbb{I}=[a,b]\subset\mathbb{R}$

تعریف: اگر f تابعی حقیقی و $\mathbb{I}$ فاصله بسته $[a,b]$ از $\mathbb{R}$ بوده و سه شرط زیر برقرار باشد، آنگاه f را تابعی از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{I}$ مینامیم.

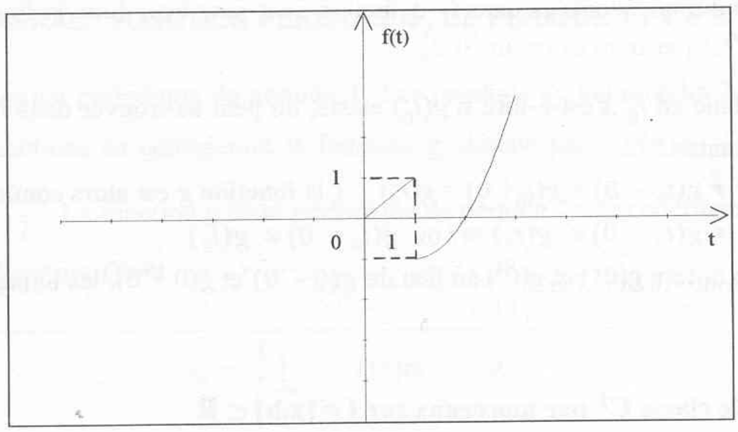
- اولاً f پیوسته و مشتق پذیر بوده و مشتق آن نیز در بازه $\mathbb{I}$ پیوسته باشد. (باستثنای عده محدودی از نقاط t)
- ثانیاً بازای هر یک از نقاط t_i بشرط اینکه $t_i \neq a,b$ باشد، $f(t_i-0)$ و $f(t_i+0)$ در $\mathbb{R}$ موجود باشند. چنانچه t_i مساوی با a یا b باشد، آنگاه $f(a+0)$ و $f(b-0)$ در $\mathbb{R}$ موجود باشند.
- ثالثاً در هر نقطه t_i (اگر $t_i \neq a,b$)، آنگاه $f'(t_i-0)$ و $f'(t_i+0)$ در $\mathbb{R}$ موجود باشند. چنانچه t_i مساوی با a یا b باشد، آنگاه $f'(a+0)$ و $f'(b-0)$ در $\mathbb{R}$ موجود باشند.



شکل ۱-۴: ناپیوستگی تابع g در t_0

مثال ۱: تابع f بصورت زیر تعریف گردیده و منحنی آن نیز در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. تحقیق کنید که آیا f روی فاصله $[0,3]$ از کلاس C^1 قطعه ای است؟

$$\begin{cases} f(t)=t & t\in[0,1[\\ f(t)=t^2-2t & t\in]1,3] \end{cases}$$



شکل ۱-۵: تغییرات تابع $f(t)$

۱- تابع f روی بازه $[0,3]$ باستثنای نقطه $t_1=1$ تعریف شده، پیوسته و مشتق پذیر بوده و مشتق آن نیز روی همین بازه پیوسته است، (بجز در $t_1=1$) زیرا روی بازه های $[0,1[$ و $]1,3]$ یک تابع چند جمله ایست.

۲- داریم $\lim\limits_{t\to1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to1^-} t=1$ و $\lim\limits_{t\to1^+} f(t)=\lim\limits_{t\to1^+}(t^2-2t)=-1$ ، پس $f(1-0)$ و $f(1+0)$ که مقادیر محدود هستند در $\mathbb{R}$ موجودند. ضمناً $t_1=1$ یک نقطه ناپیوستگی از نوع اول برای تابع f است.

۳- همچنین داریم:

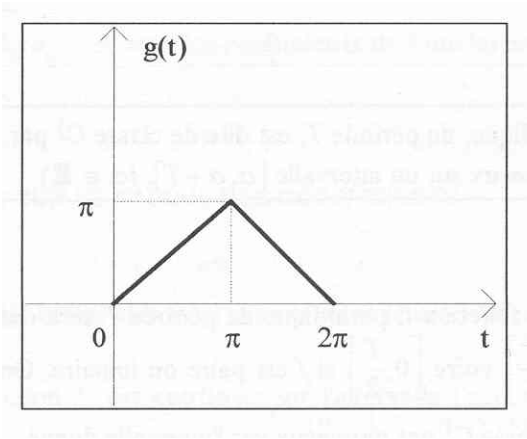
$$\begin{cases} t\in[0,1[\to f(t)=t \to f'(t)=1,\ \lim\limits_{t\to1^-} f'(t)=1\in\mathbb{R} \\ t\in]1,3] \to f(t)=t^2-2t \to f'(t)=2t-2,\ \lim\limits_{t\to1^+} f'(t)=0\in\mathbb{R} \end{cases}$$

باین ترتیب مقادیر $f'(1-0)$ و $f'(1+0)$ هر دو در $\mathbb{R}$ وجود دارند. بنابراین هر سه شرط پیش گفته برای تابع $f(t)$ روی بازه $[0,3]$ وجود دارد. از اینرو تابع f از کلاس C^1 قطعه ای روی $[0,3]$ است.

مثال ۲: تحقیق کنید که تابع g بصورت

$$\begin{cases} g(t)=t & t\in[0,\pi] \\ g(t)=-t+2\pi & t\in]\pi,2\pi] \end{cases}$$

روی بازه $[0,2\pi]$ از کلاس C^1 قطعه ای است. منحنی g در شکل ۱-۶ نشان داده شده است.



شکل ۱-۶: تغییرات تابع $g(t)$

تابع g که روی بازه های $[0,\pi]$ و $]\pi,2\pi]$ تعریف گردیده، چون بر این بازه ها بصورت کثیرالجمله است، تـابعی معین، پیوسته و مشتق پذیر بوده و در همه جا به استثنای $t=\pi$ ، دارای مشتق پیوسته است. از طرفی میدانیم

$$\begin{cases} g(\pi)=\pi \\ \lim\limits_{t\to\pi^-} g(t)=\pi=g(\pi)\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to\pi^+} g(t)=-\pi+2\pi=\pi=g(\pi)\in\mathbb{R} \end{cases}$$

چون تابع g در π نیز پیوسته است لذا این تابع در بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است.

در مورد مشتق g داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\pi^-} g'(t)=1=g'(\pi-0) \\ \lim\limits_{t\to\pi^+} g'(t)=-1=g'(\pi+0) \end{cases}$$

که اعداد $+1$ و -1 هر دو به مجموعه $\mathbb{R}$ تعلق دارند. باین ترتیب تابع g که دارای همه شرایط مربوط بـه توابـع کلاس C^1 هست، تابعی است از کلاس C^1 قطعه ای روی $[0,2\pi]$.

پ-تابع متناوب از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$

تعریف: یک تابع متناوب با دوره تناوب T در صورتی از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ میباشـد کـه روی یـک بـازه $[\alpha,\alpha+T]$ با $\alpha\in\mathbb{R}$ از کلاس C^1 قطعه ای باشد.

در عمل، یک تابع متناوب با دوره تناوب T که روی یکی از بازه های $[0,T]$ یا $[-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}]$ تعریف میگـردد، بـا تحقیق اینکه آیا تابع مزبور روی بازه داده شده از کلاس C^1 قطعه ای هست، میتوان پی برد باینکه آیا تابع مفـروض از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ هست یا خیر.

۱-۳-۲- بسط یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π به سری فوریه

چنانچه تابع مفروض $f(t)$ را که دوره تناوب آن 2π است، بتوان به صورت مجموع یک سری مثلثاتی روی بعضی از بازه‌های $\mathbb{R}$ نوشت، آنگاه خواهیم داشت:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

۱-۳-۲-۱-تعریف: تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب 2π داده شده است. سری توابع $\sum f_n$ را که جمله عمومی آن بصورت $f_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$ تعریف شده باشد را سری فوریه تابع f مینامیم. در اینجا ضرایب بسط فوریه عبارتند از: ($n\in\mathbb{N}^*$)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)\,dt\,,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)\cos nt\ dt$$

$$b_0=0\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)\sin nt\ dt$$

α عددی حقیقی و غیر مشخص است.

۱-۳-۲-۲- شرحی در مورد محاسبه ضرایب:

الف- درباره انتگرالهایی که در محاسبه ضرایب دخالت دارند، میدانیم، در حالتیکه تابع f روی بازه $[\alpha,\alpha+2\pi]$ پیوسته است، انتگرالهایی که ضرایب فوریه را مشخص میسازند وجود دارند. اما در صورتیکه تابع f تنها در نقطه t_i از بازه $[\alpha,\alpha+2\pi]$ دارای ناپیوستگی نوع اول باشد، عملاً در هر یک از بازه های $[\alpha,t_i[$ و $]t_i,\alpha+2\pi]$ با یک تابع مقدماتی پیوسته انطباق خواهد داشت. در اینصورت بنا به تعریف، انتگرال $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)\,dt$ برابر خواهد بود با مجموع انتگرالهای توابع مقدماتی مذکور روی بازه‌های $[\alpha,t_i]$ و $[t_i,\alpha+2\pi]$. این موضوع در مثال زیر نشان داده شده است.

ب-مثال- تابع متناوب با دوره تناوب 2π را که در زیر تعریف شده در نظر میگیریم.

$$\begin{cases} f(t)=t & t\in[0,1[\\ f(1)=3 & \\ f(t)=t^2-2t & t\in]1,2\pi] \end{cases}$$

در اینجا بطور مثال a_0 را محاسبه میکنیم. روی $[0,1[$ تابع f ، با کثیرالجمله $p_1(t)=t$ که بر این بازه پیوسته است، انطباق دارد. همچنین در بازه $]1,2\pi]$، منطبق است بر کثیرالجمله $p_2(t)=t^2-2t$ که $p_2(t)$ نیز در بازه $[1,2\pi]$ پیوسته است. بعلاوه f در $t=1$ دارای ناپیوستگی نوع اول است. (زیرا: $\lim_{t\to1^-}f(t)=1\neq f(1)\in\mathbb{R}$ و $\lim_{t\to1^+}f(t)=-1\neq f(1)\in\mathbb{R}$) لذا بنا به تعریف (ضمیمه ۵ را ببینید) داریم:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1 p_1(t)\,dt+\int_1^{2\pi}p_2(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1 t\,dt+\int_1^{2\pi}(t^2-2t)\,dt\right]$$

$$=\frac{4\pi^2}{3}-2\pi+\frac{7}{12\pi}$$

پیداست که مقدار تابع بازای $t=1$ در انتگرالگیری روی $[0,2\pi]$ دخالت ندارد و هم اینطور نیز هست اگر $f(1)$ با عدد حقیقی و غیر مشخص a برابر باشد.

پ- حالتیکه f یک تابع زوج یا فرد باشد. در این موارد که تابع f زوج یا فرد هست، مناسب است که در محاسبه ضرایب فوریه از بازه $[-\pi,\pi]$ برای محاسبه انتگرالهای مربوط استفاده شود. چنانچه f تابعی زوج باشد، آنگاه تابع $t \mapsto f(t)\sin nt$ فرد میگردد که در نتیجه انتگرالش روی بازه $[-\pi,\pi]$ برابر با صفر است. بنابراین $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\, dt = 0$ است و سری فوریه وابسته به f تابعی زوج بصورت $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt$ خواهد بود. اگر تابع $f(t)$ فرد باشد، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt = 0 \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \end{cases}$$

که درنتیجه سری فوریه وابسته به تابع فرد f یک سری سینوسی بصورت $\sum_n b_n \sin nt$ خواهد شد. (اگر f فرد باشد، $f(t)\cos nt$ نیز فرد است.)

۱-۳-۲-۳- قضیه دیریکله (Dirichlet)

الف- جایگاه مسئله: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد، سری فوریه وابسته به f بصورت $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ خواهد بود. در اینجا به دو سوال زیر باید پاسخ داده شود.

سوال اول: آیا سری فوریه وابسته به f روی $\mathbb{R}$ یک سری همگراست؟
سوال دوم: اگر سری فوریه مربوط به f همگرا باشد، آیا به f همگرا میشود؟

ب- قضیه دیریکله: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه سری فوریه وابسته به f بازای جمیع مقادیر t همگراست و برای هر t در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

خاصه در نقطه ای مانند t_0 که تابع f در آن پیوسته باشد، مجموع سری فوریه مربوط به f با $f(t_0)$ برابر میگردد. باین ترتیب جواب هر دو سوال با قضیه دیریکله داده شده است، که آنرا می‌پذیریم.

مسئله حل شده: فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π بوده و بصورت زیر تعریف شده باشد:

$f(t) = t \qquad t \in [0, 2\pi]$

۱- منحنی تابع f را در دستگاه قائم $(0,\vec{i},\vec{j})$ و در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم نموده و ضرایب فوریه وابسته به f را نیز محاسبه کنید.

۲- نشان دهید که تابع f شرایط قضیه دیریکله را داراست و از آن بسط تابع f را به سری فوریه نتیجه بگیرید.

حل:

۱- تابع متناوب f روی بازه $[0,2\pi]$، تعریف شده، پیوسته و مشتق پذیر است. (بجز در نقاط صفر و 2π که نقاط ناپیوستگی تابع اند) در نقاط صفر و 2π نیز مقادیر $f(0+0)=0$ و $f(2\pi-0)=2\pi$ در مجموعه $\mathbb{R}$ قرار دارند. همچنین مشتق تابع روی بازه $]0,2\pi[$ برابر با یک است و داریم $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)=f'(0+0)=1$ و $\lim\limits_{t\to 2\pi^-} f'(t)=f'(2\pi-0)=1$ که هر دو نیز در $\mathbb{R}$ جای دارند. لذا تابع f که متناوب بوده و دوره تناوبش 2π است بر روی بازه $[0,2\pi]$، از گروه توابع کلاس C^1 قطعه ای است. چون متناوب با دوره تناوب 2π هست، پس بر روی $\mathbb{R}$ نیز از کلاس C^1 قطعه‌ای خواهد بود. بنابراین از بازه $[0,2\pi]$ برای محاسبه ضرایب فوریه تابع f استفاده میکنیم. خواهیم داشت:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos nt\,dt \;\rightarrow\; a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin nt\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\times 0+\frac{1}{n^2\pi}\left[\cos nt\right]_0^{2\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos nt\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nt\,dt=-\frac{2}{n}$$

در اینجا از محاسبه a_0 و a_n میتوان پی برد که تابع $t\mapsto f(t)-a_0$ تابعی فرد است. (شکل ۱-۷)

۲- در حل قسمت اول ثابت گردید که تابع f با دوره تناوب 2π روی $\mathbb{R}$ از توابع کلاس C^1 قطعه ای است. بنابراین f دارای شرایط قضیه دیریکله هست و چون بر بازه $]0,2\pi[$ پیوسته است، سری فوریه وابسته به f در هر نقطه از این بازه به $f(t)$ همگرا خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$f(t)=t=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\sin nt\right) \qquad \text{(در هر } t \text{ متعلق به بازه }]0,2\pi[\text{)}$$

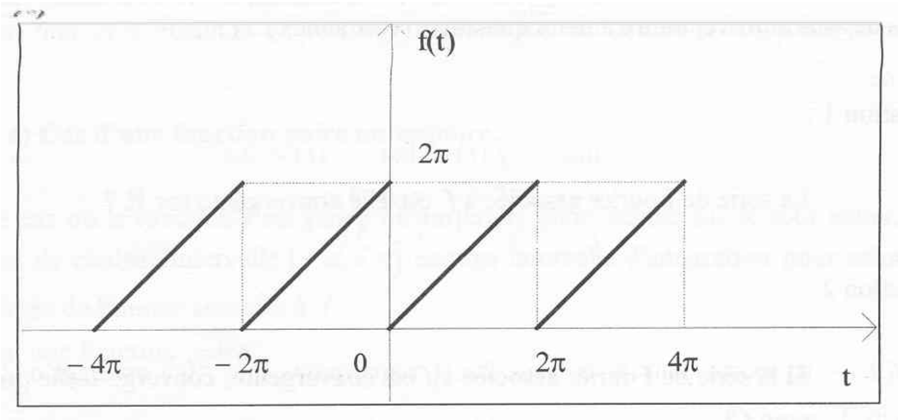
و در نقطه ناپیوستگی $t=0$، سری فوریه وابسته به f همگرا به $\frac{1}{2}\left[f(0^-)+f(0^+)\right]$ است یا به $\frac{1}{2}(2\pi+0)$ یعنی به π همگراست. در نتیجه خواهیم داشت $\pi=\pi$. همچنین در $t=2\pi$ نیز سری فوریه وابسته به f به $\frac{1}{2}\left[f(2\pi-0)+f(2\pi+0)\right]$ یا به π همگرا خواهد بود. باید توجه داشت که اغلب، فاصله تناوب بصورت $]0,2\pi[$ بیان نمیگردد بلکه به شکلهای $]-2\pi,0[$ و $]2\pi,4\pi[$ و غیره داده میشوند که در این حالات باید مقدار تابع را در بازه $]0,2\pi[$ تعیین نمود که در مورد تابع $f(t)=t$ این موضوع در موارد زیر اجرا گردیده است.

$$t=\pi-2\left(\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\dots+\frac{\sin nt}{n}+\dots\right) \qquad t\in]0,2\pi[$$

$$t+2\pi=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n} \qquad t\in]-2\pi,0[$$

$$t-2\pi=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n} \qquad t\in]2\pi,4\pi[$$

ضرایب سری فوریه وابسته به f در بازه $]0,2\pi[$ تعیین شده اند.



شکل ۱-۷: تغییرات تابع $f(t)$

۱-۳-۲-۴- اصطلاحات مربوط به فیزیک:

اگر تابع متناوب f با دوره تناوب 2π قابل بسط به سری فوریه باشد، خواهیم داشت:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

۱- مقدار انتگرال $a_0 = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt$ را مقدار متوسط تابع f روی یک بازه به طول 2π مینامیم.

۲- جمله های $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ را برای $1 \le n$، هارمونیکهای n ام میگوییم. هارمونیک ردیف ۱، یعنی $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ را هارمونیک اصلی (اساسی) مینامیم.

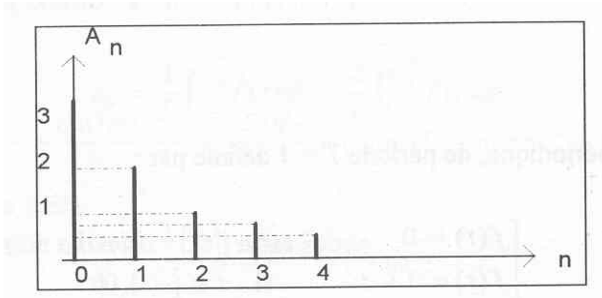
۳- میدانیم که با تبدیل ساده مثلثاتی میتوان $u_n = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ را به $u_n = A_n \cos(nt - \varphi_n)$ بدل نمود که اگر $a_n \neq 0$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\begin{cases} \tan\varphi_n = \dfrac{b_n}{a_n}, \\ \cos\varphi_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \qquad \varphi_n \in]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}[\\ \sin\varphi_n = \dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases}$$

چنانچه $a_n = 0$ باشد، داریم $\varphi_n = \dfrac{\pi}{2}$ و $A_n = |b_n|$. عدد A_n آمپلی تود یا دوره تناوب یک حرکت ارتعاشی در واحد زمان نامیده میشود. φ_n را فاز هارمونیک n ام مینامیم.

۴- نمایش تابع $n \to A_n$ را که از $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده، طیف فرکانس سیگنال مربوط می‌نامیم. در شکل ۱-۸ طیف فرکانسی سیگنال داده شده در مثال ۱-۳-۲-۳ نشان داده شده است. توجه شود که: $A_0 = \pi$ و $A_n = \sqrt{4/n^2 + 0} = 2/n$.



شکل ۱-۸: تغییرات ضریب A_n

۱-۳-۳- بسط یک تابع متناوب با دوره تناوب T به سری فوریه:

بنا به آنچه که در قسمت ۱-۲-۳ اثبات گردید، سری فوریه وابسته به تابع متناوب f با دوره تناوب T عبارتست از: $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$ که در آن داریم $\omega=2\pi/T$. قضیه دیریکله در مورد همگرایی سری فوریه تابع متناوب f با دوره تناوب T نیز برقرار خواهد بود اگر تابع f با دوره تناوب 2π را با تابع متناوب f با دوره تناوب T در شرایط پیش گفته جایگزین نمائیم.

قضیه:
اگر تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ باشد، در اینصورت سری فوریه وابسته به $f(t)$ بازای همه مقادیر t همگرا خواهد بود و داریم:

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

در حالت خاصی که تابع در نقطه ای مانند t_0 پیوسته است، مجموع سری فوریه وابسته به f برابر با $f(t_0)$ میگردد.

تبصره: در محاسبه انتگرالهای مربوط به ضرایب سری فوریه وابسته به f ، اغلب از فواصل $[0,T]$ یا $[-T/2,T/2]$ استفاده میگردد.

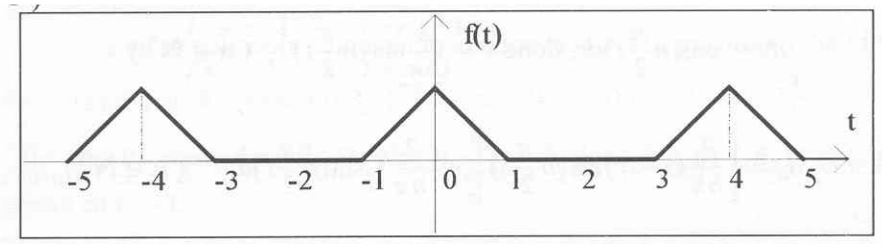
مثال: اگر تابع متناوب f با دوره تناوب $T=4$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$\begin{cases} f(t)=0, & t\in[-2,-1[\\ f(t)=1+t, & t\in[-1,0[\\ f(t)=1-t, & t\in[0,+1[\\ f(t)=0, & t\in[+1,+2[\end{cases}$$

۱- منحنی تابع را در بازه $[-5,+5]$ در یک دستگاه مختصات قائم رسم نمائید. تحقیق کنید که آیا تابع زوج است.
۲- ضرایب سری فوریه وابسته به f را محاسبه کنید.
۳- شرایط قضیه دیریکله را در مورد تابع بررسی نموده و بسط تابع f را به سری فوریه در فاصله $[-2,+2[$ تعیین نمایید.

حل:

۱- منحنی تابع در شکل ۱-۹ رسم شده است. از مقدار تابع که در بازه هـای $]-2,-1[$ و $]1,2[$ در تعریـف تـابع داده شده است و همچنین از مقادیر $1+t$ و $1-t$ که برای بازه های $]-1,0[$ و $]0,1[$ داده شده، معلوم میگـردد که وقتی t به $-t$ تبدیل شود، مقدار تابع تغییر نمیکند. پس تابع زوج است.



شکل ۱-۹: نمایش تابع $f(t)$

۲- محاسبه ضرایب: چون تابع f زوج است، از اینرو برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $b_n = 0$. باز هم بـدلیل زوج بـودن تابع f ، داریم:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{4}\int_{0}^{2} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{2} f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{2} (0)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$

محاسبه a_n برای $n \in \mathbb{N}^*$: میدانیم ($\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$)

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos n\omega t\, dt \\
&= 2\times\frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \\
&= \int_0^2 f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \\
&= \int_0^1 (1-t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt + \int_1^2 (0)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \\
&= \left[\frac{2}{n\pi}(1-t)\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \\
&= 0 - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$n = 2p,\ (p\neq 0)\ \Rightarrow\ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$$

$$n = 2p, (p\neq 0)\ \Rightarrow\ a_n = a_{2p} = \frac{1}{p^2\pi^2}\left[1-(-1)^p\right] = \begin{cases} 0 & p = 2k\ (k\neq 0) \\ \dfrac{2}{(2k+1)^2\pi^2}, & p = 2k+1 \end{cases}$$

$$n = 2p+1\ \Rightarrow\ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0\ \Rightarrow a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}\quad (p\in \mathbb{N})$$

۳-بمنظور تحقیق در برقراری شرایط دیریکله در مورد تابع f ، از بازه $[-2,+2]$ در این خصوص استفاده میکنیم. از آنجائیکه تابع f روی $[-2,+2]$ ، باستثنای نقاط $t=-1,0,1,2$ بصورت کثیرالجمله تعریف گردیده لذا معین، پیوسته و مشتقپذیر بوده و مشتق آن نیز پیوسته است. اما رفتار تابع را باید در مجاورت نقاط $t=-1,0,1,2$ نیز مورد بررسی قرار داد. طبق داده های مسئله داریم:

$$\begin{cases} f(-1)=0, \\ \lim\limits_{t\to -1^-} f(t) = 0, \\ \lim\limits_{t\to -1^+} f(t) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

تابع f در -1 پیوسته است.

$$\begin{cases} f(0)=1, \\ \lim\limits_{t\to -0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-}(1+t) = 1, \\ \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}(1-t) = 1 \end{cases} \rightarrow$$

تابع f در صفر پیوسته است.

تابع f در یک پیوسته است.

$$\begin{cases} f(1)=0, \\ \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)=0, \\ \lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=0 \end{cases} \rightarrow$$

تابع f در سمت چپ $t=2$ نیز پیوسته است. همچنین داریم:

$$t\in]-2,-1[\;\rightarrow\; f(t)=0 \;\rightarrow\; f'(t)=0 \;\rightarrow\; \lim_{t\to -1^-} f'(t)=0 \;\rightarrow\; f'(-1-0)=0\in \mathbb{R}$$

$$t\in]-1,0[\;\rightarrow\; f(t)=1+t \;\rightarrow\; f'(t)=1 \;\rightarrow\; \lim_{t\to -1^+} f'(t)=1 \;\rightarrow\; f'(-1+0)=1\in \mathbb{R}$$

بهمین ترتیب نیز خواهیم داشت: $f'(0^-)=1$ و

$$t\in]0,1[\;\rightarrow\; f(t)=1-t \;\rightarrow\; f'(t)=-1 \;\rightarrow\; \lim_{t\to -0^+} f'(t)=-1 \;\rightarrow\; f'(0^+)=-1\in \mathbb{R}$$

همچنین داریم $f'(1^-)=-1$ و

$$t\in]1,2[\;\rightarrow\; f(t)=0 \;\rightarrow\; f'(1+0)=0\in \mathbb{R}$$

و همچنین $f'(2-0)=0\in \mathbb{R}$. این نتایج نشان میدهند که تابع روی بازه $[-2,2]$ تابعی از گروه توابع کلاس C^1 قطعه ای است. چون طول بازه $[-2,2]$ به اندازه دوره تناوب f یعنی $T=4$ هست، لذا تابع f از کـلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است. باین ترتیب همه شرایط قضیه دیریکله در f صدق میکنـد. بنـابراین مجمـوع سـری فوریه وابسته به تابع f در هر نقطه t که تابع در آنجا پیوسته باشد، همگراست به $f(t)$. چون تابع f روی بازه $[-2,2]$ در همه نقاط پیوسته است، از اینرو خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(4k+2)\frac{\pi}{2}t\right]+\frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}t\right]$$

۱-۴- صورت مختلط سری فوریه

دانستیم که اگر f تابعی حقیقی، متناوب با دوره تناوب T و از کلاس C^1 قطعه ای روی بازه $[\alpha, \alpha+\pi]$ با $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد، جمله عمومی سری فوریه وابسته به f عبارت خواهد بود از $u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$، u_n را با استفاده از فرمول اولر بصورت $u_n = \frac{a_n}{2}[\exp(in\omega t)+\exp(-in\omega t)] + \frac{b_n}{2i}[\exp(in\omega t)-\exp(-in\omega t)]$ تغییر داده، خواهیم داشت: $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$u_n = \frac{a_n - i b_n}{2}\exp(in\omega t) + \frac{a_n + i b_n}{2}\exp(-in\omega t)$$

حال با قرار دادن $C_n = (a_n - i b_n)/2$ و $\overline{C_n} = (a_n + i b_n)/2$ در تساوی بالا، جمله عمومی u_n برابر میگردد با $u_n = \frac{a_n - i b_n}{2}\exp(in\omega t) + \overline{C_n}\exp(-in\omega t)$. چنانچه از مقادیری که برای a_n و b_n داشتیم در محاسبه C_n استفاده نمائیم، نتیجه میگیریم:

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - i\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-n\omega t)\,dt$$

چون $f(t)$ حقیقی است، خواهیم داشت:

$$\overline{C_n} = \frac{1}{T}\left[\overline{\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-in\omega t)\,dt}\right] = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(in\omega t)\,dt$$

زیرا داریم: $\overline{\int_a^b g(t)\,dt} = \int_a^b \overline{g(t)}\,dt$. پس $\overline{C_n} = C_{-n}$. بنابراین بسط تابع f به سری فوریه در هر نقطه ایکه تابع در آن نقطه پیوسته باشد، چنین خواهد بود: $(n \in \mathbb{N})$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

زیرا از رابطه $u_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)\exp(in\omega t) + \frac{1}{2}(a_n + b_n)\exp(-in\omega t)$ میتوان نتیجه گرفت: $u_0 = a_0$.
اما از اینکه داریم $u_n = C_n \exp(in\omega t) + \overline{C_n}\exp(-in\omega t)$ و $\overline{C_n} = C_{-n}$ لذا خواهیم داشت $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(in\omega t)$ روی $n \in \mathbb{Z}$.

تبصره: اگر تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب T، تابعی مختلط باشد، میتوان آنرا بصورت $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$ نوشت که f_1 و f_2 توابعی حقیقی، متناوب و با دوره تناوب T خواهند بود. در اینصورت بسط تابع $f(t)$ در نقطه ایکه پیوسته باشد، از مجموع بسط های توابع جدید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ تشکیل خواهد شد.

حال اگر C_n های مربوط به توابع متناوب جدید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ را بترتیب با $C_{n,1}$ و $C_{n,2}$ نشان دهیم، خـواهیم داشت:

$$C_{n,1}=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(t)\exp(-in\,\omega t)\,dt\,,$$
$$C_{n,2}=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f_2(t)\exp(-in\,\omega t)\,dt,$$

و

$$\begin{cases} f_1(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_{n,1}\exp(in\,\omega t), \\ f_2(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_{n,2}\exp(in\,\omega t) \end{cases} \rightarrow \quad f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(C_{n,1}+i\,C_{n,2})\exp(in\,\omega t)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} C_{n,1}+i\,C_{n,2} &= \frac{1}{T}\left[\int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(t)\exp(-in\omega t)\,dt+i\times\int_{\alpha}^{\alpha+T} f_2(t)\exp(-in\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left[f_1(t)+i\,f_2(t)\right]\exp(-in\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-in\omega t)\,dt \\ &= C_n \end{aligned}$$

که C_n مربوط است به $f(t)$ و $n\in\mathbb{Z}$. در نتیجه $f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n\exp(in\,\omega t)$ است. لذا بسط تابع متنـاوب و مختلط $f(t)$ نیز بر طبق همان فرمول قبلی انجام میگیرد. یعنی برای هر $n\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-in\,\omega t)\,dt$$

مثال: $f(t)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب $T=1$ که بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(t)=\exp(-t) \qquad t\in[0,1[$$

۱- ضرایب فوریه مختلط وابسته به f را محاسبه کنید.

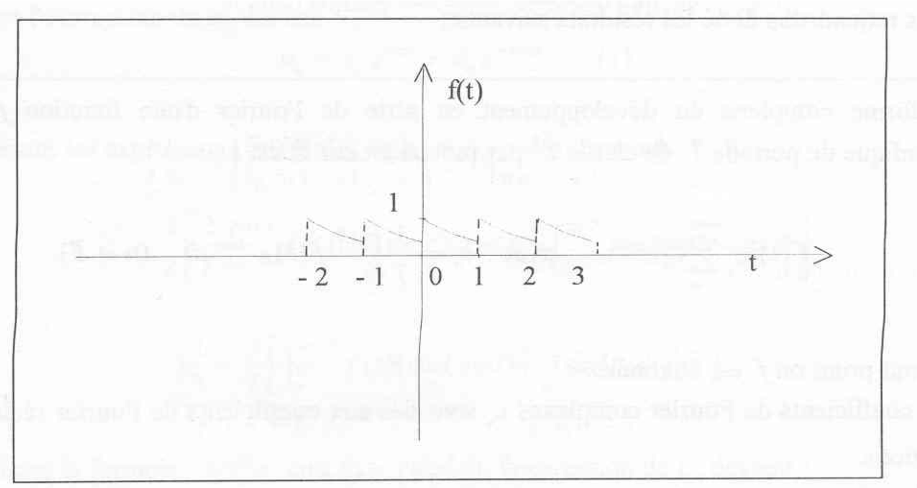
۲- نشان دهید که تابع f روی بازه $]0,1[$ قابل بسط به سری مختلط است. بعلاوه بسط آنرا به سری فوریه حقیقی نیز مشخص نمائید.

حل:

۱- رفتار منحنی تابع f در شکل ۱-۱۰ نشان داده شده است. برای هـر $n\in\mathbb{Z}$، ضـرایب فوریـه مختـلط عبارتند از ($\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$):

$$C_n = \int_0^1 \exp(-t).\exp(-2\pi\, i\, n\, t)\, dt$$
$$= \int_0^1 \exp[-(1+2\pi\, i\, n)t]dt$$
$$= \frac{-1}{1+2\pi\, i\, n}\{\exp[-(1+2i\pi\, n)t]\}_0^1$$
$$= \frac{1}{1+2\pi\, i\, n}\{1-\exp[-(1+2i\pi\, n)]\}$$

امـــا داریـــم $\exp(\,2i\pi\, n) = \cos\,(2\pi\, n) + i\sin\,(2\pi\, n) = 1$، در نتیجـــه خـــواهیم داشـــت:
$C_n = \dfrac{1}{1+2i\pi\, n}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$.



شکل ۱-۱۰: نمایش تابع $f\,(t)$

۲- در زیر نشان میدهیم که f تابعی است از کـلاس C^1 قطعـه ای روی بـازه $]0,1[$ در نتیجـه روی $\mathbb{R}$.
پیداست که تابع f روی بازه $]0,1[$، معین، پیوسته و مشتق پذیر بوده و مشتق آن نیز بـر بـازه $]0,1[$ پیوسته است. همچنین داریم:

پس در صفر پیوستگی راست دارد زیرا $f\,(0) = 1$

$$\lim_{t\to 0^+} f\,(t) = \lim_{t\to 0^+} \exp(-t) = 1 \in \mathbb{R}$$

پس در یک پیوستگی چپ دارد زیرا $f\,(1) = 1/e$

$$\lim_{t\to 1^-} f\,(t) = \lim_{t\to 1^-} \exp(-t) = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}$$

واضح است که $f'(t)$ بر بازه $]0,1[$ پیوسته است

$$f'(t) = -\exp(\,-t)$$

و بعلاوه داریم:

$$\lim_{t\to 0^+} f\,'(t) = \lim_{t\to 0^+}[-\exp(-t)] = -1 \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{t\to 1^-} f\,'(t) = \frac{-1}{e} \in \mathbb{R}$$

بنابرنتایج فوق معلوم میگردد که تابع $f\,(t)$ بر بـازه $]0,1[$ و در نتیجـه روی $\mathbb{R}$ از کـلاس C^1 قطعـه ای بـوده و واجد شرایط قضیه دیریکله است. لذا سری فوریه وابسته به $f\,(t)$ بر بازه $]0,1[$ همگـرا بـه $f\,(t)$ اسـت. از اینـرو خواهیم داشت: ($\omega = 2\pi / T$ و $T = 1$)

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(in\omega t)$$

یا

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+2i\pi n}\left(1-\frac{1}{e}\right)\exp(2in\pi t)$$

بسط تابع به سری فوریه حقیقی: داریم

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{a_n-ib_n}{2}\\&=\frac{1}{1+2i\pi n}\left(1-\frac{1}{e}\right)\\&=\frac{1-2i\pi n}{1+4\pi^2 n^2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\\&=\frac{1-1/e}{1+4\pi^2 n^2}-\frac{2i\pi n(1-1/e)}{1+4\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{2(1-1/e)}{1+4\pi^2n^2}\\b_n=\dfrac{4n\pi(1-1/e)}{1+4\pi^2n^2}\end{cases}$$

بعلاوه داریم:

$$a_0=C_0\ \rightarrow\ a_0=1-\frac{1}{e}$$

بنابراین برای هر t از بازه $]0,1[$ ، بسط سری فوریه حقیقی وابسته به f بصورت زیر خواهد بود که به $f(t)$ همگراست.

$$\begin{aligned}f(t)&=1-\frac{1}{e}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{2}{1+4\pi^2n^2}\left(\cos 2\pi nt+2\pi n\sin 2\pi nt\right)\right]\\&=\left(1-\frac{1}{e}\right)\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1+4\pi^2n^2}\left(\cos 2\pi nt+2\pi n\sin 2\pi nt\right)\right]\end{aligned}$$

۱-۵- فرمول پارسوال

اگر $f(t)$ تابعی حقیقی، متناوب با دوره تناوب T بوده و دارای شرایط قضیه دیریکله باشد، در فرمولهای زیر که به فرمولهای پارسوال معروفند صدق مینماید:

الف- در صورتی که f به سری حقیقی فوریه بسط داده شود: (α مفروض و عضو $\mathbb{R}$ است)

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

ب- در صورتی که f به سری مختلط بسط داده شود:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|C_n\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|C_n\right|^2 + \left|C_0\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|C_n\right|^2$$

پ- اگر f تابعی مختلط باشد:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \left|f(t)\right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|C_n\right|^2$$

اثبات: (برای حالت الف)- میدانیم که بسط حقیقی سری فوریه وابسته به تابع $f(t)$ عبارت است از: ($\omega = 2\pi/T$)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} g(t)\,dt$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} g(t) &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2\cos^2 n\omega t + b_n^2 \sin^2 n\omega t\right) + 2a_0\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{+\infty} 2a_i b_j \cos(i\omega t).\sin(j\omega t) + \sum_{\substack{i=1\\ j=2\\ i>j}}^{+\infty} 2b_i b_j \sin(i\omega t).\sin(j\omega t) \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1\\ j=2\\ j>i}}^{+\infty} 2a_i b_j \cos(i\omega t).\cos(j\omega t) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه انتگرال معین بالا به انتگرالهای بصورت زیر قابل تفکیک است، به محاسبه این انتگرالها میپردازیم. توجه میکنیم که

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\cos^2 n\omega t\,dt &= \int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}dt + \int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}\cos 2n\omega t\,dt \\ &= \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}t\right]_{\alpha}^{\alpha+T} + \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{4n\omega}\sin 2n\omega t\right]_{\alpha}^{\alpha+T} \\ &= \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}T\right] + \left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{4n\omega}\left(\sin(2n\omega\alpha + 2n\omega T) - \sin 2n\omega\alpha\right)\right] \end{aligned}$$

چون $\omega T = 2\pi$ و $\sin(2n\omega\alpha + 4n\pi) = \sin(2n\omega\alpha)$ است، پس

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\cos^2 n\omega t\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}T$$

بهمین ترتیب نتیجه میگیریم:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2\sin^2 n\omega t\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2}T$$

اما در مورد انتگرالهای $\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega t\,dt$ و $\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\omega t\,dt$ که مشابه هم محاسبه میگردند، داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\omega t\,dt&=\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-b_n}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{\alpha}^{\alpha+T}\\&=\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n\omega}\left(\cos(n\omega\alpha+n\omega T)-\cos n\omega\alpha\right)\right]\\&=0\end{aligned}$$

با محاسبه ای مشابه بدست می‌آوریم که $\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega t\,dt=0$.

در مورد بقیه انتگرالها نیز داریم:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} 2a_ia_j\cos i\omega t\cos j\omega t\,dt&=\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} a_ia_j\left[\cos(i+j)\omega t+\cos(j-i)\omega t\right]dt\\&=\left\{\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} a_ia_j\left[\frac{1}{(i+j)\omega}\sin(i+j)\omega t+\frac{1}{(j-i)\omega}\sin(j-i)\omega t\right]\right\}_{\alpha}^{\alpha+T}\\&=\left\{\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} a_ia_j\frac{1}{(i+j)\omega}\left[\sin(i+j)(\omega\alpha+\omega T)-\sin(i+j)\omega\alpha\right]\right\}\\&+\left\{\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} a_ia_j\frac{1}{(j-i)\omega}\left[\sin(j-i)(\omega\alpha+\omega T)-\sin(j-i)\omega\alpha\right]\right\}\end{aligned}$$

با توجه به تساوی $\omega T=2\pi$ واضح است که هر یک از کروشه های اخیر برابر با صفر میگردند که در نتیجه خواهیم داشت: $\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sum_{\substack{i=1\\j=2\\j>i}}^{+\infty} 2a_ia_j\cos i\omega t\cos j\omega t\,dt=0$. همینطور انتگرالهای مشابه نیز همگی برابر با صفرند. پس به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt&=\frac{1}{T}\left(a_0^2T+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{2}T+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n^2}{2}T\right)\\&=a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\end{aligned}$$

اثبات: برای حالات ب و پ:

میدانیم که اگر $f(t)$ تابعی حقیقی یا مختلط بوده، بعلاوه متناوب با دوره تناوب T و از کلاس C^1 قطعه ای باشد، بسط آن به سری فوریه مختلط بصورت $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(in\omega t)$ خواهد بود. همچنین داریم:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-in\omega t)dt \qquad (n\in Z)$$

$$C_0=a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt$$

$$C_n=\frac{a_n-i\,b_n}{2} \qquad (n\in \aleph^*)$$

$$\overline{C}_n=\frac{a_n+i\,b_n}{2}=C_{-n}$$

$$|C_n|=|C_{-n}|=\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{b_n^2}{4}}=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{2}$$

اما چون در حالات ب و پ به ترتیب توابع $f(t)$ و $|f(t)|$ حقیقی هستند، از فرمول حالات الف در مورد آنها استفاده میکنیم. بنابراین خواهیم داشت:

برای حالت ب:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt=a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2} \qquad (\alpha\in\Re)$$

$$=C_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{4}+\frac{a_n^2+b_n^2}{4}\right)$$

$$=|C_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|C_n|^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}|C_{+n}|^2$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2$$

در مورد حالت پ:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}|f(t)|^2\,dt=|C_0|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|C_n|^2+\sum_{n=-\infty}^{-1}|C_{+n}|^2$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2$$

تبصره: میدانیم که با فرض $\tan\varphi=\dfrac{b_n}{a_n}$ و $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$، داریم $a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t=A_n\cos(n\omega t+\varphi)$. بنابراین چنانچه تابع $f(t)$ بصورت $f(t)=a_0+A_n\cos(n\omega t+\varphi)$ داده شود، فرمول پارسوال چنین خواهد بود:

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n^2$$

تعبیر فیزیکی فرمول پارسوال:

اگر $f(t)$ نمونه ای از یک سیگنال الکتریکی متناوب با دوره تناوب T باشد، میدانیم که با انتخاب واحدی مناسب، قدرت الکتریکی این سیگنال برابر خواهد بود با $p = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)\,dt$. مقدار متوسط سیگنال $t \to a_0$ و قدرت هارمونیک n ام سیگنال برابر $t \to a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ است. به ترتیب خواهیم داشت:

$$P_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} a_0^2 dt = \frac{1}{T}\left[a_0^2 t\right]_{\alpha}^{\alpha+T} = a_0^2$$

$$P_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left[a_n^2(1+\cos 2n\omega t) + b_n^2(1-\cos 2n\omega t)^2 + 2a_n b_n \sin(2\omega t)\right]dt$$

اما به آسانی میتوان پی برد که:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos(2\omega T)\,dt = 0$$

همچنین داریم:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin(2\omega t)\,dt = \left[\frac{-1}{2\omega}\cos(2\omega t)\right]_{\alpha}^{\alpha+T}$$

$$= \frac{-1}{2\omega}\left[\cos[2\omega(\alpha+T)] - \cos(2\omega\alpha)\right]$$

$$= \frac{-1}{2\omega}(-2)\sin(2\omega\alpha + \omega T)\sin(\omega T)$$

چون $\omega = 2\pi / T$ است، خواهیم داشت:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin(2\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sin(2\alpha\omega + 2\pi)\sin(2\pi) = 0$$

بنابراین نتیجه میگیریم که:

$$P_n = \frac{1}{2T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left(a_n^2 + b_n^2\right)dt = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

پس مقدار قدرت کامل سیگنال P برابر خواهد بود با:

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$$

باین ترتیب قدرت کامل هر سیگنالی که بصورت یک تابع کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ باشد، عبارت است از:

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$$

۱-۶- مسائل حل شده

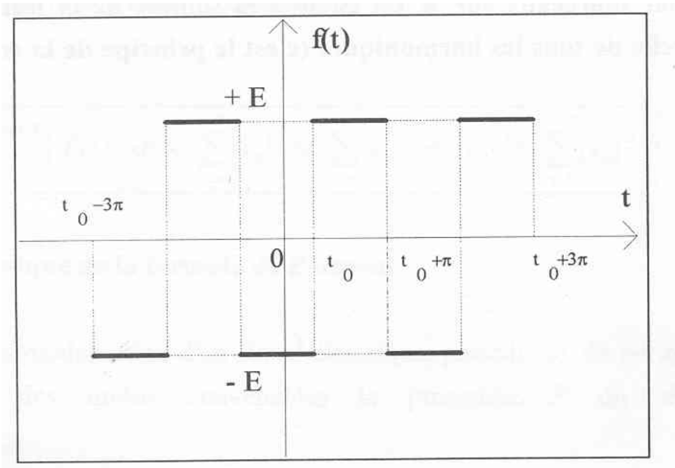
مسئله ۱: بسط یک خانواده از سیگنالهای الکتریکی با طیف تکراری به سری فوریه. اگر t_0 یک عدد خقیقی غیر مشخص باشد، سیگنالی را که بوسیله تابع متناوب f با دوره تناوب 2π و با تعریف زیر معرفی گردیده است در نظر میگیریم.

$$f(t)=E \qquad t\in[t_0,t_0+\pi[$$
$$f(t)=-E \qquad t\in[t_0+\pi,t_0+2\pi[$$

۱- منحنی تابع f را در دستگاه قائم و در بازه $[t_0-3\pi,t_0+3\pi]$ رسم کنید.
۲- نشان دهید که تابع f از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است.
۳- بسط تابع f را به سری فوریه در نقاطی که f در آن نقاط پیوسته است مشخص نمایید.
۴- در حالات خاص $t_0=0$ و $t_0=-\pi/2$ موضوع بند ۳ مسئله را بررسی کنید. آیا نتایج حاصل را میتوان پیش بینی نمود؟

حل:

۱- شکل منحنی در شکل ۱-۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۱: منحنی تابع $f(t)$

۲- بازه $[t_0,t_0+2\pi]$ را در نظر میگیریم. داریم: $f(t_0+\pi)=-E$ ، $\lim\limits_{t\to(t_0+\pi)^+} f(t)=-E=f(t_0+\pi)$ و $\lim\limits_{t\to(t_0+\pi)^-} f(t)=E$. از این محاسبات نتیجه میگیریم که تابع f روی بازه $[t_0,t_0+\pi[$ بجز در نقطه $t=t_0+\pi$ تابعی است معین، ثابت، پیوسته و مشتق پذیر با مشتق ثابت صفر. تابع در نقطه $t_0+\pi$ دارای ناپیوستگی از نوع اول بوده و مقادیر $f(t_0+\pi-0)=E$ و $f(t_0+\pi+0)=-E$ نیز در $\mathbb{R}$ وجود دارند. با روشی مشابه به این نتیجه میرسیم که تابع f در سمت چپ نقطه $t=t_0+2\pi$ برابر با $-E$ میگردد که در $\mathbb{R}$ وجود دارد. بعلاوه f بر بازه های $]t_0,t_0+\pi[$ و $]t_0+\pi,t_0+2\pi[$ مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر است با مقدار ثابت صفر و همچنین $\lim\limits_{t\to(t_0+\pi)^-} f'(t)=0\in\mathbb{R}$ ، $\lim\limits_{t\to(t_0+\pi)^+} f'(t)=0\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{t\to(t_0+2\pi)^+} f'(t)=0\in\mathbb{R}$. این نتایج نشان میدهند که تابع f تابعی است از کلاس C^1 قطعه ای

روی بازه $[t_0, t_0+2\pi]$. چون بنا به فرض مسئله، f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π نیز هست. ازینرو پی میبریم که f از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است.

۳- چون تابع f تابعی است از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$، پس طبق قضیه دیریکله در هر نقطه ای که f در آن نقطه پیوسته باشد، سری فوریه وابسته به آن به خود f همگرا خواهد بود. حال به محاسبه ضرایب فوریه میپردازیم. داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}(-E)\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}(E\pi - E\pi) = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\cos(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}(-E)\cos(nt)\,dt\right] \\
&= \frac{E}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t_0}^{t_0+\pi} - \frac{E}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi} \\
&= \frac{E}{n\pi}\left[\sin(nt_0+n\pi) - \sin(nt_0) - \sin(nt_0+2n\pi) + \sin(nt_0+n\pi)\right]
\end{aligned}$$

چون داریم $\sin(nt_0+2n\pi) = \sin(nt_0)$ و $\sin(nt_0+n\pi) = (-1)^n\sin(nt_0)$ لذا خواهیم داشت: $a_n = \frac{2E}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\sin(nt_0)$. اگر n زوج باشد ($n=2p$)، a_n صفر میگردد. اگر n فرد باشد ($n=2p+1$)، آنوقت ضریب a_n برابر است با $\frac{-4E\sin\left[(2p+1)t_0\right]}{(2p+1)\pi}$.

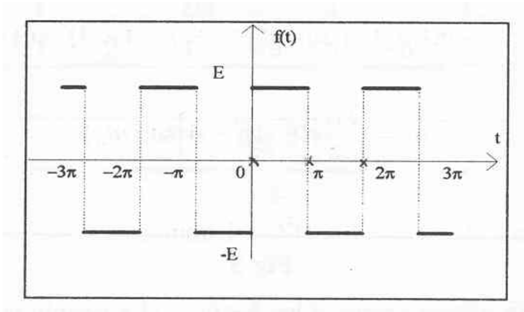
برای b_n داریم:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0}^{t_0+\pi} E\sin(nt)\,dt + \int_{t_0+\pi}^{t_0+2\pi}(-E)\sin(nt)\,dt\right]$$

با محاسبه ای مشابه با آنچه برای a_n انجام شد، نتیجه میگیریم که: اگر $n=2p$ باشد، $b_n=0$ و اگر $n=2p+1$ آنوقت b_{2p+1} برابر با $\frac{4E\cos\left[(2p+1)t_0\right]}{(2p+1)\pi}$ خواهد شد. اما میدانیم که در نقاطیکه تابع $f(t)$ پیوسته باشد، سری فوریه وابسته به $f(t)$ به خود تابع همگرا میشود. از اینرو خواهیم داشت:

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left\{\frac{\sin[(2p+1)t_0]}{2p+1}\cos[(2p+1)t] + \frac{\cos[(2p+1)t_0]}{2p+1}\sin[(2p+1)t]\right\}$$

۴- اگر $t_0 = 0$ باشد، رابطه نتیجه شده در بند ۳ مسئله بصورت $f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\left[(2p+1)t\right]}{(2p+1)}$ در می‌آید که نشان میدهد f تابعی فرد است. در اینحالت منحنی تابع $f(t)$ مطابق با شکل ۱-۱۲ بوده و داریم:



شکل ۱-۱۲: منحنی تابع $f(t)$

***

$$f(t)=E \qquad t\in[0,\pi[$$
$$f(t)=-E \qquad t\in[-\pi,0[$$
$$f(t)=-E \qquad t\in[\pi,2\pi[$$
$$f(t)=E \qquad t\in[2\pi,3\pi[$$
$$f(t)=E \qquad t\in[-2\pi,-\pi[$$

که نتیجه میدهد:

$$f(0)=E\neq 0$$
$$f(-\pi)=-E=f(\pi)\ \rightarrow\ f(-\pi)\neq -f(\pi)$$
$$f(2\pi)=E=f(-2\pi)\ \rightarrow\ f(2\pi)\neq -f(-2\pi)$$

نتایج بالا نشان میدهند که $f(t)$ تابعی فرد نیست. پس رابطه $f(t)=\dfrac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{\sin[(2p+1)t]}{(2p+1)}$ در مورد حالت $t_0=0$ نمیتواند صحیح باشد. چنانچه مثلاً بخواهیم تعریف تابع $f(t)$ را بصورت

$$f(0)=0$$
$$f(t)=E \qquad t\in]0,\pi[$$
$$f(\pi)=0$$
$$f(t)=-E \qquad t\in]\pi,2\pi[$$
$$f(2\pi)=0$$

تغییر دهیم، (دوره تناوب تابع 2π است) در اینصورت f به تابعی فرد بدل گردیده و بسط آن به سری فوریه در نقاطیکه تابع f پیوسته باشد به خود تابع همگرا خواهد بود آنگاه رابطه پیش گفته در مورد چنین تابعی برقرار میگردد و داریم:

$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin[(2p+1)t]}{2p+1}$$

یا

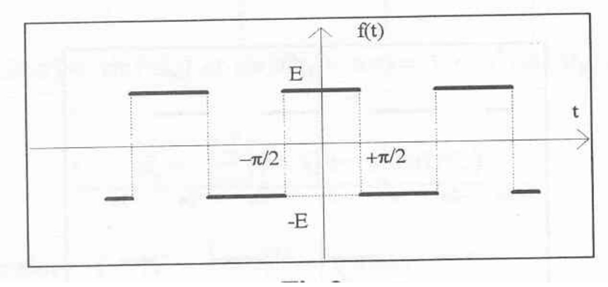
$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\left[\sin(t)+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}+\dots\right]$$

این نتیجه پس از محاسبه ضرایب a_0، a_n و b_n با توجه به تعریف جدید تابع f حاصل میگردد. همینطور اگر $t_0=-\pi/2$ باشد، منحنی نمایش تابع متناوب $f(t)$ با دوره تناوب 2π و با تعریف

$$f(t)=E, \qquad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$
$$f(t)=-E, \qquad t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$$

مطابق با شکل ۱-۱۳ خواهد بود و تساوی مربوط به همگرایی بسط تابع مزبور به سری فوریه به $f(t)$ ، به تساوی زیر بدل میگردد:

$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{\cos[(2p+1)t]}{2p+1}$$



شکل ۱-۱۳: منحنی تابع $f(t)$

با محاسبات مشابه با حالت $t_0=0$ یا بکمک شکل ۱-۱۳ بسادگی میتوان پی برد که در اینحالت تابع $f(t)$ زوج نیست تا رابطه اخیر در مورد آن صدق نماید. اما میتوان در بازه ای بطول 2π تعریفی برای تابع $f(t)$ در نظر گرفت که تابع زوج گردد. مثلاً (دوره تناوب تابع $f(t)$ برابر با 2π)

$$\begin{cases} f(-\frac{\pi}{2})=0 \\ f(t)=E \quad t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ f(\frac{\pi}{2})=0 \\ f(t)=-E \quad t\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\\ f(\frac{3\pi}{2})=0 \end{cases}$$

در اینصورت $f(t)$ تابعی زوج خواهد بود و برای آن در نقاطیکه پیوسته است، تساوی

$$f(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\cos t-\frac{\cos 3t}{3}+\frac{\cos 5t}{5}-\frac{\cos 7t}{7}+\dots\right) \quad \text{یا} \quad f(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{p}\frac{\cos[(2p+1)t]}{2p+1}$$

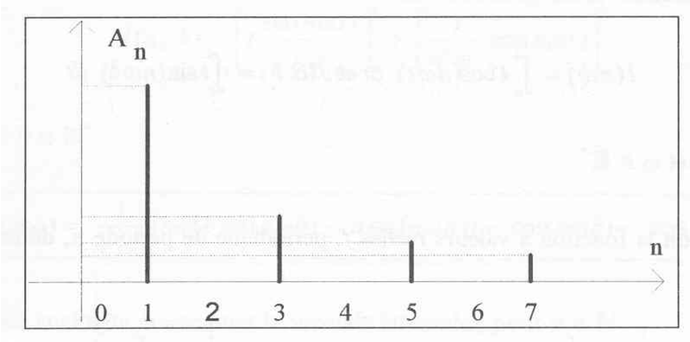
برقرار میگردد. در مورد تابع زوجی که انتخاب شد، $b_n=0$ است و $a_{2p+1}=\frac{4E}{\pi}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.

رسم طیف فرکانسی وابسته به f در دو حالت $t_0=0$ و $t_0=-\pi/2$:

میدانیم که طیف فرکانسی f تابعی است از $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده بصورت $n\to A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. اما چون در حالات $t_0=0$ و $t_0=-\pi/2$ توابع انتخاب شده زوجند و b_n در آنها برابر با صفر است، خواهیم داشت:

$$A_{2p}=0,\ A_{2p+1}=|a_{2p+1}|=\frac{4E}{\pi}\frac{1}{2p+1} \qquad (p\in\mathbb{N})$$

تمام هارمونیکهای ردیف زوج، صفر هستند. (شکل ۱-۱۴)



شکل ۱-۱۴: تغییرات ضریب A_n

تبصره: طیف فرکانسی که در شکل ۱-۱۴ نشان داده شده است، برای همه مقادیر t_0 است. در حقیقت تغییر مقدار t_0 بر میگردد به تغییر مبدا زمانها، یعنی انتقال سیگنال بقدر τ ، در اینصورت ضرایب فوریه C_n به C'_n تغییر می‌یابند، بطوریکه خواهیم داشت: $C'_n = \exp(-in\tau).C_n$ (در مسئله ۳ آمده است) که داریم $|C'_n| = |C_n|$.

مسئله ۲: بسط یک تابع حقیقی و متناوب با دوره تناوب $T = \tau$ به سری فوریه.

۱- انتگرالهای زیر را محاسبه کنید: ($n \in \mathbb{N}^*$ و $\omega \in \mathbb{R}^*$)

$$I(a,b) = \int_a^b t\cos(n\omega t)\,dt$$

$$J(a,b) = \int_a^b t\sin(n\omega t)\,dt$$

۲- تابع f حقیقی، متناوب، با دوره تناوب π بوده و بصورت

$$\begin{cases} f(t) = \frac{3}{4}t & t \in [0, \frac{2\pi}{3}[\\ f(t) = \frac{3}{2}(\pi - t) & t \in [\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases}$$

تعریف شده است.

۳- ضرایب فوریه وابسته به f را حساب کنید.

۴- نشان دهید که سری فوریه وابسته به f در هر نقطه ای از $\mathbb{R}$، به خود تابع همگراست و این سری را تعیین کنید.

حل:

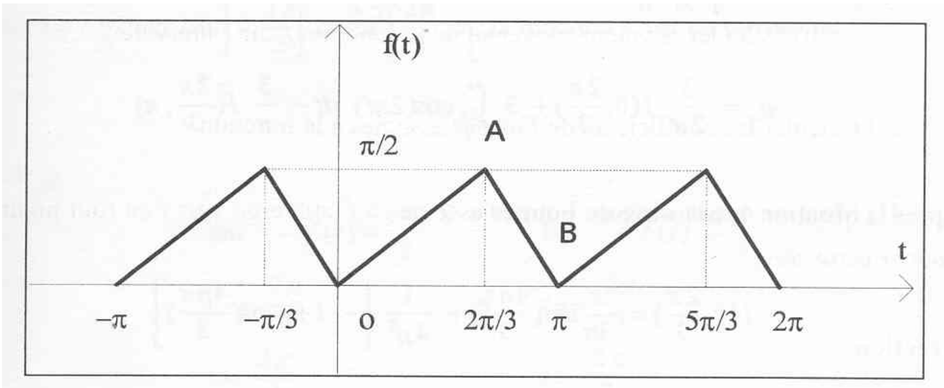
۱- داریم:

$$I(a,b)=\int_a^b t\cos(n\omega t)\,dt$$
$$=\left[t\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_a^b-\int_a^b\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\,dt$$
$$=\left[t\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_a^b+\left[\frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{n^2\omega^2}\{n\omega[b\sin(n\omega b)-a\sin(n\omega a)]+\cos(n\omega b)-\cos(n\omega a)\}$$

با محاسبه ای مشابه خواهیم داشت:

$$J(a,b)=\frac{-1}{n^2\omega^2}\{n\omega[b\cos(n\omega b)-a\cos(n\omega a)]+\sin(n\omega a)-\sin(n\omega b)\}$$

۲- منحنی تابع در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۵: منحنی تابع $f(t)$

مقدار متوسط تابع f روی فاصله $[0,\pi]$ عبارتست از:

$$V_m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi/3}\frac{3}{4}t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi}\frac{3}{2}(\pi-t)\,dt$$
$$=\frac{3}{4\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi/3}+\frac{3}{2\pi}\left[\pi t-\frac{t^2}{2}\right]_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

تبصره: در حقیقت V_m برابر است با $1/\pi$ ضربدر مساحت مثلث OAB که با مثلثهای دیگر در شکل ۱-۱۵ برابر است. بهمین لحاظ میتوان برای محاسبه V_m از حاصلضرب $1/\pi$ در مساحت هر یک از مثلثهای دیگر استفاده نمود. (البته، اینکه $V_m=S_{ABC}/\pi$، برای تابعی مثبت همواره صحیح است.)

۳- میدانیم که $a_0=V_m$ است، پس $a_0=\pi/4$. همچنین داریم: $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ ، $T=\pi$، $\omega=2\pi/T=2$، $n\in\mathbb{N}^*$. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi/3} \frac{3}{4} t\cos(2nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3}{2}(\pi - t)\cos(2nt)\,dt$$
$$= \frac{3}{2\pi} I(0,\frac{2\pi}{3}) + 3\int_{2\pi/3}^{\pi}\cos(2nt)\,dt - \frac{3}{\pi} I(\frac{2\pi}{3},\pi)$$

که در آنها داریم:

$$I(0,\frac{2\pi}{3}) = \left[t\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{1}{4n^2}\cos(2nt)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$= \frac{\pi}{3n}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) + \frac{1}{4n^2}\left[\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) - 1\right]$$
$$I(\frac{2\pi}{3},\pi) = \left[t\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + \left[\frac{1}{4n^2}\cos(2nt)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$
$$= \frac{-\pi}{3n}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) + \frac{1}{4n^2}\left[1 - \cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\right]$$

و

$$\int_{2\pi/3}^{\pi}\cos(2nt)\,dt = \left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{-1}{2n}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$$

چنانچه نتایج محاسبات فوق را در رابطه مربوط به a_n قرار دهیم، نتیجه میگیریم:

$$a_n = \frac{9}{8\pi n^2}\left[\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) - 1\right]$$

محاسبه b_n: داریم $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$ یا $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(nt)\,dt$. پس

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi/3} \frac{3t}{4}\sin(2nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{3}{2}(\pi - t)\sin(2nt)\,dt$$
$$= \frac{3}{2\pi} J(0,2\pi/3) + \frac{3}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi}\pi\sin(2nt)\,dt - \frac{3}{\pi} J(2\pi/3,\pi)$$

پس از قراردادن مقادیر $J(0,2\pi/3)$ و $J(2\pi/3,\pi)$ و مقدار $-\frac{3}{2n} + \frac{3}{2n}\cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$ بجای انتگرال معین $3\int_{2\pi/3}^{\pi}\sin(2nt)\,dt$ در رابطه فوق خواهیم داشت: $b_n = \frac{9}{8\pi n^2}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)$.

۴- برای اثبات اینکه سری فوریه وابسته به f در ازای همه مقادیر t، همگرا به f است، باید نشان دهیم که تابع f از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است. اما چون تابع روی بازه های $]0,2\pi/3[$ و $]2\pi/3,\pi[$ بصورت کثیرالجمله است، لذا معین، پیوسته و مشتق پذیر بوده و مشتق آن نیز پیوسته است. پس لازم است در نقاط $t=0$ ، $t=2\pi/3$ و $t=\pi$ وضع تابع را بررسی نمود. داریم:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t\to 2\pi/3^-} f(t)=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{t\to 2\pi/3^+} f(t)=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}.$$

به این ترتیب معلوم میگردد که تابع f در $2\pi/3$ نیز پیوسته است. همچنین داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)=0\in\mathbb{R},\\ \lim\limits_{t\to \pi^-} f(t)=0\in\mathbb{R}\end{cases}\longrightarrow$$ (تابع f در صفر و π پیوسته است.)

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 2\pi/3^-} f'(t)=\frac{3}{4}\in\mathbb{R},\\ \lim\limits_{t\to 2\pi/3^+} f'(t)=\frac{-3}{2}\in\mathbb{R},\\ \lim\limits_{t\to \pi^-} f'(t)=\frac{-3}{2}\in\mathbb{R},\end{cases}\longrightarrow$$ (هر سه مشتق در $\mathbb{R}$ وجود دارند.)

نتایج بالا نشان میدهند که تابع مفروض روی بازه $[0,\pi]$ از کلاس C^1 قطعه ای است. اما از اینکه دوره تناوب تابع π است، نتیجه میشود که تابع f روی $\mathbb{R}$ از کلاس C^1 قطعه ای خواهد بود. بنابراین از قضیه دیریکله در مورد این تابع میتوان استفاده نمود و چون تابع در همه نقاط $\mathbb{R}$ نیز پیوسته است. بنابراین سری فوریه وابسته به f ، در هر نقطه ای از $\mathbb{R}$ به f همگرا خواهد بود و داریم:

$$f(t)=\frac{\pi}{4}+\frac{9}{8\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-1+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\cos(2nt)+\sin\frac{4n\pi}{3}\sin(2nt)}{n^2}$$

مسئله ۳ : ضرایب فوریه مختلط

۱- فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π بوده و در شرایط قضیه دیریکله صدق کند. چنانچه انتقال یافته تابع f را به اندازه مقدار داده شده τ با تابع g نشان دهیم و آنرا روی $\mathbb{R}$ با رابطه $g(t) = f(t-\tau)$ تعریف نماییم. بعلاوه ضرایب فوریه مختلط وابسته به f را با $C_n(f)$ نشان دهیم. ثابت کنید که g نیز تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است و $C_n(g) = \exp(-in\tau).C_n(f)$
.

۲- سیگنالی را در نظر میگیریم که با تابع حقیقی f و دروه تناوب 2π معرفی گردیده و بصورت:

$$\begin{cases} f(t) = \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ f(t) = 0 & t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

تعریف شده است.

الف- منحنی تابع f را در بازه $[-3\pi, 3\pi]$ رسم کنید.

ب- ضرایب فوریه حقیقی و همچنین مختلط وابسته به f را محاسبه کنید.

پ- نشان دهید که در هر نقطه ای از $\mathbb{R}$، مجموع سری فوریه وابسته به f ، به خود تابع همگراست. سری های فوریه حقیقی و مختلط وابسته به f را بنویسید.

۳- از نتایج قبل، بسط به سری فوریه تابع متناوب با دوره تناوب 2π را که بصورت $g(t) = f(t-\pi)$ تعریف گردیده، بدست آورید.

۴- اگر $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ بازای جمیع مقادیر t در $\mathbb{R}$ بصورت $\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$ و $\psi(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$ تعریف شوند،

الف- با استفاده از بند ۲ مسئله، بسطهای توابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ را به سری فوریه نتیجه بگیرید.

ب- توابع f و g را بر حسب $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ تعیین کنید.

پ- نشان دهید که برای جمیع مقادیر $t \in \Re$ رابطه $\varphi(t) = |\psi(t)|$ برقرار است و از آن بسط $t \to |\sin(t)|$ را به سری فوریه نتیجه بگیرید.

حل:

۱- برای هر $n \in Z$ داریم:

$$C_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g(t) \exp(-i\,n\,t)\, dt,$$

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \exp(-i\,n\,t)\, dt$$

یا

$$C_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t-\tau) \exp(-i\,n\,t)\, dt$$

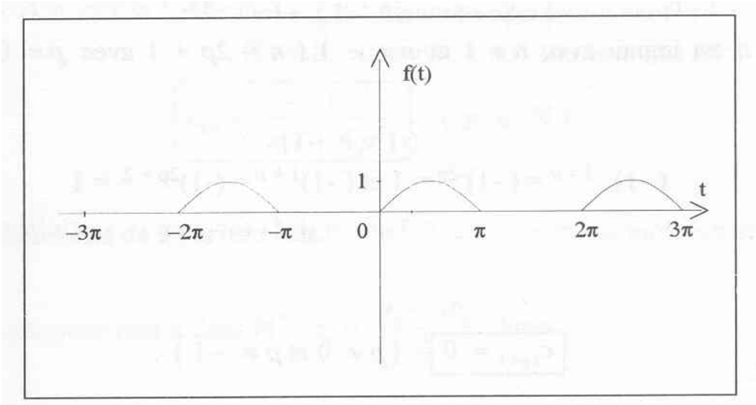
برای محاسبه انتگرال مربوط به $C_n(g)$، تغییر متغیر $t - \tau = u$ را انجام داده، آنگاه خواهیم داشت:

$$C_n(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\tau}^{\alpha-\tau+2\pi} f(u)\exp(-i\,n\,(u+\tau))\,du=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\tau}^{\alpha-\tau+2\pi} f(u)\exp(-i\,n\,u)\,du\right]\exp(-i\,n\,\tau)$$

اما با توجه به اینکه f تابعی است متناوب با دوره تناوب 2π و طول فاصله انتگرالگیری اخیر نیز 2π است، لـذا میتـــوان رابطـــه آخـــری را بصـــورت $C_n(g)=\exp(-i\,n\,\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(u)\exp(-i\,n\,u)\,du\right]$ یـــا $C_n(g)=\exp(-i\,n\,\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\exp(-i\,n\,t)\,dt\right]$ نوشـــــت. بنـــــابراین نتیجـــــه میگیـــــریم: $C_n(g)=\exp(-i\,n\,\tau).C_n(f)$.

-۲

الف- منحنی تابع f در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۶: منحنی تابع $f(t)$

ب- محاسبه ضرایب فوریه مختلط:

داریم: $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-i\,n\,t)\,dt$ یا

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} f(t)\exp(-i\,n\,t)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\exp(-i\,n\,t)\,dt\right]$$

اما با در نظر داشتن اینکه طبق تعریف تابع f ، مقدار تابع در بازه $[\pi,2\pi]$ برابر با صفر است، خواهیم داشت:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\exp(-i\,n\,t)\sin(t)\,dt$$

بجای $\sin(t)$ مساویش $[\exp(i\,t)-\exp(-i\,t)]/2i$ قرار داده، نتیجه میگیریم:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2i}\int_0^{\pi}\{\exp[i\,(1-n)\,t]-\exp[-i\,(1+n)\,t]\}dt$$

برای $n\neq-1$ و $n\neq1$ ، بدست میآوریم:

$$C_n = \frac{1}{4i\pi}\left\{\frac{\exp[i(1-n)t]}{i(1-n)} + \frac{\exp[-i(1+n)t]}{i(1+n)}\right\}_0^{\pi}$$
$$= \frac{-1}{4\pi}\left\{\frac{\exp[i(1-n)t]}{(1-n)} + \frac{\exp[-i(1+n)t]}{(1+n)} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right\}$$

چنانچه در رابطه فوق بجای $\exp[i(1-n)\pi] = \cos[(1-n)\pi] + i\sin[(1-n)\pi]$ و $\exp[-i(1+n)\pi] = \cos[(1+n)\pi] - i\sin[(1+n)\pi]$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{-1}{4\pi}\left[\frac{\cos(1-n)\pi - 1}{1-n} + \frac{\cos(1+n)\pi - 1}{1+n}\right]$$
$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{1-n} - 1}{1-n} + \frac{(-1)^{1+n} - 1}{1+n}\right]$$

اینک در حالات مختلف مقدار C_n را تعیین مینماییم.

اگر n فرد و مخالف $+1$ و -1 باشد، واضح است که C_n برابر با صفر میگردد. یعنی $C_{2p+1} = 0$ است، (درصورتیکه $p \neq 0$ و $p \neq -1$ باشد). برای $n = 1$ ، داریم:

$$C_1 = \frac{1}{4i\pi}\int_0^{\pi}(1 - \exp(-2it))\,dt$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[t + \frac{\exp(-2it)}{2i}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\pi + \frac{\exp(-2i\pi)}{2i} - \frac{1}{2i}\right]$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\pi + \frac{\cos(2\pi) - i\sin(2\pi)}{2i} - \frac{1}{2i}\right]$$
$$= \frac{1}{4i}$$

برای $n = -1$، خواهیم داشت:

$$C_{-1} = \frac{1}{4i\pi}\int_0^{\pi}[\exp(2it) - 1]dt$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{\exp(2it)}{2i} - t\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{\exp(2i\pi) - 1}{2i} - \pi\right]$$
$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{\cos(2\pi) + i\sin(2\pi) - 1}{2i} - \pi\right]$$
$$= \frac{-1}{4i}$$

یادآور میشویم، از قبل میدانستیم که $C_{-1} = \overline{C_1}$، در اینجا مطلب بوضوح متحقق گردید. اگر n زوج باشد ($n = 2p$)، داریم: ($p \in \mathbb{N}$)

$$C_{2p}=\frac{-1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{1-2p}-1}{1-2p}+\frac{(-1)^{1+2p}-1}{1+2p}\right]$$
$$=\frac{1}{\pi(1-4p^2)}$$

محاسبه ضرایب فوریه حقیقی: میدانیم که برای همه مقادیر طبیعی n ($n\in\mathbb{N}^*$) رابطه $C_n=\frac{1}{2}(a_n-i\,b_n)$ برقرار است. بنابراین از $C_{2p+1}=\frac{1}{2}(a_{2p+1}-i\,b_{2p+1})=0$ بازای هر $p\in\mathbb{N}^*$ خواهیم داشت: $a_{2p+1}=0$ و $b_{2p+1}=0$. بازای $p=1$ داریم: $C_1=1/(4i)$ و لذا $a_1=0$ و $b_1=1/2$.

همینطور داریم: ($p\in\mathbb{N}^*$)

$$C_{2p}=\frac{1}{2}(a_{2p}-i\,b_{2p})$$

یا

$$\frac{1}{\pi(1-4p^2)}=\frac{a_{2p}-i\,b_{2p}}{2}$$

طبق قرارداد $b_0=0$ و برای $p=0$ داریم $C_0=a_0$. همچنین برای $p\in\mathbb{N}^*$ داریم $b_{2p}=0$ و $a_{2p}=\frac{2}{\pi(1-4p^2)}$. اما در رابطه $C_n=\frac{-1}{4\pi}\left[\frac{(-)^{1-n}-1}{1-n}+\frac{(-)^{1+n}-1}{1+n}\right]$ چنانچه بجای n، صفر قرار داده شود، نتیجه میگردد $C_0=1/\pi$. پس $a_0=1/\pi$ است.

پ- ابتدا نشان میدهیم که تابع f تابعی است از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$. f تابعی معین، پیوسته و مشتق پذیر و نیز دارای مشتق پیوسته (شاید بجز در $t=\pi$ و $t=2\pi$) روی بازه $[0,2\pi]$ است. چون تابع f روی $[0,\pi]$ بصورت تابع $t\to\sin(t)$ است که همه شرایط پیش گفته را داراست و همچنین f روی $]\pi,2\pi[$ مقداری ثابت است.

بررسی وضع تابع در نقاط صفر، π و 2π نیز از محاسبات زیر معلوم میشود:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{t\to\pi^-} f(t)=\lim\limits_{t\to\pi^-}\sin(t)=0\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to\pi^+} f(t)=0\in\mathbb{R}\end{cases}\quad\rightarrow \text{(تابع } f \text{ در } \pi \text{ پیوسته است.)}$$

$$\lim_{t\to2\pi^-} f(t)=\lim_{t\to2\pi^-}(0)=0\in\mathbb{R}\quad\rightarrow \text{(تابع } f \text{ در } 2\pi \text{ پیوستگی چپ دارد.)}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\pi^-} f'(t)=\lim\limits_{t\to\pi^-}\cos(t)=-1\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to\pi^+} f'(t)=\lim\limits_{t\to\pi^+}(0)=0\in\mathbb{R}\end{cases}$$

بنابراین f تابعی است متناوب با دوره تناوب 2π و بنا به محاسبات بالا دارای شرایط قضیه دیریکله. پس از کلاس C^1 قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است و در هر نقطه ای که در آنجا پیوسته باشد، سری فوریه وابسته به آن به خود تابع همگراست. چون در همه نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است، خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4i}\exp(it)-\frac{1}{4i}\exp(-it)+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{-\infty\\ p\neq 0}}^{+\infty}\frac{\exp(2ipt)}{1-4p^2}$$ (بسط f به سری فوریه مختلط)،

بسط f به سری فوریه حقیقی:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

(در تنظیم این سریها از نتایج برخی محاسبات انجام شده قبلی استفاده گردید.)

۳- در بند ۱ ثابت شد که $C_n(g)=\exp(-in\tau)C_n(f)$. چون در اینحالت $\tau=\pi$ است، لذا داریم:

$$\begin{aligned}C_n(g)&=\exp(-in\pi)C_n(f)\\&=(\cos\pi-i\sin\pi)^n C_n(f)\\&=(-1)^n C_n(f)\end{aligned}$$

چنانچه ضرایب فوریه حقیقی تابع g را با $a_n(g)$ و $b_n(g)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$C_1(g)=-C_1(f)=\frac{-1}{4i}$ یا $C_1(g)=\frac{i}{4}$. در نتیجه $b_1(g)=-1/2$ و $a_1(g)=0$. همچنین داریم:

(در اینحالت $\tau=\pi$ است و $p\neq 0$ و $p\neq -1$) $\quad C_{2p+1}(g)=\exp[-i(2p+1)\pi]C_{2p+1}(f)\quad\rightarrow$

چون

$$\exp[-i(2p+1)\pi]=\cos[(2p+1)\pi]-i\sin[(2p+1)\pi]=-1$$

لذا نتیجه میگیریم: $C_{2p+1}(g)=-C_{2p+1}(f)$ اگر $p\neq 0$ و $p\neq -1$.

بهمین ترتیب نیز خواهیم داشت: $C_{2p}(g)=-C_{2p}(f)$. در نتیجه بازای ($p\neq 0$) داریم: $a_{2p+1}(g)=0$ و $b_{2p+1}(g)=0$.

چون قبلاً معلوم گردید که $C_{2p+1}(f)$ برابر است با صفر ($p\neq 0, p\neq -1$) و $C_{2p}(f)=\frac{1}{\pi(1-4p^2)}$ ، ($p\in\mathbb{N}$). از اینرو نتیجه میگیریم: $C_{2p+1}(g)=0$ و $C_{2p}(g)=\frac{-1}{\pi(1-4p^2)}$. بنابراین با توجه به رابطه های

$$C_{2p+1}(g)=\frac{1}{2}\left[a_{2p+1}(g)-ib_{2p+1}(g)\right],$$

$$C_{2p}(g)=\frac{1}{2}\left[a_{2p}(g)-ib_{2p}(g)\right]$$

خواهیم داشت: $a_{2p+1}(g)=0$ و $b_{2p+1}(g)=0$ (با شرط $p\neq 0$). همچنین $a_{2p}(g)=2/[\pi(1-4p^2)]$ و $b_{2p}(g)=0$. اما رابطه مفروض $g(t)=f(t-\tau)$ نشان میدهد که در حقیقت تابع g انتقال یافته تابع f است. لذا g نیز بمانند f در شرایط قضیه دیریکله صدق نموده و همچون f در $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود. پس بسط سری فوریه وابسته به g در همه نقاط همگرای به $g(t)$ است و داریم:

$$g(t)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

تبصره مهم:

چنانچه در عمل معلوم گردد که منحنی نمایش تابع $f(t)$ به قسمی است که با انتقال مناسب محور عرضها میتوان این منحنی را به منحنی تابع زوج یا فرد (تابع $g_1(t)$) بدل نمود، در اینصورت با انجام این انتقال ابتدا بسط تابع g_1 را به سری فوریه تعیین نموده و سپس با استفاده از آن و فرمولی که از حل بند ۱ مسئله (۳) نتیجه شد بسط تابع f را به سری فوریه مشخص میسازیم.

مثال: همان تابع مسئله (۳) را با تمام خصوصیاتش در نظر میگیریم. چنانچه در شکل قبلی محور عرضها را به نقطه $(-\pi/2, 0)$ انتقال دهیم، منحنی قبلی به منحنی تابع زوجی در دستگاه مختصات جدید تبدیل میگردد که بسط آن به سری فوریه، سری فوریه ای کسینوسی است. باین ترتیب خواهیم داشت:

$$f(t) = g_1(t + \pi/2),$$
$$g_1(t) = f(t - \pi/2).$$

بعلاوه داریم:

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \pi/2[\\ -\cos(t) & t \in [\pi/2, 3\pi/2[\\ 0 & t \in [3\pi/2, 2\pi[\end{cases}$$

($n \in Z$ و $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$) که از آن نتیجه میشود:

$$\begin{aligned} C_n(g_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(-int)\, g_1(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(-int)\, [-\cos(t)]\, dt \\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(-int) \left[\frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}\right] dt \\ &= \frac{-1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \{\exp[i(1-n)t] + \exp[-i(1+n)t]\}\, dt \end{aligned}$$

آنوقت داریم:

$$\begin{aligned} C_1(g_1) &= \frac{-1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} [1 + \exp(-2it)]\, dt \\ &= \frac{-1}{4\pi}\left[t - \frac{\exp(-2it)}{2i}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8i\pi}[\cos(2t) - i\sin(2t)]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

بهمین ترتیب نیز $C_{-1}(g_1)$ را محاسبه نموده و بدست می آوریم: $C_{-1}(g_1) = -1/4$.

برای محاسبه $C_n(g_1)$ دو حالت متمایز $n = 2p + 1$ و $n = 2p$ را در نظر میگیریم:

$$C_{2p+1}(g_1)=\frac{-1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}[\exp(-2i\,p\,t)+\exp(-i(2p+2)t)]dt$$
$$=\frac{1}{8\pi i}\left[\frac{\exp(-2i\,p\,t)}{p}+\frac{\exp[-i(2p+2)t]}{p+1}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

این محاسبه بآسانی انجام میگردد و نتیجه میگیریم: $C_{2p+1}(g_1)=0$. در مورد $C_{2p}(g_1)$ نیز داریم: ($p\neq 0$)

$$C_{2p}(g_1)=\frac{-1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\{\exp[i(1-2p)t]+\exp[-i(1+2p)t]\}dt$$
$$=\frac{-1}{4\pi}\left[\frac{\exp[i(1-2p)t]}{i(1-2p)}+\frac{\exp[-i(1+2p)t]}{-i(1+2p)}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$
$$=\frac{-1}{4\pi i}\left[\frac{\cos[(1-2p)t]+i\sin[(1-2p)t]}{1-2p}+\frac{\cos[(1+2p)t]-i\sin[(1+2p)t]}{-(1+2p)}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$
$$=\frac{-1}{4\pi i}\left[\frac{i\{\sin[(1-2p)3\pi/2]-\sin[(1-2p)\pi/2]\}}{1-2p}+\frac{-i\{\sin[(1+2p)3\pi/2]-\sin[(1+2p)\pi/2]\}}{-(1+2p)}\right]$$
$$=\frac{-1}{4\pi i}\left[\frac{2i\cos[(1-2p)\pi]\,\sin[(1-2p)\pi/2]}{1-2p}+\frac{-2i\cos[(1+2p)\pi]\sin[(1+2p)\pi/2]}{-(1+2p)}\right]$$
$$=\frac{-1}{4\pi i}\left[\frac{2i\sin[(2p-1)\pi/2]}{1-2p}+\frac{-2i\sin[(1+2p)\pi/2]}{-(1+2p)}\right]$$
$$=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{p+1}}{1-2p}+\frac{(-1)^p}{-(1+2p)}\right]$$
$$=\frac{(-1)^p}{\pi(1-4p^2)}$$

داریم:

$$C_0(g_1)=a_0(g_1)\quad\rightarrow\quad\frac{-1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(t)\,dt=a_0(g_1)\quad\rightarrow\quad a_0(g_1)=\frac{1}{\pi}$$

و

$$C_1=\frac{a_1-i\,b_i}{2}\quad\rightarrow\quad-\frac{1}{4}=\frac{a_1-i\,b_i}{2}\quad\rightarrow\quad a_1=\frac{-1}{2},\ b_1=0$$

و همچنین

$$C_{2p}(g_1)=\frac{a_{2p}(g_1)-i\,b_{2p}(g_1)}{2}\quad\rightarrow\quad C_{2p}(g_1)=\frac{(-1)^p\times 2}{\pi(1-4p^2)},\ \ b_{2p}(g_1)=0$$

لذا بسط g_1 به سری فوریه حقیقی عبارتست از:

$$g_1=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{2(-1)^p\cos(2pt)}{\pi(1-4p^2)}$$

توجه: از بسط فوق نیز میتوان بسط تابع f از مسئله (۳) را به سری فوریه حقیقی بدست آورد. داشتیم: $g(t)=f(t-\pi)$ و $g_1(t)=f(t-\pi/2)$ یا $g_1(t-\pi/2)=f(t-\pi)$. که در نتیجه خواهیم داشت: $g_1(t+\pi/2)=f(t)$. بنابراین با داشتن بسط $g_1(t)$، بسطهای $f(t)$ و $g(t)$ را میتوان بصورت زیر تعیین نمود.

$$f(t)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos(t+\pi/2)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p\cos[2p(t+\pi/2)]}{1-4p^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(-1)^p\cos(2pt)}{1-4p^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

و

$$g(t)=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos(t-\pi/2)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p\cos[2p(t-\pi/2)]}{1-4p^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(-1)^p\cos(2pt)}{1-4p^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

۴- (الف): برای هر عضو $\Re$ ، داریم: $\varphi(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$ و $\psi(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$ در روابط مفروض بالا بجای $f(t)$ و $f(-t)$ بسطهای آنها را قرار داده، نتیجه میگیریم:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

بهمین ترتیب نیز $\psi(t)$ را محاسبه می‌نماییم $\psi(t)=\frac{1}{2}\sin(t)$.

(ب) به ترتیب زیر $f(t)$ و بکمک آن $f(t-\pi)$ یا $g(t)$ را مشخص میسازیم. ابتدا توجه میکنیم که:

$$\varphi(t)+\psi(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]+\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]=f(t)$$

در نتیجه $\varphi(t-\pi)+\psi(t-\pi)=f(t-\pi)$ یا $\varphi(t-\pi)+\psi(t-\pi)=g(t)$. با توجه به مقادیری که در بالا برای $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ بدست آمده است، نتیجه میگردد:

$$\varphi(t-\pi)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos[2p(t-\pi)]}{1-4p^2}=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}=\varphi(t)$$

$$\psi(t-\pi)=\frac{1}{2}\sin(t-\pi)=-\frac{1}{2}\sin(t)=-\psi(t)$$

از مجموع روابط بالا خواهیم داشت: $\varphi(t-\pi)+\psi(t-\pi)=\varphi(t)-\psi(t)$ و $g(t)=\varphi(t)-\psi(t)$. از جمع رابطه اخیر و $\varphi(t)+\psi(t)=f(t)$ نیز نتیجه میگیریم: $\varphi(t)=[f(t)+g(t)]/2$.

(پ)- ابتدا بکمک رابطه مفروض $f(t-\pi)=g(t)$ و رابطه $\varphi(t)=[f(t)+g(t)]/2$، صحت تساوی $\varphi(t)=|\psi(t)|$ را در بازه $[0,2\pi]$ که طول آن بقدر فاصله تناوب هر یک از توابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ است، مورد بررسی قرار میدهیم. باین منظور بازه $[0,2\pi]$ را در دو قسمت $[0,\pi]$ و $[\pi,2\pi]$ در نظر گرفته و در هر قسمت درستی تساوی مورد نظر را تحقیق مینمائیم.

۱- بازه $[0,\pi]$: میدانیم که بر این بازه $f(t)$ برابر است با $\sin(t)$. همچنین داریم: $t\in[0,\pi]\to(t-\pi)\in[-\pi,0]$ بعلاوه میدانیم که $f(t)$ بر بازه $[-\pi,0]$ برابر با صفر است، چون $t-\pi$ نیز به بازه $[-\pi,0]$ تعلق دارد، لذا $f(t-\pi)$ یا $g(t)$ هم بر همین بازه صفر میگردد. بنابراین مقدار $\varphi(t)$ بر بازه $[0,\pi]$ برابر خواهد بود با $\varphi(t)=\frac{1}{2}[\sin(t)+0]$ یا $\varphi(t)=\frac{1}{2}|\sin(t)|$ با شرط $t\geq 0$. در نتیجه تساوی $\varphi(t)=|\psi(t)|$ برقرار است.

۲- بازه $[\pi,2\pi]$: بر این بازه $f(t)$ برابر با صفر است(بنا به فرض). واضح است که $t\in[\pi,2\pi]$ بمعنای $(t-\pi)\in[0,\pi]$ است. اما میدانیم که بازای هر عضو از بازه $[0,\pi]$ مقدار f برابر با $\sin(t)$ است. پس مقدار $f(t-\pi)$ که $t-\pi$ نیز عضوی از $[0,\pi]$ است، برابر خواهد بود با $\sin(t)$. یعنی مقدار $g(t)$ بر بازه $[\pi,2\pi]$ برابر با $\sin(t)$ است ($f(t-\pi)=g(t)$). بنابراین خواهیم داشت: $\varphi(t)=\frac{1}{2}|0+\sin(t)|$ یا $\varphi(t)=\frac{1}{2}|\sin(t)|$ با شرط $t\leq 0$. این نتیجه نیز برقراری تساوی مورد بحث را معلوم میدارد. با توجه به اینکه توابع f ، φ و ψ توابعی متناوب با دروه تناوب 2π هستند، معلوم میگردد که تساوی $\varphi(t)=|\psi(t)|$ بازای جمیع مقادیر t ، $(t\in\mathbb{R})$ برقرار است.

قسمت پایانی مسئله: با استفاده از نتیجه بدست آمده از حل قسمت الف از بند ۴ ، خواهیم داشت: $(t\in\mathbb{R})$

$$|\sin(t)|=2|\psi(t)|=2\varphi(t)=2\left[\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}\right]$$

توجه: دوره تناوب تابع $t\to|\sin(t)|$ که برابر با π است، توجیه قابل قبولی است بر این نکته که بسط $|\sin(t)|$ می باید تنها از هارمونیکهای زوج تشکیل شود، زیرا تنها همین هارمونیکهای زوج هستند که با تبدیل $t\to -t$ تغییر نمیکنند.

مسئله ۴: سری فوریه و سری عددی

۱- سیگنالی را مورد نظر قرار میدهیم که با تابع حقیقی و متناوب f با دوره تناوب 2π ، بصورت زیر مشخص گردیده است:

$$f(t)=\sin(t),\quad t\in[0,\pi]$$
$$f(t)=0,\quad t\in]\pi,2\pi[$$

الف- با تغییر t در بازه $[-3\pi,3\pi]$، منحنی نمایش تابع f را رسم کنید.

ب- ضرایب فوریه حقیقی وابسته به تابع f را محاسبه کنید.

پ- نشان دهید که در هر نقطه $\mathbb{R}$ مجموع سری فوریه وابسته به f برابر است با $f(t)$ و بسط تابع f را به سری فوریه بنویسید.

۲- با انتخاب مقدار خاصی برای t، نشان دهید که رابطه $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{1-4p^2}$ برقرار است.

۳- با استفاده از فرمول پارسوال، درستی تساوی زیر را معلوم نمائید.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

حل:

۱- از اینکه تابع مفروض با تابع داده شده در مسئله ۳ یکی است و به همه سوالات مطرح شده در قسمتهای الف، ب و پ در مسئله ۳ پاسخ داده شده است. از اینرو خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

واضح است که بدون استفاده از سری فوریه مختلط وابسته به $f(t)$ نیز میتوان با محاسبه مستقیم a_0، a_n و b_n به رابطه فوق دست یافت:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\left[(n+1)t\right]-\sin\left[(n-1)t\right]\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-\cos[(n+1)t]}{n+1}+\frac{\cos[(n-1)t]}{n-1}\right\}_0^{\pi}\qquad(n\in\mathbb{N},\quad n\neq 1,-1)$$

بسادگی میتوان به نتایج زیر رسید:

$$a_{2p}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1-4p^2},\qquad(n=2p)$$

$$a_{2p+1}=0\qquad(n=2p+1)$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\cos[(n-1)t]-\cos[(n+1)t]\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin[(n-1)t]}{n-1}-\frac{\sin[(n+1)t]}{n+1}\right\}_0^{\pi}=0\qquad(n\neq -1,1)$$

($b_0=0$ بنا به قرارداد) و همچنین نشان داد:

$$a_1=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_1=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,dt=\frac{1}{2}$$

چون در مسئله ۳ اثبات گردید که بازای جمیع مقادیر t از $\mathbb{R}$، سری فوریه وابسته به f همگرای به خود تابع است، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{2}{\pi}\sum_{P=1}^{+\infty}\frac{\cos(2PT)}{1-4P^2}$$

۲- چون با انتخاب $t=\pi/2$ نیز سری فوریه وابسته به f به خود تابع همگراست. لذا داریم:

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2})+\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(p\pi)}{1-4p^2}$$

$$1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^p}{1-4p^2}$$

زیرا $f(\pi/2)$ با $\sin(\pi/2)$ با یک برابر است و $\cos(p\pi)$ نیز با $(-1)^p$ مساویست. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{1-4p^2}$$

۳- برطبق فرمول پارسوال داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^2(t)\,dt=a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

با قرار دادن مقادیر a_0، a_n و b_n در فرمول بالا و محاسبه انتگرال طرف اول خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt=\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(1-4p^2)^2}$$

چون برای هر $p\in\mathbb{N}^*$ داریم:

$$\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,dt=\frac{\pi}{2},\quad a_0=\frac{1}{\pi},\quad b_1=\frac{1}{2},\quad a_{2p+1}=b_{2p+1}=b_{2p}=0,\quad a_{2p}=\frac{2}{\pi(1-4p^2)}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در رابطه پارسوال، تساوی مطلوب نتیجه میگردد:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(4p^2-1\right)^2}$$

<u>تبصره</u>: از نتایج بدست آمده از بندهای ۲ و ۳ این مسئله میتوان مقادیر π و π^2 را با تقریبهای بقدر کافی کوچک زیر محاسبه نمود:

$$\pi=2+4\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{1-4p^2},$$

$$\pi^2=8+16\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1-4p^2\right)^2}$$

مسئله ۵: T عددی مثبت، حقیقی، معلوم و f تابعی مختلط با متغیر حقیقی t، متناوب با دوره تناوب T که بصورت زیر تعریف گردیده است:

$$f(t)=(t+k)\exp(2i\lambda t)\qquad 0\le t<T$$

در اینجا $k\in\mathbb{Z}$ عددی است مختلط و ثابت و λ عددیست حقیقی مخالف با $k\pi/T$.

۱- عدد ثابت k را بر حسب T و λ چنان تعیین کنید که تابع f در رابطه $f(T-0)=f(0)$ صدق نماید. در حل بقیه حالات، علاوه بر مقدار k که در اینجا بدست میآوریم، میپذیریم که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و تساوی $f(T)=f(T-0)$ برقرار است.

۲- ضرایب فوریه مختلط وابسته به f را محاسبه کنید.

۳- با قبول اینکه سری فوریه وابسته به f در همه نقاط $\mathbb{R}$، همگرای به f است، نشان دهید که اگر $t=0$ و $2\lambda=\omega x$ باشد ($\omega=2\pi/T$)، برای $x\in]0,1[$ خواهیم داشت: $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$

حل:

۱- داریم $f(0)=k$ و $f(T-0)=\lim_{t\to T^-} f(t)=\lim_{t\to T^-}[(t+k)\exp(2i\lambda T)]=(T+k)\exp(2i\lambda T)$.

از تساوی $f(T-0)=f(0)$ نتیجه میگیریم: $(T+k)\exp(2i\lambda T)=k$ یا

$$k=\frac{\exp(2i\lambda T)}{1-\exp(2i\lambda T)}T$$
$$=\frac{\exp(2i\lambda T)}{\exp(i\lambda T)[\exp(-i\lambda T)-\exp(i\lambda T)]}T$$

اما با توجه رابطه $\sin(\lambda T)=[\exp(i\lambda T)-\exp(-i\lambda T)]/(2i)$، تساوی فوق را ساده کرده و خواهیم داشت: $k=iT\exp(i\lambda T)/(2\sin(\lambda T))$. پیداست وقتی k وجود خواهد داشت که $\sin(\lambda T)\neq 0$ یا $\lambda T\neq k\pi$ یا $\lambda\neq k\pi/T$ باشد. این شرط نیز بر طبق فرض مسئله برقرار است. پس k همواره وجود دارد.

۲- برای هر n در $\mathbb{Z}$ داریم:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-in\omega t)\,dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T (t+k)\exp[i(2\lambda-n\omega)t]\,dt$$

انتگرال بالا را به روش جزء به جزء محاسبه میکنیم. با فرض $u=t+k$ و $dv=\exp[i(2\lambda-n\omega)t]dt$ خواهیم داشت:

$$C_n=\frac{1}{T}\left\{\left[(t+k)\frac{\exp[i(2\lambda-n\omega)t]}{i(2\lambda-n\omega)}\right]_0^T-\int_0^T\frac{\exp[i(2\lambda-n\omega)t]}{i(2\lambda-n\omega)}dt\right\}$$
$$=\frac{1}{i(2\lambda-n\omega)T}\left\{[f(t)\exp(-in\omega t)]_0^T-\int_0^T\exp[i(2\lambda-n\omega)t]\,dt\right\}$$
$$=\frac{1}{i(2\lambda-n\omega)T}\left\{f(T)\exp(-in\omega T)-f(0)-\left(\frac{\exp[i(2\lambda-n\omega)t]}{i(2\lambda-n\omega)}\right)_0^T\right\}$$

اما از تساویهای $f(T-0)=f(0)$ و $f(T)=f(T-0)$ نتیجه میشود $f(T)=f(0)$. همچنین داریم: $\exp(-in\omega T)=\exp(-i2\pi n)=1$ و $\exp(i\lambda T)\exp(-i\lambda T)=1$. بنابراین خواهیم داشت:

$$C_n = \frac{1-\exp(2i\lambda T)}{i^2 T(2\lambda - n\omega)^2}$$
$$= \frac{\exp(i\lambda T)[\exp(i\lambda T)-\exp(-i\lambda T)]}{T(2\lambda - n\omega)^2}$$
$$= \frac{\exp(i\lambda T)[2i\sin(\lambda T)]}{T(2\lambda - n\omega)^2}$$

۳- از اینکه بر طبق فرض مسئله، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است، داریم:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(i\, n\,\omega t)$$
$$= \frac{2i}{T}\exp(i\lambda T)\sin(\lambda T)\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\,n\,\omega t)}{(2\lambda - n\omega)^2}$$

اما بر طبق داده های مسئله ($t=0$ و $2\lambda = \omega x$ و همچنین، $\lambda \neq k\pi/T$) خواهیم داشت:

$$f(0) = k,$$
$$\lambda T = \frac{\omega x}{2} T = \pi x, \quad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

از اینکه $\lambda = x\pi/T$ و $\lambda \neq k\,\pi/T$ است، نتیجه میشود که $x \neq k$. از این به بعد در محاسباتی که انجام میدهیم این اصل را میپذیریم که x عدد مختلط نیست. اگر در رابطه $k = \dfrac{iT\exp(i\lambda T)}{2\sin(\lambda T)}$ بجای λ مساویش $\pi\, x/T$ را قرار دهیم، خواهیم داشت: $k = \dfrac{iT\exp(i\pi x)}{2\sin(i\pi x)}$. از تساوی $k = f(0)$ نتیجه میشود:

$$\frac{iT\exp(i\pi x)}{2\sin(\pi x)} = \frac{2i}{T}\exp(i\pi x)\sin(\pi x)\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x\omega - n\omega)^2}$$

و لذا داریم: ($x \in]0,1[$)

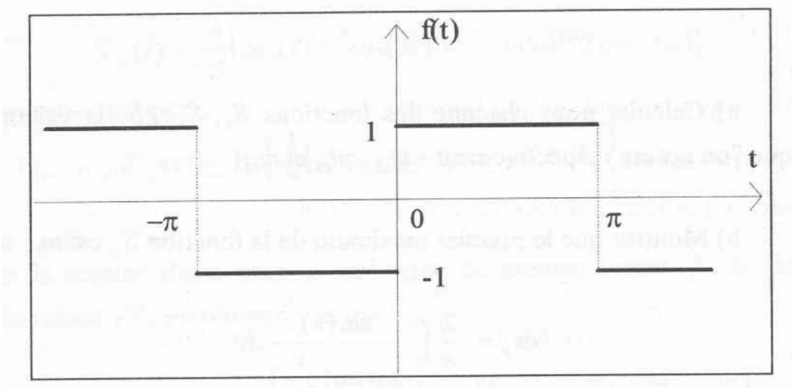
$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-n)^2} = \frac{iT\exp(i\pi x)}{2\sin(\pi x)}\,\frac{T\omega^2}{2i\exp(i\pi x)\sin(\pi x)}$$
$$= \frac{T^2\omega^2}{4\sin^2(\pi x)}$$
$$= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$$

مسئله ۶ : پدیده گیبس

رفتار سری فوریه وابسته به یک سیگنال متناوب و ناپیوسته، در همسایگی یک نقطه ناپیوستگی از نوع اول. بررسی مثال زیر امکان آنرا بوجود میآورد که از مشکل مدلسازی یک سیگنال متناوب ناپیوسته به صورت مجموعی از توابع سینوسی پیوسته، برداشت مناسبی نتیجه شود. این مثال پدیده گیبس را در مورد اشکالی که برای مجموعهای جزئی از سری فوریه، در همگرایی بسوی $\frac{1}{2}\left[f(t_0+0)+f(t_0-0)\right]$ در یک نقطه ناپیوستگی t_0 وجود دارد و یا اشکالی که در نقطه t، در همسایگی t_0 برای همگرایی به $f(t)$ موجود است، به روشنی نشان میدهد.

مثال-

۱- سیگنالی متناوب با دوره تناوب 2π را در نظر میگیریم که در شکل ۱-۱۷ منحنی آن نمایش داده شده است.



شکل ۱-۱۷: شکل مسئله ۶

ضرایب فوریه وابسته به این سیگنال را محاسبه کنید. با یادآوری اینکه تابع تعریف کننده این سیگنال در شرایط قضیه دیریکله صدق میکند، نشان دهید که برای هر t عضو $]0,\pi[$، تساوی $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin[(2k-1)t]}{2k-1}=1$ برقرار است و تابع مزبور برای $t=0$ در قضیه دیریکله صدق میکند.

۲- الف- اگر در این قسمت از سوال، مجموعهای متناهی سری فوریه چنین باشد: $S_p=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\sin[(2k-1)t]}{2k-1}$

. با محاسبه مجموع یک دنباله هندسی به قدر نسبت $\exp(2it)$ ، نشان دهید که $S'_p(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2pt)}{\sin(t)}$ و از آن نتیجه بگیرید که $S_p=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sin(2pu)}{\sin(u)}du$. تغییرات تابع $t\to S_p(t)$ را وقتیکه t در بازه $[0,\pi[$ تغییر میکند، بررسی نمایید.

ب- جدول تغییرات هر یک از توابع $t\to S_2(t)$ و $t\to S_3(t)$ را در بازه $[0,\pi[$ تشکیل داده و منحنی های مربوط را رسم نمایید.

-۳

الف- برای هر یک از توابع S_2، S_3 و S_6 مقدار نخستین ماکزیمم را به ترتیب m_{12}، m_{13} و m_{16} مینامیم، محاسبه کنید.

ب- نشان دهید که نخستین ماکزیمم S_p یعنی m_{1p} برابر است با: dv $.m_{1p} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{2p\sin(\frac{v}{2p})}dv$.

پ- اگر بپذیریم که $\lim_{p\to+\infty} m_{1p} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(v)}{v}dv \approx 1.179$ است. منحنی های مربوط به مجموعهای متناهی در همسایگی $t=0$ را برای $t>0$ رسم نموده و کیفیت پدیده گیبس را بررسی کنید.

حل:

۱- چون این مسئله را میتوان شکل خاصی از مسئله ۱ دانست که با $t_0 = 0$ و $E=1$ از آن نتیجه گردیده، لذا بازای تغییرات t در بازه $]0,\pi[$ خواهیم داشت: $f(t) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin[(2k-1)t]}{2k-1}$، (که از رابطه اثبات شده در بندهای ۲ و ۴ از مسئله ۱ نتیجه میگردد) تابع مربوط به شکل ۱-۱۷ عبارتست از:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & t = 0,\pi,2\pi \\ f(t) = 1 & t \in]0,\pi[\\ f(t) = -1 & t \in]\pi,2\pi[\end{cases}$$

با دروه تناوب 2π . قضیه دیریکله در $t=0$ در صورتی متحقق میگردد که داشته باشیم: $f(0) = [f(0^+) + f(0^-)]/2$، اما داریم: $f(0) = 0$ ، $f(0^+) = 1$ و $f(0^-) = -1$ که در نتیجه خواهیم داشت: $0 = [(+1) + (-1)]/2 = 0$ یعنی رابطه دیریکله در $t=0$ برقرار است.

-۲

الف- مجموع جزئی سری فوریه در مورد تابع مفروض تا جمله p ام عبارتست از

$$S_p(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\sin[(2k-1)t]}{2k-1}$$
$$= \frac{4}{\pi}\left\{\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots + \frac{\sin[(2p-1)t]}{2p-1}\right\}$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی فوق بدست می آوریم:

$$S_p'(t) = \frac{4}{\pi}\{\cos(t) + \cos(3t) + \cos(5t) + \ldots + \cos[(2p-1)t]\}$$

از طرفی میدانیم: $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$، یعنی $\cos(t)$ با مقدار حقیقی $\exp(it)$ مساویست. بنابراین، خواهیم داشت: (علامت Re نشانه قسمت حقیقی یک عدد مختلط است)

$$S_p'(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{4}{\pi}\left(e^{it} + e^{3it} + e^{5it} + \ldots + e^{(2p-1)it}\right)\right]$$

اما داخل پرانتز مجموع جمله های یک تصاعد هندسی است با قدر نسبت $\exp(2it)$، که این مجموع متناهی (تعداد جمله های تصاعد p است) برابر است با:

$$
\begin{aligned}
e^{it}+e^{3it}+\ldots+e^{(2p-1)it} &= e^{it}\frac{[\exp(2it)]^{p}-1}{\exp(2it)-1} \\
&= e^{it}\frac{e^{ipt}(e^{ipt}-e^{-ipt})}{e^{it}(e^{it}-e^{-it})} \\
&= e^{it}\frac{2i\sin(pt)}{2i\sin(t)} \\
&= [\cos(pt)+i\sin(pt)]\frac{\sin(pt)}{\sin(t)}
\end{aligned}
$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(e^{it}+e^{3it}+\ldots+e^{(2p-1)it}) &= \frac{\cos(pt)\sin(pt)}{\sin(t)} \\
&= \frac{\sin(2pt)}{2\sin(t)}
\end{aligned}
$$

که در نتیجه بدست میآوریم:

$$
S'_p(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2pt)}{\sin(t)},
$$

$$
S_p(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sin(2pu)}{\sin(u)}du
$$

در مورد تغییرات تابع $S_p(t)$ توجه میکنیم که وقتی $S'_p=0$ باشد، آنوقت $\sin(2pt)=0$ و در نتیجه:

$$2pt=k\pi, \qquad k=1,2,3,\ldots,2p-1$$

زیرا در کسر مشتق t نباید صفر شود و چون داریم $t\in[0,\pi[$ پس k نمیتواند $2p$ یا بیشتر باشد. در نتیجه جدول تغییرات $S_p(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

t	0		$\frac{\pi}{2p}$		$\frac{\pi}{p}$		$\frac{3\pi}{2p}$	$\cdots$	$\frac{(2p-1)\pi}{2p}$		π
S'_p		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$	0	$-$	
S_p	0	$\uparrow$	max	$\downarrow$		$\uparrow$		$\cdots$		$\downarrow$	0

ب- حالات خاص: $p=2$ و $p=3$

بازای $p=2$ داریم:

$$
S_2(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(t)+\frac{1}{3}\sin(3t)\right],
$$

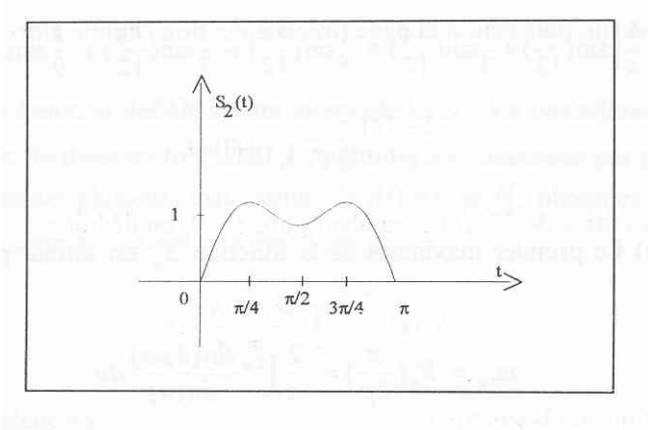
$$
S'_2(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(4t)}{\sin(t)}
$$

و لذا

$$
S'_2=0, \qquad t=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}
$$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
$S_2'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$S_2(t)$	0	$\uparrow$	m_{12}	$\downarrow$	$8/(3\pi)$	$\uparrow$	$8\sqrt{2}/(3\pi)$	$\downarrow$	0

ماکزیمم اول S_2 : $m_{12}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3\pi}\approx 1.200$



شکل ۱-۱۸: تابع $S_2(t)$

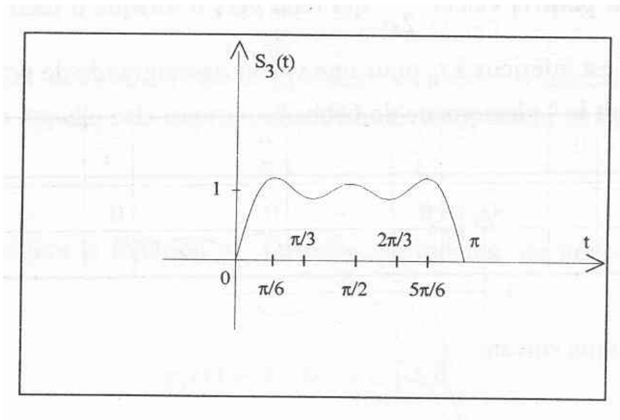
منحنی تغییرات S_2 بر حسب t در شکل ۱-۱۸ نشان داده شده است. در مورد S_3 داریم:

$$p=3 \rightarrow S_3(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(t)+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}\right], \qquad S_3'(t)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(6t)}{\sin(t)}$$

جدول تغییرات این تابع بصورت زیر بوده و منحنی تغییرات آن در شکل ۱-۱۹ نشان داده شده است.

t	0		$\pi/6$		$\pi/3$		$\pi/2$		$2\pi/3$		$5\pi/6$		π
$S_3'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$S_3(t)$	0	$\uparrow$	m_{13}	$\downarrow$	$\dfrac{8\sqrt{3}}{5\pi}$	$\uparrow$	$\dfrac{52}{15\pi}$	$\downarrow$	$\dfrac{8\sqrt{3}}{5\pi}$	$\uparrow$	$\dfrac{56}{15\pi}$	$\downarrow$	0

ماکزیمم اول S_3 : $m_{13}=\dfrac{56}{15\pi}\approx 1.198$



شکل ۱-۱۹: تابع $S_3(t)$

-۳

الف- مقادیر m_{12} و m_{13} در قسمت قبل محاسبه شده اند. بـرای $S_6(t)$ داریـم $S_6'(t)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin(12t)}{\sin(t)}$ و بـرای $S_6'(t)=0$ بدست میآوریم $t=\pi/12$. از طرفی داریم:

$$S_6(\frac{\pi}{12})=\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{1}{7}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)+\frac{1}{11}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

یا

$$S_6(\frac{\pi}{12})=\frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{5}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{7}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{9}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{11}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

با توجـه بـه روابـط $\sin(\pi/12)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ و $\cos(\pi/12)=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$، مقـدار تقریبـی اولـین ماکزیمم S_6 برابر خواهد بود با $m_{16}\approx 1.181$.

ب- میدانیم $S_p'(t)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin(2pt)}{\sin(t)}$. اولـین ریشـه معادلـه $S_p'(t)=0$ برابـر $t=\dfrac{\pi}{2p}$ خواهـد بـود. بنـابراین خواهیم داشت: (فرمول نتیجه شده از قسمت الف از بند ۲)

$$m_{1p}=S_p(\frac{\pi}{2p})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/(2p)}\frac{\sin(2pu)}{\sin(u)}du$$

که با تغییر متغیر $2pu=v$ در انتگرال بالا، نتیجه میگیریم:

$$m_{1p}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(v)}{2p\sin(\frac{v}{2p})}dv$$

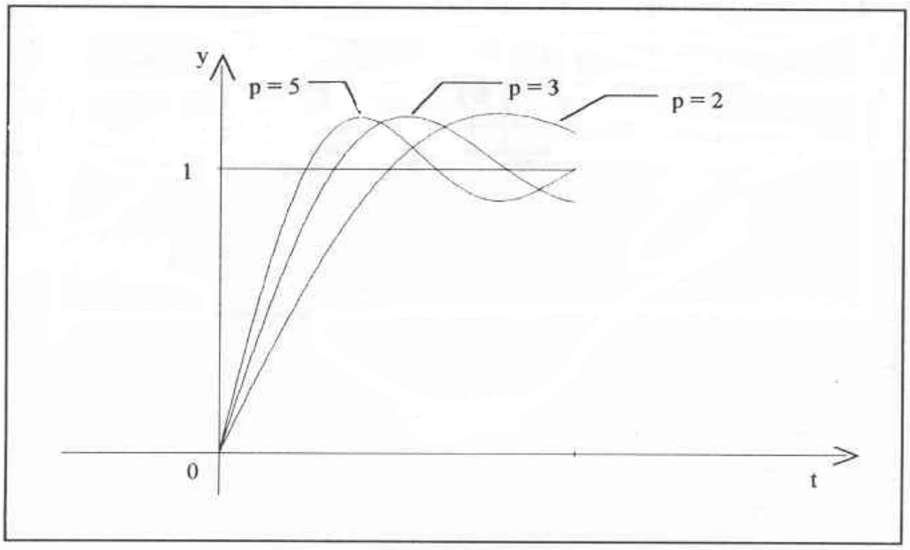
پ- اگر p به ∞ میل کند، داریم:

$$\lim_{p\to+\infty}\left[2p\sin\left(\frac{v}{2p}\right)\right]=\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{v}{2p}}{\frac{v}{2p}}\right)\times v=1\times v=v$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{p\to+\infty}m_{1p}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(v)}{v}dv\approx 1.179$$

محاسبه تقریبی انتگرال معین $\int_0^{\pi}[\sin(v)/v]dv$ را با استفاده از بسط مک لـورن $\sin(v)$ انجـام میـدهیم. مقـدار 1.179 که برای حد m_{1p} نتیجه گردید با عدد یک که از طریق رابطه دیریکله در هر یـک از نقـاط تـابع مفـروض (حتی نقاط بسیار نزدیک به نقطه $t=0$) در بازه $]0,\pi[$ بدست میآید، تفاوت دارد. این موضوع معرف وجود پدیده گیبس در چنین توابعی است. این پدیده در شکل ۱-۲۰ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۰: پدیده گیبس

مسئله ۷- تابع f را که بصورت $f(t)=t$ روی $t\in[0,1]$ تعریف شده در نظر میگیریم.

۱- تابع g_1 تابعی است متناوب با دوره تناوب $T_1=3$ و با تعریف $g_1(t)=t$ روی $t\in[0,3[$.

الف- منحنی نمایش تابع g_1 را وقتیکه t در بازه $[-3,6]$ تغییر میکند، رسم نمایید.

ب- ضرایب فوریه وابسته به g_1 را تعیین نموده و نشان دهید که در هر نقطه که تابع g_1 در آنجا پیوسته است، سری فوریه وابسته به g_1 همگرا به g_1 است.

پ- از مطالب فوق، بسط تابع f را به یک سری مثلثاتی در بازه $]0,1[$ نتیجه بگیرید. این بسط را بسط ناصحیح یا بسط ناخالص f روی این بازه مینامیم.

۲- تابع فرد g_2 متناوب با دوره تناوب $T_2=2$ را که بصورت $g_2(t)$ روی $t\in[0,1[$ تعریف شده است، در نظر بگیرید.

الف- منحنی تابع را در بازه $[-3,3]$ رسم نمایید.

ب- ضرایب فوریه وابسته به g_2 را محاسبه نموده و نشان دهید در هر نقطه ایکه g_2 در آنجا پیوسته است، سری فوریه وابسته به g_2 به خود تابع همگرا میگردد.

پ- از مطالب قبل، بسط f را به سری مثلثاتی سینوسی بر بازه $]0,1[$ نتیجه بگیرید.

۳- تابع متناوب با دوره تناوب $T_3=2$ و زوج g_3 را که بصورت $g_3(t)=t$ روی $t\in[0,1[$ تعریف شده مفروض است.

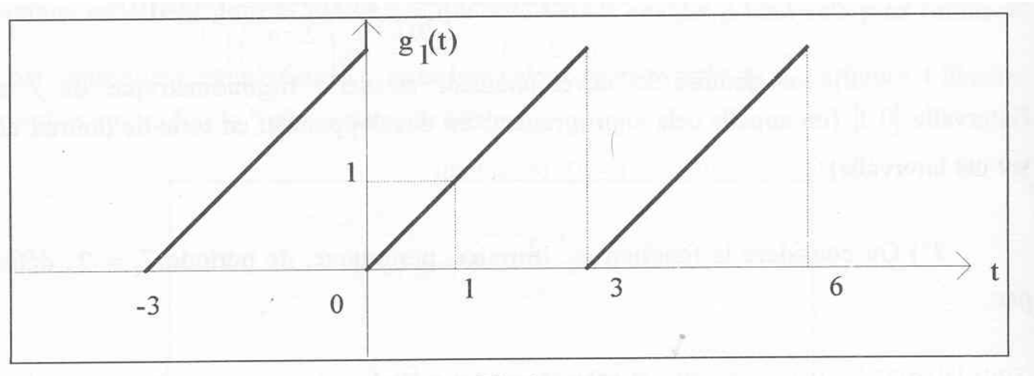
الف- منحنی نمایش آنرا در بازه $[-4,4]$ رسم نمایید.

ب- ضرایب فوریه وابسته به g_3 را محاسبه نموده و نشان دهید که در نقاطیکه g_3 در آن نقاط پیوسته است، سری مزبور همگرا به $g_3(t)$ خواهد بود.

پ- از این موضوعات بسط $f(t)$ را به سری مثلثاتی کسینوسی بر بازه $]0,1[$ نتیجه بگیرید.

حل:

۱- الف- در شکل ۱-۲۱ نمودار تابع g_1 در فاصله $[-3,6]$ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۱: منحنی تغییرات g_1

ب- محاسبه ضرایب فوریه وابسته به g_1.

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T g_1(t)\,dt=\frac{1}{3}\int_0^3 t dt=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 t\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{3t}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^3-\frac{1}{n\pi}\int_0^3\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt$$

$$=\frac{1}{n\pi}\frac{3}{2n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^3$$

$$=0$$

لذا برای $n\in \mathbb{N}^*$ و $\omega=\dfrac{2\pi}{T_1}=\dfrac{2\pi}{3}$ مقدار a_n برابر صفر است. همچنین برای $n\notin \mathbb{N}^*$ داریم:

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 t\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}\left[-t\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^3+\frac{1}{n\pi}\int_0^3\cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)dt$$

$$=-\frac{3}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\frac{3}{2n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)\right]_0^3=-\frac{3}{n\pi}$$

برای اینکه معلوم گردد که تابع g_1 در نقاطیکه پیوسته است به $g_1(t)$ همگراست، باید مشخص شود که از g_1 کلاس C^1 قطعه ای بر $\mathbb{R}$ است. به این منظور بازه $]0,3[$ را در نظر میگیریم. پیداست که بر این بازه، تابع g_1 معین پیوسته و مشتق پذیر بوده و مشتق آن نیز پیوسته است (زیرا بر این بازه $g_1(t)$ برابر با t است). در مورد نقاط صفر و سه نیز داریم:

$$\lim_{t\to 0^+} g_1(t)=\lim_{t\to 0^+} t=0=g_1(0)$$

لذا g_1 در سمت راست صفر پیوستگی دارد. همچنین

$$\lim_{t\to 3^-} g_1(t)=\lim_{t\to 3^-} t=3$$

و لذا حد g_1 در سمت چپ ۳ در $\mathbb{R}$ دارد. در بازه $]0,3[$، g_1' برابر با یک بوده و داریم:

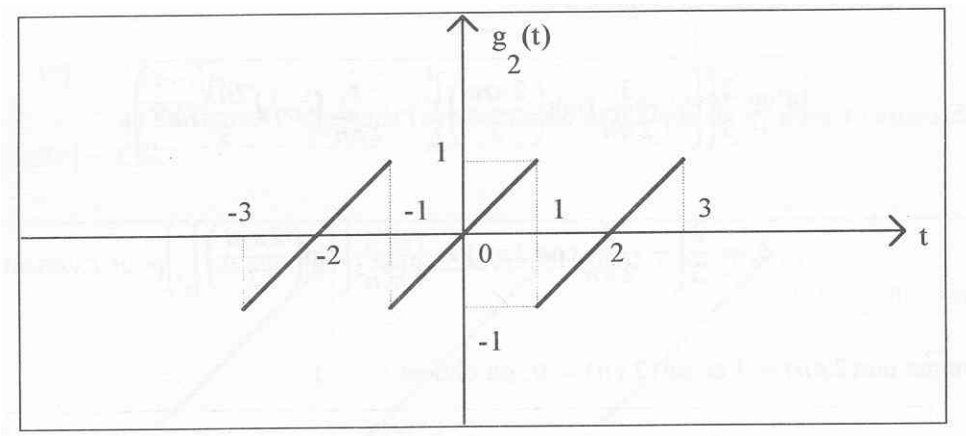
$$\lim_{t\to 3^-} g_1'(t)=\lim_{t\to 3^-} 1=1\in\Re$$

بررسی وضع مشتق g_1 در راست صفر نیز لازم نیست. زیرا g_1 در راست صفر پیوستگی دارد.

پس بنابه مطالب فوق تابع g_1 بر بازه $]0,3[$ از کلاس C^1 قطعه ای بوده و چون دوره تناوب آن برابر با ۳ است بر $\mathbb{R}$ نیز چنین خواهد بود و در قضیه دیریکله صدق میکند. لذا g_1 در نقاطیکه پیوستگی دارد، سری فوریه وابسته به آن همگراست به خود تابع g_1. چون تابع $f(t)$ بر بازه $]0,1[$ که زیر مجموعه ایست از بازه $]0,3[$ بر $g_1(t)$ منطبق است، در خصوص تابع f نیز داریم:

$$f(t)=\frac{3}{2}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)$$

۲-الف- شکل ۱-۲۲ منحنی تابع g_2 را در فاصله $[-3,3]$ نشان میدهد.



شکل ۱-۲۲: منحنی تغییرات g_2

ب- محاسبه ضرایب فوریه: چون g_2 تابعی فرد است، پس در این بسط (بازای $n\in\mathbb{N}^*$)، a_n صفر میگردد.

همچنین بازای $\omega=2\pi/T_2=\pi$ داریم:

$$b_n=\frac{2}{T_2}\int_{-1}^{1}t\sin(n\omega t)\,dt=\frac{4}{2}\int_{0}^{1}t\sin(n\omega t)\,dt$$

انتگرال معین بالا را نیز به ترتیبی که در قسمت ۱ برای g_1 انجام شد، محاسبه نموده، خواهیم داشت: ($n\in\mathbb{N}^*$)

$$b_n=\frac{-2(-1)^n}{n\pi}$$

در مورد قسمت دیگر از این حالت ، بازه $]-1,1[$ را در نظر میگیریم. بر این بازه g_2 تابعی است معین، پیوسته و مشتق پذیر و مشتق g_2 نیز بر این بازه پیوسته است. در مورد نقاط 1 و -1 نیز داریم.

$$\lim_{t\to -1^+} g_2=\lim_{t\to -1^+} t=-1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to 1^+} g_2=\lim_{t\to 1^+} t=1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to 1^-} g_2'=\lim_{t\to 1^-} 1=1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to -1^+} g_2'=\lim_{t\to -1^+} 1=1\in\mathbb{R}$$

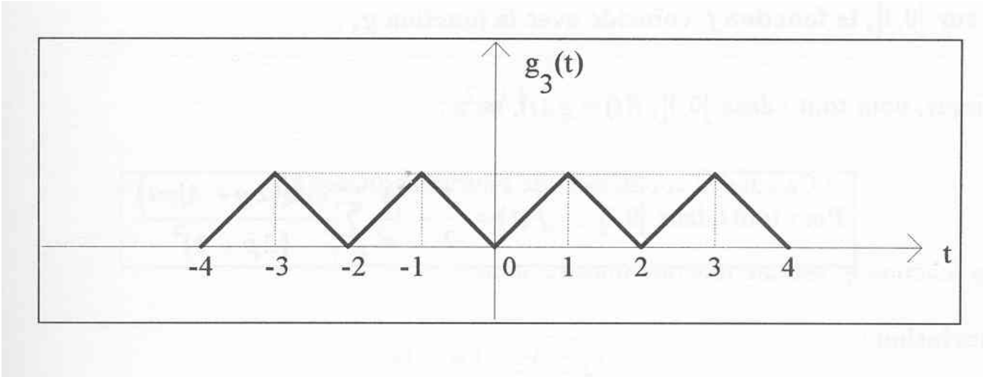
بنابراین تابع g_2 بر بازه $]-1,1[$ و در نتیجه بر $\mathbb{R}$ از کلاس C^1 قطعه ای بوده و در قضیه دیریکله صدق میکند. لذا در نقاطیکه پیوسته است، سری فوریه وابسته به آن همگرای به g_2 خواهد بود. پس برای $t\in]-1,1[$ داریم:

$$g_2(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\pi t)}{n}$$

چون در بازه $]0,1[$ که زیر مجموعه $]-1,1[$ است، تابع f بر g_2 منطبق است، ازاینـرو در بـازه $]0,1[$ خـواهیم داشت:

$$f(t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin(n\pi t)}{n}$$

۳-الف- در شکل ۱-۲۳، منحنی تابع $g_3(t)$ در فاصله $[-4,4]$ ترسیم شده است.



شکل ۱-۲۳: منحنی تغییرات g_3

ب- محاسبه ضرایب فوریه:

چون g_3 زوج است، b_n بازای $n \in \mathbb{N}^*$ برابر صفر میگردد. همچنین از اینکه تـابع g_3 روی بـازه $[0,1]$ بصـورت $g_3(t) = t$ تعریف شده، با توجه به: $\omega = 2\pi / T_3 = \pi$، در مورد a_0 و a_n میتوان نوشت:

$$a_0 = \frac{1}{T_3}\int_{-1}^{1} g_3(t)\,dt = \frac{2}{2}\int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt$$

$$= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1 - 2\times\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)dt$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1$$

لذا برای $n = 2p$ داریم $a_{2p} = 0$ و برای $n = 2p+1$ بدست میآید:

$$a_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)^2\pi^2}\times(-2) = \frac{-4}{(2p+1)^2\pi^2}$$

به روشی که در قسمتهای ۱ و ۲ عمل گردید پی میبریم که سری فوریـه وابسـته بـه تـابع g_3 نیـز در نقـاطی کـه پیوسته است، به g_3 همگرا میشود.

چون تابع f نیز در بازه $]0,1[$ بر g_3 منطبق است، از اینرو سری فوریه وابسته به f هم در بازه $]0,1[$ به تـابع $f(t)$ همگرا خواهد بود. به این ترتیب در این بازه داریم:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos[(2p+1)\pi t]}{(2p+1)^2}$$

نتیجه: در این مسئله به این موضوع رسیدیم که وقتی تابع تعریف شده بر بازه $[a,b]$، پیوسته و مشتقپذیر بـوده و دارای مشتق پیوسته بر بازه مربوطه است، بدون آنکه متناوب باشد، چنین تابعی را میتوان به بیشمار صورت به یـک سری مثلثاتی خواه سری سینوسی و کسینوسی، یا سری سینوسی و یا سری کسینوسی تبدیل نمود. اینکار میتوانـد

از ادامه f روی $\mathbb{R}$ بوسیله تابع دیگری مانند g صورت پذیرد که متناوب با دوره تناوب بیشتر از $b-a$ بـوده و در بازه $]a,b[$ با f برابر باشد. در این مسئله با سه تابع جدید g_1، g_2 و g_3 اینکار عملی گردید و به نتایج زیـر منجر شد:

با تابع g_1
$$t = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) \qquad \rightarrow \qquad t\in]0,1[$$

با تابع g_2
$$t = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\pi t) \qquad \rightarrow \qquad t\in]0,1[$$

با تابع g_3
$$t = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\pi t] \qquad \rightarrow \qquad t\in]0,1[$$

۱-۷- تمرینات و مسائل

تمرین ۱: f تابعی حقیقی است با دوره تناوب 2π که بصورت زیر تعریف شده است.

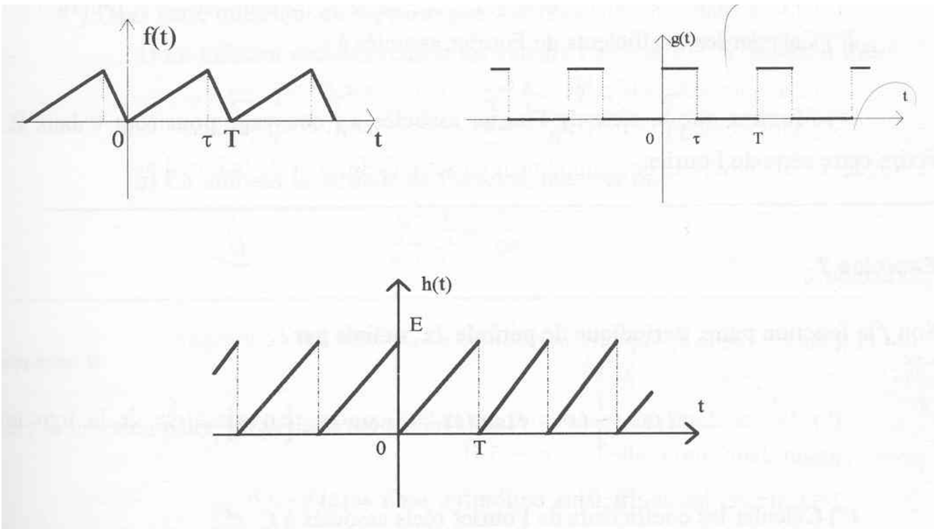
$$\begin{cases} f(t)=t & t\in[0,\pi[\\ f(t)=0 & t\in[\pi,2\pi[\end{cases}$$

۱- منحنی نمایش آنرا در بازه $[-2\pi,4\pi]$ رسم کنید.
۲- ضرایب فوریه حقیقی وابسته به f را محاسبه نمایید.
۳- نشان دهید که تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق میکند و از آن بسط تابع f را به سری فوریه نتیجه بگیرید.

تمرین ۲: تابع حقیقی h تابعی فرد، متناوب با دوره تناوب 2π است که بصورت $h(t)=\pi-t$ روی بازه $t\in]0,\pi]$ تعریف شده است.
۱- منحنی h را در بازه $[-3\pi,3\pi]$ رسم نمایید.
۲- ضرایب فوریه حقیقی وابسته به h را محاسبه کنید.
۳- نشان دهید که تابع h در شرایط قضیه دیریکله صدق میکند و از آن بسط فوریه تابع h را نتیجه بگیرید.
۴- با استفاده از فرمول پارسوال، ثابت کنید: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2=\pi^2/6$

تمرین ۳: تابع حقیقی و متناوب f با دوره تناوب 2π که بصورت $f(t)=t/2$ روی بازه $t\in[-\pi,\pi[$ تعریف شده، مفروض است.
۱- منحنی نمایش $f(t)$ را در بازه $]-3\pi,3\pi[$ رسم نمایید.
۲- تحقیق کنید که تابع f در بازه $]-\pi,\pi[$ قابل بسط به سری فوریه است.
۳- بسط تابع f را به سری فوریه در بازه $]-\pi,\pi[$ مشخص کنید.
۴- با استفاده از نتیجه بند ۳، مجموع $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/(2n+1)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۴: نشان دهید سیگنالهای متناوبی که در شکل ۱-۲۴ رسم شده اند، به سری فوریه قابل بسط هستند. این بسطها را مشخص کنید.



شکل ۱-۲۴: تمرین ۴

تمرین ۵: توابع f و g حقیقی و متناوب با دوره تناوب 2π هستند که بصورت زیر تعریف شده اند. در ضمن g زوج است.

$$\begin{cases} f(t)=\pi-t & t\in[0,2\pi[\\ g(t)=\pi-t & t\in[0,\pi] \end{cases}$$

نشان دهید که هر یک از توابع فوق به سری فوریه قابل بسط هستند . این بسطها را مشخص نمایید. تحقیق کنید که آیا در بازه $]0,\pi[$ نیز چنین است؟

تمرین ۶: f تابعی است حقیقی، فرد، متناوب با دوره تناوب 2π و تعریف زیر:

$$\begin{cases} f(t)=t & t\in[0,\pi/2[\\ f(t)=\pi-t & t\in[\pi/2,\pi] \end{cases}$$

۱- منحنی نمایش آنرا در فاصله $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید.
۲- ضرایب فوریه وابسته به f را بیابید.
۳- نشان دهید که سری فوریه وابسته به f ، بازای همه مقادیر $t\in\mathbb{R}$، همگراست. این سری را تعیین نمایید.

تمرین ۷: f تابعی است زوج، متناوب با دوره تناوب 2π و تعریف زیر:

$$f(t)=\frac{1}{2}(\pi-t)\sin(t) \qquad t\in[0,\pi]$$

۱- ضرایب فوریه حقیقی وابسته به f را بیابید.
۲- نشان دهید که بازای همه مقادیر $t\in\mathbb{R}$ سری فوریه وابسته به f به خود تابع همگراست. بسط تابع f را به سری فوریه بنویسید.
۳- با قراردادن $t=\pi/2$ در بسطی که بدست آمده است، رابطه زیر را نتیجه بگیرید.

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$$

تمرین ۸: تابع f تابعی است زوج، متناوب با دوره تناوب T و تعریف زیر: ($a>0,\ \ t\in[0,T]$)

$$f(t) = a\,t\,(T-t)$$

۱- ضرایب فوریه وابسته به f را تعیین کنید.

۲- نشان دهید که f روی $\mathbb{R}$ از کلاس C^1 قطعه ایست.

۳- در نقاطیکه f پیوسته است، سری فوریه وابسته به f به خود تابع همگراست. بسط $f(t)$ را به سری فوریه در بازه های $[0,T[$ و $]2T,3T[$ مشخص نمایید.

۴- با فرض $T=2\pi$ و با استفاده از مقادیر $t=0$ و $t=\pi$، درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12}$$

همچنین با استفاده از فرمول پارسوال، نشان دهید که تساوی زیر برقرار است:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

تمرین ۹: f تابعی است زوج، متناوب با دوره تناوب 2π و تعریف زیر:

$$f(t)=(\pi-t)^2 \qquad t\in[0,\pi]$$

۱- ضرایب فوریه وابسته به f را محاسبه کنید.

۲- نشان دهید که سری فوریه وابسته به f بازای همه مقادیر $t\in\mathbb{R}$ به خود تابع همگراست.

۳- با قبول اینکه سری بدست آمده جمله به جمله قابل انتگرالگیری است،

الف- با محاسبه انتگرال $\int_0^x f(t)\,dt$ به دو طریق نشان دهید که

$$\frac{\pi^3-(\pi-x)^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3} \qquad (I)$$

ب- با انتگرالگیری جمله به جمله از تساوی (I)، روی $[0,\pi]$، درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

تمرین ۱۰:

۱- برای عدد طبیعی k و عدد طبیعی مخالف با صفر n، تساوی $I(k)=\int_0^\pi u^k\cos(nu)\,du$ مفروض است.

الف- $I(0)$ را محاسبه کنید.

ب- با کمک دو انتگرال گیری جزء به جزء و پی در پی نشان دهید که برای $k\ge 2$، داریم:

$$I(k)=k\frac{(-1)^n}{n^2}\pi^{k-1}-\frac{k(k-1)}{n^2}I(k-2)$$

و از آن رابطه $I(6)=(-1)^n\left[\frac{6\pi^5}{n^2}-\frac{120\pi^3}{n^4}+\frac{720\pi}{n^6}\right]$ را نتیجه بگیرید.

۲- اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و تعریف زیر فرض شود:

$$f(t)=t^6 \qquad t\in[-\pi,\pi]$$

الف- ضرایب فوریه وابسته به f را محاسبه کنید.

ب- نشان دهید که سری فوریه وابسته به f بازای همه مقادیر $t\in\mathbb{R}$ به $f(t)$ همگراست.

۳- با انتخاب $t=\pi$، نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$. (بیاد داشته باشیم که روابط قسمت ۴ از تمرین ۸ نیز برقرارند.)

مسائل

مسئله ۱: $f(t)$ تابعی است عددی، متناوب، با دوره تناوب 4 و تعریف زیر روی $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(t)=t & 0\le t<1 \\ f(t)=1 & 1\le t<3 \\ f(t)=4-t & 3\le t<4 \end{cases}$$

۱-

الف-منحنی نمایش تابع f را روی بازه $[-6,6]$ رسم کنید.

ب- نشان دهید که f تابعی است زوج.

پ-تحقیق کنید که f در شرایط قضیه دیریکله صدق میکند.

ت- ضرایب a_0 و a_n را محاسبه نموده و بسط f را به سری فوریه روی هر $t\in\mathbb{R}$ بنویسید. نشان دهید که

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right]$$

۲- φ تابعی است که روی $\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$\varphi(t)=\frac{3}{4}-\frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}t)-\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)$$

الف- تحقیق کنید که φ تابعی است زوج، متناوب با دوره تناوب $T=4$.

ب- معادله $\varphi'(t)=0$ را روی $[0,2]$ حل نموده و مقدار $\varphi(n/3)$ را تا 0.01 تقریب برای $n\in[0,6]\subset\mathbb{N}$ محاسبه نمایید. همچنین جدول تغییرات φ را وقتیکه t به بازه $[0,2]$ تعلق دارد، تشکیل دهید.

پ- منحنی های نمایش f و φ را برای فواصل $[-2,2]$ و $[-4,4]$ رسم کنید.

۳-

الف- انتگرال $I=\int_0^2 f^2(t)\,dt$ را محاسبه نموده و از آن مربع مقدار موثر f را نتیجه بگیرید.

ب- مربع مقدار موثر φ را تعیین کنید.

پ- مقادیر نتیجه شده از حالات الف و ب را با هم مقایسه نمایید. آیا حاصل این مقایسه قابل پیش بینی است؟

مسئله ۲: طراحان پمپها معتقدند که دبی یک پمپ به تعداد پیستونهای آن بستگی دارد. به این معنا که اگر این تعداد فرد باشد، دبی آن منظم تر است. این مسئله بمنظور بررسی این موضوع، برای دو حالات خاص $p=3$ و $p=4$ تنظیم شده است. p تعداد پیستون های پمپ است. دبی یک سیلندر را با تابع f نشان میدهیم که تابعی متناوب با دوره تناوب 2π و با تعریف زیر است:

$$\begin{cases} f(t)=\sin(t) & t\in[0,\pi] \\ f(t)=0 & t\in]\pi,2\pi] \end{cases}$$

۱- بررسی حالت $p=3$: دبی های سه سیلندر به ترتیب عبارتند از $q_1=f(t)$ ، $q_2=f(t+2\pi/3)$ و $q_3=f(t+4\pi/3)$. دبی کل پمپ Q_3 برابر است با $Q_3=q_1+q_2+q_3$.

الف- منحنی نمایش q_1 را بر بازه $[-2\pi,2\pi]$ نشان داده و از آن منحنی های نمایش توابع q_2 و q_3 را بر همین بازه نتیجه بگیرید.

ب- نشان دهید که $Q_3(t)=Q_3(t+2\pi/3)$ است و

$$\begin{cases} Q_3(t)=\sin(t+\pi/3) & t\in[0,\pi/3] \\ Q_3(t)=\sin(t) & t\in]\pi/3,2\pi/3] \end{cases}$$

پ- رفتار منحنی نمایش Q_3 را بر بازه $[-2\pi,2\pi]$ مشخص نموده و $Q_3(0)$ ، $Q_3(\pi/3)$ و $Q_3(2\pi/3)$ را بدست آورید.

۲- بررسی حالت $p=4$: در این قسمت دبی پمپ عبارتست از:

$$Q_4(t)=f(t)+f(t+\pi/2)+f(t+\pi)+f(t+3\pi/2)$$

نشان دهید که دوره تناوب Q_4، برابر $\pi/2$ است و ثابت کنید که برای $t\in[0,\pi/2]$، داریم:

$$Q_4(t)=\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)$$

همچنین $Q_4(0)$ و $Q_4(\pi/4)$ را تعیین نموده و رفتار منحنی نمایش Q_4 را روی بازه $[-2\pi,2\pi]$ تعیین کنید.

۳- بررسی سهم بی نظمی دبی: بنابر تعریف این سهم که با θ_p نشان داده میشود، برابر است با:

$$\theta_p=\frac{(Q_p)_{\max}-(Q_p)_{\min}}{(Q_p)_{ave}}$$

که در اینجا زیر نویسهای max، min و ave بترتیب مربوط به حداکثر، حداقل و متوسط مقدار Q_p اشاره میکنند.

الف- دبی معین q یعنی مقدار متوسط تابع f را روی $[0,2\pi]$ محاسبه نموده و از آن دبی متوسط Q_p را در حالات $p=3$ و $p=4$ نتیجه بگیرید.

ب- با استفاده از نتایج سوالات ۱ و ۲ ، مقادیر θ_3 و θ_4 را محاسبه نموده و تحقیق کنید که $\theta_3>Q_4$

۴- بررسی حالت $p=4$ بکمک سری فوریه:

الف- ضرایب فوریه تابع f را محاسبه کنید.

ب- نشان دهید که $f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ و همچنین بسط سری فوریه توابع $t\mapsto f(t+3\pi/2)$ ، $t\mapsto f(t+\pi)$ و $t\mapsto f(t+\pi/2)$ را مشخص کنید.

پ- از آن نتیجه بگیرید:

$$Q_4(t)=\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(4pt)}{16p^2-1}$$

مسئله ۳: این مسئله مربوط است به سری فوریه و مفهوم معادله دیفرانسیل.

الف-

۱- عدد b عددی حقیقی و n عددیست طبیعی و مخالف صفر. بکمک یک انتگرال گیری جزء بـه جـزء انتگـرال $I = \int_0^b t\cos(nt)\,dt$ را محاسبه کنید.

۲- یک سیگنال (مثلثی) بصورت تابع u مدل شده است که روی $\mathbb{R}$ متناوب و با دوره تناوب 2π بوده و بصورت

$$\begin{cases} u(t) = t & t \in [0,\pi] \\ u(t) = 2\pi - t & t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

تعریف شده است.

الف- منحنی نمایش تابع را بر بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم کنید.

ب- با توجه به اینکه u تابعی زوج است، ضرایب فوریه وابسته به آن را محاسبه کنید.

پ- تحقیق کنید که u در شرایط قضیه دیریکله صدق میکند و از آن نتیجه بگیرید که بازای تمام t های حقیقـی داریم:

$$u(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos[(2p+1)t]}{(2p+1)^2}$$

۳- با انتخاب واحدهای مناسب، قدرت سیگنال را میتوان با فرمول زیر بیان نمود:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\pi} u^2(t)\,dt$$

الف- P را محاسبه نموده و مقدار تقریبی آنرا با تقریب 10^{-3} تعیین نمایید.

ب- باید دانست که قدرت سیگنال با کمک فرمول پارسوال-بِسِل، با ضرایب فوریه محاسبه میگردد:

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots)$$

که در عمل، بطور تقریبی از فرمول $P_1 = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2)$ برای محاسبه مقدار آن استفاده میگردد. مقـدار P_1 را با تقریب 10^{-3}محاسبه کنید.

ب- در این قسمت به نتایجی می‌رسیم که در قسمت بعدی بکار خواهد رفت.

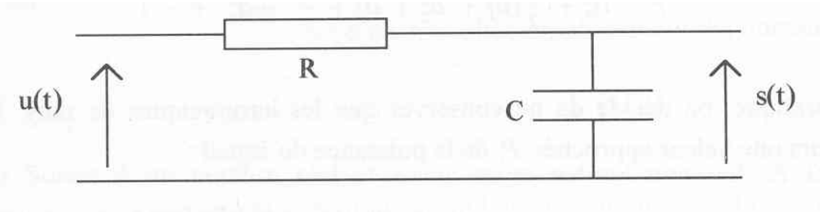
۱- مقادیر R، C و α اعدادی مثبت و λ عددی حقیقی است. نشان دهید که روی $\mathbb{R}^+$ ، جواب کـلی معادلـه دیفرانسیل $RC\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = \lambda\cos(\alpha t)$ ، تابع زیر است: ($k \in \mathbb{R}$)

$$S(t) = K\exp\left(\frac{-1}{RC}\right) + \frac{\lambda}{1+\alpha^2R^2C^2}[\cos(\alpha t) + RC\alpha\sin(\alpha t)]$$

۲- اگر φ عددی حقیقی باشد که به بازه $]0, \pi/2[$ متعلـق بـوده و در رابطـه $\tan(\varphi) = RC\,\alpha$ صـدق نمایـد، نشان دهید که بازای هر $t \in \mathbb{R}^+$ ، تساوی زیر برقرار است:

$$\frac{\lambda}{1+\alpha^2R^2C^2}[\cos(\alpha t) + RC\alpha\sin(\alpha t)] = \frac{k}{\sqrt{1+\alpha^2R^2C^2}}\cos(\alpha t - \varphi)$$

پ- جریان الکتریکی در مدار نشان داده شده در شکل ۱-۲۵ را در نظر میگیریم. این مدار با سیگنال u (داده شده در قسمت الف) تغذیه میگردد.



شکل ۱-۲۵: شکل مسئله ۳

از معادله دیفرانسیل $RC\dfrac{dS(t)}{dt}+S(t)=u(t)$ نیز برای محاسبه سیگنال خروجی S استفاده مینماییم. در ادامه با فرض $RC=1$ و قرار دادن $u(t)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cos(t)-\dfrac{4}{9\pi}\cos(3t)$ (یعنی هارمونیک مرتبه سوم از بسط سری فوریه u) بجای سیگنال ورودی u، به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱- نشان دهید که جواب معادله دیفرانسیل فوق تابعی تعریف شده بصورت زیر است: ($k\in\mathbb{R}$)

$$S(t)=k\exp(-t)+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi\sqrt{2}}\cos(t-\pi/4)-\frac{4}{9\pi\sqrt{10}}\cos[3t-\arctan(3)]$$

۲- با فرض جدید $S(0)=0$ علاوه بر همه پذیرفته های قبل، مقدار تقریبی k را تا 10^{-3} اعشار تعیین نمایید.

مسئله ۴:

الف- فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب π و با تعریف $f(t)=t(\pi-t)$ روی $t\in[0,\pi]$ باشد

۱- ضرایب فوریه وابسته به تابع f را محاسبه کنید.

۲- برقراری شرایط قضیه دیریکله را در مورد تابع f تحقیق نموده و از آن همگرایی سری فوریه مزبور را به f نتیجه بگیرید.

۳- همچنین از آن مجموع سری عددی $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را نتیجه بگیرید.

ب- اگر g تابعی فرد، متناوب و با دوره تناوب 2π بوده و بصورت زیر تعریف گردد: ($t\in[0,\pi]$)

$$g(t)=t(\pi-t)$$

۱- نشان دهید که g برابر با مجموع سری فوریه ایست که به آن وابسته است.

۲- با استفاده از فرمول پارسوال، مجموع سری عددی $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ را مشخص نمایید.

پ- h تابعی است متناوب، با دوره تناوب 2π و با تعریف زیر:

$$\begin{cases} h(t)=t(\pi-t) & t\in[0,\pi] \\ h(t)=0 & t\in]-\pi,0[\end{cases}$$

با استفاده از قسمت های الف و ب، بسط تابع h را به سری فوریه تعیین نمائید.

فصل دوم

تبدیل لاپلاس

مطالب مربوط به این فصل با تعریف تبدیل لاپلاس L و بررسی آن در مجموعه ای از توابع ساده که با E_0 نشان داده میشوند شروع گردیده و با اثبات برخی از خواص این تبدیل در مجموعه E_0 و تعمیم آنها در مجموعه غنی‌تر E که شامل E_0 نیز هست ادامه می‌یابد. بالاخره بمواردی از کاربردهای مهم تبدیل لاپلاس در مباحثی از فیزیک و مهندسی خاصه در محاسباتی که به محاسبات سمبولیک موسوم هستند، خاتمه پیدا میکند.

۲-۱-   تبدیل لاپلاس روی E_0

به مطالب زیر توجه گردد:

الف- اغلب معادلات دیفرانسیلی که در پدیده های فیزیکی وارد میگردند، توابعی هستند که به آنها توابع نمایی-چند جمله ای گفته میشود. (توابعی بصورت $t \to f(t) = \exp(rt).p(t)$ بطوریکه $t \in \mathbb{C}$ و p چند جمله ایست.) جوابهای چنین معادلاتی، اکثراً توابع نمایی، توابع کثیرالجمله ای-سینوسی و یا حاصلضربهایی از همین توابع هستند.

ب- فیزیکدانها عملاً به پدیده هایی علاقه مند هستند که مربوط به لحظات $t=\alpha$ با $\alpha \geq 0$ باشند. این امر موجب میگردد که برای $t<\alpha$، توابع صفر در نظر گرفته شود.

پ- بیشتر سیگنالهایی که در مبحث الکترونیک به آنها برمیخوریم، با عملیات مقدماتی انتقال یا انبساط بر روی متغیرها از توابع ساده نتیجه میگردند. (انتقال: $t \to f(t-\alpha)$ و انبساط: $t \to f(at)$)

با توجه به ملاحظاتی که در بالا بدانها اشاره شد، به انتحاب فضایی از توابع ملزم میگردیم که واجد خصوصیات فوق باشد. فضای انتخابی مذکور با E_0 نمایش داده میشود.

۲-۱-۱-   تعریف فضای E_0

الف- توابع سببی

تعریف: تابعی مانند f را سببی میگوییم اگر بازای هر t منفی، $f(t)$ برابر با صفر شود.

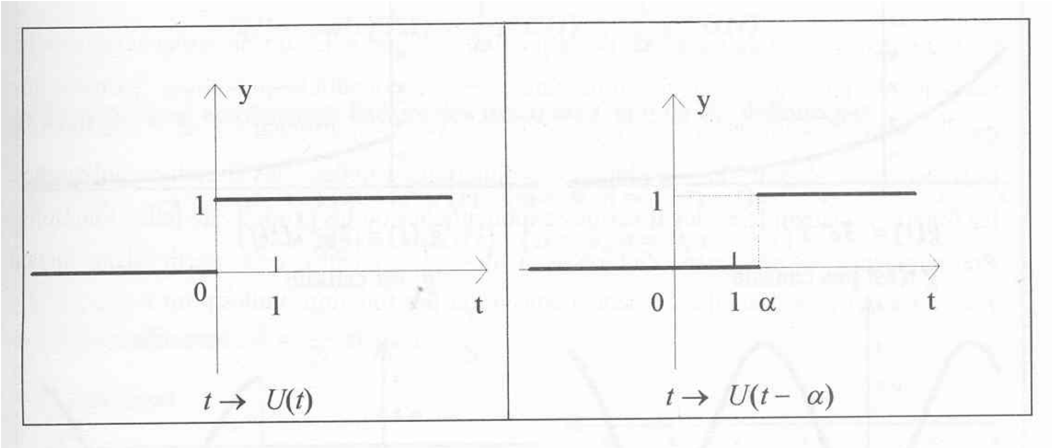
مثالهای مهم در این مورد را میتوان بوسیله تابع پله ای (نردبانی) واحد $t \to U(t)$ و انتقال یافته های آن $t \to U(t-\alpha)$، که در آن α عددی حقیقی و مثبت است، تشکیل داد. توابع مزبور بصورت زیر تعریف میشوند:

$$\begin{cases} U(t)=0, & t<0 \\ U(t)=1, & t\geq 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} U(t-\alpha)=0, & t<\alpha \\ U(t-\alpha)=1, & t\geq \alpha \end{cases}$$

این توابع در شکل ۲-۱ نشان داده شده اند.



شکل ۲-۱: تابع پله ای و انتقال یافته آن

مثالها:

تابع $t \to U(t)$ و انتقال یافته آن برای تشکیل توابع سببی مانند آنچه در شکل ۲-۲ مشاهده میشود، بکار میروند.

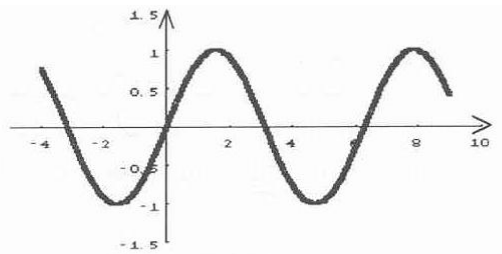
ب- توابع E_0:

تعریف: E_0 مجموعه ایست از تمام ترکیبهای خطی (با ضرایب حقیقی یا مختلط) از توابع سببی بصورت $t \to U(t-\alpha)\, t^n \exp(r\, t)$ که در آنها α عددی مثبت و حقیقی، n عدد صحیح مثبت و r یک عدد مختلط و غیر مشخص است.

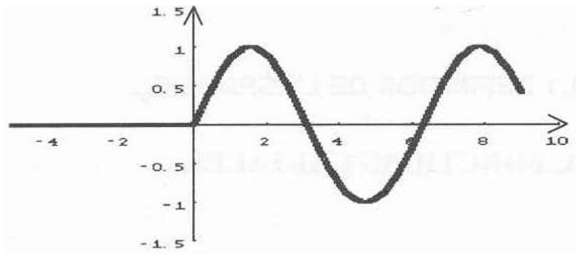
از میان توابع سببی، توابع $f(t) = U(t-\alpha)\, t^n \exp(r\, t)$ که در بالا بدانها اشاره گردید، کاربردهای زیادی در فیزیک دارند. به این ترتیب با توجه به تعریف فوق، اگر f و g دو تابع از E_0 باشند، آنگاه بازای همه مقادیر مختلط λ و μ، توابع $\lambda\, f + \mu\, g$ نیز از مجموعه E_0 خواهند بود.

مثالها:

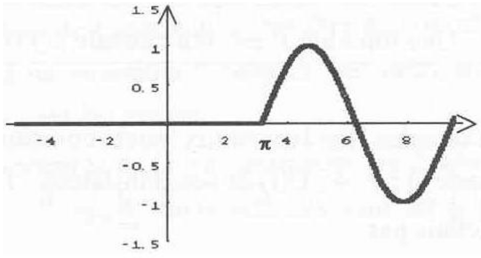
تابع $t \to t^2 \exp(-t) U(t-3)$ که در آن $\alpha = 3$، $n = 2$ و $r = -1$ میباشد، تابعی است از E_0.

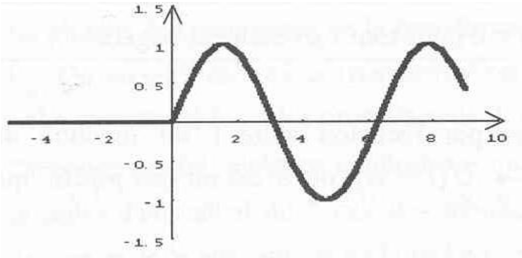


$f_1(t) = U(t)\sin(t)$

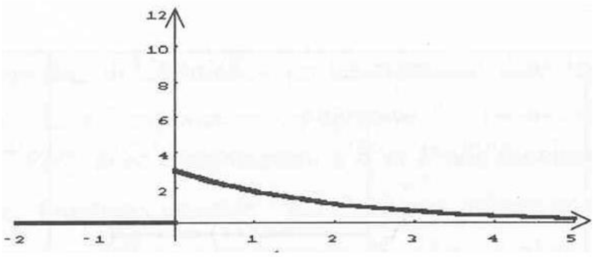


$f_2(t) = f_1(t-\pi) = U(t-\pi)\sin(t-\pi)$

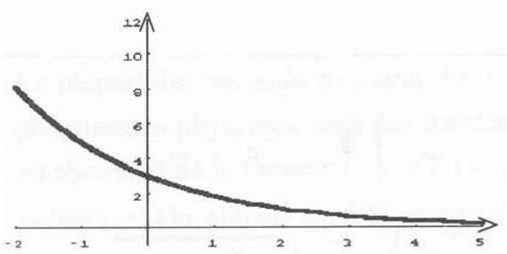




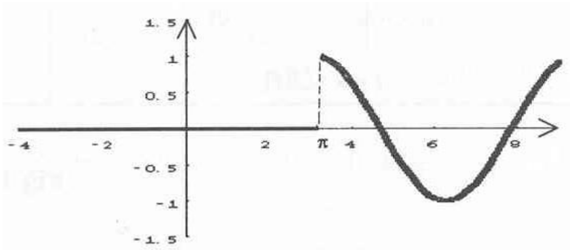
تابع $f(t) = \sin(t)$ ، تابعی سببی نیست. در حالیکه توابع f_1 و f_2 سببی هستند.



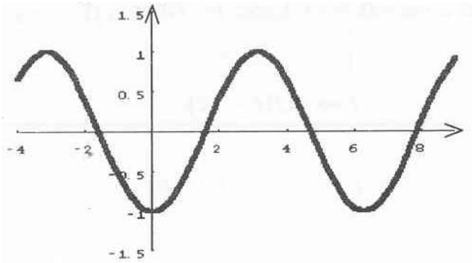
$g_1(t) = 3\exp(-t/2)U(T)$ تابعی سببی است



$g(t) = 3\exp(-t/2)$ تابعی سببی نیست



$h_1(t) = U(t-\pi)\cos(t-\pi)$ تابعی سببی است



$h(t) = \cos(t-\pi)$ تابعی سببی نیست

شکل ۲-۲: انتقال توابع

تابع $h(t) = \sin(t)U(t)$ $t \to$ تابعی است از E_0 زیرا $\sin(t) = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/(2i)$ و در نتیجه:

$$h(t) = \frac{1}{2i}\exp(it)U(t) - \frac{1}{2i}\exp(-it)U(t) \quad \to \quad \begin{cases} f(t) = e^{it}U(t), & \alpha = 0, n = 0, r = i \\ g(t) = e^{-it}U(t), & \alpha = 0, n = 0, r = -i \end{cases}$$

بطوریکه $\lambda = \frac{1}{2i}$ و $\mu = \frac{-1}{2i}$ هستند.

توابع $k(t) = U(t-\pi)\sin(t-\pi)$ $t \to$ و $S(t) = U(t-\pi)\sin(t)$ $t =$ نیز توابعی از مجموعه E_0 هستند، زیرا

$$k(t) = U(t-\pi)\frac{\exp[i(t-\pi)] - \exp[-i(t-\pi)]}{2i}$$
$$= \frac{1}{2i}\exp(-i\pi)\exp(it)U(t-\pi) - \frac{1}{2i}\exp(i\pi)\exp(-it)U(t-\pi)$$

بطوریکه $\lambda = \frac{1}{2i}\exp(-i\pi) = \frac{-1}{2i}$ و $\mu = \frac{-1}{2i}\exp(i\pi) = \frac{1}{2i}$. همچنین داریم:

$$S(t) = U(t-\pi)\frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}$$
$$= \frac{1}{2i}\exp(it)U(t-\pi) - \frac{1}{2i}\exp(-it)U(t-\pi)$$

بطوریکه $\lambda = \frac{1}{2i}$ و $\mu = \frac{-1}{2i}$.

۲- خواص: میتوان ثابت کرد که:

الف- هر تابع از E_0، پیوسته قطعه ای روی $\mathbb{R}$ است، همراه با تعداد محدودی از نقاط ناپیوسته.

ب- اگر f تابعی متعلق به E_0 بوده، α و β مقادیری حقیقی و مثبت و r عددی مختلط باشد، آنگاه توابع $t \to f(\alpha t)$ و $t \to f(t-\beta)$ و $t \to \exp(rt)\, f(t)$ نیز توابعی از E_0 خواهند بود.

پ- اگر $f(t)$ تابعی از E_0 باشد، بر روی هر بازه بسته ای از $\mathbb{R}$ که تعداد محدودی از نقاطش حذف شده باشند در خارج از این نقاط محذوف، تابع f' نیز تابعی است از E_0.

ت- تابع $t \to \int_0^t f(x)\, dx$ متعلق به E_0 است، اگر $f \in E_0$ باشد.

مثالها:

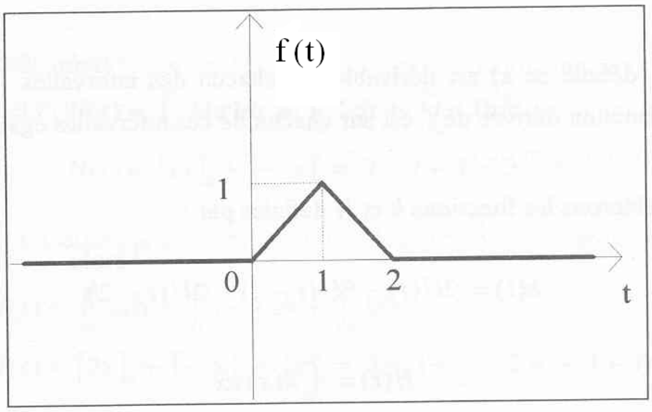
۱- نشان میدهیم که تابع $t \to f(t) = tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$ تابعی است از E_0.

چنانچه $t \to tU(t)$ را $f_1(t)$ و تابع $t \to (t-1)U(t-1)$ را $f_2(t)$ و $t \to (t-2)U(t-2)$ را $f_3(t)$ بنامیم، در f_1 ، $\alpha = 0$، $n = 1$ و $r = 0$ است. پس بنا به تعریف توابع E_0، تابعی است از E_0. تابع $f_2(t)$ انتقال یافته تابع $f_1(t)$ بوده و بنابراین بر طبق خاصیت (ب) که در بالا ذکر شد، متعلق به E_0 است. بهمین ترتیب نیز $f_3(t)$ که برابر است با $f_1(t-2)$ از E_0 خواهد بود. در نتیجه $f(t)$ که ترکیبی بصورت $f = f_1 - 2f_2 + f_3$ از توابع f_1، f_2 و f_3 است نیز متعلق به E_0 میگردد.

به آسانی میتوان به مقادیر زیر برای تابع $f(t)$ پی برد:

$$
\begin{array}{lcl}
t < 0 & \to & f(t) = 0 \\
0 \le t < 1 & \to & f(t) = t \\
1 \le t < 2 & \to & f(t) = t - 2(t-1) = 2 - t \\
2 \le t & \to & f(t) = t - 2(t-1) + (t-2) = 0
\end{array}
$$

نمودار تابع $f(t)$ در شکل ۲-۳ داده شده است.

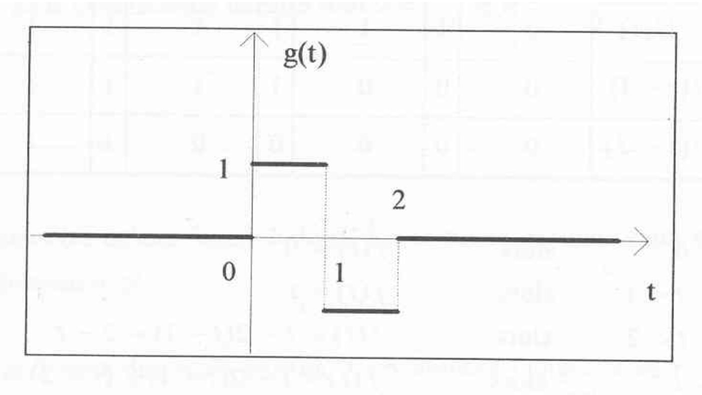


شکل ۲-۳: نمودار تابع $f(t)$

۲- تابع g که بصورت $t \to g(t) = U(t) - 2U(t-1) + U(t-2)$ تعریف شده، تابعی است از E_0. نمودار آن را رسم نمایید.

میدانیم که $U(t)$ و انتقال یافته های آن یعنی توابع $U(t-1)$ و $U(t-2)$ از E_0 هستند. پس ترکیب خطی آنها نیز از E_0 خواهد بود. داریم:

$$
\begin{array}{lcl}
t<0 & \to & g(t)=0 \\
0\le t<1 & \to & g(t)=1 \\
1\le t<2 & \to & g(t)=1-2=-1 \\
2\le t & \to & g(t)=-1+1=0
\end{array}
$$



شکل ۲-۴: نمودار تابع $g(t)$

تبصره: واضح است که تابع $f(t)$ (مثال ۱) در هر یک از بازه های $]-\infty,0[$، $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ مشتق پذیربوده و تابع مشتق آن یعنی $f'(t)$ روی هر یک از بازه های فوق با $g(t)$ برابر است.

۳- توابع h و H را که بصورت زیر تعریف شده اند در نظر میگیریم:

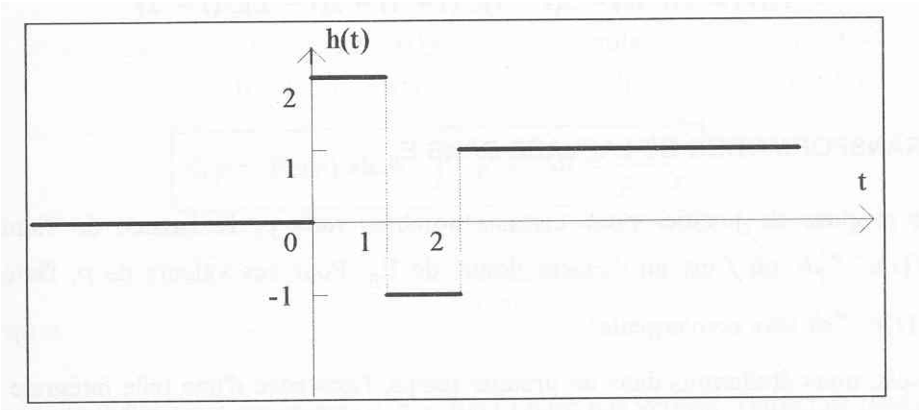
$$h(t) = 2U(t) - 3U(t-1) + 2U(t-2)$$

$$H(t) = \int_0^t h(x)\,dx$$

بطوریکه

$$
\begin{cases}
t<0 & \to \quad h(t)=0 \\
0\le t<1 & \to \quad h(t)=2-3\times 0+2\times 0=2 \\
1\le t<2 & \to \quad h(t)=2-3+2\times 0=-1 \\
2\le t & \to \quad h(t)=2-3+2=1
\end{cases}
$$

نمودار تابع $h(t)$ در شکل ۲-۵ رسم شده است.

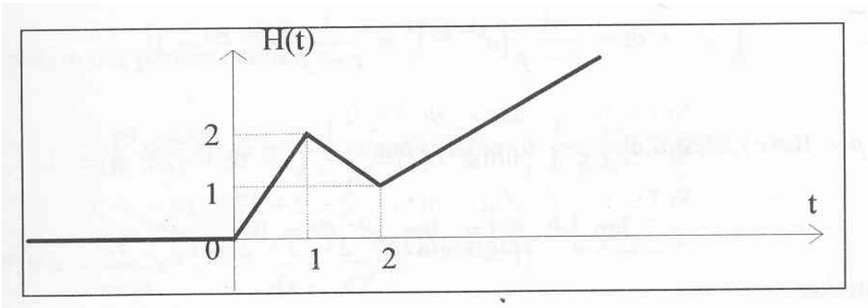


شکل ۲-۵: نمودار تابع $h(t)$

در مورد تابع $H(t)$ نیز داریم:

$$\begin{cases} t<0 \rightarrow h(t)=0 \rightarrow & H(t)=0 \\ 0\le t<1 \rightarrow h(t)=2 \rightarrow & H(t)=\int_0^t 2\,dx=2t \\ 1\le t<2 \rightarrow h(t)=-1 \rightarrow & H(t)=\int_0^t h(x)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx+\int_1^t h(x)\,dx=3-t \\ 2\le t \rightarrow h(t)=1 \rightarrow & H(t)=\int_0^t h(x)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx+\int_1^2 h(x)\,dx+\int_2^t h(x)\,dx=t-1 \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع $H(t)$ بصورت نشان داده شده در شکل ۲-۶ خواهد بود.



شکل ۲-۶: نمودار تابع $H(t)$

با توجه به آنچه که در محاسبات فوق مشاهده شد، به نتایج زیر میرسیم:

۱- تابع $H(t)$ تابعی است بصورت $H(t)=f_1(t)U(t)+f_2(t)U(t-1)+f_3(t)U(t-2)$.

۲- چون تابع $H(t)$ بازای $0<t<1$ برابر است با $2t$ ، بنابراین $f_1(t)=2t$.

۳- چون تابع $H(t)$ بازای $1<t<2$ برابر است با $3-t$ یا $2t-3(t-1)$، لذا $f_2(t)$ با $-3(t-1)$ برابر است.

۴- بهمین ترتیب نیز چون بازای $t>2$، مقدار تابع $H(t)$ با $t-1$ یعنی $(3-t)+2(t-2)$ برابر است، پس $f_3(t)$ با $2(t-2)$ برابر خواهد بود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$H(t)=2t\,U(t)-3(t-1)\,U(t-1)+2(t-2)\,U(t-2)$$

۲-۱-۲- تبدیل لاپلاس در E_0

در اینجا وجود انتگرال $\int_0^{+\infty} |f(t)\exp(-p\,t)|\,dt$ را که در آن $f(t)$ عضوی از مجموعه E_0 است، برای بعضی از مقادیر حقیقی p مورد بررسی قرار میدهیم. این انتگرال همگرا خواهد بود. (به ضمیمه ۵ مراجعه شود) به این منظور ابتدا وجود انتگرال بالا را در مورد دو تابع $t \to \exp(r\,t)U(t)$ و $t \to t\exp(r\,t)U(t)$ که از E_0 هستند مورد مطالعه قرار میدهیم.

الف- بررسی همگرایی مطلق و محاسبه انتگرال $\int_0^{+\infty} \exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt$ بازای مقادیر حقیقی p. اگر r عددی مختلط بصورت $r = b + i\,c$ با $c \neq 0$ فرض شود، برای $A > 0$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^A |\exp[(r-p)t]|\,dt &= \int_0^A |\exp[(b-p)t]|\,|\exp(i\,c\,t)|\,dt \\ &= \int_0^A \exp[(b-p)t]dt \\ &= \frac{\exp[(b-p)A]-1}{b-p}\end{aligned}$$

زیرا $|\exp(i\,c\,t)| = |\cos(c\,t) + i\sin(c\,t)| = \sqrt{\cos^2(c\,t)+\sin^2(c\,t)} = 1$ و $\exp[(b-p)t]$ نیز مثبت و حقیقی است.

چنانچه A به $+\infty$ میل کند، حد $\exp[(b-p)A]$ معمولاً عددی محدود نخواهد بود، مگر آنکه $b - p < 0$ یا p بزرگتر از قسمت حقیقی r باشد. در اینصورت مقدار انتگرال $\int_0^A |\exp[(r-p)t]|\,dt$ وقتیکه A به $+\infty$ میل کند، برابر خواهد شد با: $\frac{1}{p-b}$.

اگر p بزرگتر از مقدار حقیقی r نباشد، انتگرال مورد بحث ممکن است واگرا گردد. مثلاً اگر $p = r$ باشد، خواهیم داشت:

$$\int_0^{+\infty} \exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt = \int_0^{+\infty} dt = +\infty$$

حال اگر تابع $U(t-\alpha)\exp(r\,t)$ بجای تابع $\exp(r\,t)$ در نظر گرفته شود، داریم:

$$\int_0^{+\infty} U(t-\alpha)\exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt = \int_\alpha^{+\infty} \exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt$$

در اینصورت چنانچه p بزرگتر از مقدار حقیقی r باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} U(t-\alpha)\exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt &= \int_\alpha^{+\infty} \exp(r\,t)\exp(-p\,t)\,dt \\ &= \left\{\frac{\exp[(r-p)t]}{r-p}\right\}_\alpha^{+\infty} \\ &= \frac{\exp[(r-p)\alpha]}{p-r}\end{aligned}$$

ب- محاسبه انتگرال $\int_0^{+\infty} t\exp(rt)\exp(-pt)\,dt$:

تابع $t \to f(t)=U(t)\,t\exp(rt)$ را در نظر میگیریم. آنوقت برای $A>0$ و $p\neq r$ داریم: $\int_0^A f(t)\exp(-pt)\,dt=\int_0^A t\exp[(r-p)t]dt$ که با انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_0^A t\exp[(r-p)t]\,dt=\frac{1}{r-p}\{t\exp[(r-p)t]\}_0^A-\frac{1}{r-p}\int_0^A \exp[(r-p)t]\,dt$$
$$=\frac{A}{r-p}\exp[(r-p)A]-\frac{1}{(r-p)^2}\{\exp[(r-p)A]-1\}$$

همانند حالت (الف) چنانچه p بزرگتر از مقدار حقیقی r باشد، آنگاه خواهیم داشت: $\lim_{A\to+\infty}\exp[(r-p)A]=0$ و $\lim_{A\to+\infty}A\exp[(r-p)A]=0$. (این حد را با استفاده از قاعده هوپیتال به آسانی میتوان محاسبه نمود.) بنابراین، اگر p بزرگتر از مقدار حقیقی r باشد، آنگاه داریم: $\int_0^{+\infty} t\exp(rt)\exp(-pt)\,dt=\frac{1}{(p-r)^2}$.

پ- وجود انتگرالهای $\int_0^{+\infty} t^n\exp(rt)\exp(-pt)\,dt$ و $\int_0^{+\infty} U(t-\alpha)t^n\exp(rt)\exp(-pt)\,dt$:

انتگرالهای فوق با انتگرال گیریهای پی در پی بصورت جزء به جزء و با شرط بزرگتر بودن p از مقدار حقیقی r، همگرا بوده و محاسبه میشوند.

<u>تعریف</u>: درتابعی مانند g بصورت $t\to g(t)=k\,U(t-\alpha)t^n\exp(rt)$ که در آن k عددی حقیقی، r مختلط و α عدد حقیقی و مثبت است، r را نمای تابع g مینامیم.

هر تابع f از مجموعه E_0 ، یک ترکیب خطی از توابع g است.

خاصیت: خاصیت زیر را در مورد توابع f که از E_0 باشند، می‌پذیریم:

انتگرال $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ به شرطیکه عدد حقیقی p به بازه $]\sigma(f),+\infty[$ که در آن $\sigma(f)$ از قسمتهای حقیقی نمای توابع تشکیل دهنده f بیشتر یا با بزرگترین آنها برابر باشد، تعلق داشته باشد، همگرای مطلق و در نتیجه همگرا خواهد بود. $\sigma(f)$ را طول همگرایی تابع f مینامیم.

تبصره: خاصیت بالا، شرط کافی برای همگرایی مطلق انتگرال $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ است.

مثال: تحقیق کنید که تابع f از E_0 که بصورت $f(t)=\exp(2t)\cos(3t)U(t)+t\exp(t)\sin(t)U(t-\pi)$ تعریف شده، ترکیب خطی توابعی بصورت $t\to U(t-\alpha)t^n\exp(rt)$ است.

با استفاده از فرمولهای اولر خواهیم داشت:

$$f(t)=U(t)e^{2t}\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}+tU(t-\pi)e^{t}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$
$$=\frac{1}{2}U(t)e^{(2+3i)t}+\frac{1}{2}U(t)e^{(2-3i)t}+\frac{1}{2i}tU(t-\pi)e^{(1+i)t}-\frac{1}{2i}tU(t-\pi)e^{(1-i)t}$$

نماهای توابعی که از ترکیب خطی آنها تابع f تشکیل شده به ترتیب عبارتند از $2+3i$، $2-3i$ ، $1+i$ و $1-i$ که قسمتهای حقیقی این نماها نیز 2 و 1 است. به این ترتیب $\sigma(f)$ برابر خواهد بود با $\max(1,2)$ یا $\sigma(f)=2$ و اگر در انتگرال $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ عدد حقیقی p به بازه $]2,+\infty[$ تعلق داشته باشد، این انتگرال مطلقاً همگرا میشود.

ت-

تعریف: اگر تابع f عضوی از E_0 به طول همگرایی $\sigma(f)$ باشد، بنابه تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ تابعی است مانند F که روی بازه $]\sigma(f),+\infty[$ بصورتهای $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ یا $f(t)\sqsupset$ یا $F(p)=\mathcal{L}(f)$ یا $F(p)=\mathcal{L}[f](p)$ نشان داده میشود. علامت $\mathcal{L}$ مشخص کننده تبدیل لاپلاس $f\to F$ است.

به این ترتیب با توجه به نتایجی که در قسمتهای (الف) و (ب) بدست آمده است، میتوان چنین نوشت: (بشرطیکه p از مقدار حقیقی r بزرگتر باشد.)

$$U(t)\exp(rt)\sqsupset\frac{1}{p-r}$$

$$U(t)\,t\,\exp(rt)\sqsupset\frac{1}{(p-r)^2}$$

تمرین حل شده:

۱- $\mathcal{L}(U)$ را که در آن U تابع پله ای است بیابید.

۲- اگر f_n تابعی بصورت $f_n:t\to t^nU(t)$ باشد، الف- $\sigma(f_n)$ چقدر است؟ ب- رابطه بین $\mathcal{L}(f_n)$ و $\mathcal{L}(f_{n-1})$ را مشخص نمایید.

۳- از بند (ب) در قسمت (۲)، $\mathcal{L}(f_n)$ را نتیجه بگیرید. ($n\in\mathbb{N}$)

حل:

۱- با توجه به تساوی $U(t)=U(t)\exp(0\times t)$ معلوم میگردد که r برابر با صفر بوده و در نتیجه $\sigma(U)$ مساوی صفر است. لذا برای هر $A>0$ و $p>0$، خواهیم داشت:

$$\int_0^A U(t)\exp(-p\,t)\,dt=\int_0^A \exp(-p\,t)\,dt$$
$$=\frac{-1}{p}\left[\exp(-p\,t)\right]_0^A$$
$$=\frac{1-\exp(-p\,A)}{p}$$

چون p مثبت است، اگر A به $+\infty$ میل کند، نتیجه میگیریم $\int_0^{+\infty} U(t)\exp(-p\,t)\,dt=\frac{1-0}{p}=\frac{1}{p}$ یا $U(t)\square\frac{1}{p}$. یعنی $\mathcal{L}(U)=\frac{1}{p}$ یا $\mathcal{L}(U)(p)=\frac{1}{p}$.

۲-

الف- چون n عددی طبیعی است، داریم $t^n\,U(t)=t^n\exp(r\,t)U(t)$. بنابراین، r برابر با صفر است. یعنی طول همگرایی تابع f_n یعنی $\sigma(f_n)$ مساوی صفر است.

ب- داریم $F_n(p)=[\mathcal{L}(f_n)](p)=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^n\exp(-p\,t)dt\right)$. انتگرال $\int_0^A t^n\exp(-p\,t)\,dt$ را با روش جزء به جزء محاسبه میکنیم: ($p>0$)

$$\int_0^A t^n\exp(-p\,t)\,dt=\left[\frac{-t^n\exp(-p\,t)}{p}\right]_0^A+\frac{n}{p}\int_0^A t^{n-1}\exp(-p\,t)\,dt$$

حال اگر عدد مثبت A به $+\infty$ میل کند، از تساوی فوق نتیجه میشود $F_n(p)=\frac{n}{p}F_{n-1}(p)$. با قرار دادن مقادیر $n-1$، $n-2$، $n-3$ و ... و 2 بجای n در رابطه نتیجه شده، به تساویهای زیر خواهیم رسید:

$$F_n(p)=\frac{n}{p}F_{n-1}(p),$$
$$F_{n-1}=\frac{n-1}{p}F_{n-2}(p),$$
$$F_{n-2}(p)=\frac{n-2}{p}F_{n-3}(p),$$
$$\vdots$$
$$F_2(p)=\frac{2}{p}F_1(p),$$
$$F_1(p)=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t\exp(-p\,t)\,dt\right)=\frac{1}{p^2}$$

۳- از ضرب روابط بالا در یکدیگر و قرار دادن مقدار $\frac{1}{p^2}$ بجای $F_1(p)$ نتیجه میگیریم:

$$F_n(p)=\frac{n}{p}\times\frac{n-1}{p}\times\frac{n-2}{p}\times\ldots\times\frac{2}{p}\times\frac{1}{p^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$F_n(p)=[\mathcal{L}(f_n)](p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

یا

$$t^n U(t) \sqsupset \frac{n!}{p^{n+1}}$$

۲-۱-۳- خواص تبدیل لاپلاس در E_0

الف- خطی بودن: اگر $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع از E_0 و α و β اعداد مختلط غیر مشخصی باشند و داشته باشیم: $h(t)=\alpha\ f(t)+\beta\ g(t)$

بطوریکه $f(t) \sqsupset F(p)$، $g(t) \sqsupset G(p)$ و $h(t) \sqsupset H(p)$. $H(p)$ روی بازه $]\sigma(h),+\infty[$ تعریف شده و $\sigma(h)$ بزرگترین قسمت حقیقی از نماهای توابع f و g است. در اینصورت با توجه به آنچه که قبلاً در مورد محاسبه $F(p)$ و $G(p)$ دانستیم، خواهیم داشت: $H(p)=\alpha\ F(p)+\beta\ G(p)$ زیرا داریم:

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A[\alpha\ f(t)+\beta\ g(t)]\exp(-pt)\,dt\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A[\alpha\ f(t)]\exp(-pt)\,dt\right)+\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A[\beta\ g(t)]\exp(-pt)\,dt\right)$$

پس اگر $f(t) \sqsupset F(p)$ و $g(t) \sqsupset G(p)$ باشد، از تساوی بالا نتیجه میشود $(\alpha f(t)+\beta g(t)) \sqsupset \alpha F(p)+\beta G(p)$ یا $H(p)=\alpha\ F(p)+\beta\ G(p)$.

مثال: تبدیلهای لاپلاس توابع $f(t)=\cos(t)U(t)$ و $g(t)=\sin(t)U(t)$ را تعیین کنید.

با استفاده از فرمولهای $\sin(t)=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)$ و $\cos(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$ و قرار دادن این مقادیر بجای $\cos(t)$ و $\sin(t)$ در توابع f و g، خواهیم داشت:

$$f(t)=\frac{1}{2}\exp(it)U(t)+\frac{1}{2}\exp(-it)U(t)$$

$$g(t)=\frac{1}{2i}\exp(it)U(t)-\frac{1}{2i}\exp(-it)U(t)$$

حال با قرار دادن $h_1(t)=\exp(it)U(t)$ و $h_2(t)=\exp(-it)U(t)$ و توجه به اینکه هر دو مقدار $\sigma(h_1)$ و $\sigma(h_2)$ برابر با صفرند. با استفاده از قسمت (ت) در بخش (۱-۲) نتیجه میگیریم: $h_1(t) \sqsupset H_1(p)=\frac{1}{p-i}$ و $h_2(t) \sqsupset H_2(p)=\frac{1}{p+i}$. چون داشتیم: $f(t)=\frac{1}{2}h_1(t)+\frac{1}{2}h_2(t)$ با استفاده از خاصیت خطی بودن، خواهیم داشت: ($p>0$)

$$\mathcal{L}(f)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(h_1)+\frac{1}{2}\mathcal{L}(h_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right)=\frac{p}{p^2+1}$$

یا $\cos(t)U(t) \sqsupset \dfrac{p}{p^2+1}$. به همین ترتیب نیز داریم: $g(t) = \dfrac{1}{2i}\exp(it)U(t) - \dfrac{1}{2i}\exp(-it)U(t)$ یا $g(t) = \dfrac{1}{2i}h_1(t) - \dfrac{1}{2i}h_2(t)$ و برای $p > 0$ داریم: $\sin(t)U(t) \sqsupset \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i} - \dfrac{1}{p+i}\right)$ یا $\sin(t)U(t) \sqsupset \dfrac{1}{p^2+1}$.

ب- تبدیل یک انبساط $f(at)$ $(a \in \mathbb{R}^{*+}) : t \to$

اگر $f(t)$ تابعی از E_0 و a یک عدد حقیقی و مثبت باشد، تبدیل لاپلاس تابع $f(at)$ عبارتست از $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(at)\exp(-pt)\,dt\right)$ تحت شرایط $A > 0$ و $p > a\,\sigma(f(t))$.

انتگرال بالا با تغییر متغیر $u = at$ محاسبه میگردد. داریم $t = \dfrac{u}{a}$ و لذا $dt = \dfrac{du}{a}$. از طرفی بازای $t = 0$ داریم $u = 0$ و بازای $t = A$، داریم $u = aA$. (a عددی حقیقی و مثبت است)
لذا

$$\int_0^A f(at)\exp(-pt)\,dt = \int_0^{aA} f(u)\exp(-pu/a)\frac{1}{a}du$$

و

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(at)\exp(-pt)\,dt\right) = \frac{1}{a}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^{aA} f(u)\exp(-pu/a)du\right)$$

این نتیجه به این معناست که اگر $f(t) \sqsupset F(p)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع $f(at)$ برای عدد حقیقی و مثبت a و $p > a\,\sigma(f)$ برابر خواهد بود با $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$ یا $f(at) \sqsupset \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $h(t) = \cos(\omega t)U(t)$ را که در آن $\omega > 0$ است بیابید.
به این منظور تابع $f(t) = \cos(t)U(t)$ را که از E_0 است، در نظر گرفته، داریم: $f(\omega t) = \cos(\omega t)U(\omega t)$. چون بنا به فرض ω مثبت است، پس $U(\omega t)$ با $U(t)$ برابر میگردد. پس به این ترتیب خواهیم داشت $f(\omega t) = \cos(\omega t)U(t)$. اما در مثال قبلی به این نتیجه رسیدیم که $\cos(t)U(t) \sqsupset \dfrac{p}{p^2+1}$، بنابراین بر طبق خاصیت انبساط، خواهیم داشت (برای $p/\omega > 0$) $\cos(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{1}{\omega}\dfrac{p/\omega}{(p/\omega)^2+1}$ یا (برای $p > 0$ زیرا $\omega > 0$ است) داریم $\cos(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$. به روش مشابه نتیجه میشود که برای $p > 0$ داریم: $\sin(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

پ- تبدیل یک انتقال $f(t-\tau)$ برای $t \to$ $\tau \in \mathbb{R}^{*+}$:

اگر $f(t)$ تابعی از E_0 و τ یک عدد حقیقی و مثبت باشد، تبدیل لاپلاس انتقال $t \to f(t-\tau)$ به شرط $p > \sigma(f)$ برابر است با $\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(t-\tau)\exp(-pt)\,dt\right)$.

بمنظور محاسبه انتگرال فوق، از تغییر متغیر $t-\tau=u$ استفاده نموده، خواهیم داشت: ($t=0 \to u=-\tau$ و $t=A \to u=A-\tau$)

$$\int_0^A f(t-\tau)\exp(-pt)\,dt = \int_{-\tau}^{A-\tau} f(u)\exp[-(p\tau+pu)]\,du$$

$$= \exp(-p\tau)\int_{-\tau}^{A-\tau} f(u)\exp(-pu)\,du$$

$$= \exp(-p\tau)\left\{\int_{-\tau}^{0} f(u)\exp(-pu)\,du + \int_{0}^{A-\tau} f(u)\exp(-pu)\,du\right\}$$

اما چون $f(t)$ تابعی از E_0 است و در بازه $(-\tau,0)$ برابر با صفر میگردد، لذا انتگرال $\int_{-\tau}^{0} f(u)\exp(-pu)\,du$ مساوی با صفر بوده و در نتیجه داریم:

$$\int_0^A f(t-\tau)\exp(-pt)\,dt = \exp(-p\tau)\int_0^{A-\tau} f(u)\exp(-pu)\,du$$

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(t-\tau)\exp(-pt)\,dt\right) = \exp(-p\tau)\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^{A-\tau} f(u)\exp(-pu)\,du\right)$$

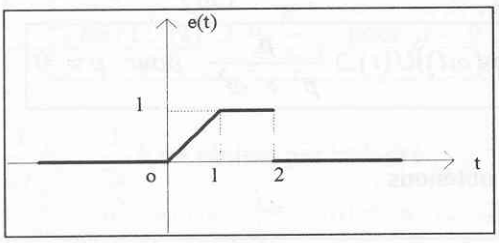
توجه شود که وقتی A به $+\infty$ میل میکند، $A-\tau$ نیز به $+\infty$ میل میکند. بنابراین نتیجه میگیریم که: (با شرط $p > \sigma(f)$)

$$f(t) \sqsupset F(p) \quad \to \quad f(t-\tau) \sqsupset \exp(-p\tau)F(p)$$

تبصره مهم: اگر $f(t)$ تابع سببی نباشد (از E_0 نباشد)، در اینصورت تابع $g(t) = f(t)U(t)$ یک تابع سببی بوده و دارای تبدیل لاپلاس است. واضح است که تابع $t \to f(t-\tau)$، انتقال یافته تابع $g(t)$ نبوده و تابع $t \to f(t-\tau)U(t-\tau)$ تابع انتقالی g است. با توجه به مطالبی که در بالا ذکر شد، خواهیم داشت: (با شرط $p > \sigma(f)$)

$$f(t)U(t) \sqsupset F(p) \quad \to \quad f(t-\tau)U(t-\tau) \sqsupset \exp(-p\tau)F(p)$$

مثال ۱: تبدیل لاپلاس سیگنال $t \to e(t)$ را که نمودار آن در شکل ۲-۷ رسم گردیده محاسبه نمایید.

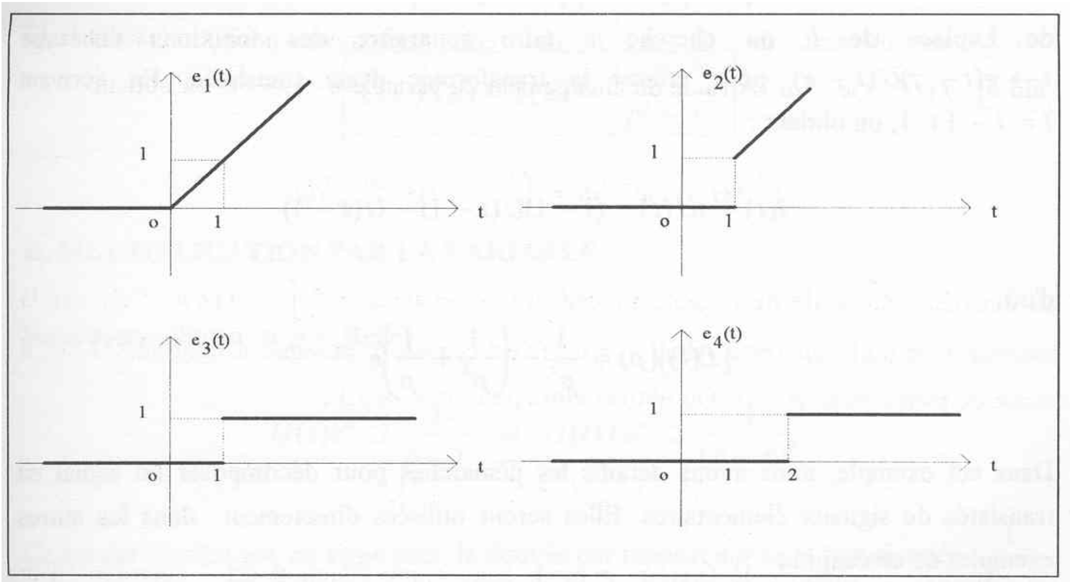


شکل۲-۷: نمودار تابع $e(t)$

از نمودار داده شده به نتایج زیر دست می‌یابیم:

$t \le 0:$	$e(t) = 0$				
$0 < t < 1:$	$e(t) = t$	یا	$e(t) = tU(t)$		
$t = 1:$	$e(t) = 1$				
$1 < t < 2:$	$e(t) = 1$	یا	$e(t) = t + (1-t)$	یا	$e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$
$t = 2:$	$e(t) = 0$				
$t > 2:$	$e(t) = 0$	یا	$e(t) = t + (1-t) - 1$	یا	$e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1) - U(t-2)$

از شکل ۲-۸ نیز میتوان به تساوی $e(t) = tU(t) - tU(t-1) + U(t-1) - U(t-2)$ رسید.



شکل۲-۸: نمودار توابع e_1، e_2، e_3 و e_4

بنابراین خواهیم داشت: $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1) - U(t-2)$ که همه نتایج درج شده در جدول بالا در آن وجود دارد. حال برای تعیین تبدیل تابع $e(t)$ از خواص تبدیل لاپلاس بصورت زیر استفاده مینماییم:

برای تابع انتقالی تابع $tU(t)$ با شرط $p > 0$ داریم:

$$tU(t) \sqsupset \frac{1}{p^2} \quad \rightarrow \quad (t-1)U(t-1) \sqsupset \frac{\exp(-p)}{p^2}$$

همچنین برای تابع انتقالی $U(t)$ داریم:

$$U(t) \sqsupset \frac{1}{p} \quad \rightarrow \quad U(t-2) \sqsupset \frac{\exp(-2p)}{p}$$

بنابراین برای تابع $e(t)$ که دارای رابطه خطی با توابع $tU(t)$، $(t-1)U(t-1)$ و $U(t-2)$ است، با شرط $p > 0$ خواهیم داشت: (خاصیت خطی تبدیل)

$$e(t)=t\,U(t)-(t-1)U(t-1)-U(t-2) \sqsupset \frac{1}{p^2}-\frac{\exp(-p)}{p^2}-\frac{\exp(-2p)}{p}$$

یا ($p>0$)

$$\left(\mathcal{L}[e]\right)(p)=E(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{\exp(-p)}{p^2}-\frac{\exp(-2p)}{p}$$

تبصره ۱: تبدیل لاپلاس تابع $t \to e(t)$ را بطور مستقیم نیز بصورت زیر میتوان محاسبه نمود:

$$\int_0^{+\infty} e(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty} t\,U(t)\,e^{-pt}\,dt-\int_0^{+\infty} t\,U(t-1)\,e^{-pt}\,dt+\int_0^{+\infty} U(t-1)\,e^{-pt}dt-\int_0^{+\infty} U(t-2)\,e^{-pt}\,dt$$

$$=\left[\int_0^{1} t\,e^{-pt}\,dt+\int_1^{+\infty} t\,e^{-pt}\,dt\right]-\int_1^{+\infty} t\,e^{-pt}\,dt+\int_1^{+\infty} e^{-pt}\,dt-\int_2^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

$$=\int_0^{1} t\,e^{-pt}\,dt+\left[\int_1^{2} e^{-pt}\,dt+\int_2^{+\infty} e^{-pt}\,dt\right]-\int_2^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

نتیجه اینکه محاسبه تبدیل لاپلاس تابع $e(t)$ بـه محاسـبه دو انتـگرال معـین بصـورت $\int_0^1 t\,e^{-pt}dt+\int_1^2 e^{-pt}dt$ منجر میگردد که اولی به روش جزء به جزء و دومی نیز به شکل ساده ای قابل محاسبه است.

تبصره ۲: در محاسبه تبدیل لاپلاس برخی از سیگنالها، ابتدا آنها را به سیگنالهای مقدماتی بدل نموده سپس بکمک تبدیلهای این سیگنالهای مقدماتی تبدیل مورد نظر را محاسـبه میکنـیم. مـثلاً بـرای تعیـین تبـدیل لاپـلاس تـابع (سیگنال) $l(t)=t\,U(t)-t\,U(t-1)$ چنین مینویسیم:

$$l(t)=t\,U(t)-(t-1)\,U(t-1)-U(t-1)$$

اما برای $p>0$ داریم:

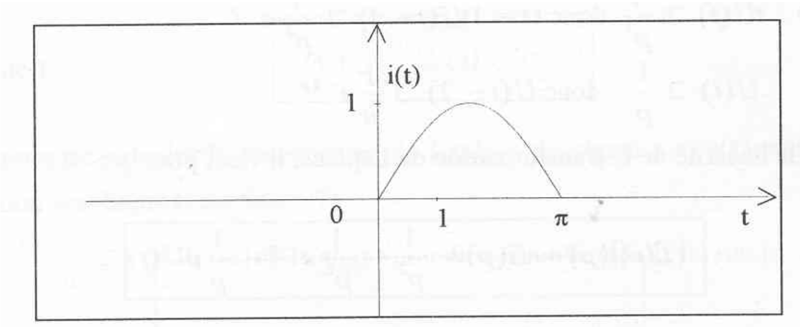
$$\begin{cases} t\,U(t)\sqsupset\dfrac{1}{p^2} & \to \quad (t-1)U(t-1)\sqsupset\dfrac{\exp(-p)}{p^2} \\ \quad U(t)\sqsupset\dfrac{1}{p} & \to \quad U(t-1)\sqsupset\dfrac{\exp(-p)}{p} \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت: $l(t)\sqsupset\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{\exp(-p)}{p^2}-\dfrac{\exp(-p)}{p}$. این عمل در مثالهای دیگـر ایـن فصـل نیـز تکـرار میگردد.

مثال ۲: تبدیل لاپلاس سیگنالی را که بصورت $t \to i(t)$ بوده و بصورت زیر تعریف میگردد، محاسبه کنید.

$$\begin{cases} i(t)=\sin(t) & 0\le t\le\pi \\ \quad i(t)=0 & t<0,\ t>\pi \end{cases}$$

نمودار تابع $i(t)$ در شکل ۲-۹ نشان داده شده است.



شکل۲-۹: نمودار تابع $i(t)$

سیگنال $i(t)$ را با توجه به تعریف آن میتوان بصورت $i(t)=\sin(t)\left[U(t)-U(t-\pi)\right]$ یا یکی از دو صورت دیگر $i(t)=\sin(t)U(t)-\sin(t)U(t-\pi)$ یا $i(t)=\sin(t)U(t)+\sin(t-\pi)U(t-\pi)$ نوشت. اما داشتیم $\sin(t)U(t)\sqsupset\dfrac{1}{p^2+1}$، در نتیجه بنا به خاصیت انتقال خواهیم داشت: $\sin(t-\pi)U(t-\pi)\sqsupset\dfrac{\exp(-p\pi)}{p^2+1}$. به این ترتیب تبدیل لاپلاس سیگنال $i(t)$ عبارت خواهد بود از: $i(t)\sqsupset\dfrac{1+\exp(-p\pi)}{p^2+1}$ یا با شرط $p>0$ داریم:

$$\left(\mathcal{L}(i)\right)(p)=I(p)=\frac{1+\exp(-p\pi)}{p^2+1}$$

ت- ضرب در متغیر:

از قبل دانستیم که با شرط $p>\mathrm{Re}(r)$، که نماد Re نماینده قسمت حقیقی عدد موهومی r است، تبدیلات لاپلاس توابع $U(t)\exp(rt)$ و $U(t)t\exp(rt)$ به ترتیب عباتند از: $\dfrac{1}{p-r}$ و $\dfrac{1}{(p-r)^2}$ که تبدیل دوم، صرفنظر از ضریب -1 با مشتق تبدیل اول نسبت به p برابر است. این موضوع در مورد همه توابعی که به مجموعه E_0 تعلق داشته باشند قابل تعمیم است. یعنی اگر تابع $f(t)$ از E_0 باشد، داریم: (با شرط $p>\sigma(f)$)

$$f(t)\sqsupset F(p)\quad\rightarrow\quad(-t)f(t)\sqsupset\frac{dF(p)}{dp}$$

با فرض $(-t)f(t)=g(t)$، همین مطلب در مورد تابع جدید $g(t)$ نیز صدق میکند. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$(-t)f(t)=g(t)\sqsupset\frac{dF(p)}{dp}\quad\rightarrow\quad(-t)^2f(t)=(-t)g(t)\sqsupset\frac{d}{dp}\left(\frac{dF(p)}{dp}\right)$$

و با شرط $p>\sigma(f)$ داریم:

$$(-t)^2f(t)\sqsupset\frac{d^2F(p)}{dp^2}$$

و با تکرار همین عمل نتیجه میگیریم: (با شرط $p>\sigma(f)$)

$$(-t)^nf(t)\sqsupset\frac{d^nF(p)}{dp^n}$$

مثال: قبلاً دانستیم که

$$\begin{cases} \sin(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} & p>0 \\ \cos(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{p}{p^2+\omega^2} & p>0 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت: (اگر $p > 0$)

$$t\sin(\omega t)U(t) \sqsupset \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \qquad \text{یا} \qquad t\sin(\omega t)U(t) \sqsupset \frac{-d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$

و

$$t\cos(\omega t)U(t) \sqsupset \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \qquad \text{یا} \qquad t\cos(\omega t)U(t) \sqsupset \frac{-d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)$$

ث- ضرب بوسیله $\exp(-a\,t)$ که در آن a عددی حقیقی است.

بمنظور محاسبه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)\exp(-a\,t)$ که در آن f تابعی از E_0 است، از روش کلی محاسبه تبدیل توابع استفاده نموده، خواهیم داشت:

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A f(t)\exp(-a\,t)\exp(-p\,t)\,dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\exp[-(a+p)\,t]\,dt$$

با توجه به اینکه برای $p > 0$ میدانیم $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-p\,t)\,dt = F(p)$، لذا (بشرط $a + p > \sigma(f)$ یا $p > -a + \sigma(f)$) نتیجه میگیریم $\int_0^{+\infty} f(t)\exp[-(a+p)t]dt = F(a+p)$. پس بشرطی که $p > -a + \sigma(f)$ باشد، از $f(t) \sqsupset F(p)$ نتیجه میشود $f(t)\exp(-a\,t) \sqsupset F(a+p)$.

مثال: میدانیم

$$\begin{cases} \sin(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ \cos(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از خاصیت ذکر شده (ث) خواهیم داشت: (a عددی حقیقی است)

$$\begin{cases} \exp(-a\,t)\cos(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} & p>-a \\ \exp(-a\,t)\sin(\omega t)U(t) \sqsupset \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2} & p>-a \end{cases}$$

ج- تبدیل یک مشتق:

میدانیم که اگر $f(t)$ تابعی از E_0 باشد؛ در اینصورت مقدار $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ که آنرا با $f(0^+)$ نشان میدهیم به مجموعه $\mathcal{C}$ تعلق خواهد داشت. همچنین میدانیم که برای $p>\sigma(f)$، $F(p)$ برابر است با $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$. حال اگر $f(t)$ را تابعی از کلاس C^1 بر بازه $]0,+\infty[$ نیز فرض نموده و مشتق آن f' نیز بر این بازه پیوسته باشد، خواهیم داشت: (محاسبه به روش جزء به جزء)

$$\int_\varepsilon^A f'(t)\exp(-pt)\,dt = \left[f(t)\exp(-pt)\right]_\varepsilon^A + p\int_\varepsilon^A f(t)\exp(-pt)\,dt$$

چنانچه A به $+\infty$ و ε به صفر میل کند و شرط $p>\sigma(f)$ برقرار باشد، از رابطه بالا نتیجه میگیریم:

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\exp(-pt)\,dt = -f(0^+) + pF(p)$$

زیرا واضح است که اگر A به $+\infty$ میل کند، $\lim_{A\to+\infty} f(t)\exp(-pA)$ برابر با صفر میشود. پس خواهیم داشت

$\mathcal{L}[f'](p) = p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$ یا

$$f(t)\sqsupset F(p) \quad\to\quad f'(t)\sqsupset pF(p)-f(0^+)$$

ثابت میگردد که اگر f' بر بازه $]0,+\infty[$ حتی پیوسته قطعه ای هم باشد، فرمول بدیت آمده صحیح است.

بهمین ترتیب نیز اگر $f'(t)$ بر بازه $]0,+\infty[$ پیوسته باشد، داریم:

$$\mathcal{L}[f''](p) = p\,\mathcal{L}[f'](p) - f'(0^+)$$

یا

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2\,\mathcal{L}[f](p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

یا

$$f(t)\sqsupset F(p) \quad\to\quad f''(t)\sqsupset p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

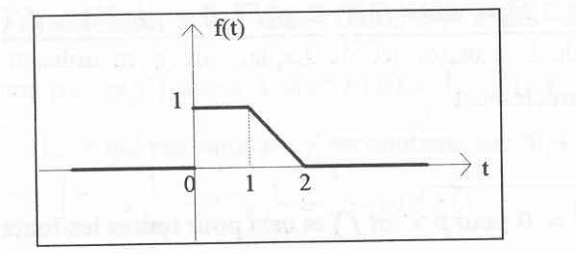
مثال ۱: محاسبه تبدیل لاپلاس مشتق تابع $f(t)=\cos(\omega t)U(t)$.

<u>محاسبه مستقیم</u>- میدانیم $f'(t) = -\omega\sin(\omega t)U(t) + \cos(\omega t)U'(t)$. اما چون $U'(t)$ بر بازه $]0,+\infty[$ صفر میگردد، روی بازه $]0,+\infty[$ خواهیم داشت: $f'(t) = -\omega\sin(\omega t)U(t)$. البته $f'(t)$ در صفر وجود ندارد. (در صفر $f(t)$ ناپیوسته است.) بنابراین با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع $\sin(\omega t)U(t)$ که قبلاً محاسبه گردید، نتیجه میگیریم که با شرط $p>0$: $f'(t)\sqsupset -\dfrac{\omega^2}{p^2+\omega^2}$.

<u>با استفاده از فرمول مربوط به تبدیل مشتق</u>: داریم $f(t)\sqsupset F(p) \to f'(t)\sqsupset pF(p)-f(0^+)$. اما چون در مورد تابع $f(t)=\cos(\omega t)U(t)$، $f(0^+)$ برابر با یک است و $F(p)$ نیز با $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ مساویست، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f'](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} - 1 \quad\to\quad f'(t)\sqsupset \frac{-\omega^2}{p^2+\omega^2}$$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس مشتق تابع $f(t)$ را که نمودار آن در شکل ۲-۱۰ نمایش داده شده است، محاسبه کنید.



شکل۲-۱۰: نمودار تابع $f(t)$

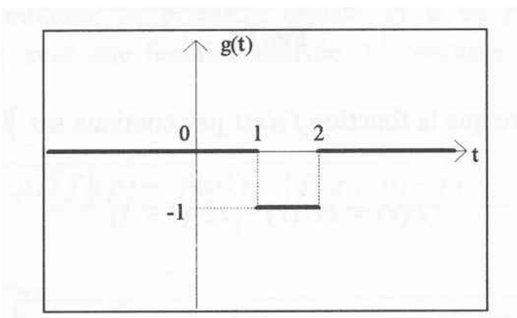
مقادیری که برای تابع در نمودار مشخص شده اند بشرح زیر هستند:

$$\begin{cases} f(t)=0, & t<0 \\ f(t)=1, & 0\le t\le 1 \\ f(t)=2-t=1+(1-t), & 1<t<2 \\ f(t)=0=1+(1-t)+(t-2), & 2\le t \end{cases}$$

بنابراین به آسانی میتوان تشخیص داد که تابع f بصورت $f(t)=U(t)-(t-1)U(t-1)+(t-2)U(t-2)$ است. لذا با توجه به تبدیلهایی که برای هر یک از توابع طرف دوم تساوی فوق میشناسیم، خواهیم داشت: (با شرط $p>0$)

$$\mathcal{L}[f](p)=F(p)=\frac{1}{p}-\frac{\exp(-p)}{p^2}+\frac{\exp(-2p)}{p^2}$$

حال مشتق تابع $f(t)$ را بر بازه های $]-\infty,0[$ ، $]0,1[$ ، $]1,2[$ و $]2,+\infty[$ محاسبه مینماییم. این مشتقها به ترتیب عبارتند از 0، 0، -1 و صفر. به این ترتیب بکمک مقادیر بدست آمده، $f'(t)$ و نمودار آن بسادگی مشخص میگردند.



شکل ۲-۱۱: مشتق تابع $f'(t)=-U(t-1)+U(t-2)$

در نتیجه با توجه به فرمولهایی که قبلاً بدست آمده اند خواهیم داشت: (با شرط $p>0$)

$$\mathcal{L}[f'](p)=-\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p}$$

باید یادآور شویم که محاسبه تبدیل $f'(t)$ را بکمک فرمول مربوط به محاسبه تبدیل مشتق نیز بصورتی آسان میتوان انجام داد. چونکه هم تابع $f(t)$ بر بازه $]0,+\infty[$ پیوسته بوده و هم مشتق آن بر این بازه پیوسته قطعه ای است، بنابراین داریم:

$$\mathcal{L}[f'](p)=pF(p)-f(0^+)$$

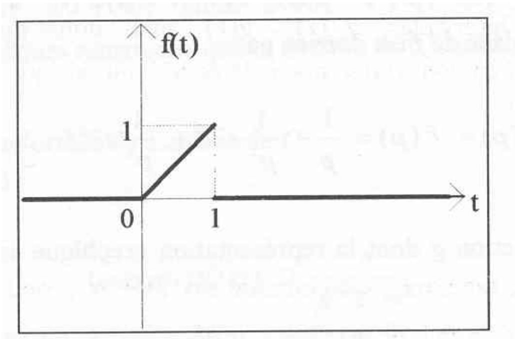
جون در تابع $f(t)$ مقدار $f(0^+)$ برابر با یک است، نتیجه میگیریم: ($p>0$)

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\left(\frac{1}{p} - \frac{\exp(-p)}{p^2} + \frac{\exp(-2p)}{p^2}\right) - 1$$
$$= \frac{-\exp(-p)}{p} + \frac{\exp(-2p)}{p}$$

مثال ۳: تبدیل مشتق تابعی را که نمودار آن در شکل ۲-۱۲ نمایش داده شده است، محاسبه نمایید.

مقادیر تابع مربوط به نمودار داده شده را بشرح زیر تعیین نموده و بکمک این مقادیر تابع را مشخص میسازیم.

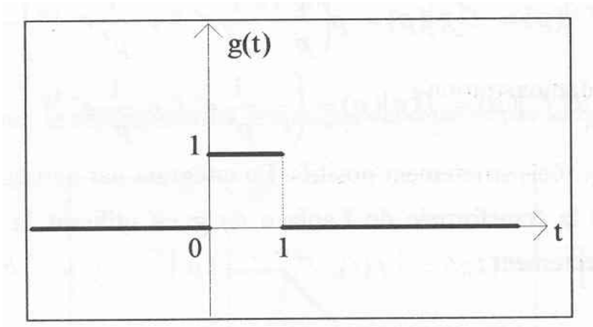
$$\begin{cases} f(t) = 0, & t \le 0 \\ f(t) = t, & 0 < t < 1 \\ f(t) = 0 = t - t & 1 \le t \end{cases}$$



شکل ۲-۱۲: منحنی تابع $f(t)$

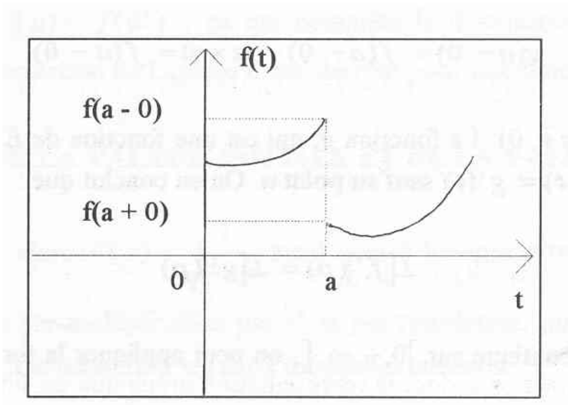
بنابراین خواهیم داشت: $f(t) = tU(t) - tU(t-1)$ یا $f(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1) - U(t-1)$. (به کمک نمودارهای دو تابع $tU(t)$ و $tU(t-1)$ نیز میتوان به همین نتیجه رسید.) از نمودار تابع مزبور معلوم میگردد که تابع f بر بازه $]0, +\infty[$ پیوسته نیست (در نقطه ۱ ناپیوسته است). لذا بدلیل عدم وجود پیوستگی، نمیتوان از فرمول تبدیل مشتق که در مثالهای قبل مورد استفاده قرار گرفته در این مثال نیز بهره برد. این مطلب را بصورت عملی در زیر مورد بررسی قرار میدهیم.

داریم: $f'(t) = U(t) - U(t-1) = g(t)$. شکل ۲-۱۳ نمودار تابع $g(t)$ را نشان میدهد. در نتیجه خواهیم داشت: $\mathcal{L}[g](p) = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-p)}{p}$. در مورد تابع f نیز داریم: $f(0^+) = 0$ و $\mathcal{L}[f](p) = \frac{1}{p^2} - \frac{\exp(-p)}{p^2} - \frac{\exp(-p)}{p}$. (بر طبق فرمولهای قبلی تبدیلها نوشته شده اند). کاملاً پیداست که $p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$ با $\mathcal{L}[g]$ برابر نیست. یعنی فرمول قبلی در مورد تبدیل مشتق، در باره مشتق تابع f برقرار نیست.



شکل ۲-۱۳: منحنی تابع $g(t)$

ناپیوستگی تابع $f(t)$ در نقطه a در شکل ۲-۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۲-۱۴: منحنی تابع $f(t)$

اینک فرمولی که در چنین مواردی باید از آن در محاسبه تبدیل مشتق استفاده نمود، ارائه میگردد.

موارد استفاده و فرمول مربوط:

در توابعی که بجز نقطه a، ($a>0$) که تابع در آن دارای انفصالی از نوع اول است در سایر نقاط بازه $]0,+\infty[$ پیوسته باشد و بعلاوه بر بازه های $]0,a[$ و $]a,+\infty[$ مشتق پذیر و دارای مشتق پیوسته باشد، بمنظور تبدیل مشتق از فرمول زیر استفاده میکنیم:

$$\mathcal{L}[f'](p)=p\,\mathcal{L}[f](p)-f(0^+)-[f(a+0)-f(a-0)]\exp(-a\,p)$$

اثبات اول: اگر ε و μ دو عدد حقیقی و مثبت باشند، در اینصورت داریم:

$$\int_{\varepsilon}^{a-\mu} f'(t)\exp(-p\,t)\,dt=[f(t)\exp(-p\,t)]_{\varepsilon}^{a-\mu}+p\int_{\varepsilon}^{a-\mu} f(t)\exp(-p\,t)\,dt$$

همچنین با انتگرالگیری جزء به جزء بدست میآوریم:

$$\int_{a+\mu}^{A} f'(t)\exp(-p\,t)\,dt=[f(t)\exp(-p\,t)]_{a+\mu}^{A}+p\int_{a+\mu}^{A} f(t)\exp(-p\,t)\,dt$$

اگر A به $+\infty$ و ε و μ به صفر میل کنند، برای $p>\sigma(f)$ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{a} f'(t)\exp(-p\,t)\,dt=f(a-0)\exp(-p\,a)-f(0^+)+p\int_{0}^{a} f(t)\exp(-p\,t)\,dt$$

و

$$\int_a^{+\infty} f'(t)\exp(-pt)dt = -f(a+0)\exp(-pa) + p\int_a^{+\infty} f(t)\exp(-pt)dt$$

بنابراین میتوان نوشت:

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pa}\,dt = \int_0^{a} f'(t)e^{-pa}\,dt + \int_a^{+\infty} f'(t)e^{-pa}\,dt$$
$$= f(a-0)e^{-pa} - f(a+0)e^{-pa} - f(0^+) + p\left(\int_0^a f(t)e^{-pa}dt + \int_a^{+\infty} f(t)e^{-pa}dt\right)$$
$$= p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pa}dt - f(0^+) - [f(a+0)-f(a-0)]e^{-pa}$$

که به این ترتیب فرمول مزبور اثبات گردید.

اثبات دوم: تساوی $\alpha = f(a+0) - f(a-0)$ و تابع g تعریف شده بصورت $g(t) = f(t) - \alpha U(t-a)$ را در نظر میگیریم. α را جهش تابع f به نقطه a مینامیم. داریم: $g(a+0) = f(a+0) - \alpha\times 1$ یا $g(a+0) = f(a-0)$ و همچنین داریم: $g(a-0) = f(a-0) - \alpha\times 0$ یا $g(a-0) = f(a-0)$. بنابراین خواهیم داشت: $g(a+0) = g(a-0)$. این نتیجه بمعنی آن است که تابع g در a پیوسته است. اما g تابعی است از E_0 و $g'(t) = f'(t)$. (کافیست از تابع $g(t) = f(t) - \alpha U(t-a)$ مشتق بگیریم.) پس به این ترتیب تابع g هم بر بازه $]0,+\infty[$ پیوسته بوده و جز در نقطه a، مشتق آن هم با $f'(t)$ برابر است. لذا میتوان از فرمول قبلی در مورد تبدیل مشتق، برای تابع g استفاده نمود. خواهیم داشت: $\mathcal{L}[g'](p) = p\,\mathcal{L}[g](p) - g(0^+)$ یا

$$\mathcal{L}[f'](p) = \mathcal{L}[g'](p) = p\left(\mathcal{L}[f](p) + \alpha\frac{\exp(-ap)}{p}\right) - f(0^+)$$

زیرا از رابطه ای که g با آن تعریف گردیده، میتوان پی برد که $g(0^+)$ با $f(0^+)$ برابر است.

حال چنانچه رابطه آخر را ساده نموده و در آن بجای α عبارت $f(a+0) - f(a-0)$ را قرار دهیم، حکم اثبات میگردد.

اینک با فرمول جدید به حل مثال ۳ می پردازیم: خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\exp(-p)}{p^2} - \frac{\exp(-p)}{p}\right) - 0 - [f(1+0) - f(1-0)]\exp(-1\times p)$$

چون $f(0^+) = 0$ ، $f(1+0) = 0$ و $f(1-0) = 1$ است، (رجوع شود به نمودار تابع f) لذا نتیجه میشود:

$$\mathcal{L}[f'](p) = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-p)}{p} \quad\rightarrow\quad \mathcal{L}[f'](p) = \mathcal{L}[g](p) = G(p)$$

تبصره- فرمولی که بدست آمده یک فرمول کلی است. چنانچه تابع مورد بحث بر بازه $]0,+\infty[$ از جمله در نقطه a نیز پیوسته باشد، $f(a+0)$ و $f(a-0)$ متساوی شده و فرمول جدید به فرمول قبلی تبدیل میگردد.

چ- قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی:

دانستیم که اگر تابع $f(t)$ بصورت $f(t) = \exp(rt)U(t)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع f یعنی $F(p)$ برابر است با $\frac{1}{p-r}$. واضح است که اگر p به $+\infty$ میل کند، حد $F(p)$ برابر با صفر میگردد. چنین خاصیتی در مورد هر تابعی که از E_0 باشد، برقرار است و با انتقال یا ضرب آن در t^n و یا بشرط خطی بودن تابع تغییر نخواهد کرد. بعلاوه دو قضیه زیر در مورد توابعی که از E_0 باشند، صادق است که آنها را بدون اثبات می پذیریم.

قضیه مقدار اولی: اگر f تابعی از E_0 بوده و تبدیل لاپلاس آن $F(p)$ باشد، در اینصورت روابط زیر برقرارند:

$$\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$$

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

قضیه مقدار نهایی: چنانچه f تابعی از E_0 بوده و تبدیل لاپلاس آن F باشد، بشرط آنکه $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ وجود داشته و کران دار باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

مثال ۱: تابع $f(t) = \exp(rt)U(t)$ را در نظر گرفته و صحت قضایای فوق را در باره آن مورد بررسی قرار دهید.

میدانیم که اگر در تابع f، $p > \mathrm{Re}(r)$ باشد، داریم: $F(p) = \frac{1}{p-r}$. بنابراین خواهیم داشت: $\lim_{p\to+\infty} F(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p-r} = 0$ و همچنین $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{p\to+\infty} p\frac{1}{p-r} = 1$ و چون در تابع مزبور $f(0^+)$ برابر با یک است، پس $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = 1 = f(0^+)$. اما چنانچه در f، r برابر با صفر شود، تابع f بصورت $f(t) = U(t)$ در خواهد آمد که در اینصورت $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ برابر با یک میگردد که با $\lim_{p\to 0} pF(p)$ یعنی با $\lim_{p\to 0} p\frac{1}{p}$ یا یک برابر است. به این ترتیب صحت هر دو قضیه پیش گفته در مورد تابع f معلوم میگردد.
البته اگر $f(t) = \exp(2t)U(t)$ باشد، قضیه دوم در باره اش صدق نمیکند زیرا در اینصورت $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ است.

مثال ۲: بررسی قضایای مقادیر اولیه و نهایی در مورد تابع $g(t) = \cos(t)U(t)$.

برای $p > 0$ داریم $G(p) = \frac{p}{p^2+1}$. همچنین $g(0^+) = 1$ است، لذا خواهیم داشت $\lim_{p\to+\infty} pG(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{p^2}{p^2+1} = 1$ یا $\lim_{p\to+\infty} pG(p) = g(0^+)$ و همچنین $\lim_{p\to+\infty} G(p) = 0$.

اما در مورد قضیه مقدار نهایی، چون حد $\lim_{t\to+\infty}\cos(t)U(t)$ وجود ندارد، از اینرو اصولاً طرح قضیه مزبور مورد پیدا نمیکند.

تبصره: قضایای مذکور اکثراً در فیزیک مورد استفاده قرار میگیرند. قضیه مقدار اولیه بمنظور مشخص شدن شرایط اولیه و قضیه مقدار نهایی برای شناخت رفتار سیستم وقتیکه t به $+\infty$ میل میکند، بکار میروند.

۲-۱-۴- کانولوشن در E_0

الف- تعریف: بنابه تعریف کانولوشن دو تابع f و g که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشند، تابعی است بصورت $h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$. تابع $h(x)$ را به شکل $(f*g)(x)$ نشان میدهیم. (انتگرال مزبور باید همگرا باشد). اگر f تابع سببی باشد، چون بازای t های کمتر از صفر، مقدار تابع برابر با صفر میگردد، در اینصورت $h(x)$ بصورت $h(x)=(f*g)(x)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$ خواهد بود. چنانچه g نیز تابع سببی باشد، خواهیم داشت:

$$x<0 \quad\to\quad x-t<0 \quad\to\quad h(x)=0$$

$$x\geq 0 \quad\to\quad h(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,g(x-t)\,dx$$

(زیرا برای $x<t$، $g(x-t)$ صفر میگردد.)

تعریف: بنابه تعریف، اگر توابع f و g از E_0 باشند، کانولوشن آنها تابعی است سببی بصورت زیر:

$$h(x)=(f*g)(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

($h(x)$ بازای جمیع مقادیر $x>0$ معین است.)

مثال: اگر $f(t)=\exp(r\,t)U(t)$ و $g(t)=\exp(s\,t)U(t)$ باشد، خواهیم داشت:

$$h(x)=(f*g)(x)=\int_{0}^{x} e^{rt}\exp[s(x-t)]\,dt \quad\to\quad (f*g)(x)=e^{sx}\int_{0}^{x}\exp[(r-s)t]\,dt$$

در اینجا دو حالت ممکن است پیش آید:

$$r=s \quad\to\quad h(x)=e^{sx}\int_{0}^{x} dt = x\exp(s\,x)$$

$$r\neq s \quad\to\quad h(x)=e^{sx}\left\{\frac{\exp[(r-s)t]}{r-s}\right\}_{0}^{x}=\frac{\exp(s\,x)}{r-s}\{\exp[(r-s)x]-1\}$$

اما چون بنابه تعریف h تابعی سببی است، خواهیم داشت: $h(x)=x\exp(s\,x)U(x)$ یا $h(x)=\dfrac{\exp(s\,x)}{r-s}\{\exp[(r-s)x]-1\}U(x)$. به این ترتیب، کانولوشن دو تابع f و g از E_0، تابعی مانند h از E_0 است و این موضوع نشان میدهد که در این مورد، کانولوشن بمنزله یک عمل ترکیب داخلی در E_0 است.

قضیه: اگر دو تابع f و g توابعی از E_0 باشند، آنگاه تابع $h=f*g$ نیز تابعی از E_0 خواهد بود.

خواص کانولوشن: $f*g=g*f$ و $f*(g+s)=f*g+f*s$. یعنی عمل کانولوشن دارای خاصیت جابجایی و خاصیت پخشی است. زیرا داریم:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

با تغییر متغیر $u=x-t$ خواهیم داشت:

$$(f*g)(x)=\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)\,g(u)(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,f(x-u)\,du$$

یعنی $(f*g)(x)=(g*f)(x)$.

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}(f*(g+s))(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(g+s)(x-t)\,dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[g(x-t)+s(x-t)\right]dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,s(x-t)\,dt=(f*g)(x)+(f*s)(x)\end{aligned}$$

پس عمل کانولوشن دارای خاصیت پخشی است.

ب- تبدیل $f*g$:

مثال قبل را در نظر میگیریم. داریم $f(t)=\exp(rt)U(t)\sqsupset F(p)=\dfrac{1}{p-r}$ و $g(t)=\exp(st)U(t)\sqsupset G(p)=\dfrac{1}{p-s}$. برای $r=s$ داشتیم $(f*g)(x)=x\exp(rx)\,x\exp(sx)U(x)$. بنابراین خواهیم داشت: $(f*g)(x)\sqsupset\dfrac{1}{(p-r)^2}$ که حاصلضرب $F(p)G(p)$ نیز برابر است با $\dfrac{1}{(p-r)^2}$. نتیجه میگیریم که $H(p)=F(p)G(p)$. چنانچه $r\neq s$ باشد، داشتیم $(f*g)(x)=\dfrac{\exp(sx)}{r-s}\{\exp[(r-s)x]-1\}U(x)$ یا $h(x)=\dfrac{1}{r-s}\exp(rx)U(x)-\dfrac{1}{r-s}\exp(sx)U(x)$. بنابراین خواهیم داشت $H(p)=\dfrac{1}{r-s}\dfrac{1}{p-r}-\dfrac{1}{r-s}\dfrac{1}{p-s}=\dfrac{1}{(p-r)(p-s)}$ یا $H(p)=F(p)G(p)$. یعنی در این حالت نیز بمانند حالت قبل تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع f و g برابر است با حاصلضرب تبدیلهای لاپلاس آن دو تابع. آنچه که در بالا آورده شد، توجیه مناسبی برای قضیه زیر است.

قضیه: اگر f و g توابعی از E_0 باشند، تبدیل لاپلاس کانولوشن این دو تابع برابر است بـا حاصلضـرب تبـدیلهای آن دو تابع. (البته برای $p > \max(\sigma(f), \sigma(g))$) . این قضیه را بدون اثبات میپذیریم.

پ- تبدیل تابع $x \to \int_0^x f(t)\,dt$:

با فرض اینکه f تابعی پیوسته از E_0 باشد و با در نظر گرفتن تابع پله ای واحد یعنی $U(t)$، از قضیه مربوط بـه تبـدیل کانولوشـن دو تـابع در مـورد $f(t)$ و $U(t)$ اسـتفاده نمـوده، خـواهیم داشـت (بـازای هـر $x > 0$): $(U * f)(x) = \int_0^x f(t)U(x-t)\,dt$ یا $(U * f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. اما داریم $U(t) \sqsupset \frac{1}{p}$. چنانچه تبـدیل لاپلاس تابع f را نیز $F(p)$ بنامیم، آنوقت از تساوی اخیر نتیجه میگیریم: $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) \sqsupset \frac{1}{p}F(p)$.

۲-۱-۵- تبدیل معکوس

میدانیم که تبدیل لاپلاس توابعی از نوع $f(t)=t^n\exp(rt)U(t)$ ، کسرهای گویایی از متغیر p هستند. همچنین تبدیل لاپلاس انتقال $t\to f(t-\tau)$ نیز برابر است با حاصلضرب کسری گویا در $\exp(-p\tau)$. از مطالب فوق نتیجه میگیریم که همه تبدیلهای مربوط به توابعی که از E_0 باشند، ترکیبهایی هستند خطی که از حاصلضرب کسرهایی گویا در $\exp(-p\tau)$ تشکیل یافته اند ($\tau\geq 0$). بنابراین چنانچه کسری گویا نسبت به p، بعنوان تبدیل لاپلاس تابع f در دست باشد، میتوان با تجزیه آن کسر به کسرهای ساده، توابع تشکیل دهنده تابع f را شناخت و بکمک آنها تابع f را که ترکیب خطی از توابع مزبور هست تعیین نمود.

تعریف: اگر F تبدیل لاپلاس تابع f باشد، بنابه تعریف f را اصلی یا تبدیل لاپلاس معکوس F مینامیم. f را تصویر F نیز میگوییم.

۲-۱-۶- جدول تبدیل توابعی از E_0

جدول تبدیل لاپلاس توابعی از E_0

تابع	تبدیل لاپلاس
$U(t)$	$1/p$
$tU(t)$	$1/p^2$
$t^n U(t),\quad n\in\aleph$	$n!/p^{n+1}$
$\exp(-at)U(t)$	$1/(p+a)$
$\sin(\omega t)U(t)$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)U(t)$	$p/(p^2+\omega^2)$
(اگر $f\sqsupset F(p)$ باشد) $f(at),\quad a>0$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$f(t-\tau)$	$F(p)\exp(-p\tau)$
$f(t)\exp(-at)$	$F(p+a)$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
$f''(t)$	$p\left[pF(p)-f(0^+)\right]-f'(0^+)$
$\int_0^t f(u)\,du$	$F(p)/p$
$-t\,f(t)$	$dF(p)/dp$
$(f*g)=U(t)\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$ (f و g در E_0 هستند)	$F(p)G(p)$ $\begin{cases}\mathcal{L}[f](p)=F(p)\\ \mathcal{L}[g](p)=G(p)\end{cases}$

۲-۱-۷- کاربرد جدول تصاویر

مثال ۱: تبدیل لاپلاس تابع $f:t\to\sin(3t)\cos(2t)U(t)$ را تعیین کنید.

داریـــــــم $\sin(3t)\cos(2t)=\frac{1}{2}\sin(5t)+\frac{1}{2}\sin(t)$ ، بنــــــابراین خـــــــواهیم داشــــــت: $f(t)=\frac{1}{2}\sin(5t)U(t)+\frac{1}{2}\sin(t)U(t)$. تبدیلهای لاپلاس توابع تشکیل دهنده تـابع f را بکمـک جـدول مشخص مینماییم.

$$\sin(5t)U(t)\sqsupset\frac{5}{p^2+5^2},\qquad \sin(t)U)t)\sqsupset\frac{1}{p^2+1}$$

در نتیجه $F(p)$ محاسبه میگردد:

$$\mathcal{L}[f](p)=F(p)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{p^2+25}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{p^2+1}$$

مثال ۲: اگر $G(p)=\frac{p}{p^2+4p+13}$ باشد، اصلی آن را بیابید.

$G(p)$ را بصورت $G(p)=\frac{p}{(p+2)^2+9}$ یا $G(p)=\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{2}{3}\frac{3}{(p+2)^2+3^2}$ نوشته، تـابع اصلی را بکمک صورت جدید $G(p)$، مشخص میکنیم. خواهیم داشت: (از جدول استفاده شده است)

$$g(t)=\cos(3t)\exp(-2t)U(t)-\frac{2}{3}\sin(3t)\exp(-2t)U(t)$$

مثال ۳: اگر $F(p)=\frac{2p+1}{p^2(p^2+4)}$ باشد، اصلی آن را بیابید.

کسر گویای داده شده را به کسرهای ساده تجزیه میکنیم. اینکار بسادگی انجام میگیرد:

$$F(p)=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{Cp+D}{p^2+4}\qquad\text{(I)}$$

با ضرب طرفین در p^2، خواهیم داشت: $\frac{2p+1}{p^2+4}=A+Bp+\frac{p^2(Cp+D)}{p^2+4}$. در تساوی اخیر، p را مساوی با صفر قرار داده و ضریب A را می یابیم. $A=1/4$ بدست میآید.

بار دیگر طرفین تساوی (I) را در p^2+4 ضرب کرده و بجای p، مقدار $2i$ قرار میدهیم. با این کـار C و D محاسبه میشوند. خواهیم داشت:

$$\frac{2p+1}{p^2}=\frac{\frac{1}{4}\left(p^2+4\right)}{p^2}+\frac{B(p^2+4)}{p}+Cp+D$$

یا

$$\frac{4i+1}{-4}=0+0+2iC+D$$

از مقایسه دو طرف، $C=-1/2$ و $D=-1/4$ بدست میآید. بالاخره از ضرب دو طرف تساوی (I) در p و قرار دادن p برابر با $+\infty$، B بدست میآید. یعنی چون $B+C=0$ داریم: $B=1/2$.

بنابراین داریم:

$$F(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{4}\frac{1}{p^2+4}$$

که بکمک جدول تصاویر، توابع تشکیل دهنده تابع f مشخص میگردند. خواهیم داشت:

$$f(t)=\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t)-\frac{1}{8}\sin(2t)\right)U(t)$$

زیرا $\cos(2t)U(t)\sqsupset\frac{p}{p^2+2^2}$ و $\sin(2t)U(t)\sqsupset\frac{2}{p^2+2^2}$.

مثال ۴: اگر $H(p)=\frac{\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$ و $\omega>0$ باشد، تابع $h(t)$ را مشخص کنید.

داریم $H(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. از شکل جدید $H(p)$ میتوان پی برد که تابع اصلی آن یعنی $h(t)$ یک تابع کانولوشنی است بصورت $(f*f)(t)$. اما از آنجاییکه میدانیم $\sin(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ ، لـذا خـواهیم داشت:

$$(f*f)(t)=h(t)=\int_0^t f(u)\,f(t-u)\,du$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
h(t)&=\int_0^t \sin(\omega u)\sin(\omega t-\omega u)du\\
&\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2\omega u-\omega t)-\cos(\omega t)\right]du\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega u-\omega t)-u\cos(\omega t)\right]_0^t\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\times 2\sin(\omega t)-t\cos(\omega t)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)-t\cos(\omega t)\right]U(t)
\end{aligned}$$

مثال ۵: اگر $H(p)=\frac{\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$ و $\omega>0$ باشد، تابع $h(t)$ را مشخص کنید.

راه اول: (طریقی مشابه با راه حل مثال ۴) داریم: $H(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{p}{p^2+\omega^2}=H_1(p)H_2(p)$. بنـابراین $h(t)$ یک تـابع کانولوشـنی اسـت بصـورت $(h_1*h_2)(t)$. امـا میـدانیم: $h_1=\sin(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ و $h_2=\cos(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{p}{p^2+\omega^2}$. لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
h(t)=(h_1*h_2)(t)&=\int_0^t \sin(\omega u)\cos[\omega(t-u)]\,du\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(\omega t)+\sin(2\omega u-\omega t)]du\\
&=\frac{1}{2}\left[u\sin(\omega t)-\frac{1}{2\omega}\cos(2\omega u-\omega t)\right]_0^t\\
&=\frac{1}{2}t\sin(\omega t)U(t)
\end{aligned}$$

راه حـل دوم: داریـم $\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)=-2\frac{\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ یـا $\frac{\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{-1}{2}\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$. از طرفی میدانیم: (اگر $f(t)\,]\,F(p)$ باشد)

$$t\,f(t)\sqsupset-\frac{dF(p)}{dp}\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}t\,f(t)=\frac{-1}{2}\frac{dF(p)}{dp}$$

چون داریم $\sin(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}$ ، پس بنا بر آنچه که در بالا گفته شد، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}t\sin(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{-1}{2}\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}t\sin(\omega t)U(t)\sqsupset\frac{-1}{2}\times\frac{-2p\,\omega}{(p^2+\omega^2)^2}=\frac{p\,\omega}{(p^2+\omega$$

به این ترتیب تابع اصلی عبارت است از $\frac{1}{2}t\sin(\omega t)U(t)$.

۲-۲- توسعه تبدیل لاپلاس به فضای E

۲-۲-۱- تعریف فضای E:

الف- فرض کنید همه مقادیر تابع سببی f در $\mathbb{C}$ قرار داشته و بعلاوه برای عدد حقیقی و مثبت a، تابع روی بازه $[0,a]$ بجز در معدودی از نقاط آن پیوسته باشد. همچنین روی بازه هایی که محدود به نقاط انفصال از این بازه هست، انتگرالهای $\int |f(t)|dt$ موجود باشند. در اینصورت چنین تابعی را از نظر مکانی جمع پذیر مینامیم. (در اینصورت است که بنا به آنچه در ضمیمه ۵ آورده شده است، انتگرال $\int_0^a |f(t)|dt$ وجود خواهد داشت.) موضوع بالا شامل همه توابع پیوسته یا پیوسته قطعه ای و خاصه توابع E_0 نیز میگردد.

ب- تعریف فضای E:

اگر f تابعی سببی و روی $\mathbb{R}^+$ از نظر مکانی جمع پذیر باشد، با در نظر گرفتن عدد حقیقی و مثبت A، عدد حقیقی و مثبت p و با در نظر داشتن انتگرالهای $\int_0^A |f(t)|dt$ و $\int_0^A |f(t)|\exp(-p\,t)\,dt$ و همچنین با فرض وجود عدد حقیقی و مثبت p_0 ($p_0 < p$) که برای آن حد $\lim_{A\to+\infty}\left[\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt\right]$ موجود باشد، خواهیم داشت: (بازای هر $t \ge 0$)

$$|f(t)|\exp(-p\,t) \le |f(t)|\exp(-p_0\,t)$$

بنابراین برای هر عدد مثبت A داریم:

$$\int_0^A |f(t)|\exp(-p\,t)\,dt \le \int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt$$

چنانچه حدی را که مطابق با فرض انجام شده موجود است، M، در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{A\to+\infty}\left[\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt\right] = M \quad \rightarrow \quad \int_0^A |f(t)|\exp(-p\,t)\,dt \le M$$

پس به این ترتیب تابع $h(A): A \to h(A) = \int_0^A |f(t)|\exp(-p\,t)dt$ ، تابعی صعودی و محدود خواهد بود. این نتیجه نشان میدهد که حد $\lim_{A\to+\infty}\left[\int_0^A |f(t)|\exp(-p\,t)\,dt\right]$ با وجود p_0 (با $p \ge p_0$) وجود دارد.

اینک تعریف فضای E: هر تابعی که خصوصیات زیر را دارا باشد، تابعی است از E.

۱- سببی باشد

۲- روی $\mathbb{R}^+$ از نظر مکانی جمع پذیر باشد.

۳- عددی مثبت و حقیقی مانند p_0 وجود داشته باشد، بطوریکه حد $\lim_{T\to+\infty}\left[\int_0^T |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt\right]$ موجود باشد.

به این ترتیب معلوم میگردد که انتقال هر تابعی از E به اندازه τ (با $\tau>0$)، یا هر تابعی که از ضرب یک تابع متعلق به E در $\exp(\,a\,t)$ نتیجه میگردد، تابعی از E خواهد بود. همچنین E_0 نیز زیر مجموعه ای از E است زیرا وقتی f تابعی از E است، همه خصوصیات ذکر شده در تعریف برای f با انتقال یا ضرب آن در $\exp(\,a\,t)$ حفظ میگردند.

مثال متقابل: در این مثال، تابعی را مورد بررسی قرار میدهیم که در E نیست. تابع $t\to f(t)=\exp(t^2)U(t)$ را که سببی بوده و روی $\mathbb{R}^+$ پیوسته است، در نظر میگیریم. داریم:

$$\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt=\int_0^A \exp(t^2-p_0\,t)\,dt$$

اما پیداست که حد $\lim_{t\to+\infty}\exp(t^2-p_0 t)$ برابر است با $+\infty$. لذا میباید مقداری برای t مانند t_0 وجود داشته باشد که برای $t\ge t_0$ مقدار $\exp(t^2-p_0 t)$ بزرگتر از یک شود. یعنی داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^A \exp(t-p_0\,t)\,dt\ge\int_{t_0}^A 1\times dt$$

یا

$$\int_{t_0}^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt\ge A-t_0$$

همچنین داریم:

$$\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt=\int_0^{t_0} |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt+\int_{t_0}^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt$$

یا

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt=\int_0^{t_0} |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt+\lim_{A\to+\infty}\int_{t_0}^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt$$

اما با توجه به اینکه در طرف دوم تساوی فوق مقدار انتگرال اولی محدود بوده و مقدار انتگرال دومی نیز بنا به آنچه که قبلاً داشتیم از $A-t_0$ بیشتر و یا مساوی با آن است، خواهیم داشت: $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt=+\infty$. این نتیجه نشان میدهد که تابع مفروض به لحاظ اینکه حد $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |f(t)|\exp(-p_0\,t)\,dt$ محدود نیست، به فضای E تعلق ندارد.

۲-۲-۲- تبدیل لاپلاس در E

الف- تعریف: اگر f تابعی از E باشد، آنگاه عددی حقیقی به نام طول همگرایی تابع f که با $\sigma(f)$ نشان داده میشود وجود خواهد داشت که برای هر p متعلق به بازه $]\sigma(f), +\infty[$، حد $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |f(t)|\exp(-pt)\,dt$ یا $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\exp(-pt)\,dt$ وجود داشته باشد. تابع $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ را تبدیل لاپـلاس f مینامیم.

ب- مثالهایی در باره تبدیل لاپلاس توابعی از E:

در اینجا تابعی را مورد بررسی قرار میدهیم که متناوب بوده و بر یک دوره تناوب، پیوسته قطعه‌ای باشد.

تابع $g(t)$ را تابعی متناوب با دوره تناوب T، پیوسته یا پیوسته قطعه ای روی بازه $[0,T]$ و محدود فرض کرده و تابع $f(t)=g(t)U(t)$ را که در آن $U(t)$ تابع پله ای واحد است، در نظر میگیریم. پیداست که تابع f تابعی سببی و محدود خواهد بود زیرا $g(t)$ در فاصله تناوبش محدود فرض شده است. لذا عددی صحیح و مثبـت ماننـد k وجود دارد که $f(t)\le k$ باشد. اما با توجه به اینکه انتگـرال $\int_0^{+\infty}\exp(-pt)\,dt$ هـم بـرای p هـای مثبـت همگراست، نتیجه میگیریم که $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ نیز همگرا بوده و تابع $f(t)$ تـابعی از فضـای E اسـت. زیرا همه شرایط پیش گفته درباره توابع متعلق به E در تابع f نیز موجودند.

اینک محاسبه $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ یعنی تبدیل لاپلاس تابع f. داریم: (k و T هر دو مثبت هستند)

$$\int_0^{kT} f(t)\exp(-pt)\,dt=\int_0^{kT} g(t)\exp(-pt)\,dt$$
$$=\int_0^{T} g(t)e^{-pt}\,dt+\int_T^{2T} g(t)e^{-pt}\,dt+\int_{2T}^{3T} g(t)e^{-pt}\,dt+\ldots+\int_{(k-1)T}^{kT} g(t)e^{-pt}\,dt$$

با تغییر متغیر $t=\alpha T+u$ برای هر یک از انتگرالهای طرف راست رابطه فـوق، خـواهیم داشـت: (در انتگـرال دوم طرف راست تغییر متغیر $t=T+u$ و در سومی تغییر متغیر $t=2T+u$ و الی آخر)

$$\int_0^{kT} g(t)e^{-pt}dt=\int_0^{T} g(u)e^{-pu}du+\int_T^{2T} g(T+u)e^{-p(T+u)}du$$
$$+\int_{2T}^{3T} g(2T+u)e^{-p(2T+u)}du+\ldots+\int_{(k-1)T}^{kT} g[(k-1)T+u]e^{-p[(k-1)T+u]}du$$

چـون بـر طبـق فـرض $g(t)$ تـابعی متنـاوب بـا دوره تنـاوب T اسـت، لـذا داریـم $g(T+u)=g(u)$، $g(2T+u)=g(u)$ و الی آخر، بنابراین داریم:

$$\int_0^{kT} g(t)\exp(-pt)\,dt=\left[1+e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+\ldots+e^{-(k-1)pT}\right]\int_0^{T} g(u)\exp(-pu)\,du$$

یا

$$\int_0^{kT} g(t)\exp(-pt)\,dt = \left[1+e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+\ldots+e^{-(k-1)pT}\right]\int_0^{T} g(t)\exp(-pt)\,dt$$

اما چون برای $p>0$ داریم: $0<\exp(-pT)<1$، ازاینرو وقتی k به $+\infty$ میل کند، مجموع درون کروشه بالا به مجموع نامحدود جمله های یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $\exp(-pT)$ بدل گردیده و برابر خواهد بود با $[1-\exp(-pT)]^{-1}$. حال اگر $f(t)$ را برای یک دوره تناوب یعنی برای $t\in[0,T]$، برابر با $f_0(t)$ قرار دهیم بطوریکه $f_0(t)\neq 0$ باشد، خواهیم داشت:

$$\int_0^{+\infty} g(t)U(t)\exp(-pt)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$$

$$=\frac{1}{1-\exp(-pT)}\int_0^{+\infty} f_0(t)\exp(-pt)\,dt$$

که در نتیجه داریم:

$$\mathcal{L}[g(t)U(t)](p)=\frac{1}{1-\exp(-pT)}\mathcal{L}[f_0(t)](p)$$

یا

$$\mathcal{L}[f](p)=\frac{1}{1-\exp(-pT)}\mathcal{L}[f_0](p)$$

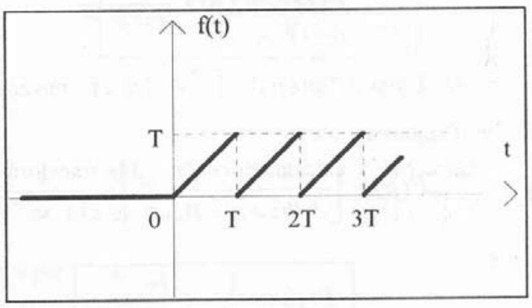
مثال۱: تبدیل لاپلاس سیگنال f را که سببی و متناوب بوده و بر بازه $[0,T]$، بصورت $f(t)=t$ تعریف شده است، بیابید. (T دوره متناوب f است.)

با توجه به مفروضات مربوط به تابع f، نمودار آن بصورت زیر خواهد بود. از اینکه برای محاسبه تبدیل لاپلاس سیگنال f به $f_0(t)$ یعنی به معادله قسمتی از نمودار که در بازه $[0,T]$ قرار دارد، نیاز هست، بکمک شکل ۲-۱۵ معادله $f_0(t)$ را به آسانی میتوان تشخیص داد که $f_0(t)=t[U(t)-U(t-T)]$ یا $f_0(t)=tU(t)-tU(t-T)$ و یا $f_0(t)=tU(t)-(t-T)U(t-T)-TU(t-T)$.

اما برای $f_0(t)$ داریم:

$$f_0(t)\sqsupset F_0(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{\exp(-pT)}{p^2}-T\,\frac{\exp(-pT)}{p}$$

هر یک از کسرهایی که برای تبدیل لاپلاس f_0 نوشته شد، در حقیقت تبدیل لاپلاس توابع $tU(t)$، $(t-T)U(t-T)$ و $TU(t-T)$ هستند. (شکل ۲-۱۶)



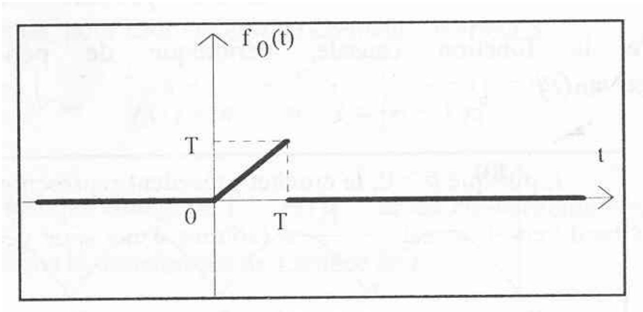
شکل ۲-۱۵: منحنی تابع $f(t)$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f\,](p)=\frac{1}{1-\exp(-pT\,)}\mathcal{L}[f_0](p)=\frac{1}{1-\exp(-pT\,)}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{\exp(-pT\,)}{p^2}-T\,\frac{\exp(-pT\,)}{p}\right]$$

یا

$$\mathcal{L}[f\,](p)=F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{T\,\exp(-pT\,)}{1-\exp(-pT\,)}$$



شکل ۲-۱۶: منحنی تابع $f_0(t)$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس تابع سببی و متناوب با دوره تناوب π را که در بازه $[0,\pi]$ بصورت $f(t)=\sin(t)$ تعریف شده، تعیین نمایید.

در شکل ۲-۱۷ نمودار تابع مطابق با مفروضات داده شده رسم شده است. نظیر به آنچه که در مثال ۱ گفته شد، بکمک نمودار تابع، معادله مربوط به $f_0(t)$ را مشخص میکنیم. خواهیم داشت: $f_0(t)=\sin(t)[U(t)-U(t-T)]$ یا $f_0(t)=\sin(t)[U(t)-U(t-\pi)]$ و یا $f_0(t)=\sin(t)U(t)+\sin(t-\pi)U(t-\pi)$. بنابراین داریم:

$$\mathcal{L}[f_0](p)=\frac{1}{1+p^2}+\frac{\exp(-p\,\pi)}{1+p^2}$$

پس $F_0(p)=\dfrac{1+\exp(-p\,\pi)}{1+p^2}$ و در نتیجه تبدیل لاپلاس تابع f عبارت خواهد بود از:

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-\exp(-p\,\pi)}=\frac{1+\exp(-p\,\pi)}{(1+p^2)[1-\exp(-p\,\pi)]}$$

مثال ۳: اگر تابع f بصورت زیر تعریف گردد، تبدیل لاپلاس آن را تعیین نمایید. (n عدد صحیح بزرگتر از دو)

$$\begin{cases} f(t)=0 & t\in\,]-\infty,0[\\ f(t)=1 & t\in[0,1[\\ f(t)=2 & t\in[1,2[\\ \quad\vdots & \\ f(t)=n & t\in[n-1,n[\end{cases}$$

در ادامه هم همگرایی انتگرال $\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$ را ثابت می‌نماییم و هم به محاسبه تبدیل لاپلاس تابع f می‌پردازیم. داریم:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k\int_{k-1}^{k}\exp(-pt)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{p}\left[e^{-p(k-1)} - e^{-pk}\right] = \left(\frac{e^{p}-1}{p}\right)\sum_{k=1}^{+\infty} k\,e^{-pk}$$

همچنین داریم: (به کمک فرمول مجموع تصاعد هندسی با قدر نسبت e^{-p})

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-pk} = 1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots + e^{-np} = \frac{1-\exp[-(n+1)p]}{1-\exp(-p)}$$

حال از دو طرف تساوی آخر نسبت به k مشتق گرفته، خواهیم داشت:

$$-\sum_{k=0}^{n} k\exp(-kp) = \frac{\left(1-e^{-p}\right)(n+1)\,e^{[-(n+1)p]} - \left(1-e^{-(n+1)p}\right)e^{-p}}{\left(1-e^{-p}\right)^2}$$

چنانچه در رابطه فوق p را مثبت در نظر گرفته و n را به $+\infty$ میل دهیم، نتیجه میگیریم:

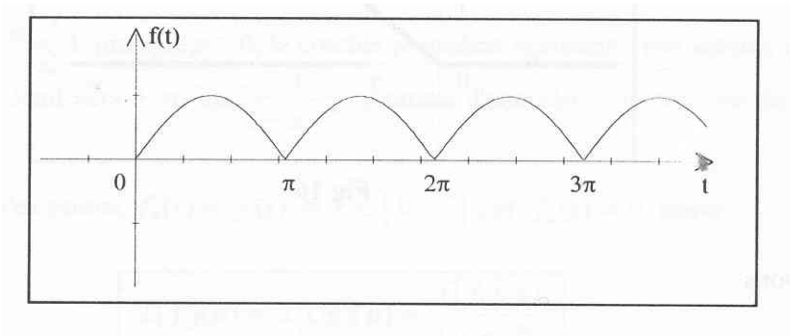
$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} k\exp(-kp)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\exp(-kp) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\exp(-kp) = \frac{\exp(-p)}{\left[1-\exp(-p)\right]^2}$$

از تساوی بدست آمده معلوم میگردد که برای $p>0$، انتگرال مورد نظر همگراست. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt = \frac{e^{p}-1}{p}\times\frac{e^{-p}}{\left(1-e^{-p}\right)^2}$$

یا داریم:

$$\mathcal{L}[f](p) = F(p) = \frac{-e^{-p}}{p\,(1-e^{-p})}$$



شکل ۲-۱۷: منحنی تابع $f(t)$

۲-۲-۳- خواص تبدیل لاپلاس روی E

الف- خواص: خواص مذکور را میتوان بشکلی مشابه با اثبات همین خواص در E_0 (قسمت ۱-۳) مورد بررسی و اثبات قرار داد. با این لحاظ این خواص را درباره خطی بودن، انتقال و همچنین ضرب در یک تابع نهایی، در مورد توابع متعلق به E میپذیریم. بطور مثال، اگر $f(t)$ تابعی از E باشد، میپذیریم که در اینصورت تابع $t \to (-t)^n f(t)$ نیز تابعی از E بوده و داریم: $(-t)^n f(t) \square \dfrac{d^nF}{dp^n}$.

ب- تبدیل یک مشتق: نتیجه بدست آمده در قسمت (۱-۳-ج) در اینجا نیز برقرار بوده و آنرا میپذیریم. اگر $f(t)$ تابعی از E بوده و $\lim_{t\to 0^+} f(t)$ یا $f(0^+)$ در $\mathbb{C}$ موجود باشد، بعلاوه f' نیز به E متعلق بوده و بر بازه $]0,+\infty[$ از نظر مکانی جمع پذیر باشد و همچنین f بر همین بازه پیوسته نیز باشد، در اینصورت بمانند آنچه که در مورد توابع متعلق به E_0 داشتیم، میتوان نوشت: (اگر داشته باشیم $f(t) \sqsupset F(p)$)

$$f'(t) \sqsupset pF(p) - f(0^+)$$

همچنین اگر f یک یا تعداد محدودی از نقاط انفصال نوع اول را داشته باشد، همان نتیجه ای که در تبصره (۱-۳-ج) داشتیم در مورد تابع f نیز برقرار خواهد بود. یعنی داریم:

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0^+) - \sum_j \left[f(t_j+0) - f(t_j-0) \right] \exp(-t_j\, p)$$

در اینجا t_j ها نقاط انفصال تابع f بر بازه $]0,+\infty[$ هستند.

پ- قضایای مقادیر اولیه و نهایی: این قضایا نیز به همان صورت و با همان شرایطی که در قسمت (۱-۳-چ) آورده شد، در اینجا نیز برقرار میمانند.

ج- کانولوشن: اگر f و g دو تابع سببی، پیوسته یا پیوسته قطعه ای روی بازه $]0,+\infty[$ باشند، رابطه زیر را در مورد آنها می‌پذیریم:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$$

چنانچه f و g از E باشند، خواهیم داشت: $\mathcal{L}[f*g](p) = \mathcal{L}[f](p)\,\mathcal{L}[g](p)$

۲-۲-۴- تصاویر معکوس

ابتدا به قضیه زیر اشاره میکنیم:

قضیه: اگر f تابعی از E و روی $\Re^+$ پیوسته بوده و بعلاوه برای p بقدر کافی بزرگ داشته باشیم: $\mathcal{L}[f](p) = 0$. در اینصورت برای هر t مثبت یا صفر، مقدار $f(t)$ برابر با صفر خواهد بود.

در جدولی که بدنبال می آید، در سمت چپ توابع f و در سمت راست جدول، تبدیل لاپلاس آنها مشاهده میگردد که توابع f را اصلی و توابع سمت راست جدول را تصاویر توابع اصلی مینامیم. در جدول مذکور همه توابع اصلی در تمامی نقاط بازه $]0,+\infty[$ شاید بجز نقطه صفر پیوسته اند.

جدول تصاویر در E

تصویر تابع اصلی	تابع اصلی f
$1/p$	$U(t)$
$1/p^2$	$t\,U(t)$
$n!/p^{n+1}$	$t^n\,U(t) \qquad (n\in \aleph)$
$1/(p+a)$	$\exp(-a\,t)U(t)$
$\omega/(p^2+\omega^2)$	$\sin(\omega\,t)U(t)$
$p/(p^2+\omega^2)$	$\cos(\omega\,t)U(t)$
$1/\sqrt{1+p^2}$	$U(t)\,J_0(t)=U(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$ (توابع بِسِل مرتبه صفر)
$F(p/a)/a$	$f(a\,t),\quad a>0$ (f از E است)
$F(p)\exp(-\tau\,p)$	$f(t-\tau)$ (f از E است)
$F(p+a)$	$f(t)\exp(-a\,t)$ (f از E است)
$p\,F(p)-f(0^+)$	$f'(t)$ (f از E است)
$p^2\,F(p)-p\,f(0^+)-f'(0^+)$	$f''(t)$ (f از E است)
$\frac{F(p)}{p}$	$\int_0^t f(u)\,du$ (f از E است)
$\frac{dF(p)}{dp}$	$-t\,f(t)$ (f از E است)
$F(p)\,G(p)$	$(f*g)(t)=U(t)\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$ (f و g از E هستند)
$\frac{\exp(-\tau p)}{p^2}$	$(t-\tau)U(t-\tau)$ بکمک انتقال $t\,U(t)$ نتیجه میگردد

۲-۳- محاسبات خاص

در این قسمت به تعیین جواب مسائلی میپردازیم که بر روی معادلات دیفرانسیل مربته اول یا مرتبه دوم تنظیم شده اند.

۲-۳-۱- نوع مسائل:

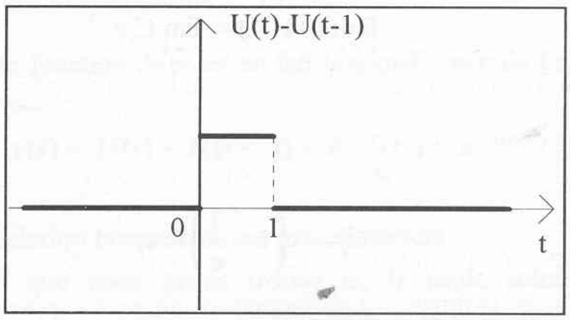
در اینجا هدف تعیین جواب یک معادله دیفرانسیل از نوع $a\,y' + b\,y = f$ با شرط اولیه $y(0) = \alpha$ و یا معادله دیفرانسیل از نوع $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f$ با دو شرط اولیه $y(0) = \alpha$ و $y'(0) = \beta$. در چنین مسائلی تابع f بعنوان ورودی به فیلتر مشخص و داده شده است و تابع y که معرف خروجی از فیلتر است، مجهول و نامشخص میباشد.

۲-۳-۲- ماهیت جواب:

در این راه حل، بر خلاف روشهای کلاسیک که بمنظور تعیین جواب در معادلات دیفرانسیل بالا بکار برده میشوند، از تبدیل لاپلاس دو عضو معلوم و داده شده برای حل معادله استفاده مینماییم. البته استفاده از روش کلاسیک در مواردی عملی است که f تابعی ساده باشد. اما در راه حل جدید که تابع f سببی و از E فرض میگردد، با توجه به اینکه رفتار سیگنالها عموماً بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیست، جواب معادله را بر بازه ای از $\mathbb{R}$ که پیوسته باشد، تعریف نموده و به حل معادله می‌پردازیم.

الف- مثال ساده و ابتدایی: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل $y'(t) + y(t) = U(t) - U(t-1)$ به قسمی که $y(0)$ برابر با صفر شود.

حل: از نمودار تابع $U(t) - U(t-1) = f$ که در شکل ۲-۱۸ رسم شده است. بخوبی پیداست که f بر بازه $\mathbb{R}$ پیوسته نبوده و در نقاط صفر و یک ناپیوسته است. اینک تابع y را طوری تعیین میکنیم که بر $\mathbb{R}$ به استثنای نقاط $t_0 = 0$ و $t_0 = 1$ پیوسته بوده و $y(0)$ برابر با صفر باشد. بعلاوه روی بازه $]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[$ در معادله دیفرانسیل داده شده صدق نماید.



شکل ۲-۱۸: نمودار تابع $U(t) - U(t-1)$

معادله مزبور روی بازه های مورد نظر بصورت زیر نوشته میشود:

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = 0, &]-\infty, 0[\\ y'(t) + y(t) = 1, &]0, 1[\\ y'(t) + y(t) = 0, &]1, +\infty[\end{cases}$$

از حل معادلات بدست آمده در سه حالت فوق، جوابهای $y = c\exp(-t)$ و $y = c_1\exp(-t) + 1$ و $y = c_2\exp(-t)$ به ترتیب نتیجه میگردند. اما جواب $y = c\exp(-t)$ در صفر پیوسته است و چون می‌باید $y(0)$ برابر با صفر شود، خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0^+} c\exp(-t) = \lim_{t\to 0^-} c\exp(-t) = y(0) = 0$$

که نتیجه میدهد $c=0$. در جواب دیگر $y=c_1\exp(-t)+1$ ، نیز پیداست که تابع y در صفر پیوسته است. لیکن چون میباید $y(0)=0$ باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0^+}\left[c_1\exp(-t)+1\right]=\lim_{t\to 0^-}\left[c_1\exp(-t)+1\right]=y(0)=0$$

که نتیجه میدهد $c_1=-1$. به همین ترتیب نیز در جواب حالت سوم خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 1^+}\left[c_2\exp(-t)\right]=\lim_{t\to 1^-}\left[c_1\exp(-t)+1\right]$$

زیرا تابع $y=c_2\exp(-t)$ در یک پیوسته است. در نتیجه داریم: $c_2\dfrac{1}{e}=-\dfrac{1}{e}+1$ یا $c_2=e-1$. بنابراین با توجه به تعریفی که در بالاتر برای تابع y کرده ایم، تنها به یک جواب بصورت زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} y(t)=0, & t\in]-\infty,0[\\ y(t)=1-\exp(-t), & t\in]0,1[\\ y(t)=(e-1)\exp(-t), & t\in]1,+\infty[\end{cases}$$

حال اگر مشتق تابع بدست آمده را در نقاط صفر و یک محاسبه نماییم، به نتایج زیر میرسیم:

$$y'(0^-)=0,$$

$$y'(0^+)=\lim_{t\to 0^+}\exp(-t)=1,$$

$$y'(1^-)=\lim_{t\to 1^-}\exp(-t)=\frac{1}{e},$$

$$y'(1^+)=\lim_{t\to 1^+}\left[-(e-1)\exp(-t)\right]=-\frac{e-1}{e}=\frac{1}{e}-1$$

این نتایج نشان میدهند که در تعریفی که برای تابع y کرده ایم، میتوانستیم در آن حتی بازه ها را بسته نماییم. به این ترتیب جواب بدست آمده، تابعی است از کلاس C^1 قطعه ای بر روی $\mathbb{R}$.

حل مسئله با تبدیل لاپلاس:

در این راه حل فرض میکنیم که جواب y در E باشد. اما چون پیداست که f نیز در E هست، از اینرو y' نیز در E خواهد بود (زیرا y' برابر است با $f + y -$ یعنی ترکیبی خطی از دو تابع عضو E). لذا برای p بقدر کافی بزرگ، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[y'](p) = p\,\mathcal{L}[y](p) - y(0^+)$$

چون y در راست صفر پیوسته است، داریم: $y(0^+) = y(0)$ یا $y(0^+) = 0$ (زیرا بنا به خواست مسئله، باید $y(0)$ برابر با صفر باشد). پس نتیجه میگیریم:

$$\left(p\,\mathcal{L}[y](p) - 0\right) + \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[U(t) - U(t-1)]$$

یا

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-p)}{p}$$

بنابراین خواهیم داشت: $(p+1)Y(p) = \dfrac{1-\exp(-p)}{p}$ یا

$$Y(p) = \frac{1-\exp(-p)}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-p)}{p} - \frac{1}{1+p} + \frac{\exp(-p)}{p+1}$$

به این ترتیب با داشتن $Y(p)$ و بکمک دانسته های پیشین و یا جدول مربوط به تعیین توابع اصل بصورت $y(t)$ زیر محاسبه میگردد:

$$t \to y(t) = U(t) - U(t-1) - \exp(-t)U(t) + \exp[-(t-1)]U(t-1)$$

و این جواب همان جواب یگانه قبلی است که بطریق دیگری محاسبه شده بود.

ب- بسط مفهوم حل یک معادله دیفرانسیل: معادله دیفرانسیل $a\,y' + b\,y = f$ را که در آن f تابعی از کلاس C^0 قطعه ای بر $\mathbb{R}$ یا بر $\mathbb{R}^+$ فرض شده است، در نظر میگیریم. یک مفهوم از حل معادله بالا، بنابه تعریف این است که تابعی پیوسته از کلاس C^1 قطعه ای بر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^+$ چنان تعیین نماییم که در خارج از انفصال f ، مشتق آن y' در تساوی $a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = f(t)$ صدق کند.

بهمین ترتیب نیز در معادله دیفرانسیل $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$ که در آن f تابعی پیوسته قطعه ای بر روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^+$ است. یک مفهوم از حل این معادله این خواهد بود که تابعی پیوسته و مشتق پذیر از کلاس C^2 قطعه ای بر $\mathbb{R}$ و یا ترجیحاً بر $\mathbb{R}^+$، چنان معلوم نماییم که خارج از نقاط انفصال f ، y'' یعنی مشتق دوم آن تابع در تساوی $a(t)\,y''(t) + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = f(t)$ صدق نماید. اینها معنا و مفهوم حلهایی هستند که در دنباله بحث به آنها بر میخوریم. جا دارد تا یادآور شویم که عموماً جوابی که یک فیزیکدان بدنبال آن است، جواب روی بازه $[0, +\infty[$ یا $]0, +\infty[$ است.

۲-۳-۳- حل یک معادله دیفرانسیل بر روی $\mathbb{R}$، بوسیله تبدیل لاپلاس:

در حالتیکه معادلات دیفرانسیل خطی و با ضرایب ثابت باشند، تعیین جواب آنها بالاخص اگر f در آنها از E بوده و خاصه اگر سببی باشد، بوسیله تبدیل لاپلاس ممکن نیست (لا اقل این کار مستقیماً مقدور نیست).

الف- حل معادله $a\,y' + b\,y = f(t)$، با شرط $y(0) = 0$.

حل معادله بر بازه $]-\infty,0[$: چون $f(t)$ سببی است، لذا معادله مزبور بر بازه $]-\infty,0[$ بصورت $a\,y' + b\,y = 0$ در میآید که جواب آن $y = c\exp(-b\,t/a)$ خواهد بود. اما با توجه به اینکه باید $y(0) = 0$ برابر با صفر گردد، خواهیم داشت: (زیرا $y(0)$ هم برابر است با c)

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = \lim_{t\to 0^-} c\exp(-b\,t/a) = c$$

لذا $c = 0$ میشود. این نتیجه به معنای آن است که تابع y سببی است.

در مورد معادله $a\,y' + b\,y = f(t)$ از تبدیل لاپلاس استفاده میکنیم. چون f در E است، اگر فرض کنیم که y نیز در E باشد، آنگاه از تساوی $a\,y' = f - b\,y$ معلوم میگردد که y' هم در E است. (زیرا y' یک ترکیب خطی از f و y است) حال با قرار دادن $\mathcal{L}[y](p) = Y(p)$ و $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$ و با استفاده از فرمول $\mathcal{L}[y'](p) = pY(p) - y(0^+)$ خواهیم داشت:

$$a\,pY(p) + bY(p) = F(p) \quad \to \quad Y(p) = \frac{F(p)}{a\,p + b}$$

که با استفاده از جدول تصاویر، به آسانی میتوان جواب y را بر $\mathbb{R}$ مشخص نمود. همچنین میتوان تساوی اخیر را بصورت ترکیب دو تابع در آورد. داریم:

$$\frac{1}{ap+b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{p + b/a}$$

اما اصل $\frac{1}{a} \times \frac{1}{p+b/a}$ تابعی است مانند $g(t)$ بصورت $g(t) = \frac{1}{a}\exp(-b\,t/a)$. بنابراین جواب معادله مفروض عبارت خواهد بود از $y = f * g$.

ب- حل معادله $a\,y' + b\,y = f(t)$ با شرط $y(0) = \alpha$ و $\alpha \neq 0$.

در اینجا نمیتوان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود، زیرا y بدلیل زیر سببی نیست. چون y باید در صفر پیوسته باشد، لازم است که داشته باشیم:

$$\lim_{t\to 0^+} y = \lim_{t\to 0^-} y = y(0) = \alpha \neq 0$$

اما از نتیجه بدست آمده $\lim_{t\to 0^-} y \neq 0$ معلوم میگردد که y سببی نیست. از اینرو جواب y را بر بازه $]-\infty,0[$ حذف نموده و برای هر t عضو $\mathbb{R}$، فرض میکنیم $z(t) = y(t) - \alpha\exp(-b\,t/a)$. در اینصورت به آسانی میتوان پی برد که $\lim_{t\to 0^-} z(t) = \alpha - \alpha = 0$. یعنی $z(t)$ تابعی سببی است.

حال با قرار دادن $z' - \frac{\alpha b}{a}\exp(-b\,t/a)$ بجای $y'(t)$ و $z(t) + \alpha\exp(-b\,t/a)$ بجای $y(t)$ در معادله دیفرانسیل داده شده، خواهیم داشت: $a\,z'(t) + b\,z(t) = f(t)$ که در آن z سببی است. از آنجاییکه معادله حاصل نظیر به معادله دیفرانسیلی است که در حالت قبلی (حالت الف) داشتیم، بنابراین جواب معادله فوق عبارت خواهد بود از $z(t) = (f * g)(t)$. ($g(t)$ با همان تعریفی است که در حالت الف فرض گردید) در نتیجه جواب

y بصورت $y(t) = z(t) + \alpha \exp(-b\,t/a)$ یا $y(t) = (f * g)(t) + \alpha \exp(-bt/a)$ بدست میآید. با اینکه جواب بدست آمده سببی نیست، لیکن تنها جواب معادله مفروض است.

پ- حل معادله $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t)$ با شرط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$. با توجه به شرایط مسئله و یادآوری اینکه $f(t)$ عموماً در اینگونه مسائل سببی فرض میگردد، بر بازه $]-\infty, 0[$، معادله مفروض را بصورت معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0$ خواهیم داشت که به ترتیب زیر حل می‌نماییم.

با تشکیل معادله مشخصه $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ و حل آن، در سه حالت مختلف، جوابهای زیر را برای y بدست می‌آوریم:

اگر معادله درجه دوم دو ریشه متمایز r_1 و r_2 داشته باشد:

$$y(t) = c_1 \exp(r_1\,t) + c_2 \exp(r_2\,t)$$

اگر $r_1 = r_2$ باشد:

$$y(t) = (c_1\,t + c_2)\exp(r_1\,t)$$

اگر ریشه های موهومی بصورت $\alpha \pm i\,\beta$ داشته باشد:

$$y(t) = \exp(\alpha\,t)\left[c_1 \cos(\beta\,t) + c_2 \sin(\beta\,t)\right]$$

اینک با استفاده از شرایط داده شده به بررسی حالت $\Delta > 0$ می پردازیم. چون

$$y(t) = c_1 \exp(r_1\,t) + c_2 \exp(r_2\,t)$$

لذا $y(0) = c_1 + c_2 = 0$ یا $c_2 = -c_1$ که نتیجه میدهد $y = c_1\,[\exp(r_1\,t) - \exp(r_2\,t)]$. همچنین

$$\lim_{t \to 0^-} y(t) = \lim_{t \to 0^-} c_1\,[\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t)] = c_1(1-1) = 0$$

از نتیجه بدست آمده ($\lim_{t \to 0^-} y(t) = 0$) معلوم میگردد که y تابع سببی است.

همچنین داریم: $\lim_{t \to 0^+} y(t) = c_1(1-1) = 0$. پس چون $\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^-} y(t) = y(0) = 0$ لذا $y(t)$ در نقطه صفر پیوسته است.

اما در مورد $y'(t)$ نیز داریم $y'(t) = c_1\,[r_1 \exp(r_1\,t) - r_2 \exp(r_2\,t)]$ که در نتیجه خواهیم داشت: (با فرض $y'(0) = 0$ که نتیجه میدهد $0 = c_1(r_1 - r_2)$)

$$\begin{cases} \lim_{t \to 0^-} y'(t) = c_1\,(r_1 - r_2) = 0 \\ \lim_{t \to 0^+} y'(t) = c_1\,(r_1 - r_2) = 0 \end{cases}$$

از نتایج بدست آمده فوق به آسانی پی میبریم که $y'(t)$ هم سببی است و هم در نقطه صفر پیوسته است.

حال اگر بپذیریم که توابع y، y' و y'' در مجموعه E هستند. آنگاه از تبدیل لاپلاس میتوان بهره گرفت. خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[y](p) = Y(p),$$
$$\mathcal{L}[f](p) = F(p),$$
$$\mathcal{L}[y'](p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 0 = pY(p),$$
$$\mathcal{L}[y''](p) = p\,[pY(p)] - y'(0^+) = p^2 Y(p) - 0 = p^2 Y(p)$$

از مقادیر فوق در تبدیل لاپلاس دو طرف معادله دیفرانسیل مفروض استفاده نموده

$$a\,p^2\,Y(p) + b\,p\,Y(p) + c\,Y(p) = F(p)$$

نتیجه میگیریم:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a\,p^2 + b\,p + c}$$

که با معلوم بودن مقادیر ثابت a، b، c و $F(p)$ بکمک جدول توابع اصلی، $y(t)$ یعنی جواب معادله دیفرانسیل مشخص میگردد. طریقه ای که در حالت $\Delta > 0$ مورد استفاده قرار گرفت، بشکلی مشابه در حالات $\Delta = 0$ و $\Delta < 0$ نیز باید عملی گردد.

ت- حل معادله $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = f(t)$ با شرط $y(0) = \alpha \neq 0$ و $y'(0) = \beta \neq 0$.

ابتدا معادله مفروض را بر بازه $]-\infty, 0[$ که معادله ای همگن به شکل $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0$ خواهد بود، حل می‌نماییم و جوابی از آنرا که در شرایط زیر صدق نماید، تعیین نموده، $g(t)$ مینامیم.

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \alpha,$$

$$\lim_{t\to 0^-} g'(t) = \beta$$

حال با قرار دادن $z(t) = y(t) - g(t)$ در معادله داده شده، آنرا به معادله زیر تبدیل می‌نماییم و بمانند معادله (حالت پ) حل میکنیم. خواهیم داشت:

$$a\big[z''(t) + g''(t)\big] + b\big[z'(t) + g'(t)\big] + c\big[z(t) + g(t)\big] = f(t)$$

یا

$$a\,z''(t) + b\,z'(t) + c\,z(t) + a\big[g''(t) + b\,g'(t) + c\,g(t)\big] = f(t)$$

اما عبارت درون کروشه در تساوی فوق برابر با صفر است، زیرا $g(t)$ جوابی است از معادله همگن شده و در آن صدق میکند. بنابراین به معادله $a\,z''(t) + b\,z'(t) + c\,z(t) = f(t)$ خواهیم رسد که در آن z، z' و z'' سببی هستند، زیرا

$$\lim_{t\to 0^-} z(t) = \lim_{t\to 0^-} y(t) - \lim_{t\to 0^-} g(t) = y(0) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$$

پس $z(t)$ سببی است. به همین ترتیب نیز پی میبریم که z' و z'' هم سببی هستند. البته y ، y' و y'' در صفر پیوسته فرض شده اند.

اما معادله $a\,z''(t) + b\,z'(t) + c\,z(t) = f(t)$ که معادله ای مشابه با معادله حالت (پ) است، بطریق پیش گفته قابل حل خواهد بود. به این ترتیب با تعیین جواب $z(t)$ و در دست بودن $g(t)$ ، جواب اصلی $y(t)$ محاسبه میگردد.

۲-۳-۴- حل یک معادله دیفرانسیل بر روی $\mathbb{R}^+$ بوسیله تبدیل لاپلاس:

در معادلات دیفرانسیلی که در فیزیک مطرح میگردند، تابع $f(t)$ لزوماً سببی نبوده و بعلاوه اصراری هم بر پیوستگی آن در $t = 0$ وجود ندارد. همچنین در این معادلات، اغلب به جوابهای روی بازه $]0, +\infty[$ توجه میگردد و حتی به جواب در $t = 0$ چندان اهمیت داده نمیشود.

ملاحظات بالا موجب میگردند، تا بمنظور حل این معادلات با تبدیل لاپلاس، طرفین آنها را در تابع پله ای $U(t)$ ضرب نماییم. مثلاً در معادله مرتبه اول $a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t)$ ، خواهیم داشت:

$a\,U(t)\,y'(t)+b\,U(t)\,y(t)=U(t)\,f(t)$

اما روی بازه $]0,+\infty[$ و نه روی بازه $[0,+\infty[$ داریم: $U\,y'=y'=(U\,y)'$ از اینرو معادله دیفرانسیل، بصورت $a(U\,y)'+b(U\,y)=U\,f$ در آمده و با تبدیل لاپلاس جواب $U\,y$ محاسبه میگردد که بر بازه $]0,+\infty[$ واقع است. ($U\,f$ در E است.)

چنانچه شرط اولیه $y(0)=\alpha$ یا $y(0^+)=\alpha$ هم وجود داشته باشد،آنگاه $(U\,y)(0^+)=\alpha$ محاسبه میشود.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را روی $]0,+\infty[$ حل نمایید.

$$\begin{cases} x''(t)-x'(t)=\sin(2t), \\ x(0^+)=1, \quad x'(0^+)=-1 \end{cases}$$

چون جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فوق را روی بازه $]0,+\infty[$ میخواهیم، از اینرو طرفین معادله را در $U(t)$ ضرب میکنیم. خواهیم داشت: $U(t)\,x''(t)-U(t)\,x'(t)=U(t)\sin(2t)$.

اما داریم: $U\,x''=(U\,x)''$ و $U\,x'=(U\,x)'$ زیرا بر بازه $]0,+\infty[$ مقدار $U(t)$ برابر با یک است. در نتیجه خواهیم داشت: $(U\,x)''(t)-(U\,x)'(t)=U(t)\sin(2t)$. از اینکه تابع $t\to U(t)\sin(2t)$ متعلق است به E ، پس معادله اخیر با تبدیل لاپلاس قابل حل خواهد بود. با قرار دادن $\mathcal{L}[U\,x](p)=X(p)$ و با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس در مورد مشتق، نتیجه میگیریم:

$$\left[p^2X(p)-p\,x(0^+)-x'(0^+)\right]-\left[p\,X(p)-x(0^+)\right]=\frac{2}{p^2+2^2}$$

یا

$$\left[p^2X(p)-p\times1-(-1)\right]-\left[p\,X(p)-1\right]=\frac{2}{p^2+4}$$

پس

$$X(p)=\frac{p^3-2p^2+4p-6}{p(p-1)(p^2+4)}$$

یا

$$X(p)=\frac{3}{2}\frac{1}{p}-\frac{3}{5}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\frac{2}{p^2+4}$$

حال با استفاده از جدول تصاویر، تابع $(U\,x)(t)$ را محاسبه میکنیم.

$$(U\,x)(t)=\frac{3}{2}U(t)-\frac{3}{5}U(t)\exp(t)+\frac{1}{10}U(t)\cos(2t)-\frac{1}{5}U(t)\sin(2t)$$

که در نتیجه بدست میآوریم: (روی $t\in\,]0,+\infty[$)

$$x(t)=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}\exp(t)+\frac{1}{10}\cos(2t)-\frac{1}{5}\sin(2t)$$

۲-۴- حل یک معادله دیفرانسیل خطی که ضرایب آن وابسته به متغیرند. (تابع بسل)

اگر معادله دیفرانسیل زیر حل گردد، جواب آن تابع بسل اندیس صفر نامیده میشود.

$$\begin{cases} t\,y'' + y' + t\,y = 0 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

جواب این معادله را با دو روش مختلف محاسبه میکنیم.

۱- بصورت تابعی که مجموع یک سری صحیح است.
۲- با استفاده از تبدیل لاپلاس.

قسمت الف- حل با جستجوی یک سری صحیح:

فرض کنیم بسط جواب معادله داده شده به سری صحیح بصورت $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ بوده و شعاع همگرایی (R) این سری نیز مخالف با صفر باشد. در اینصورت سری فوق بر فاصله همگرایی (بر بازه $]-R, R[$) جمله به جمله مشتق پذیر خواهد بود. (رجوع شود به ضمیمه ۴) و داریم:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,t^{n-2}$$

a_n اعداد حقیقی یا مختلط معلوم و t متغیر حقیقی یا مختلط است.

با قرار دادن مقادیر y' و y'' در معادله مفروض، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,t^{n+1} = 0$$

چون مجموع سریهای طرف اول رابطه فوق برابر با صفر است، لذا ضریب t^{n-1} در این مجموع نیز برابر با صفر گردیده و داریم: (در جمله های اول و دوم بجای n، n و در جمله سوم بجای n، $n-2$ قرار میدهیم)

$$[n(n-1) + n]a_n + a_{n-2} = 0$$

و لذا برای هر $n \geq 2$ داریم: $n^2\,a_n = -a_{n-2}$. اما با توجه به شرایط داده شده در مسئله نیز داریم:

$$y(0) = 1, \quad y = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + \ldots, \quad y(0) = a_0 \qquad \rightarrow \quad a_0 = 1$$

و

$$y'(0) = 1, \quad y' = a_1 + 2a_2\,t + 3a_3\,t^2 + \ldots, \quad y'(0) = a_1 \qquad \rightarrow \quad a_1 = 0$$

چنانچه در رابطه $n^2\,a_n = -a_{n-2}$ بجای n ، مقادیر فرد 3، 5، 7، ... ، $2p+1$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3^2\, a_3 = -a_1 & \rightarrow \quad a_3 = 0 \\ 5^2\, a_5 = -a_3 & \rightarrow \quad a_5 = 0 \\ \vdots & \\ a_{2p+1} = 0 & \end{cases}$$

همچنین اگر در رابطه $n^2\, a_n = -a_{n-2}$ بجای n ، مقادیر زوج 2، 4، 6، … ، $2p$ قرار دهیم و تساویهای حاصل را در هم ضرب نماییم، نتیجه میگیریم: ($a_0 = 1$)

$$4^p\left(1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times \ldots \times p^2\right) a_{2p} = (-1)^p$$

یا

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\lim_{p\to+\infty}\left|\frac{a_{2p}}{a_{2p-2}}\right| = \lim_{p\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2^{2p}(p!)^2}}{\dfrac{1}{2^{2(p-1)}[(p-1)!]^2}} = \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{4p^2} = 0$$

و $R = \frac{1}{0} = \infty$. از اینکه محاسبه فوق نشان داد که شعاع همگرایی سری صحیح در نظر گرفته شده، ∞ است، معلوم میگردد که همه محاسبات قبلی بجا و درست بوده است.

بنابراین جواب معادله دیفرانسیل، تابعی بصورت

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$$

یا

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

خواهد بود که به تابع بسل مرتبه صفر موسوم بوده و با $J_0(t)$ نمایش داده میشود.

قسمت ب- حل معادله با استفاده از تبدیل لاپلاس:

طرفین معادله را در U (تابع پله ای واحد) ضرب نموده و آن را بصورت $t\, y''(t)U(t) + y'(t)U(t) + t\, y(t)U(t) = 0$ روی بازه $]0,+\infty[$ تبدیل مینماییم. اما داریم:

$$\begin{cases} y''(t)U(t) = \left(yU\right)''(t), \\ y'(t)U(t) = \left(yU\right)'(t), \\ \left(yU\right)(0^+) = y(0) = 1, \\ \left(yU\right)'(0^+) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

بنابر این خواهیم داشت: $t\left(yU\right)''(t) + \left(yU\right)'(t) + t\left(yU\right)(t) = 0$. حال با فرض اینکه در مورد جمله های معادله اخیر، از تبدیل لاپلاس و فرمولهای مربوط میتوان استفاده کرد، نتیجه میگیریم که

$$\mathcal{L}(yU)(p) = Y(p),$$

$$\mathcal{L}\left[(yU)'\right](p) = pY(p) - (yU)(0^+) = pY(p) - 1$$

$$\mathcal{L}\left[(yU)''\right](p) = p[pY(p) - 1] - (yU)'(0^+) = p^2Y(p) - p - 0 = p^2Y(p) - p$$

$$\mathcal{L}\left[-t(yU)(t)\right] = \frac{dY}{dp}(p)$$

$$\mathcal{L}\left[-t(yU)''(t)\right] = \frac{d}{dp}\left[p^2Y(p) - p\right] = 2pY(p) + p^2\frac{dY}{dp} - 1$$

با توجه به محاسبات فوق، معادله تبدیل یافته را بصورت زیر خواهیم داشت:

$$-\left[2pY(p) + p^2\frac{dY}{dp} - 1\right] + \left(pY(p) - 1\right) - \frac{dY(p)}{dp} = 0$$

یا

$$pY(p) + \left(p^2 + 1\right)\frac{dY}{dp} = 0$$

معادله دیفرانسیل نتیجه شده، بشکل زیر حل میگردد: (c یک مقدار ثابت است)

$$\frac{1}{Y(p)}\frac{dY}{dp} = \frac{-p}{p^2+1} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[Y(p)] = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right) + \mathcal{L}(c) = \mathcal{L}\left(\frac{c}{\sqrt{p^2+1}}\right)$$

لذا

$$Y(p) = \frac{c}{\sqrt{p^2+1}}$$

برای محاسبه مقدار ثابت c نیز از قضیه مقدار اولیه بهره میگیریم که داریم $\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$. بنابراین خواهیم داشت: $\lim_{p\to+\infty} pY(p) = y(0^+) = 1$ یا $\lim_{p\to+\infty} pY(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{pc}{\sqrt{p^2+1}} = c = 1$. پس $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

با بدست آمدن $Y(p)$، بکمک جدول تصاویر میتوان $y(t)$ یا جواب معادله دیفرانسیل مفروض را مشخص ساخت. این جواب تابعی بصورت $y = J_0U$ خواهد بود که در آن J_0 تابع بسل مرتبه صفر است.

یاد آور میگردد که در اینجا وجود شرط $y'(0) = 0$ ضروری نیست زیرا بر طبق معادله، داریم: $y' = -ty - ty''$ که بازای $t = 0$، $y'(0)$ خود به خود برابر با صفر میشود.

قسمت پ- در این قسمت، میخواهیم تبدیل لاپلاس تابع سببی بسل مرتبه صفر را که بصورت زیر تعریف میگردد تعیین نماییم.

$$\begin{cases} f(t) = J_0(t)U(t), \\ J_0(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \end{cases}$$

به این منظور قضیه زیر را که با برقراری آن، تبدیل لاپلاس یک تابع قابل بسط بـه سـری صـحیح ممکـن میگـردد، مطرح نموده و بدون اثبات آن را می‌پذیریم.

قضیه: تابع $f(t)=U(t)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n t^n$ را که در آن شعاع همگرایی سری صحیح نامحدود است در نظر گرفته، فـرض میکنیم که شعاع همگرایی R سری صحیح $\sum_{n=0}^{+\infty}n!a_n t^n$ نیز صفر نباشـد. در ایـن صـورت بـرای تـابع $f(t)$ کـه عضوی از E است بازای $p>1/R$ ، خواهیم داشت: $\mathcal{L}[f\,](p)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\, L\left[U(t)t^n\right]$.

بنابراین برای اینکه بتوان از تبدیل لاپلاس در تابع $f(t)=U(t)\,J_0(t)$ استفاده نمود، می‌باید از برقراری شـرایط قضیه فوق درباره سری صحیح $J_0(t)$ اطمینان حاصل نمود. در مورد شرط اول داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2\times 2^{[2(n+1)]}}}{\dfrac{(-1)^n}{[(n)!]^2\times 2^{2n}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2\times 4}=0$$

لذا $R=\dfrac{1}{0}=\infty$. (a_{n+1} و a_n به ترتیب ضرایب جمله های u_{n+1} و u_n در سری صحیح $J_0(t)$ هستند)

اما در مورد شرط دوم قضیه در سری صحیح $J_0(t)$ ، باید از سری صحیح $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n)!a_n t^{2n}$ اسـتفاده نمـود زیـرا جملات مرتبه فرد برابر با صفرند، در نتیجه جملات مرتبه زوج باقی میمانند که بایـد بجـای $n!$، در $(2n)!$ ضـرب شوند. لذا برای تعیین شعاع همگرایی سری صحیح مربوط به شرط دوم قضیه خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{[2(n+1)]!(-1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2\,2^{[2(n+1)]}}}{\dfrac{(2n)!(-1)^n}{(n!)^2\,2^{2n}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2\times 4}=1$$

لذا $R=1/1=1$.

چون با بررسی های انجام شده در بالا معلوم گردید که هر دو شرط قضیه را مورد سری صحیح $J_0(t)$ برقرارند، لذا میتوان از فرمول $\mathcal{L}[f\,](p)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,\mathcal{L}[U(t)t^n]$ در $J_0(t)$ استفاده کرد. بنابراین داریم:

$$F(p)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2\times 2^{2n}}\times L[U(t)t^{2n}]$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2\times 2^{2n}}\times\frac{(2n)!}{p^{2n+1}}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2n)}{(1\times 2\times 3\times\ldots\times n)^2\times 2^{2n}}\times\frac{1}{p^{2n+1}}$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2n)}{[2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)]^2}\left(\frac{1}{p^2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}\left(\frac{1}{p^2}\right)^n$$

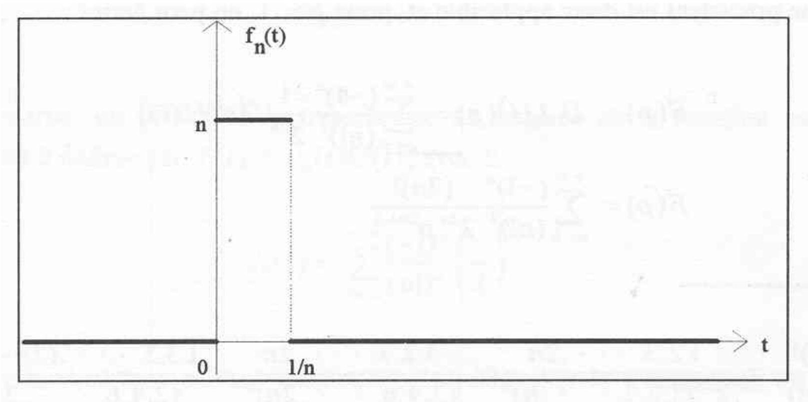
همچنین میدانیم که اگر $|x|$ کوچکتر از یک باشد، بسط زیر صحیح است.

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n+\ldots$$

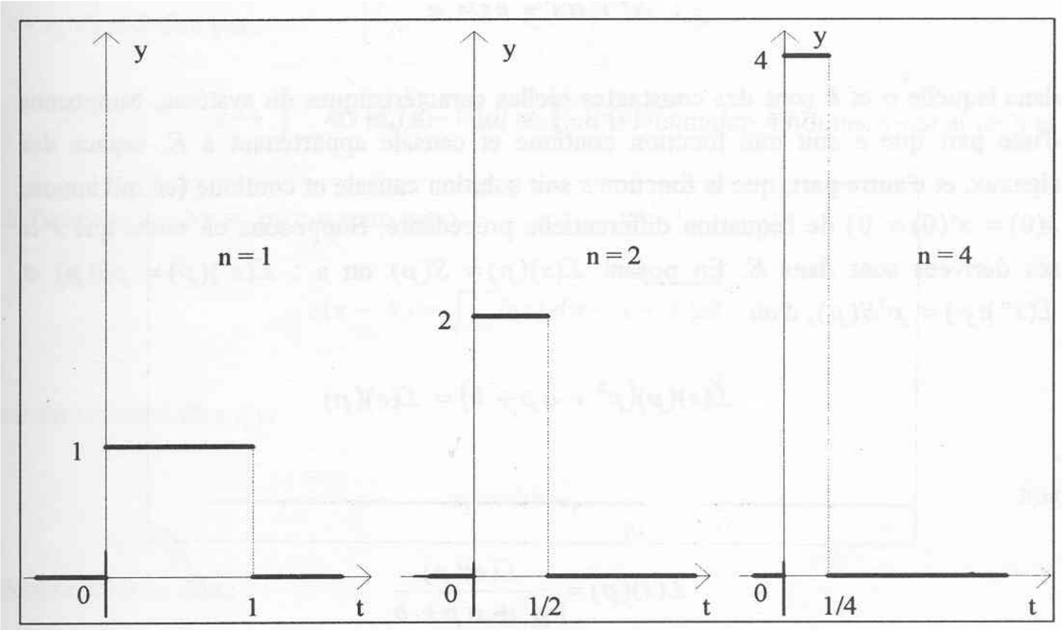
با مقایسه نتیجه بدست آمده برای $F(p)$ با بسط فوق، خواهیم داشت: $F(p)=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$ یا $Y(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

۲-۵- تابع ضربه واحد

توابع $f_n(t)$ را که برای $n\subset N^*$ بصورت $f_n(t)=n\left[U(t)-U\left(t-\frac{1}{n}\right)\right]$ تعریف گردیده، در نظر میگیریم. نمودار این تابع در شکل ۲-۱۹ نشان داده شده است. همچنین نمودار تابع بازای سه مقدار مختلف n در شکل ۲-۲۰ رسم شده است.



شکل۲-۱۹: نمودار تابع $f_n(t)$



شکل۲-۲۰: نمودار تابع $y(t)$

چنانچه تبدیل لاپلاس $f_n(t)$ را با $F_n(p)$ نشان دهیم، داریم:

$$
\begin{aligned}
F_n(p) &= n\{\mathcal{L}[U(t)] - \mathcal{L}[U(t-1/n)]\} \\
&= n\left[\frac{1}{p} - \frac{\exp(-n/p)}{p}\right] \\
&= \frac{n}{p} - \frac{n}{p}\exp\left(\frac{-p}{n}\right)
\end{aligned}
$$

در تساوی فوق بجای $\exp\left(\frac{-p}{n}\right)$، بسط آن بصورت

$$
\exp\left(\frac{-p}{n}\right) = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2\times 2!} - \frac{p^3}{n^3\times 3!} + \dots
$$

را قرار داده، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{n}{p} - \frac{n}{p}\left(1 - \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2\times 2!} - \dots\right) \\
&= 1 - \frac{p}{n\times 2!} + \dots
\end{aligned}
$$

بطوریکه $\lim_{n\to+\infty} F(p) = 1$. این ملاحظات فیزیکدانها را به تعریف تابع ضربه که با δ نشان داده میشود و تبدیل لاپلاس آن برابر یک است، هدایت کرد.

اما لازم است توجه نماییم که بازای هر مقدار از t که مخالف صفر باشد، $f_n(t)$ به صفر میل میکند و در صورتیکه n به بینهایت میل کند سیگنالی وجود نخواهد داشت. این ریاضی است که تنها با نمودار راضی نمیگردد.

تبصره: میتوان یادآور شد که بازای هر n متعلق به $\mathbb{N}^*$، مساحت زیر نمودار $f_n(t)$ برابر با یک است. (بجز در $t=0$ که بی نهایت میگردد) زیرا داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt &= n\int_0^{+\infty} U(t)\,dt - n\int_{1/n}^{+\infty} U\left(t-\frac{1}{n}\right)dt \\ &= n[t]_0^{+\infty} - n[t]_{1/n}^{+\infty} \\ &= \frac{n}{n} \\ &= 1\end{aligned}$$

۲-۶- فیلتر و تابع انتقال

۲-۶-۱- بررسی ارتباط بین ورودی و خروجی:

فرض می‌کنیم S سیستمی است با ورودی e و خروجی s که در معادله دیفرانسیل $s'' + a\,s' + b\,s = e$ صدق مینماید. (a و b ثابتهای اختصاصی سیستم هستند.) با فرض اینکه در این معادله e تابعی است سببی، پیوسته و متعلق به E، همچنین با فرض اینکه جواب معادله (s) نیز سببی و پیوسته بوده و s و مشتقهای آن s' و s'' در E باشند و بعلاوه داشته باشیم $s(0) = s'(0) = 0$، با قرار دادن $\mathcal{L}[s](p) = S(p)$، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[s'](p) = pS(p) - s(0^+) = pS(p) - 0 = pS(p),$$
$$\mathcal{L}[s''](p) = p \times p\,S(p) - s'(0^+) = p^2 S(p)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[s''](p) + a\,\mathcal{L}[s'](p) + b\,\mathcal{L}[s](p) = \mathcal{L}[e](p)$$

یا

$$p^2\,\mathcal{L}[s](p) + a\,p\,\mathcal{L}[s](p) + b\,\mathcal{L}[s](p) = \mathcal{L}[e](p)$$

که آن را میتوان بصورت زیر هم نوشت:

$$\mathcal{L}[s](p).(p^2 + a\,p + b) = \mathcal{L}[e](p)$$

بنابراین داریم:

$$\mathcal{L}[s](p) = \frac{\mathcal{L}[e](p)}{p^2 + a\,p + b}$$

چنانچه تابع $H(p)$ را برابر با $1/(p^2 + a\,p + b)$ بگیریم، خواهیم داشت: $\mathcal{L}[s](p) = \mathcal{L}[h](p) \times \mathcal{L}[e](p)$ یا $s = h * e$. (h تابع اصل مربوط به $H(p)$ است.) از رابطه اخیر، s را که کانولوشن دو تابع h و e است، تعیین میکنیم.

۲-۶-۲- مفهوم فیلتر:

در اینجا به سه خاصیت مهم از سیستمی که در قسمت قبل مطرح گردید، اشاره میکنیم.

چنانچه ورودی به سیستم، بقدر k منتقل شود، در اینصورت خروجی مربوط به آن بصورت $h * e_k$ تعریف میگردد. یعنی

$$x \to \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e_k(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e(x-t-k)\,dt$$

با قرار دادن $s = h * e$ تساوی

$$s(x-k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e(x-t-k)\,dt$$

نتیجه میگردد. (با تعریفی که در مورد کانولوشن داشتیم.) این نتیجه نیز به معنای $s_k = h * e_k$ است. به این ترتیب خواهیم داشت:

خاصیت اول: در صورتیکه ورودی سیستم به قدر k انتقال یابد، خروجی نیز به قدر k منتقل میگردد که گفته میشود، سیستم در زمان تغییر ناپذیر است.

اگر دو ورودی متمایز e_1 و e_2 ، به ترتیب دارای خروجی های s_1 و s_2 باشند، در اینصورت ورودی $e_1+\lambda e_2$ که در آن λ عدد حقیقی داده شده ای باشد، برای خروجی خواهیم داشت: $s=h*(e_1+\lambda e_2)$. یعنی

$s(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,(e_1+\lambda\, e_2)(x-t)\,dt$ یا

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e_1(x-t)\, dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e_2(x-t)\, dt \\
&= (h*e_1)(x) + \lambda\,(h*e_2)(x) \\
&= s_1 + \lambda\, s_2
\end{aligned}
$$

خاصیت دوم: رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم، یک رابطه خطی است.

اگر دنباله $\{e_n\}$ از ورودی به تابع e همگرا باشد، می‌پذیریم که دنباله $\{h*e_n\}$ نیز به $h*e$ همگرا میگردد.

خاصیت سوم: ارتباطی که خروجی s را به ورودی e وابسته میسازد، ارتباطی پیوسته است.

تعریف: هر سیستمی که دارای سه خاصیت خطی بودن، تغییر ناپذیری در زمان و پیوستگی باشد، فیلتر نامیده میشود.

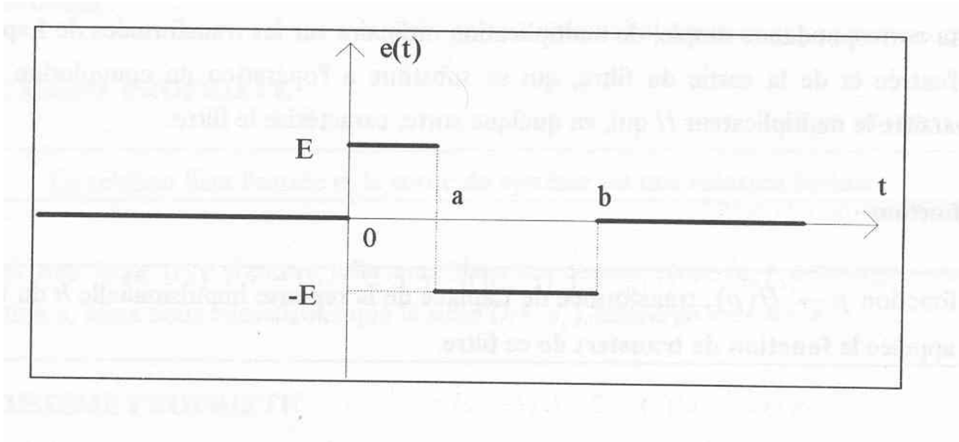
به این ترتیب جریانهای الکتریکی که بوسیله معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مشخص میگردند، میتوانند مانند یک فیلتر تلقی شوند.

۲-۶-۳- تابع انتقال یک فیلتر:

اگر سیستمی چنان باشد که ارتباط بین ورودی و خروجی آن با کانولوشن $s=h*e$ تعریف گردد، با فرض اینکه h و سیگنال e در E باشند، میتوان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و نتیجه گرفت: $\mathcal{L}[s](p)=\mathcal{L}[h](p)\times\mathcal{L}[e](p)$ که با قرار دادن $\mathcal{L}[h](p)=H(p)$ خواهیم داشت: $\mathcal{L}[s](p)=H(p)\times\mathcal{L}[e](p)$. ($H(p)$ را تابع انتقال فیلتر مینامیم.)

۲-۷- مسائل حل شده

مسئله ۱: مدار (R,L) را که در آن قدرت الکتریکی $t\to e(t)$ با شدت جریان $t\to i(t)$ مرتبط است در نظر میگیریم. نمودار قدرت الکتریکی $e(t)$ که تابعی از زمان است در شکل ۲-۲۱ نشان داده شده است. همچنین تابع $i(t)$ که روی بازه $]-\infty,0[$ برابر با صفر است، سببی بوده و بعلاوه پیوسته و از کلاس C^1 قطعه ای فرض شده است.



شکل۲-۲۱: نمودار تابع $e(t)$

اگر معادله دیفرانسیل

$$L\frac{d\,i(t)}{dt}+R\,i(t)=e(t)$$

با شرط اولیه $i(0)=0$ بر این مدار حاکم باشد،

۱- تبدیل لاپلاس تابع سببی $t \to e(t)$ را تعیین کنید.

۲- الف- مقادیر ثابت و حقیقی A و B را به قسمی بیابید که برای هر p مخالف با صفر و مخالف با $\frac{-R}{L}$، داشته باشیم:

$$\frac{E}{p(Lp+R)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{Lp+R} \qquad \text{(I)}$$

۲-ب- از حالت (الف)، اصل تابع G را که بصورت $G(p)=\dfrac{E\exp(-\tau\, p)}{p(Lp+R)}$ تعریف شده است، نتیجه بگیرید. (τ عددی ثابت، حقیقی و مثبت است).

۳- با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل بالا را روی $\mathbb{R}$ حل نموده و عبارات $i(t)$ را روی بازه های $]-\infty,0[$ ،$[0,a[$ ،$[a,b[$ و $[b,+\infty[$ تعیین نمایید.

۴- با مقادیر داده شده $E=2V$ ،$R=10\,\Omega$ ،$L=0.1\,H$ ،$a=0.02\,s$ و $b=0.04\,s$، نمودار تابع i را نشان دهید.

حل:

۱- با توجه به نمودار داده شده، داریم:

$$\begin{cases} e(t)=0 & t<0 \\ e(t)=E & 0\le t<a \\ e(t)=-E & a\le t<b \\ e(t)=0 & b\le t \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} e(t) = EU(t) - EU(t-a) & 0 \le t < a \\ e(t) = -EU(t-a) + EU(t-b) & a \le t \end{cases}$$

بنابراین تابع $e(t)$ بصورت $e(t) = E\,U(t) - 2\,E\,U(t-a) + E\,U(t-b)$ خواهد بود. حال با استفاده از تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت: ($\theta(p)$ تبدیل لاپلاس تابع $e(t)$ است)

$$\theta(p) = E\frac{1}{p} - 2E\frac{\exp(-p\,a)}{p} + E\frac{\exp(-p\,b)}{p}$$
$$= E\left[\frac{1}{p} - 2\frac{\exp(-p\,a)}{p} + \frac{\exp(-p\,b)}{p}\right]$$

البته با محاسبه انتگرال $\int_0^{+\infty} \exp(-p\,t)\,e(t)\,dt$ نیز میتوان $\theta(p)$ را بدست آورد.

۲- الف- چنانچه طرفین رابطه (I) را در p ضرب کرده، آنگاه p را به صفر میل دهیم، خواهیم داشت: $A = E/R$. اگر طرفین رابطه (I) را در $Lp + R$ ضرب کنیم و p را به $-R/L$ میل دهیم، نتیجه میگیریم: $B = -LE/R$. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{E}{p(Lp+R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{L}{Lp+R}\right) = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+R/L}\right)$$

ب- $G(p)$ را بصورت زیر مینویسیم:

$$G(p) = \frac{E\exp(-\tau\,p)}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{L}{Lp+R}\right) = \frac{E}{R}\left(\frac{\exp(-\tau\,p)}{p} - \frac{\exp(-\tau\,p)}{p+R/L}\right)$$

حال با استفاده از جدول توابع اصلی، تابع $g(t)$ (اصل تابع G) را مشخص میکنیم:

$$g(t) = \frac{E}{R}\left\{U(t-\tau) - \exp\left[\frac{-R}{L}(t-\tau)\right]U(t-\tau)\right\}$$

(زیرا $\mathcal{L}\left[\exp(\frac{-Rt}{L})U(t)\right] = \frac{1}{p+\frac{R}{L}}$ و $\mathcal{L}\left[\exp(\frac{-R(t-\tau)}{L})U(t)\right] = \frac{\exp(-p\,\tau)}{p+\frac{R}{L}}$.)

۳- چون تابع $i(t)$ سببی است، پس روی بازه $]-\infty, 0[$ معادله دیفرانسیل مورد نظر بصورت زیر درمی‌آید:

$$L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) = 0$$

و جواب آن $i(t) = k\exp(-R\,t/L)$ خواهد بود. اما چون $i(t)$ در نقطه صفر پیوسته است، خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0^-} i(t) = i(0) = 0$$

لذا

$$\lim_{t\to 0^-} k\exp(-R\,t/L) = 0$$

پس $k = 0$. در نتیجه جواب معادله روی بازه $]-\infty, 0[$ برابر صفر است. اما بنا بر فرض $i(t)$ در E و $e(t)$ در E_0 است، بدین لحاظ از تساوی خطی $L\,i' = -R\,i + e$ معلوم میگردد که i' نیز در E است. از اینرو از تبدیل لاپلاس در این رابطه خطی میتوان استفاده کرد.

لذا خواهیم داشت

$L.\mathcal{L}[i'(t)](p)+R\,\mathcal{L}[i(t)](p)=\mathcal{L}[e(t)](p)$

با قرار دادن $\mathcal{L}[e(t)](p)=\theta(p)$ و $\mathcal{L}[i(t)](p)=I(p)$، تساوی فوق بصورت زیر در می‌آید:

$L\left[pI(p)-i(0^+)\right]+R\,I(p)=\theta(p)$

چون $i(0^+)$ برابر با صفر است، نتیجه میگیریم: $I(p)=\dfrac{\theta(p)}{L\,p+R}$ و با توجه به اینکه در قسمت اول $\theta(p)$ محاسبه شده بود، خواهیم داشت:

$$I(p)=\frac{E}{p(Lp+R)}[1-2\exp(-p\,a)+\exp(-p\,b)]$$
$$=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+R/L}\right)-2\frac{E}{R}\left(\frac{\exp(-p\,a)}{p}-\frac{\exp(-p\,a)}{p+R/L}\right)+\frac{E}{R}\left(\frac{\exp(-p\,b)}{p}-\frac{\exp(-p\,b)}{p+R/L}\right)$$

با در نظر داشتن هر یک از کسرهای طرف دوم در تساوی فوق و توجه به مطالبی که در مورد توابع اصل در قبل دانسته شد، $i(t)$ را بدست می‌آوریم:

$$i(t)=\frac{E}{R}[U(t)-\exp(-Rt/L)U(t)]-2\frac{E}{R}\{U(t-a)-\exp[-R(t-a)/L]U(t-a)\}$$
$$+\frac{E}{R}\{U(t-b)-\exp[-R(t-b)/L]U(t-b)\}$$

از نتیجه ای که بدست آوردیم، به آسانی معلوم میگردد که:

$$\begin{cases} i(t)=0 & t<0 \\ i(t)=\dfrac{E}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right) & 0\le t<a \\ i(t)=\dfrac{E}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)-\dfrac{2E}{R}\left(1-e^{-R(t-a)/L}\right)=\dfrac{E}{R}\left(-1-e^{-Rt/L}+2e^{-R(t-a)/L}\right) & a\le t<b \\ i(t)=\dfrac{E}{R}\left(-1-e^{-Rt/L}+2e^{-R(t-a)/L}\right)+\dfrac{E}{R}\left(1-e^{-R(t-b)/L}\right) & b\le t \end{cases}$$

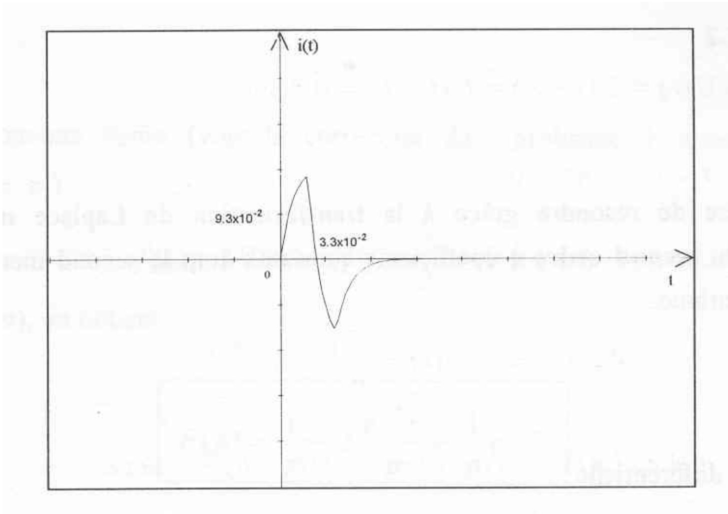
۴- بر طبق داده ها داریم: $E=2V$، $R=10\,\Omega$، $L=0.1\,H$، $a=0.02\,s$ و $b=0.04\,s$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} i(t)=0 & t<0 \\ i(t)=\dfrac{1}{5}\left(1-e^{-100t}\right) & 0\le t<0.02 \\ i(t)=\dfrac{1}{5}\left(-1-e^{-100t}+2e^{-100t+2}\right) & 0.02\le t<0.04 \\ i(t)=\dfrac{1}{5}\left(-e^{-100t}+2\,e^{2-100t}-e^{4-100t}\right) & 0.04\le t \end{cases}$$

تغییرات بالا در جدول زیر درج شده است:

t	$-\infty$	0		0.02		0.04		$+\infty$
$i'(t)$	0		$+$		$-$		$+$	
$i(t)$	0	0	$\uparrow$	0.17 (max)	$\downarrow$	-0.14 (min)		

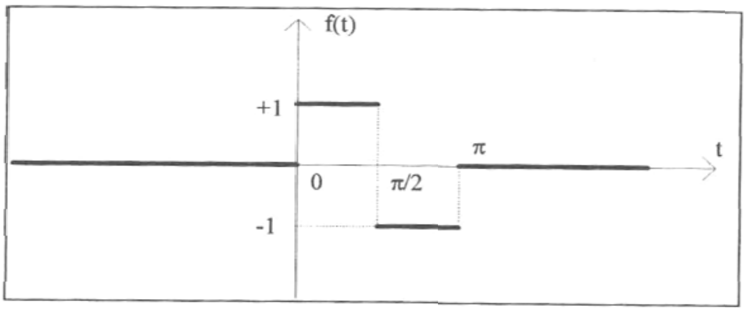
منحنی تابع در شکل ۲-۲۲ نشان داده شده است. یاد آور میشود که تابع $t\to i(t)$ تابعی پیوسته و مشتق پذیر قطعه‌ای روی $\mathbb{R}$ است.



شکل۲-۲۲: نمودار تابع $i(t)$

مسئله ۲: حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بکمک تبدیل لاپلاس:

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''(t)+y(t)=f(t)$ را تحت شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ در نظر میگیریم که در آن تابع نامشخص $t\to y(t)$ سببی و پیوسته بوده و دارای مشتق پیوسته بر روی $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $f(t)$ در شکل ۲-۲۳ نشان داده شده است.



شکل۲-۲۳: نمودار تابع $f(t)$

۱- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)\to t$ را تعیین کنید.

۲- تابع اصل $H(p)=\dfrac{\exp(-p\tau)}{p(p^2+1)}$ را که در آن τ عددی ثابت، حقیقی و مثبت است، مشخص کنید.

۳- بکمک تبدیل لاپلاس، تابع $y(t)\to t$ را معین نموده و عبارات آنرا بر هر یک از بازه های $]-\infty,0]$، $[0,\pi/2[$، $[\pi/2,\pi[$ و $[\pi,+\infty[$ تعیین نمایید.

۴- منحنی نمایش تابع y را در یک دستگاه محورهای متعامد رسم نمایید.

حل: با توجه به نمودار داده شده برای تابع $f(t)$ ، میتوان پی برد که تابع مزبور همان تابع $e(t)$ داده شده در مسئله ۱ است که در آن بجای E، a و b به ترتیب مقادیر $+1$، $\pi/2$ و π قرار داده شده است. لذا در مورد

تابع $f(t)$ به مانند $e(t)$ خواهیم داشت: $f(t)=U(t)-2U(t-\pi/2)+U(t-\pi)$. بنابراین، تبدیل لاپلاس تابع f چنین خواهد بود: ($f(t)\sqsupset F(p)$)

$$F(p)=\frac{1}{p}-2\frac{\exp(-\pi p/2)}{p}+\frac{\exp(-\pi p)}{p}$$

۲- با در نظر داشتن تساوی $\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}$ و همچنین تبدیلهای زیر که قبلاً دانستیم، میتوان نوشت:

$$U(t)\sqsupset\frac{1}{p},$$
$$\cos(t)U(t)\sqsupset\frac{1}{p^2+1},$$
$$f(t-\tau)U(t-\tau)\sqsupset\exp(-\tau p)F(p)$$

اگر تابع اصل H را h بنامیم، خواهیم داشت: $h(t)=U(t-\tau)-\cos(t-\tau)U(t-\tau)$.

۳- از آنجاییکه جواب معادله باید تابعی سببی، پیوسته و دارای مشتق پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد، از اینرو خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0^+)=y(0^-)=0 \\ y'(0^+)=y'(0^-)=0 \end{cases}$$

بنابراین میتوان از تبدیل لاپلاس بصورت زیر در معادله دیفرانسیل مفروض استفاده نمود: ($Y(p)$ تبدیل تابع $y(t)$ است.)

$$p^2\left[Y(p)-p\,y'(0^+)-y(0^+)\right]+Y(p)=F(p)$$

یا

$$p^2\left[Y(p)-p\times 0-0\right]+Y(p)=F(p)$$

و در نتیجه داریم:

$$F(p)=\frac{1}{p}-2\frac{\exp(-\pi p/2)}{p}+\frac{\exp(-\pi p)}{p}$$

یا

$$Y(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}-\frac{2\exp(-\pi p/2)}{p(p^2+1)}+\frac{\exp(-\pi p)}{p(p^2+1)}$$

با تجزیه هر یک از کسرهای فوق به کسرهای ساده و با بهره گرفتن از دانسته های پیشین در مورد توابع اصل، تابع $y(t)$ را محاسبه می‌نماییم. ابتدا مینویسیم:

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}-\frac{2\exp(-\pi p/2)}{p}+\frac{2p\exp(-\pi p/2)}{p^2+1}+\frac{\exp(-\pi p)}{p}-\frac{p\exp(-\pi p)}{p^2+1}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y(t)&=U(t)-\cos(t)U(t)-2U(t-\pi/2)+2\cos(t-\pi/2)U(t-\pi/2)+U(t-\pi)-\cos(t-\pi)U(t-\pi) \\ &=U(t)-\cos(t)U(t)-2U(t-\pi/2)+2\sin(t)U(t-\pi/2)+U(t-\pi)+\cos(t)U(t-\pi) \end{aligned}$$

بنابراین بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y(t)=0 & t<0 \\ y(t)=1-\cos(t) & 0\le t<\pi/2 \\ y(t)=-1-\cos(t)+2\sin(t) & \pi/2\le t<\pi \\ y(t)=2\sin(t) & \pi\le t \end{cases}$$

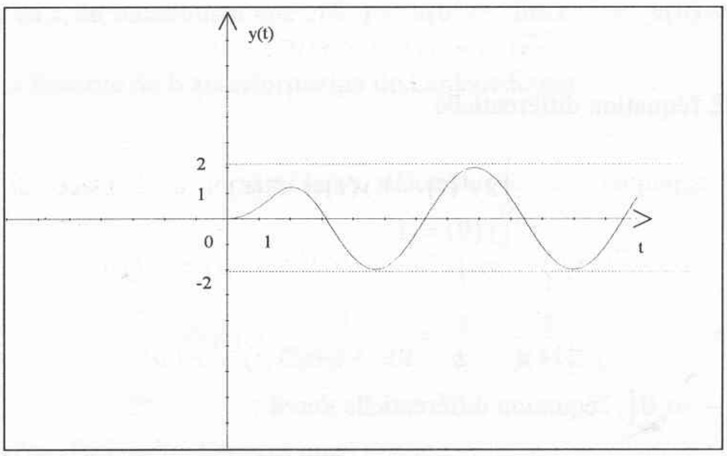
توجه شود که چون $y(\pi/2)=y\left((\pi/2)^+\right)=y\left((\pi/2)^-\right)=1$ پس تابع y در $\pi/2$ پیوسته است و چون $y(\pi)=y(\pi^-)=y(\pi^+)=0$ پس y در π پیوسته است. یعنی $y(t)$ یک تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ است.

۴- در مورد تابع $y'(t)$ داریم:

$$\begin{cases} y'(t)=0 & t<0 \\ y'(t)=\sin(t) & 0\le t<\pi/2 \\ y'(t)=\sin(t)+2\cos(t) & \pi/2\le t<\pi \\ y'(t)=2\cos(t) & \pi\le t \end{cases}$$

چون $y'(0)=y'(0^-)=y'(0^+)=0$ پس y' در صفر پیوسته است و چون $y'(\pi/2)=y'((\pi/2)^-)=y'((\pi/2)^+)=1$ پس y' در $\pi/2$ پیوسته است و همچنین چون $y'(\pi)=y'(\pi^-)=y'(\pi^+)=-2$ پس y' در π پیوسته است.

بنابراین معلوم میگردد که $y'(t)$ نیز بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. بهمین ترتیب میتوان وضع $y''(t)$ را نیز مشخص نمود. منحنی تابع $y(t)$ در شکل ۲-۲۴ نشان داده شده است.



شکل۲-۲۴: نمودار تابع $y(t)$

مسئله ۳: معادله دیفرانسیل $2\,y'(t)+4\,y(t)=U(t)$ را تحت شرط اولیه $y(0)=1$ بر روی $\mathbb{R}$ حل نمایید. (y در صفر پیوسته است)

حل: روی بازه $]-\infty,0[$ معادله دیفرانسیل مفروض بصورت $2\,y'(t)+4\,y(t)=0$ در می‌آید که جواب عمومی آن عبارت است از: $t\to y(t)=c\exp(-2\,t)$. اما چون y در صفر پیوسته است، خواهیم داشت:

$\lim_{t\to 0^-} y(t) = y(0) = 1$ یا $\lim_{t\to 0^-} c\exp(-2t) = c = 1$. پس روی بازه $]-\infty, 0[$ ، جواب معادله دیفرانسیل بصورت $y = \exp(-2t)$ خواهد بود.

حال بمنظور حل معادله روی بازه $[0, +\infty[$، تابع $t \to z(t) = y(t) - \exp(-2t)$ را که در آن y جواب معادله داده شده است در نظر میگیریم. پیداست که برای هر t منفی، $z(t)$ برابر با صفر است. (زیرا $y(t)$ بازای t های منفی برابر با $\exp(-2t)$ بود) بنابراین $z(t)$ تابعی سببی است. همچنین داریم: $z'(t) = y'(t) + 2\exp(-2t)$ یا $y'(t) = z'(t) - 2\exp(-2t)$. چنانچه بجای $y'(t)$، $z'(t) - 2\exp(-2t)$ را درمعادله مفروض قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$2[z'(t) - 2\exp(-2t)] + 4[z(t) + \exp(-2t)] = U(t)$$

که نتیجه میدهد

$$2z'(t) + 4z(t) = U(t)$$

یعنی $z(t)$ جواب معادله دیفرانسیل است. اما داریم: $z(0) = y(0) - \exp(-2\times 0) = 1 - 1 = 0$ بنابراین کافیست که معادله دیفرانسیل $2z'(t) + 4z(t) = U(t)$ را که در آن z تابعی سببی است تحت شرط $z(0) = 0$ روی بازه $]0, +\infty[$ بکمک تبدیل لاپلاس حل نماییم.

خواهیم داشت $2\left[pZ(p) - z(0^+)\right] + 4Z(p) = \mathcal{L}[U](p)$ یا $2pZ(p) - 0 + 4Z(p) = \frac{1}{p}$. پس

$$Z(p) = \frac{1}{2p(p+2)} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{p+2}$$

در نتیجه داریم:

$$z(t) = \frac{1}{4}U(t) - \frac{1}{4}\exp(-2t)U(t)$$

و از $y(t) = z(t) + \exp(-2t)$ بدست می‌آید که

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}[1 - \exp(-2t)] + \exp(-2t) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\exp(-2t) \end{aligned}$$

زیرا $U(t)$ روی بازه $]0, +\infty[$ برابر یک است. پس بطور خلاصه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} t\in]-\infty,0[& \to y(t) = \exp(-2t) & \to y(0^-) = 1 \\ t = 0 & \to y(t) = 1 & \\ 0 < t & \to y(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\exp(-2t) & \to y(0^+) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{cases}$$

معلوم است که $y(t)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اما در مورد $y'(t)$ داریم:

$$\begin{cases} t < 0 & \to y'(t) = -2\exp(-2t) & \to y'(0^-) = -2 \\ t = 0 & \to y'(t) = 0 & \\ 0 < t & \to y'(t) = -\frac{3}{2}\exp(-2t) & \to y'(0^+) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

این ناپیوستگی $y'(t)$ در صفر به خاطر آن است که طرف دوم معادله مفروض در صفر ناپیوسته بود.

میتوان نشان داد که در یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دوم نیز ناپیوستگی تابع طرف دوم معادله موجب ناپیوستگی در $y''(t)$ میگردد. صحت این مطلب را میتوان در مسئله قبل در مورد y'' تحقیق نمود.

مسئله ۴: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را روی بازه $[0,+\infty[$ بکمک تبدیل لاپلاس حل نمایید.

$$\begin{cases} 4x(t)+y'(t)=U(t) \\ y(t)+x'(t)=0 \end{cases}$$

فرض کنید $x(0)=1$ و $y(0)=0$ است.

حل: برای آنکه بتوان از تبدیل لاپلاس در حل دستگاه فوق روی بازه $]0,+\infty[$ استفاده نمود، ابتدا طرف های اول معادلات دستگاه را در تابع پله ای $U(t)$ ضرب میکنیم:

$$\begin{cases} 4x(t)U(t)+y'(t)U(t)=U(t) \\ y(t)U(t)+x'(t)U(t)=0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

چون توابع x و y در سمت راست نقطه صفر پیوسته اند، لذا داریم:

$$\begin{cases} x(0)=x(0^+)=1 \quad \rightarrow \quad (xU)(0^+)=1 \\ y(0)=y(0^+)=0 \quad \rightarrow \quad (yU)(0^+)=0 \end{cases}$$

حال با قرار دادن $\mathcal{L}[x\,U](p)=X(p)$ و $\mathcal{L}[y\,U](p)=Y(p)$ و استفاده از تبدیل لاپلاس در دستگاه (I) نتیجه میگیریم:

$$\begin{cases} 4X(p)+pY(p)-(yU)(0^+)=\dfrac{1}{p} \\ Y(p)+pX(p)-(xU)(0^+)=0 \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} 4X(p)+pY(p)=\dfrac{1}{p} \\ Y(p)+pX(p)-1=0 \end{cases}$$

که از حل دستگاه دو مجهولی بدست آمده، $X(p)$ و $Y(p)$ را تعیین نموده، خواهیم داشت:

$$Y(p)=\frac{-3}{p^2-4}$$

$$X(p)=\frac{p^2-1}{p(p^2-4)}$$

که با تبدیل کسرهای فوق به کسرهای ساده و با توجه به توابع اصل که در قبل شناخته شدند، به آسانی توابع $x(t)$ و $y(t)$ محاسبه میگردند. ابتدا توجه میکنیم که

$$Y(p)=\frac{-3}{4}\times\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{p+2}$$

$$X(p)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{p}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{p-2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{p+2}$$

آنوقت میتوان نوشت:

$$\begin{cases} x(t)U(t) = \frac{1}{4}U(t) + \frac{3}{8}\exp(2t)U(t) + \frac{3}{8}\exp(-2t)U(t) \\ y(t)U(t) = \frac{-3}{4}\exp(2t)U(t) + \frac{3}{4}\exp(-2t)U(t) \end{cases}$$

یا برای هر $t \in]0, +\infty[$ داریم:

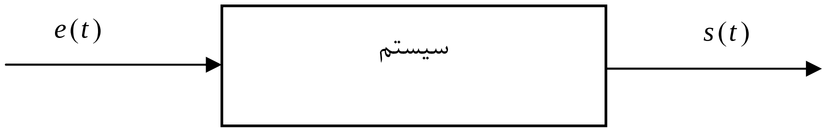
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\exp(2t) + \frac{3}{8}\exp(-2t) \\ y(t) = \frac{-3}{4}\exp(2t) + \frac{3}{4}\exp(-2t) \end{cases}$$

جوابهای بدست آمده روی $\mathbb{R}^+$ بطور خلاصه عبارتند از: ($t \in]0, +\infty[$)

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\exp(2t) + \frac{3}{8}\exp(-2t) \\ y(t) = -\frac{3}{4}\exp(2t) + \frac{3}{4}\exp(-2t) \end{cases}$$

با $x(0) = 1$ و $y(0) = 0$.

مسئله ۵: تابع انتقال یک سیستم، بصورت $S(p) = H(p) \times E(p)$ تعریف میگردد که در آن E و S به ترتیب تبدیلهای لاپلاس سیگنالهای e و s هستند. (s سیگنال خروجی وابسته به سیگنال ورودی e است.(شکل ۲-۲۵)



شکل۲-۲۵: نمودار سیستم

توابع e و s سببی بوده و تبدیل لاپلاس را می‌پذیرند. $e(t)$ بصورت زیر تعریف گردیده

$$\begin{cases} t \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[& \rightarrow & e(t) = 0 \\ t \in [0, 1[& \rightarrow & e(t) = 2t \\ t \in [1, 2[& \rightarrow & e(t) = -2t + 4 \end{cases}$$

و H نیز بصورت $H(p) = 1/(p^2 + 4)$ داده شده است.

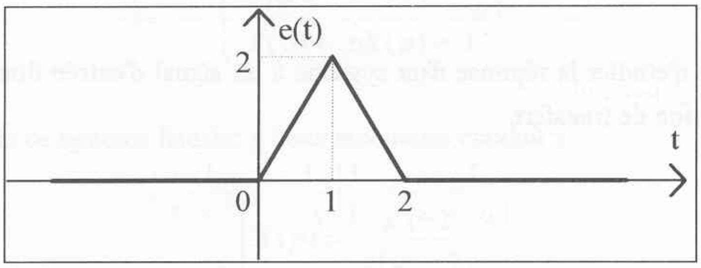
۱- منحنی نمایش تابع e را رسم نموده و تبدیل لاپلاس آن (E) را مشخص نمایید.

۲- مقادیر A، B، C و D را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4} \qquad \text{(I)}$$

۳- $S(p)$ را محاسبه نموده و از آن جواب $t \rightarrow s(t)$ را نتیجه بگیرید. همچنین مقدار $s(t)$ را روی هر یک از بازه های $]-\infty, 0[$، $[0, 1[$، $[1, 2[$ و $[2, +\infty[$ تعیین نمایید.

حل: منحنی تابع $e(t)$ در شکل ۲-۲۶ نشان داده شده است.



شکل۲-۲۶: نمودار تابع $e(t)$

۱- تابع $e(t)$ را با توجه به داده ها، میتوان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} e(t) &= 2tU(t) - 2tU(t-1) + (-2t+4)U(t-1) + (2t-4)U(t-2) \\ &= 2tU(t) - 4(t-1)U(t-1) + 2(t-2)U(t-2) \end{aligned}$$

اما داریم $(t-\tau)U(t-\tau) \sqsupset \dfrac{\exp(-\tau p)}{p^2}$ و $tU(t) \sqsupset \dfrac{1}{p^2}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[e](p) = E(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{4\exp(-p)}{p^2} + \frac{2\exp(-2p)}{p^2}$$

۲- با ضرب طرفین رابطه داده شده (I) در p^2 و میل دادن p به صفر، $A = \dfrac{1}{4}$ بدست می‌آید. آنگاه پس از قرار دادن $1/4$ بجای A و ضرب دو طرف تساوی در p و میل دادن p به سمت $+\infty$، مقدار $B = -C$ نتیجه میگردد. حال با قراردادن اعداد بدست آمده برای A و B و سپس ضرب طرفین تساوی (I) در p^2+4 و قرار دادن $2i$ بجای p، مقادیر $C = 0$ و $D = -1/4$ بدست می‌آیند. بنابراین نتیجه میگیریم:

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right)$$

۳- داریم: $S(p) = H(p)E(p)$. در این تساوی بجای $H(p)$ مساویش $1/(p^2+4)$ و بجای $E(p)$ مقدار آن یعنی $\dfrac{2}{p^2} - \dfrac{4\exp(-p)}{p^2} + \dfrac{2\exp(-2p)}{p^2}$ را قرار داده، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{2}{p^2(p^2+4)} - \frac{4\exp(-p)}{p^2(p^2+4)} + \frac{2\exp(-2p)}{p^2(p^2+4)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) - \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right)\exp(-p) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right)\exp(-2p) \end{aligned}$$

با توجه به دانسته های مربوط به توابع اصل، $s(t)$ محاسبه میگردد که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2}\left[tU(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)U(t)\right] - \left\{(t-1)U(t-1) - \frac{1}{2}\sin[2(t-1)]U(t-1)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{(t-2)U(t-2) - \frac{1}{2}\sin[2(t-2)]U(t-2)\right\} \end{aligned}$$

اما مقادیر $s(t)$ روی بازه های خواسته شده که از تساوی فوق نتیجه شده اند، عبارتند از:

$$\begin{cases} t<0 & \rightarrow s(t)=0 \\ 0\le t<1 & \rightarrow s(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin(2t) \\ 1\le t<2 & \rightarrow s(t)=-\frac{1}{2}t+1-\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin[2(t-1)] \\ 2\le t & \rightarrow s(t)=-\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}\sin[2(t-1)]-\frac{1}{4}\sin[2(t-2)] \end{cases}$$

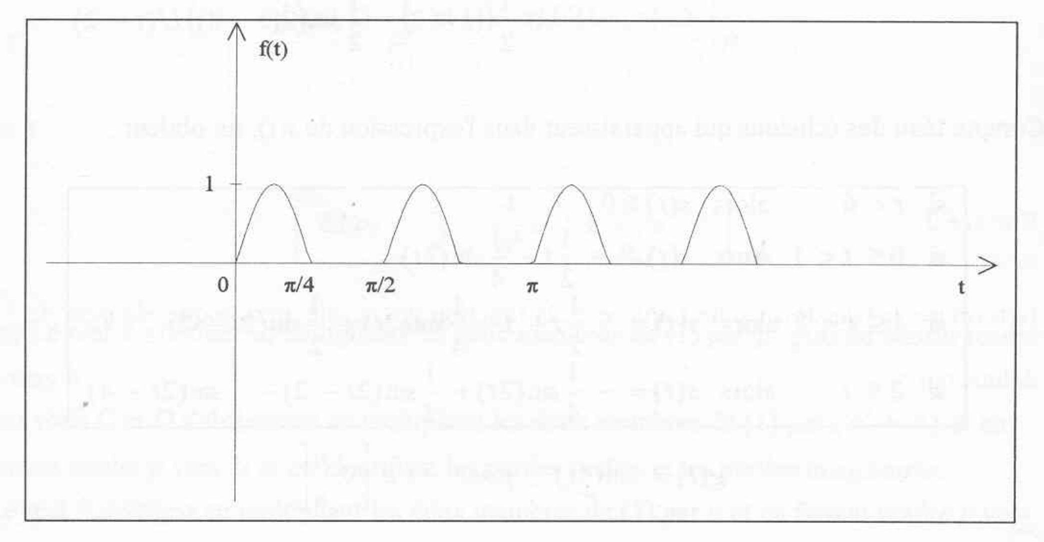
توجه شود که در حالت $0\le t<1$ مقدار $U(t)$ برابر با یک است.

مسئله ۶:

قسمت اول: تبدیل لاپلاس تابع سببی و متناوب f را که دوره تناوب آن $\pi/2$ است و در زیر تعریف شده، مشخص نمایید:

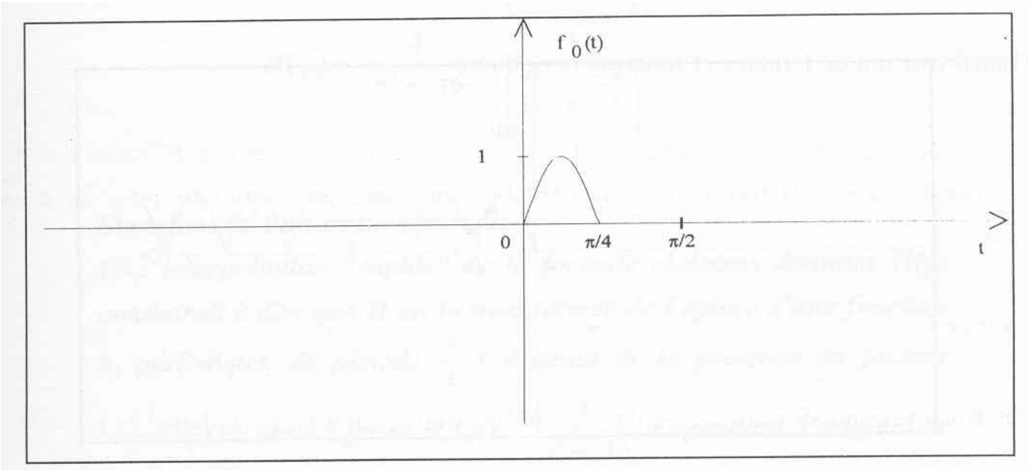
$$\begin{cases} f(t)=\sin(4t) & t\in[0,\pi/4[\\ f(t)=0 & t\in[\pi/4,\pi/2[\end{cases}$$

حل: نمودار تابع $f(t)$ در شکل ۲-۲۷ نشان داده شده است.



شکل۲-۲۷: نمودار تابع $f(t)$

همانطوریکه در قسمت ۲-۲-ب در مثالهای ۱ و ۲ عمل گردید، در اینجا نیز تابعی بصورت $f_0(t)=[U(t)-U(t-\pi/2)]\,f(t)$ را در نظر گرفته (شکل ۲-۲۸) و ابتدا تبدیل لاپلاس تابع $f_0(t)$ را مشخص می‌سازیم، آنگاه بکمک آن تبدیل لاپلاس $f(t)$ را تعیین می‌نماییم. (البته $f_0(t)$ فقط روی بازه $[0,\pi/2[$ بصورتی است که در نظر گرفته شده و در جاهای دیگر برابر صفر است)



شکل۲-۲۸: نمودار تابع $f_0(t)$

اما $f_0(t)$ را میتوان چنین نوشت:

$$f_0(t)=\left[U(t)-U(t-\pi/4)+U(t-\pi/4)-U(t-\pi/2)\right]f(t)$$
$$=U(t)\sin(4t)+U(t-\pi/4)\sin[4(t-\pi/4)]$$

محاسبه تبدیل لاپلاس تابع $f_0(t)$ با در نظر داشتن $U(t)\sin(4t)\sqsupset\dfrac{4}{p^2+16}$ و $\dfrac{4\exp(-p\pi/4)}{p^2+16}\sqsupset U(t-\pi/4)\sin[4(t-\pi/4)]$ به آسانی انجام میشود و با تعیین $\mathcal{L}[f_0](p)$، $F(p)$ نیز محاسبه میگردد. خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f_0](p)=\frac{4}{p^2+16}+\frac{4\exp(-p\pi/4)}{p^2+16}=\frac{4\left[1+\exp(-p\pi/4)\right]}{p^2+16}$$

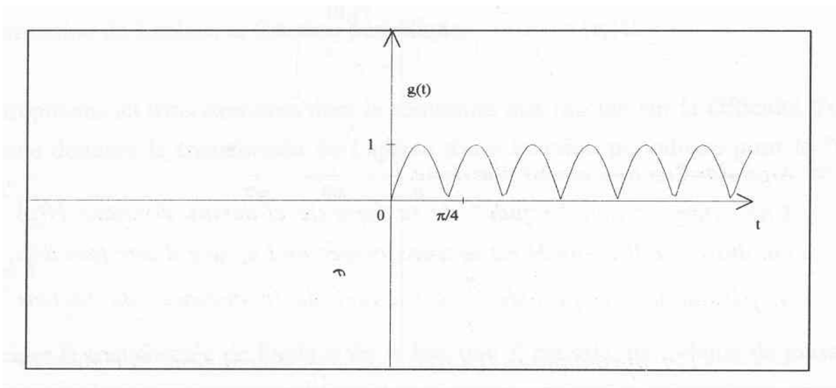
لذا

$$\mathcal{L}[f\ ](p)=F(p)=\frac{\mathcal{L}[f_0](p)}{1-\exp(-p\pi/2)}$$

پس داریم:

$$F(p)=\frac{4[1+\exp(-p\pi/4)]}{(p^2+16)\left[1+\exp(-p\pi/2)\right]}$$

قسمت دوم: محاسبه تبدیل لاپلاس تابع سببی و متناوب g با تعریف $g(t)=\sin(4t)$ روی $t\in[0,\pi/4[$ و با دوره تناوب $\pi/4$. منحنی تابع در شکل ۲-۲۹ نشان داده شده است.



شکل۲-۲۹: نمودار تابع $g(t)$

حل: همانند قسمت اول با تشکیل $g_0(t)$ و محاسبه تبدیل آن شروع میکنیم و بعد تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ را تعیین می‌نماییم. خواهیم داشت: $g_0(t)=[U(t)-U(t-\pi/4)]g(t)$. (توجه شود که $g_0(t)$ فقط در بازه $[0,\pi/4[$ بصورت در نظر گرفته شده است و در هر جای دیگر برابر با صفر میباشد). $g_0(t)$ را بصورت

$$g_0(t)=[U(t)-U(t-\pi/4)]\sin(4t)$$

یا $g_0(t)=U(t)\sin(4t)+U(t-\pi/4)\sin[4(t-\pi/4)]$ میتوان نوشت و تبدیل آنرا محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g_0](p)&=\frac{4}{p^2+16}+\frac{4\exp(-p\pi/4)}{p^2+16}\\&=\frac{4[1+\exp(-p\pi/4)]}{p^2+16}\end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}G(p)&=\mathcal{L}[g](p)\\&=\frac{\mathcal{L}[g_0](p)}{1-\exp(-p\pi/4)}\\&=\frac{4[1+\exp(-p\pi/4)]}{[1-\exp(-p\pi/4)](p^2+16)}\end{aligned}$$

قسمت سوم: تابع اصل تابع $H(p)$ را تعیین نمایید.

$$H(p)=\frac{4}{p^2+16}\times\frac{1+\exp(-p\pi/4)}{1-\exp(-p\pi/2)}$$

با توجه به قسمت اول، پی میبریم که تابع اصل مربوط به $H(p)$، تابعی است متناوب با دوره تناوب $\pi/2$ و بصورت $h(t)=f(t)$. ($f(t)$ همان تابع تعریف شده در قسمت اول است.) دراینجا لازم است به راه حل زیر و اشکال موجود در آن نیز توجه گردد.

چنانچه $H(p)$ را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}H(p)&=\frac{4[1+\exp(-p\pi/4)]}{(p^2+16)[1-\exp(-p\pi/4)][1+\exp(-p\pi/4)]}\\&=\frac{4}{(p^2+16)[1-\exp(-p\pi/4)]}\end{aligned}$$

نتیجه بدست آمده نشان میدهد که تابع اصل، تابعی است متناوب با دوره تناوب $\pi/4$، که در آن $H_0(P)$ برابر است با $4/(p^2+16)$. در اینصورت خواهیم داشت: $h_0(t)=U(t)\sin(4t)$. اما این $h_0(t)$ که میباید در خارج از بازه $[0,\pi/4[$ برابر با صفر گردد، چنین نیست. به عبارت دیگر $h_0(t)$ بدست آمده با $[U(t)-U(t-\pi/4)]h(t)$ برابر نیست و این راه حل دارای اشکال است.

توجه: هر فرمول از نوع $F(p)=\dfrac{F_0(p)}{1-\exp(-pT)}$ را نمیتوان بعنوان تبدیل لاپلاس یک تابع متناوب با دوره تناوب T دانست، مگر اینکه $F_0(p)$ تبدیل لاپلاس یک تابع سببی بوده ، بعلاوه این تابع سببی روی بازه $]T,+\infty[$ برابر با صفر گردد.

اما اگر برای $p > 0$ ، کسر $1/[1-\exp(-pT)]$ را مجموع جمله های یک سری هندسی نزولی بدانیم و آن را بصـورت $1 + \exp(-pT) + \exp(-2pT) + \exp(-3pT) + \ldots$ بنویسـیم، میتـوان تـابع اصـل را در مـورد $F(p)$ مشخص ساخت. بطور مثال اینکار را به ترتیبی که در مورد $H(p)$ انجام گردیده، در زیر ملاحظه میکنیم. خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
H(p) &= \frac{4}{p^2+16} \times \frac{1}{1-\exp(-p\pi/4)} \\
&= \frac{4}{p^2+16}\left[1+\exp(-p\pi/4)+\exp(-2p\pi/4)+\exp(-3p\pi/4)+\ldots\right] \\
&= \frac{4}{p^2+16}\sum_{n=0}^{+\infty}\exp(-n\,p\pi/4) \\
&= \frac{4}{p^2+16}+\frac{4\exp(-p\pi/4)}{p^2+16}+\frac{4\exp(-2p\pi/4)}{p^2+16}+\frac{4\exp(-3p\pi/4)}{p^2+16}+\ldots
\end{aligned}
$$

حال با قبول اینکه تابع اصل مربوط به مجموع یک سری با مجموع توابع اصل جمله های سری برابـر اسـت و بـا در نظر داشتن تابع های اصل هر یک از جمله های سری فوق، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \sin(4t)U(t)+\sin[4(t-\pi/4)]U(t-\pi/4)+\sin[4(t-2\pi/4)]U(t-2\pi/4) \\
&\quad +\sin[4(t-3\pi/4)]U(t-3\pi/4)+\ldots
\end{aligned}
$$

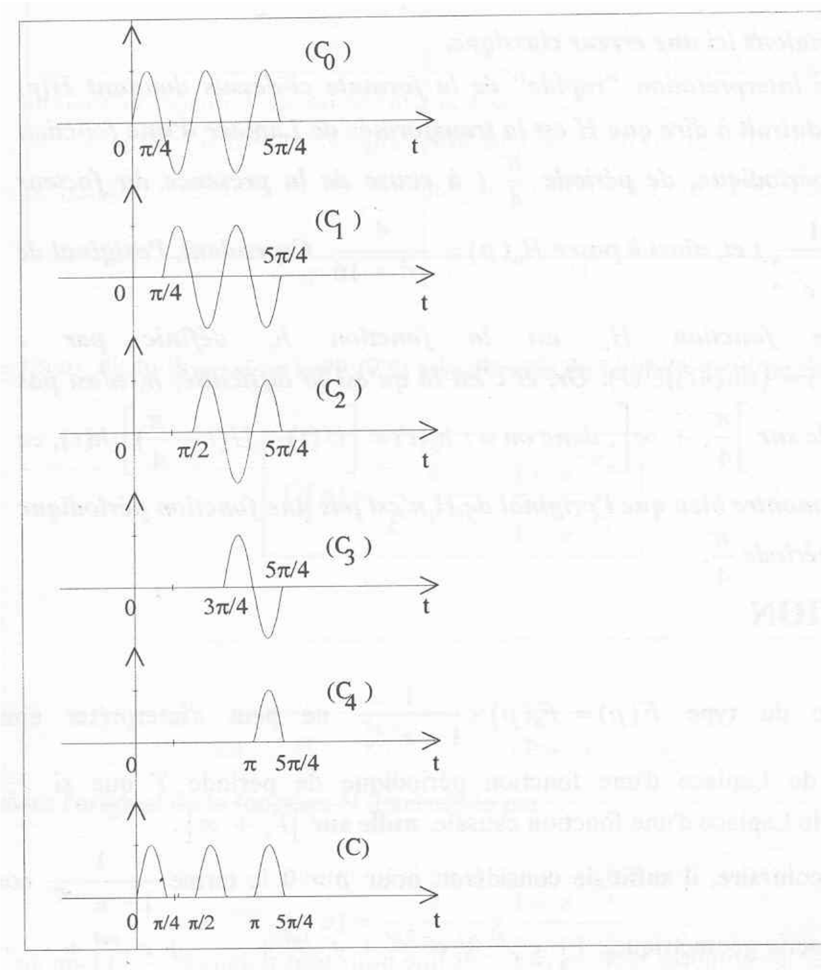
لذا

$$h(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin[4(t-n\pi/4)]U(t-n\pi/4)$$

اما تعبیر نمودار $h(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
h_0(t) &= \sin(4t)U(t) \\
h_1(t) &= \sin[4(t-\pi/4)]U(t-\pi/4) \\
h_2(t) &= \sin[4(t-2\pi/4)]U(t-2\pi/4) \\
h_3(t) &= \sin[4(t-3\pi/4)]U(t-3\pi/4) \\
h_4(t) &= \sin[4(t-4\pi/4)]U(t-4\pi/4)
\end{aligned}
$$

چنانچه نمودارهای هر یک از توابع فوق و همچنین نمودار تابع $h_0+h_1+h_2+h_3+h_4$ را رسم کنیم (شـکل ۲-۳۰)، خواهیم دید که نمودار تابع $h_0+h_1+h_2+h_3+h_4$ با نمودار تابع $f(t)$ که در قسمت اول داشـتیم یکـی است.

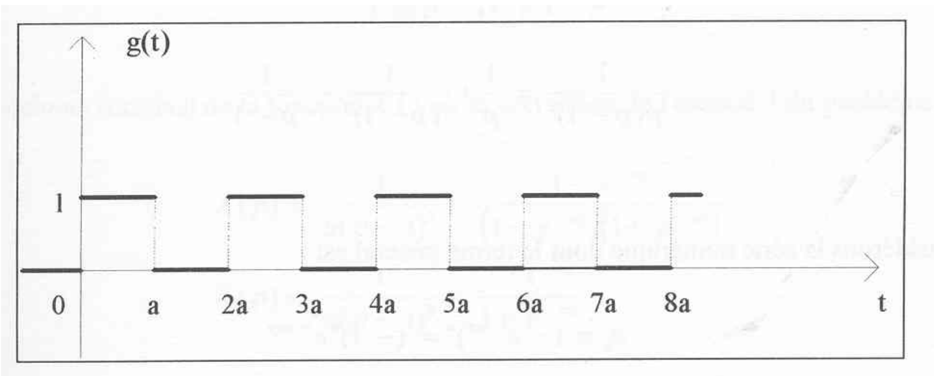


شکل۲-۳۰: نمودار توابع h_i و مجموع آنها

مسئله ۷: میخواهیم بکمک تبدیل لاپلاس، تابع سببی و پیوسته $t \to x(t)$ را که روی بازه $\mathbb{R}^+$ دارای مشتق پیوسته نیز باشد، چنان بیابیم که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = g(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

g تابعی است سببی، متناوب با دوره تناوب $T = 2a$ که نمودار آن در شکل ۲-۳۱ نشان داده شده است.



شکل۲-۳۱: نمودار تابع g

به این منظور موارد زیر را بررسی نمایید:

۱- تبدیل لاپلاس $G(p)$ مربوط به تابع $g(t)$ را مشخص کنید.

۲- اعداد حقیقی A، B و C را طوری بدست آورید که برای هر p متعلق به بازه $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ داشته باشیم:

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-1}$$

۳- برای $p > 0$، درستی تساوی $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-n\,a\,p) = \frac{1}{1+\exp(-a\,p)}$ را تحقیق کنید.

۴- با بکار گیری تبدیل لاپلاس ، تابع $t \to x(t)$ را روی $\mathbb{R}^+$ بیابید.

حل:

۱- ابتدا تابع $g_0(t)$ را تشکیل داده، $G_0(p)$ را بدست می‌آوریم. آنگاه بکمک $G_0(p)$، $G(p)$ را مشخص میسازیم. از نمودار داده شده معلوم میگردد:

$$\begin{cases} g(t) = 1 & t \in [0, a[\\ g(t) = 0 & t \in [a, 2a[\end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت $g_0(t) = [U(t) - U(t-a)] \times 1$ یا $g_0(t) = U(t) - U(t-a)$. با در نظر داشتن $U(t) \sqsupset \frac{1}{p}$ و $U(t-a) \sqsupset \frac{\exp(-a\,p)}{p}$ داریم: $\mathcal{L}[g_0](p) = G_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-a\,p)}{p}$. بنابراین میتوان نوشت:

$$G_0(p) = \frac{1-\exp(-a\,p)}{p}$$

یا

$$\mathcal{L}[g](p) = G(p) = \frac{G_0(p)}{1-\exp(-2a\,p)}$$

پس داریم: (چون دوره تناوب g برابر با $2a$ است)

$$G(p) = \frac{1-\exp(-a\,p)}{p[1-\exp(-2a\,p)]}$$

۲- طرفین تساوی داده شده را به ترتیب در p، $p-1$ و $(p-1)^2$ ضرب کرده و p را به همان ترتیب ابتدا به صفر ، سپس به $+\infty$ و بالاخره به یک میل میدهیم تا ضرایب A، B و C مشخص گردند. خواهیم داشت: $A = 1$، $B = 1$ و $C = -1$. پس

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}$$

۳- سری عددی با جمله عمومی $u_n = [-\exp(-a\,p)]^n$ یا $u_n = (-1)^n[\exp(-a\,p)]^n$ را که جمله اول آن یک و قدر نسبت آن $q = -\exp(-a\,p)$ است، در نظر میگیریم. پیداست که اگر p مثبت باشد، این سری به یک سری همگرا و هندسی نزولی بدل گردیده و حد مجموع جملات آن برابر با $1/[1+\exp(-a\,p)]$ خواهد شد.

بنابراین خواهیم داشت: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \exp(-n\,a\,p) = 1/[1+\exp(-a\,p)]$

۴- برای حل معادله دیفرانسیل داده شده بر روی $]0,+\infty[$، طرفین معادله را در $U(t)$ ضرب میکنیم. خواهیم داشت:

$$x''(t)U(t) - 2x'(t)U(t) + x(t)U(t) = g(t)U(t) \qquad \text{(I)}$$

اما داریم: (با مشتقگیری از حاصلضرب)

$$\begin{cases} \left(x(t)U(t)\right)' = \left(xU\right)' = x'(t)U(t) \\ \left(x(t)U(t)\right)'' = \left(xU\right)'' = x''(t)U(t) \end{cases}$$

از اینرو نتیجه میگیریم که $(xU)''(t) - 2(xU)'(t) + (xU)(t) = (gU)(t)$. همچنین با توجه به داده های مسئله داریم:

$$\begin{cases} x(0) = x(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad (xU)(0^+) = 0 \\ x'(0) = x'(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad (xU)'(0^+) = 0 \end{cases}$$

اینک بکمک نتایج فوق از تبدیل لاپلاس در معادله (I) به ترتیب زیر استفاده مینماییم: (با قرار دادن $\mathcal{L}[(xU)] = X(p)$)

$$\mathcal{L}[(xU)'] = pX(p) - (xU)(0^+) = pX(p) - 0 = pX(p)$$
$$\mathcal{L}[(xU)''] = p[pX(p)] - (xU)'(0^+) = p^2X(p) - 0 = p^2X(p)$$

با قرار دادن مقادیر فوق در معادله (I) پس از تبدیل، نتیجه میگیریم:

$$p^2X(p) - 2pX(p) + X(p) = G(p)$$

یا

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{G(p)}{p^2 - 2p + 1} \\ &= \frac{\dfrac{1-\exp(-ap)}{p[1-\exp(-2ap)]}}{(p-1)^2} \\ &= \frac{1}{p(p-1)^2} \times \frac{1}{1+\exp(-ap)} \\ &= \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}\right] \times \left[1 - e^{-ap} + e^{-2ap} - e^{-3ap} + \ldots + (-1)^n e^{-nap} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} - \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-ap}}{(p-1)^2} + \frac{e^{-ap}}{p-1} + \frac{e^{-2ap}}{p} + \frac{e^{-2ap}}{(p-1)^2} - \frac{e^{-2ap}}{p-1} + \ldots \end{aligned}$$

با در نظر داشتن توابع اصل کسرهای طرف دوم و قرار دادن بجای آنها، $x(t)$ یعنی تابع اصل مربوط به $X(p)$ تعیین میگردد که $x(t)$ همان جواب معادله دیفرانسیل داده شده است. میدانیم: $U(t) \sqsupset \dfrac{1}{p}$،

$e^tU(t) \sqsupset \dfrac{1}{p-1}$، $e^t\,tU(t) \sqsupset \dfrac{1}{(p-1)^2}$، $U(t-a) \sqsupset \dfrac{e^{-ap}}{p}$، $e^{t-a}U(t-a) \sqsupset \dfrac{e^{-ap}}{p-1}$ و

$e^{t-a}(t-a)U(t-a) \sqsupset \dfrac{e^{-ap}}{(p-1)^2}$. اینها و نتایجی که از این تبدیلها بدست میآیند، ما را به توابع اصل کسرهای طرف دوم می‌رسانند که در نتیجه خواهیم داشت:

$$x(t)=\left[U(t)+t\,e^{t}\,U(t)-e^{t}U(t)\right]-\left[U(t-a)+(t-a)e^{t-a}U(t-a)-e^{t-a}U(t-a)\right]$$
$$+\left[U(t-2a)+(t-2a)e^{t-2a}U(t-2a)-e^{t-2a}U(t-2a)\right]-\ldots$$
$$=\left[1+(t-1)e^{t}\right]U(t)-\left[1+(t-a-1)e^{t-a}\right]U(t-a)+\ldots$$
$$+(-1)^{n}\left[1+(t-na-1)e^{t-na}\right]U(t-na)+\ldots$$

با در نظر گرفتن بازه ها، میتوان پی برد که $x(t)$ تابعی از کلاس C^1 روی $\mathbb{R}$ است.

مسئله ۸: در این مسئله، رابطه بین حلهای دو معادله مطرح است.

معادله اول: با استفاده از تبدیل لاپلاس، تابع $t \to x(t)$ یعنی جواب معادله دیفرانسیل زیر را که تابعی پیوسته و قطعه ای روی $\mathbb{R}$ بوده و به فضای E تعلق دارد محاسبه نمایید. (τ و c مقادیری حقیقی، ثابت و مثبت هستند)

$$x(t)U(t)-x(t-\tau)U(t-\tau)=c\,U(t)$$

به این منظور به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱- برای $p>0$ ، مجموع سری هندسی را که در آن جمله اول برابر با یک و قدر نسبت برابر با $\exp(-p\,\tau)$ است، بیابید.

۲- با بکارگیری تبدیل لاپلاس تابع $t \to x(t)$ (جواب معادله) را مشخص کنید.

۳- نمودار تابع $x(t)$ را در صورتیکه t روی بازه $[0,6\tau[$ تغییر نماید رسم کنید.

حل:

۱- در سری مذکور داریم: $\left(\exp(-p\,\tau)\right)^{n}=u_n=$ (جمله عمومی) ، $q=\exp(-p\,\tau)=$(قدر نسبت) و جمله اول برابر یک است. چون برای $p>0$ و $\tau>0$، قدر نسبت سری کمتر از یک میگردد. از اینرو سری مزبور یک سری هندسی نزولی و همگرا بوده و حد مجموع جملات آن برابر با $\dfrac{1}{1-\exp(-p\,\tau)}$ خواهد بود. پس داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\exp(-p\,\tau)\right)^{n}=\frac{1}{1-\exp(-p\,\tau)}$$

۲- از آنجاییکه x به فضای E تعلق دارد، از تبدیل لاپلاس میتوان در معادله استفاده کرد. خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[xU]=X(p) \qquad \to \qquad X(p)-X(p)\exp(-p\,\tau)=\frac{c}{p}$$

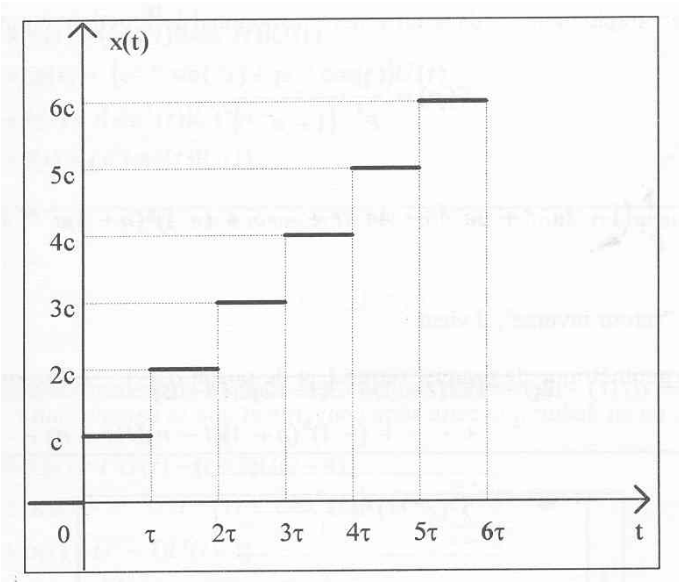
یا

$$X(p)=\frac{c}{p}\times\frac{1}{1-\exp(-p\tau)}$$
$$=\frac{c}{p}\left(1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}+\ldots+e^{-np\tau}+\ldots\right)$$
$$=c\left(\frac{1}{p}+\frac{e^{-p\tau}}{p}+\frac{e^{-2p\tau}}{p}+\ldots\right)$$

با در نظر داشتن توابع اصل کسرهای طرف دوم در تساوی بالا، نتیجه میگیریم:

$$x(t)=c\left[U(t)+U(t-\tau)+\ldots+U(t-n\tau)+\ldots\right]$$
$$=c\sum_{n=0}^{+\infty}U(t-n\tau)$$

۳- نمودار تابع $x(t)$ در شکل ۲-۳۲ نشان داده شده است.



شکل۲-۳۲: نمودار تابع x

معادله دوم:

معادله $x(t)U(t)+2x(t-1)U(t-1)+x(t-2)U(t-2)=tU(t)$ را حل نموده و نمودار جـواب آن را روی بازه $[0,6]$ رسم نمایید.

چون تابع x به E تعلق دارد، میتوان از تبدیل لاپلاس بصورت زیر در معادله مزبـور اسـتفاده نمـود. بـا قـرار دادن $\mathcal{L}[x(t)]=X(P)$ خواهیم داشت:

$$X(p)+2X(p)\exp(-p)+X(p)\exp(-2p)=\frac{1}{p^2}$$

در نتیجه داریم:

$$X(p)=\frac{1}{p^2}\times\frac{1}{[1+\exp(-p)]^2}$$

اما برای $p>0$ داریم:

$$1-e^{-p}+e^{-2p}-e^{-3p}+\ldots+(-1)^{n+1}e^{-(n+1)p}+\ldots=\frac{1}{1+\exp(-p)}$$

چنانچه از دو طرف تساوی فوق نسبت به p مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$e^{-p}-2e^{-2p}+3e^{-3p}-\ldots+(-1)^n(n+1)e^{-(n+1)p}+\ldots=\frac{e^{-p}}{(1+e^{-p})^2}$$

یا

$$1-2e^{-p}+3e^{-2p}-\ldots+(-1)^n(n+1)e^{-np}+\ldots=\frac{1}{(1+e^{-p})^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$X(p)=\frac{1}{p^2}\left[1-2e^{-p}+3e^{-2p}-\ldots+(-1)^n(n+1)e^{-np}+\ldots\right]$$
$$=\frac{1}{p^2}-2\frac{e^{-p}}{p^2}+3\frac{e^{-2p}}{p^2}-\ldots+(-1)^n(n+1)\frac{e^{-np}}{p^2}+\ldots$$

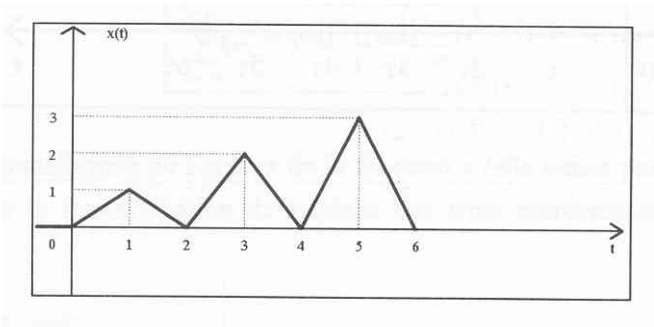
حال با در نظر گرفتن توابع اصل کسرهای طرف دوم رابطه بالا، نتیجه میگیریم:

$$x(t)=tU(t)-2(t-1)U(t-1)+3(t-2)U(t-2)-\ldots+(-1)^n(n+1)(t-n)U(t-n)+\ldots$$

مقادیر تابع $x(t)$ روی بازه $[0,6]$ عبارتند از:

$$\begin{cases} t\le 0 & \rightarrow \quad x=0 \\ 0<t\le 1 & \rightarrow \quad x=t \\ 1<t\le 2 & \rightarrow \quad x=-t+2 \\ 2<t\le 3 & \rightarrow \quad x=2t-4 \\ 3<t\le 4 & \rightarrow \quad x=-2t+8 \\ 4<t\le 5 & \rightarrow \quad x=3t-12 \\ 5<t\le 6 & \rightarrow \quad x=-3t+18 \end{cases}$$

نمودار این جواب روی بازه $[0,6]$ در شکل ۲-۳۳ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۳۳: نمودار تابع x

۲-۸- تمرینات و مسائل:

تمرین ۱: تبدیلهای لاپلاس توابع زیر را مشخص نمایید.

$$(I)\qquad t \to f(t) = (t+1)\sin(2t)U(t)$$
$$(II)\qquad t \to g(t) = \cos^2(t)U(t)$$
$$(III)\qquad t \to h(t) = \exp(t)\cos(2t)U(t)$$
$$(IV)\qquad t \to i(t) = 4t^2 \exp(t)U(t)$$

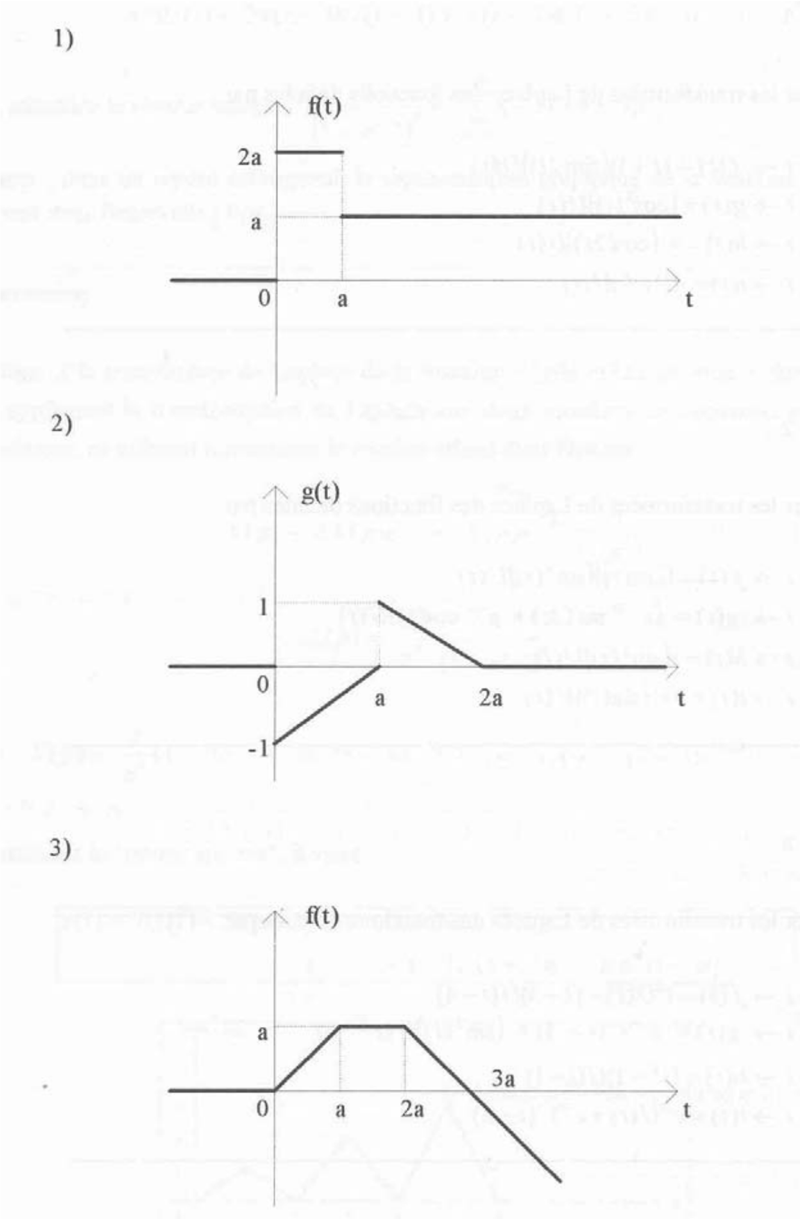
تمرین ۲: تبدیلهای لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$(I)\qquad t \to f(t) = \cos(t)\sin^2(t)U(t)$$
$$(II)\qquad t \to g(t) = \left[e^{-2t}\sin(2t) + e^{-t}\cos(t)\right]U(t)$$
$$(III)\qquad t \to h(t) = t\sin^2(t)U(t)$$
$$(IV)\qquad t \to i(t) = t\,e^t \sin(t)U(t)$$

تمرین ۳: تبدیلهای لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$(I)\qquad t \to f(t) = t^2 U(t) - (t+3)U(t-4)$$
$$(II)\qquad t \to g(t) = e^{-t}U(t-1) + \sin^2(t)U(t-\pi)$$
$$(III)\qquad t \to h(t) = (t^2-1)U(t-1)$$
$$(IV)\qquad t \to i(t) = e^{3t}U(t) + e^{-t}U(t-2)$$

تمرین ۴: تبدیلهای لاپلاس توابعی را که نمودار آنها در شکل ۲-۳۴ داده شده، تعیین نمایید.



شکل ۲-۳۴: شکل تمرین ۴

تمرین ۵: تابع های اصل تابعهای F را مشخص کنید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{3}{p+2}-\frac{1}{p^2}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{2}{(p-2)^3}$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{1}{p(p-1)}$$

$$(IV)\qquad F(p)=\frac{p}{(p-2)(p-3)}$$

تمرین ۶: تابع اصلی هر یک از تابعهای F را تعیین کنید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{1}{p(p+1)^2(p+2)}$$

تمرین ۷: تابع اصل را در هر مورد تعیین نمایید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{1}{p^2+2p+2}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{p+1}{(p^2+9)(p-1)}$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{p+2}{p^2+p+5}$$

تمرین ۸: تابع‌های اصل را بیابید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{\exp(-p)}{p(p-1)}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{\exp(-2p)}{p(p+1)^2}$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{p\exp(-3p)}{(p+1)(p^2+4)}$$

تمرین ۹: تابعهای اصل را بیابید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^2+16)}$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{p^2}{(p^2+4)^2}$$

تمرین ۱۰: تابعهای اصل را بیابید و نمودار آنها را رسم نمایید.

$$(I)\qquad F(p)=\frac{1-\exp(-p)}{p}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{\exp(-a\,p)}{p}\left[2-\exp(-a\,p)-\exp(-2a\,p)\right]\qquad (a>0)$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{1-\exp(-a\,p)}{p^2}\qquad (a>0)$$

$$(IV)\qquad F(p)=\frac{1}{p}-\frac{(1-2a\,p)\exp(-a\,p)}{a\,p^2}-\frac{1}{a\,p}\exp(-2a\,p)\qquad (a>0)$$

تمرین ۱۱: تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را که سببی و متناوب بوده و دوره تناوبشان برابر با T است، مشخص نمایید و نمودار هر یک را رسم کنید.

$$(I)\quad \begin{cases} T=\dfrac{\pi}{3} \\ f(t)=\sin(6t) & t\in[0,\pi/6[\\ f(t)=0 & t\in[\pi/6,\pi/3[\end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} T=2 \\ f(t)=1 & t\in[0,1[\\ f(t)=-1 & t\in[1,2[\end{cases}$$

$$(III)\quad \begin{cases} T=4 \\ f(t)=2t & t\in[0,1[\\ f(t)=-2t+4 & t\in[1,2[\\ f(t)=0 & t\in[2,4[\end{cases}$$

$$(IV)\quad \begin{cases} T=\pi \\ f(t)=|\cos(t)| & t\in[0,\pi[\end{cases}$$

تمرین ۱۲: تابعهای اصل را بیابید:

$$(I)\qquad F(p)=\frac{p\exp(-p\pi/10)}{p^2+9}$$

$$(II)\qquad F(p)=\frac{4}{p^2+16}[1+\exp(-p\pi/4)]$$

$$(III)\qquad F(p)=\frac{4}{p^2+16}\left[\frac{1+\exp(-p\pi/4)}{1+\exp(-p\pi/2)}\right]$$

تمرین ۱۳: توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f:\ t\to \sin(t)U(t)$$
$$g:\ t\to f(t-\pi)$$
$$h:\ t\to f(t)+g(t)$$

۱- الف- نمودارهای توابع $U(t)$ و $\sin(t)$ را در یک دستگاه مختصات نشان دهید.

ب- منحنی های توابع f ، g و h را در دستگاههای جداگانه رسم نمایید.

۲- تبدیلهای لاپلاس توابع f ، g و h را بدست آورید.

۳- بدون انجام محاسبه مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin(t)\,dt$ را نتیجه بگیرید.

تمرین ۱۴: در سیستمی با ورودی $t\to x(t)=tU(t)$ و خروجی $t\to y(t)$، داریم: $Y(p)=H(p)X(p)$. توابع $X(p)$ و $Y(p)$ به ترتیب تبدیلهای لاپلاس $x(t)$ و $y(t)$ بوده و $H(p)=\dfrac{p+1}{p^2+p+1}$ است.

۱- الف- $Y(p)$ را محاسبه نمایید.

ب- با استفاده از قضیه مقدار اولیه نتیجه بگیرید که $y(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y(t)$

۲- الف- تبدیل لاپلاس y' یا مشتق $y(t)$ را بیابید.

ب- نتیجه بگیرید که $y'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y'(t)$

۳- مقدار $\lim_{t\to 0^+} y''(t)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۵: سیستمی با ورودی $t \to x(t)$ و خروجی $t \to y(t)$ طوری است که در آن رابطه $Y(p) = \dfrac{\exp(-p\tau)}{p}\left[1 - \dfrac{\exp(-p\tau)}{1+2p\tau}\right] X(p)$ بین تبدیلهای لاپلاس $x(t)$ و $y(t)$ برقرار است. (τ عددی حقیقی و مثبت است)

اگر ورودی سیستم $x(t) = U(t)$ باشد، حد تابع $t \to y(t)$ را وقتیکه t به بینهایت میل کند، بصورت تابعی از τ مشخص نمایید. (در این مورد میتوان از قضیه مقدار نهایی استفاده نمود.)

تمرین ۱۶: بکمک تبدیل لاپلاس تابع $t \to x(t)$ که تابعی پیوسته و سببی بوده و دارای مشتق پیوسته بر روی $\Re$ نیز هست و بعلاوه در آن مقادیر $x(0)$ و $x'(0)$ برابر با صفرند، جواب معادله دیفرانسیل زیر را تعیین نمایید.

$$x''(t) + 4\,x(t) = 2\cos(t)\cos(3t)\,U(t)$$

(راهنمایی: $X(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)^2} + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{p}{p^2+4}\right) - \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{p}{p^2+16}\right)$)

تمرین ۱۷: با همان شرایط تمرین ۱۶، معادله دیفرانسیل $x''(t) + 6\,x'(t) + 9\,x(t) = \exp(-2t)\,U(t)$ را حل کنید.

(راهنمایی: $X(p)$ را بصورت $\dfrac{A}{p+2} + \dfrac{B}{(p+3)^2} + \dfrac{C}{p+3}$ نوشته، آنگاه مقادیر ثابت و حقیقی A ، B و C را تعیین کنید.)

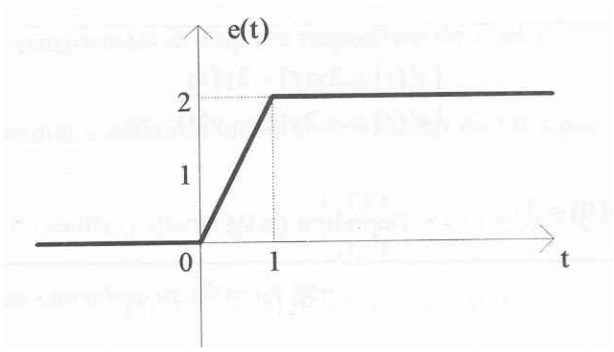
تمرین ۱۸: بکمک تبدیل لاپلاس جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر را روی بازه $[0,+\infty[$ تعیین کنید.

$$\begin{cases} x''(t) + 2\,x'(t) - 3\,x(t) = \exp(-t) \\ \quad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) - 2\,x'(t) + x(t) = t\exp(-t) \\ \quad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0 \end{cases}$$

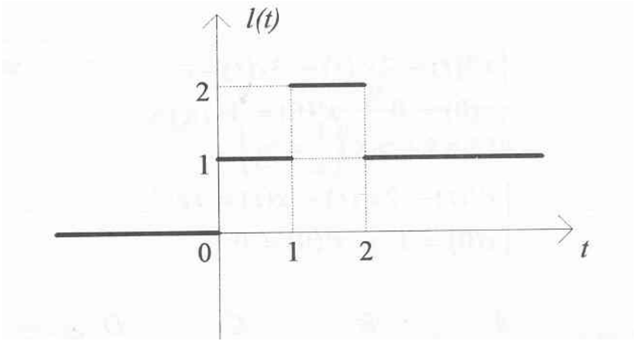
(راهنمایی: تحقیق کنید که $X(p) = \dfrac{A}{(p+1)^2} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{(p-1)^2} + \dfrac{D}{p-1}$)

تمرین ۱۹: تابع جواب $t \to y(t)$ معادله دیفرانسیل $y''(t) - 4\,y(t) = e(t)$ با شروط $y(0) = y'(0) = 0$ را که تابعی است سببی و پیوسته و همچنین دارای مشتق پیوسته بر روی $\mathbb{R}$ ، بکمک تبدیل لاپلاس مشخص کنید. نمودار تابع سببی $e(t)$ در شکل ۲-۳۵ نشان داده شده است.



شکل ۲-۳۵: تابع $e(t)$ مربوط به تمرین ۱۹

تمرین ۲۰: تابع $y(t)$ $t \to$ یا جواب معادله دیفرانسیل $y''(t) - y(t) = l(t)$ را تحت شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ روی بازه $[0, +\infty[$ تعیین نمایید. نمودار تابع سببی $l(t)$ در شکل ۲-۳۶ داده شده است.



شکل ۲-۳۶: تابع $l(t)$ مربوط به تمرین ۲۰

(راهنمایی: خاطر نشان می‌کنیم که y' روی بازه $[0, +\infty[$ پیوسته و مشتق پذیر است مگر در نقطه ایکه در آن نقطه $y''(t)$ وجود ندارد.)

تمرین ۲۱: دستگاه معادلات زیر را روی بازه $[0, +\infty[$ حل نمایید.

$$(I) \quad \begin{cases} x'(t) = -5\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = -2\,x(t) - 5\,y(t) \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

$$(II) \quad \begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - 3\,y(t) \\ y'(t) = -2\,x(t) + y(t) \end{cases} \qquad x(0) = 8, \quad y(0) = 3$$

مسئله ۱: در بررسی فیلترها، سیگنال ورودی را روی $\mathbb{R}^+$ با $v_e : t \to v_e(t)$ و همچنین سیگنال خروجی را روی $\mathbb{R}^+$ با $v_s : t \to v_s(t)$ تعریف کرده ایم. چنانچه تبدیل لاپلاس v_e و v_s را به ترتیب V_e و V_s بنامیم، بررسی فیزیکی ما را به تابع تبدیل فیلتر بصورت $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$ راهنما میگردد. در موارد زیر فیلتری را در نظر میگیریم که برای آن داریم:

$$H(p) = \frac{p}{2p^2 + 2p + 1} = \frac{p/2}{(p + 1/2)^2 + 1/4}$$

۱- الف- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\exp(-\alpha t)\sin(\alpha t)U(t)$ را که در آن α عددی مثبت و حقیقی است، محاسبه کنید.

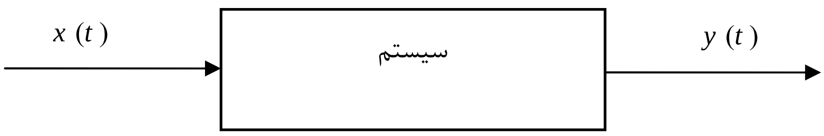
ب- با فرض $v_e=U(t)$، ابتدا $V_s(p)$ و سپس $v_s(t)$ را محاسبه کنید.

۲- الف- با قراردادن $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1/4)(2p^2+2p+1)}$ ، نشان دهید که $F(p)=\dfrac{2p/5+2/5}{p^2+1/4}-\dfrac{2p/5+4/5}{(p+1/2)^2+1/4}$.

ب- با فرض $v_e(t)=\sin(t/2)U(t)$ ، $V_s(p)$ و $v_s(t)$ را محاسبه کنید.

پ- نشان دهید که $\lim\limits_{t\to+\infty}\{v_s(t)-[\cos(t/2)+2\sin(t/2)]/5\}U(t)=0$

مسئله ۲: سیستمی را درنظر بگیرید که از نوع نشان داده شده در شکل ۲-۳۷ باشد و در آن x و y توابعی سببی و تبدیل پذیر باشند. جواب $t\to y(t)$ سیستم که تحت فرمان $t\to x(t)$ است طوری است که داریم: $Y(p)=\dfrac{1}{1+10p}X(p)$. در اینجا X و Y به ترتیب تبدیلهای لاپلاس توابع x و y هستند.



شکل ۲-۳۷: سیستم مسئله ۲

در چنین سیستمی سیگنال ورودی بصورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} x(t)=t, & t\in[0,10[\\ x(t)=0, & t\in]-\infty,0[\cup[10,+\infty[\end{cases}$$

۱- منحنی نمایش تابع x را در یک دستگاه مختصات متعامد رسم نمایید.

۲- نشان دهید که برای هر $p>0$ ، داریم: $X(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1+10p}{p^2}\exp(-10p)$

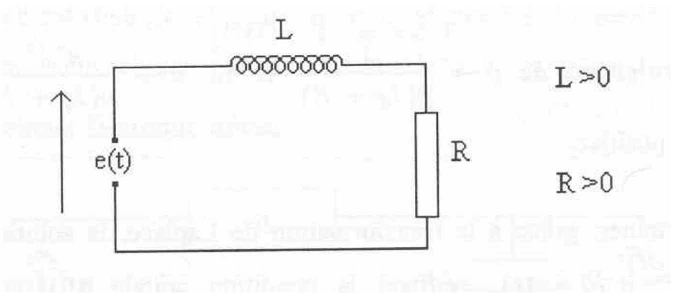
۳- الف- اعداد حقیقی A، B و C را برای هر p که به بازه $\mathbb{R}-\{-1/10,0\}$ تعلق دارد، به قسمی تعیین کنید که داشته باشیم: $\dfrac{1}{p^2(1+10p)}=\dfrac{A}{p^2}+\dfrac{B}{p}+\dfrac{C}{1+10p}$

ب- جواب سیستم یعنی $t\to y(t)$ را تعیین نموده و مقدار آن را روی هر یک از بازه های $]-\infty,0[$ ، $[0,10[$ و $[10,+\infty[$ نیز مشخص کنید.

۴- الف- جدول تغییرات تابع y را روی $[0,+\infty[$ تنظیم نمایید.

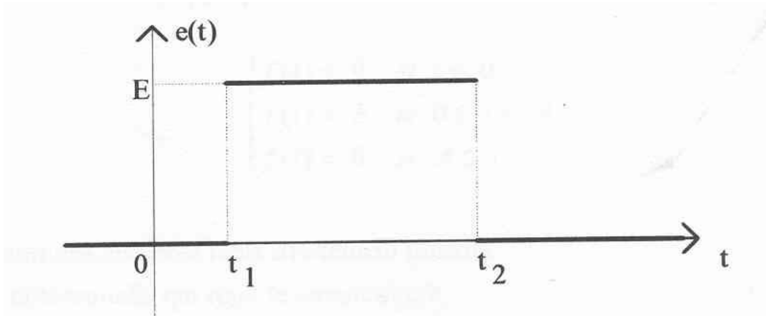
ب- منحنی نمایش تابع y را در همان دستگاه قسمت اول مسئله رسم نمایید.

مسئله ۳: مدار نشان داده شده در شکل ۲-۳۸ را که در آن شدت جریان $t\to i(t)$ تابعی سببی و پیوسته روی $\mathbb{R}$ بوده و مشتق پذیر قطعه ای است، در نظر بگیرید.



شکل ۲-۳۸: سیستم مسئله ۳

منحنی تابع قدرت الکتروموتوری مدار $t \to e(t)$ در شکل ۲-۳۹ نشان داده شده است.



$$0 < t_1 < t_2$$
$$e(t) = E \qquad if \qquad t_1 \le t \le t_2$$
$$e(t) = 0 \qquad if \qquad t < t_1 \; or \; t_2 < t$$

شکل ۲-۳۹: تابع $e(t)$ در مسئله ۳

تابع $i(t)$ نیز در معادله $L\dfrac{di}{dt} + R\,i(t) = e(t)$ صدق می‌کند. با توجه به داده های فوق، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- تبدیل لاپلاس تابع $t \to e(t)$ را مشخص کنید.

۲- با استفاده از تساوی $\dfrac{1}{p(Lp+R)} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+R/L}\right)$ توابع اصل مربوط بـه $p \to \dfrac{1}{p(Lp+R)}$ و $p \to \dfrac{\exp(-\tau p)}{p(Lp+R)}$ را نتیجه بگیرید. (τ عددی ثابت، خقیقی و مثبت است.)

۳- بکمک تبدیل لاپلاس، جواب معادلـه دیفرانسـیل $L\dfrac{di}{dt} + R\,i(t) = e(t)$ را تحت شـرط $i(0) = 0$ تعیـین نموده و مقادیر $i(t)$ را روی هر یک از بازه های $[0,t_1[$، $[t_1,t_2[$ و $[t_2,+\infty[$ تعیین نمایید.

مسئله ۴: در مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۴۰، قـدرت الکتروموتـور $f(t)$ بتوسـط تـابع زیـر تعیـین میگردد:

$$\begin{cases} f(t) = 0, & t < 0 \\ f(t) = E, & 0 \le t < A \\ f(t) = 0, & A \le t \end{cases}$$

جریان الکتریکی $t \to v(t)$ در این مدار نیز تابعی است سببی، پیوسته و مشـتق پـذیر قطعـه ای روی $\mathbb{R}$ کـه در معادله دیفرانسیل $RC\dfrac{dv(t)}{dt} + v(t) = f(t)$ با شرط $v(t) = 0$ برای هر $t \le 0$ صدق میکند.

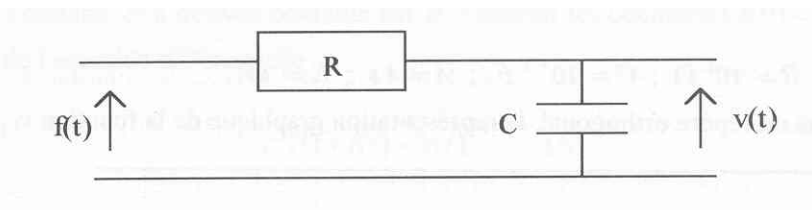
۱- نمودار تابع f را رسم نموده و تابع را بر حسب تابع پله ای بیان کنید.

۲- تبدیلهای لاپلاس دو طرف معادله فوق را تعیین نمایید. (با فرض $V(p)$] $v(t)$ و $\mathcal{L}[f](p) = F(p)$)

۳- نشان دهید که $V(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}\right)[1 - \exp(-pA)]$.

۴- از قسمت ۳ ، مقادیر $v(t)$ را روی هر یک از بازه های $]-\infty, 0[$ ، $[0, A[$ و $[A, +\infty[$ بدست آورید.

۵- بازای مقادیر $R = 100\ \Omega$ ، $C = 0.01\ F$ ، $A = 1\ s$ و $E = 1V$ ، تابع v را در یک دستگاه مختصات قائم رسم کنید.



شکل ۲-۴۰: مدار مسئله ۴

مسئله ۵: معادله دیفرانسیل $i''(t) + i(t) = e(t)$ را با شروط $i(0) = i'(0) = 0$ در نظر بگیرید. در اینجا $t \to i(t)$ تابعی سببی، پیوسته و با مشتق پیوسته روی $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $e(t)$ در شکل ۲-۴۱ نشان داده شده است.

۱- نشان دهید که برای هر t حقیقی، تابع $e(t)$ را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$e(t) = t\,U(t) - 2(t-\pi)U(t-\pi) + (t-2\pi)U(t-2\pi)$$

۲- تبدیل لاپلاس تابع $t \to e(t)$ را تعیین کنید.

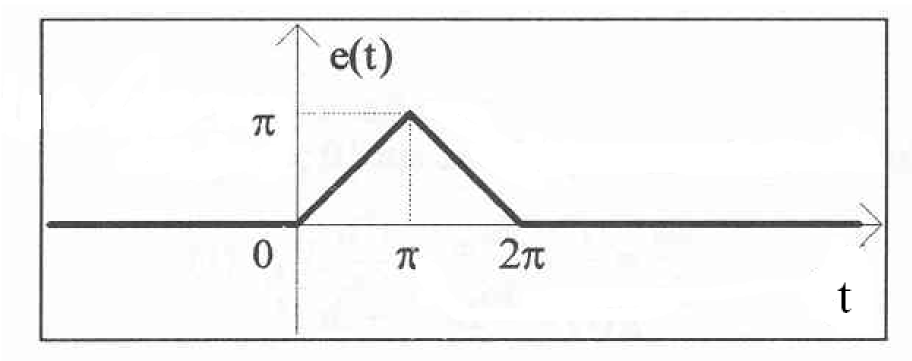
۳- الف- با بکارگیری تبدیل لاپلاس در دو طرف معادله، تبدیل لاپلاس تابع $t \to i(t)$ را مشخص کنید.

ب- تابع اصل مربوط به $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$ و $\frac{\exp(-\tau p)}{p^2(p^2+1)}$ را تعیین کنید.

پ- تابع $t \to i(t)$ را بدست آورید.

۴- الف- مقدار $i(t)$ را روی بازه های $]-\infty, 0]$ ، $[0, \pi[$ ، $[\pi, 2\pi[$ و $[2\pi, +\infty[$ تعیین کنید.

ب- نمودار تابع i را روی بازه $[0, 4\pi]$ رسم نمایید.



شکل ۲-۴۱: تابع مسئله ۵

مسئله ۶: خازنی با ظرفیت q را در مداری که شامل یک مقاومت R و یک سِلف L است، تخلیه میکنیم. q تابعی است از زمان که روی بازه $[0, +\infty[$ از معادله $L\,q''(t) + R\,q'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$ تبعیت میکند.

۱- با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب q را برای معادله فوق بدست آورید. فرض کنید $C = 0.2\,F$ ، $L = 10\,H$ ، $R = 2.25\,\Omega$ و همچنین $q(0) = 1$ و $q'(0) = 13/4$ باشد.

۲- الف- تابع g را که روی $[0,+\infty[$ بصورت $g(t) = -2\exp(-2t) + 3\exp(-3t/4)$ تعریف شده، بررسی نموده و نشان دهید که $g'(t)$ تنها بازای یک عدد α که مقدار آن را تعیین خواهید کرد، برابر با صفر میشود. مقدار تقریبی α و $g(\alpha)$ را با تقریب 10^{-3} محاسبه نمایید.

ب- در جدولی مقادیر $g(1)$ ، $g(4)$ ، $g(8)$ و $g(16)$ را با تقریب 10^{-2} نشان دهید.

پ- منحنی C تابع g را در یک دستگاه مختصات متعامد رسم نموده و مماس بر آن را در نقطه ای به طول صفر تعیین نمایید.

۳- با استفاده از قسمت های قبل، زمانی را که شارژ خازن (q) کمتر از 0.2 کولُمب باشد، با تقریبی نزدیک به 0.5 ثانیه معیین کنید.

مسئله ۷: مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۴۲ سیستمی را معرفی میکند که سیگنالهای ورودی و خروجی آن به ترتیب e و i بوده و در معادله دیفرانسیل $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+R\dfrac{di}{dt}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{de}{dt}$ و با شروط $i(t) = 0$ و $e(t) = 0$ برای هر $t < 0$ ، صدق میکنند. بعلاوه داریم: $e(0) = 0$ ، $i(0) = 0$ و $\dfrac{d\,i}{dt}(0) = 0$.

۱- با بکارگیری تبدیل لاپلاس در معادله، نتیجه بگیرید که نقل وانتقال در سیستم بصورت $I(p) = H(p)\times E(p)$ انجام میگردد. ($I(p)$ و $E(p)$ به ترتیب تبدیلهای i و e هستند)

۲- با فرض $L = 1\,H$ ، $R = 10\,\Omega$ و $C = 400\,\mu F$، ثابت کنید که $H(p)=\dfrac{p}{(p+5)^2+15^2}$.

۲-۱- تابع $\mathcal{L}^{-1}[H]$ را مشخص کنید. ($\mathcal{L}^{-1}$ تبدیل لاپلاس معکوس است)

۲-۲- با فرض $e(t) = U(t-1) - U(t-3)$،

۲-۲-الف- سیگنال $e(t)$ را معین کنید.

۲-۲-ب- $E(p)$ و $I(p)$ را محاسبه کنید.

۲-۲-پ- $i(t)$ را مشخص نمایید.

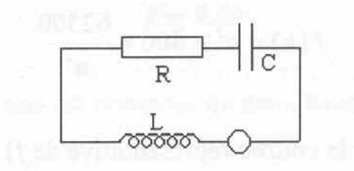
۳- جریان الکتریکی با یک ضربان سینوسی مثبت ω تغذیه میگردد. تقویت کننده $r(\omega)$ مربوط به سیستم با مدول عدد مختلط $H(j\,\omega)$ برابر است (j عددیست مختلط با مدول یک و آرگومان $\pi/2$).

۳-۱- $r(\omega)$ را محاسبه کنید.

۳-۲- تغییرات تابع عددی f را که بر بازه $]0,+\infty[$ بصورت $f(u)=u^2-400+\dfrac{62500}{u^2}$ تعریف گردیده مورد بررسی قرار دهید. رسم تابع f لازم نیست.

۳-۳- چه رابطهای مابین $r(\omega)$ و $f(\omega)$ برقرار است؟ و برای کدام مقدار ω تقویت کننده سیستم به ماکزیمم خود میرسد.

۳-۴- حد $r(\omega)$ را وقتیکه ω به ∞ میل کند، بیابید.



شکل ۲-۴۲: مدار مسئله ۷

مسئله ۸: سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۴۳، از دو منبع استوانه ای تشکیل شده است که به یک مجرا متصل هستند. سیگنالهای ورودی با دبی های q_1 و q_2 متناظر بـه سـیگنالهای خروجـی n_1 و n_2 میباشـند. معـادلات حاکم بر پدیده مورد نظر بصورت زیر بیان میشوند:

$$\begin{cases} n_1'(t) = q_1(t) - 2\,n_1(t) + n_2(t) \\ n_2'(t) = q_2(t) + n_1(t) - 2n_2(t) \end{cases}$$

که در آن t عددی حقیقی و غیر منفی است. همچنین فرض کنید که داشته باشیم $n_1(0^+) = n_2(0^+) = 0$.

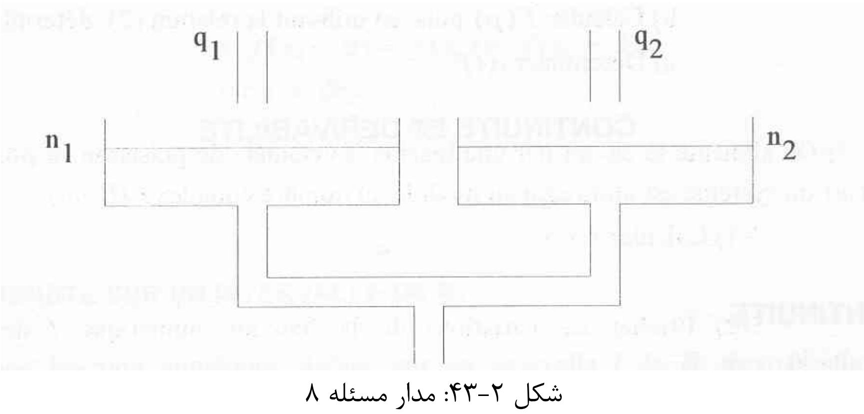
۱- با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید:

$$\begin{cases} N_1(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p+3)} Q_1(p) + \dfrac{1}{(p+1)(p+3)} Q_2(p) \\ N_2(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+3)} Q_1(p) + \dfrac{p+2}{(p+1)(p+3)} Q_2(p) \end{cases}$$

که در آن N_1 ، N_2، Q_1 و Q_2 به ترتیب تبدیلهای لاپلاس n_1، n_2، q_1 و q_2 هستند.

۲- اگر $q_1(t) = q_2(t) = U(t)$ باشد، $n_1(t)$ و $n_2(t)$ را محاسبه نمایید و بدون بررسی تابع n_1، آن را بصورت نموداری نشان دهید.

۳- چنانچه $q_1(t) = 0$ و $q_2(t) = U(t)$ باشـند، $n_1(t)$ و $n_2(t)$ را محاسـبه نمـوده و مقـادیر $\lim_{t\to+\infty} n_1(t)$ و $\lim_{t\to+\infty} n_2(t)$ را تعیین نمایید.



شکل ۲-۴۳: مدار مسئله ۸

ضمیمه ها

ضمیمه ۱   پیوستگی و مشتق پذیری

الف- پیوستگی

۱- مفهوم حد: حد تابع در یک نقطه برای خواننده مفهوم شناخته شده ایست که در این قسمت فرض میکنیم موجود و محدود باشد. اما حد تابع $f(x)$ در راست و یا چپ نقطه x_0 که به ترتیب با $f(x_0+0)$ و $f(x_0-0)$ نشان داده میشوند، عبارتند از:

$$f(x_0+0)=f(x_0^+)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$

$$f(x_0-0)=f(x_0^-)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$

۲- پیوستگی در یک نقطه: تابع f را در سمت چپ نقطه x_0 پیوسته گوییم، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$$

یا

$$f(x_0-0)=f(x_0)$$

بهمین ترتیب نیز تابع f را در راست نقطه x_0 پیوسته گوئیم اگر و تنها اگر داشته باشیم: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$ یا $f(x_0+0)=f(x_0)$.

تابع f در x_0 پیوسته است، اگر و تنها اگر در سمت راست و چپ نقطه x_0 پیوسته باشد. یعنی داشته باشیم:

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$$

یا

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

۳- پیوستگی روی بازه ای از $\mathbb{R}$: اگر تابع عددی f روی بازه $I=[a,b]$ که متعلق به $\mathbb{R}$ است، تعریف شده باشد، (بازه I ممکن است در a یا b و یا هر دو باز بوده و همچنین a یا b هر دو میتوانند بینهایت شوند. همچنین $a<b$ است.)

- تابع f روی $]a,b[$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه $]a,b[$ پیوسته باشد و بر عکس.
- تابع f روی $[a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه $]a,b[$ پیوسته باشد و بعلاوه در راست a و در چپ b پیوسته باشد و بر عکس.
- تابع f روی $[a,b[$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه $]a,b[$ پیوسته باشد و بعلاوه در راست a نیز پیوسته باشد و بر عکس.
- تابع f روی $]a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه $]a,b[$ پیوسته باشد و بعلاوه در چپ b نیز پیوسته باشد و بر عکس.
- تابع f روی $[a,+\infty[$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه $x>a$ پیوسته باشد و بعلاوه در راست a پیوسته باشد و بر عکس.

- تابع f روی $]-\infty, b]$ پیوسته است اگر در هر نقطه $x<b$ پیوسته باشد و بعلاوه در سمت چپ b پیوسته باشد و بر عکس.

تعریف: چنانچه تابع f روی بازه $\mathbb{I}$ از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، گفته میشود که f از کلاس $\mathcal{C}^0$ روی $\mathbb{I}$ است.

امتداد پیوستگی: اگر تابع f بر بازه $]a,b[$ از $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و در حالیکه در b تعریف شده نیست در b دارای حد چپ هم باشد، در اینصورت تابعی مانند g روی بازه $]a,b]$ بصورت

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & x\in]a,b[\\ g(b)=f(b-0) \end{cases}$$

میتوان تعریف کرد که g روی بازه $]a,b]$ پیوسته است. g را امتداد پیوستگی تابع f و f را تابع امتداد یافته می‌نامیم. بهمین ترتیب نیز امتداد تابع f را در a میتوان تعریف کرد.

ب- مشتق پذیری

۱- مشتق پذیری در یک نقطه: چنانچه تابع f روی بازه $\mathbb{I}$ از $\mathbb{R}$ که شامل نقطه x_0 است، تعریف شده باشد (x_0 نقاط انتهایی بازه $\mathbb{I}$ نیست.) میگوییم f در x_0 مشتق پذیر است، اگر و تنها اگر نسبت $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ وقتیکه x به x_0 میل کند، دارای حد باشد. این حد را A میگیریم و A را مشتق تابع f در x_0 می‌نامیم.

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

در نتیجه

f (در x_0 پیوسته است) $\Rightarrow$ (f در x_0 مشتق پذیر است)

مشتق راست f در x_0 :

$$\text{(مشتق راست } f \text{ در } x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مشتق چپ f در x_0 :

$$\text{(مشتق چپ } f \text{ در } x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

۲- مشتق پذیری روی بازه ای از $\mathbb{R}$: اگر تابعی مانند f روی بازه $\mathbb{I}$ از $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد، در اینصورت خواهیم داشت: (a و b انتهای بازه $\mathbb{I}$ هستند که میتوانند $+\infty$ یا $-\infty$ باشند.)

f (در هر نقطه از $]a,b[$ مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $]a,b[$ مشتق پذیر است)

f (بر $]a,b[$ مشتق پذیر است و f در راست a و در چپ b هم مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است)

f (بر $]a,b[$ مشتق پذیر است و در راست a مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $[a,b[$ مشتق پذیر است)

f) بر $]a,b[$ مشتق پذیر است و در چپ b مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $]a,b]$ مشتق پذیر است)

f) در هر نقطه $x>a$ و همچنین در راست a مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $[a,+\infty[$ مشتق پذیر است)

f) در هر نقطه $x<b$ و همچنین در چپ b مشتق پذیر است) $\Leftrightarrow$ (f روی بازه $]-\infty,b]$ مشتق پذیر است)

۳- مشتق تابع

۳-۱- تعریف: اگر تابعی تعریف شده و مشتق پذیر روی بازه $\mathbb{I}$ از $\mathbb{R}$ داشته باشیم، در اینصورت تابع $f'(x)$ را که بصورت زیر تعریف شده، مشتق تابع f بر روی $\mathbb{I}$ می‌نامیم.

$$x \to f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

همچنین f' ، f'' ، f''' ، ...، $f^{(n)}$ را چنانچه وجود داشته باشند، مشتقهای متوالی f می‌نامیم.
در مورد $\mathbb{I}=]a,b]$ ، f' تابعی است مربوط به نقاط $]a,b[$ و همچنین سمت چپ b. بصورت مشابه در مورد بازه $[a,b[$.

۳-۲- تابع از کلاس $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{C}^\infty$ روی بازه ای از $\mathbb{R}$: تابعی را بر بازه $\mathbb{I}$ از کلاس $\mathbb{C}^1$ می‌نامیم که روی $\mathbb{I}$ مشتق پذیر بوده و تابع مشتق آن روی $\mathbb{I}$ پیوسته باشد.

تابعی را روی $\mathbb{I}$ (از $\mathbb{R}$) از کلاس $\mathbb{C}^2$ مینامیم، اگر دو بار روی $\mathbb{I}$ مشتق پذیر بوده و مشتقهای اول و دوم آن روی $\mathbb{I}$ پیوسته باشند.

بطور کلی تابع f را روی $\mathbb{I}$ (از $\mathbb{R}$) از کلاس $\mathbb{C}^n$ مینامیم، اگر n بار مشتق پذیر بوده و توابع مشتقهای متوالی آن تا مرتبه n ام روی بازه $\mathbb{I}$ پیوسته باشند.

به همین ترتیب نیز تابعی را روی $\mathbb{I}$ از کلاس $\mathbb{C}^\infty$ میگوییم، اگر بی نهایت بار مشتق پذیر بوده و همه مشتقهای آن روی $\mathbb{I}$ پیوسته باشند.

تبصره: اگر تابعی روی بازه های $[a,b]$ و $[b,c]$ مشتق پذیر باشد، الزاماً روی بازه $[a,c]$ مشتق پذیر نخواهد بود. مگر آنکه در b نیز مشتق پذیر باشد.
اگر تابعی روی بازه های $[a,b]$ و $[b,c]$ از کلاس $\mathbb{C}^0$ باشد، روی بازه $[a,c]$ نیز از کلاس $\mathbb{C}^0$ است. اگر تابعی روی بازه های $[a,b]$ و $[b,c]$ از کلاس $\mathbb{C}^1$ باشد، الزاماً روی بازه $[a,c]$ از کلاس $\mathbb{C}^1$ نیست، مگر آنکه در b نیز مشتق پذیر باشد.

ضمیمه ۲ سریهای عددی

الف- تعریف

سری عددی با جمله عمومی u_n (که $u_n \in \mathbb{C}$ یا $u_n \in \mathbb{R}$) را که بصورت $\sum u_n$ نوشته میشود، همگرا مینامیم، اگر مجموعهای جزئی آن یعنی $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ دارای حدی در $\mathbb{R}$ یا در $\mathbb{C}$ باشند:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=N} u_k$$

در سریهای همگرا، جمله عمومی به صفر میل خواهد کرد. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ اما بر عکس این موضوع صحیح نیست.
در صورتیکه سری همگرا نباشد، آن را واگرا می‌نامیم.

ب- مقایسه

۱- مقایسه بزرگی: فرض کنید که بازای عددی مانند n داشته باشیم $0 \le u_n \le v_n$. در اینصورت اگر سری v_n همگرا باشد، آنگاه سری u_n نیز همگرا خواهد بود و چنانچه سری u_n واگرا باشد، سری v_n نیز واگرا میگردد.

۲- مقایسه از راه معادل بودن: اگر داشته باشیم $u_n \approx v_n$ یعنی $v_n = u_n(1+\varepsilon(n))$ و $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ ، در اینصورت سریهای $\sum u_n$ و $\sum v_n$ طبیعت یکسانی خواهند داشت.

۳- قاعده کوشی (Cauchy): چنانچه $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ موجود بوده و ℓ عددی از $\mathbb{R}$ باشد، در اینصورت اگر $\ell < 1$ باشد، سری $\sum u_n$ همگرا خواهد بود و اگر $\ell > 1$ شود، سری مزبور واگرا است. در صورتیکه $\ell = 1$ باشد، قاعده کوشی در تشخیص همگرایی یا واگرایی اطلاعاتی نمی‌دهد.

۴- قاعده دالامبر (D'Alembert): فرض کنید که $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$ موجود بوده و در $\mathbb{R}$ باشد. چنانچه این حد را ℓ' بگیریم، اگر $\ell' < 1$ باشد، سری $\sum u_n$ همگرا خواهد بود و اگر $\ell' > 1$ باشد، سری مزبور واگرا میگردد. در صورتیکه $\ell' = 1$ باشد، این قاعده در تشخیص نوع سری موثر نخواهد بود.

۵- مقایسه با یک انتگرال: چنانچه جمله عمومی سری بصورت $u_n = f(n)$ باشد، به قسمی که تابعی $f(n)$ نزولی و مثبت بوده و روی بازه $[a, +\infty[$ تعریف شده باشد، در اینصورت نوع سری $\sum u_n$ و نوع انتگرال $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ یکی خواهد بود. (همگرایی یا واگرایی یک انتگرال در ضمیمه ۵ آورده شده است.)

پ- سریهای با جمله های عمومی غیر مشخص (احتمالاً در $\mathbb{C}$)

۱- سریهای مطلقاً همگرا: وقتیکه سری $\sum|u_n|$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum u_n$ همگراست که در اینصورت گفته میشود سری $\sum u_n$ مطلقاً همگراست. (بر عکس این موضوع صحیح نیست)

۲- تشخیص خاص در مورد سریهای متناوب: سری $\sum u_n$ را سری متناوب مینامیم، اگر مقدار u_n متناوباً مثبت و منفی گردد. بطور مثال سری $\sum(-1)^n/n$ یک سری متناوب است زیرا جملات مرتبه زوج آن مثبت و جملات مرتبه فرد آن منفی است.

در مورد تشخیص همگرایی این سریها بصورت زیر عمل میکنیم:

اگر $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ بوده و بعلاوه دنباله $|u_n|$ نزولی باشد، در اینصورت سری $\sum u_n$ همگراست. بر عکس این موضوع صحیح نیست.

۳- مثالهای مهم:

سری هندسی: سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ همگرا خواهد بود، اگر و تنها اگر $|a|$ کوچکتر از یک باشد. در اینصورت خواهیم داشت: $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n=\frac{1}{1-a}$.

سری ریمان: به سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ که در آن α عددی است حقیقی و غیر منفی، سری ریمان گفته میشود که همگراست اگر و تنها اگر $\alpha>1$ باشد.

سری هارمونیک: سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ سری هارمونیک نامیده میشود و همواره واگراست.

سری هارمونیک متناوب: سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ همگراست اما مطلقاً همگرا نیست. میگوییم همگرای مشروط است.

سری از نوع مثلثاتی: سریهای $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ برای $\alpha>0$ همگرا هستند و اگر $\alpha>1$ باشد، مطلقاً همگرا خواهند بود.

سریهای برتراند (Bertrand): در سریهای $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$، اگر $\alpha>1$ باشد، بازای همه مقادیر β همگرا میگردند. چنانچه در این سریها $\alpha<1$ باشد، آنگاه بازای جمیع مقادیر β واگرا خواهند بود. اما اگر $\alpha=1$ باشد، برای $\beta>1$ همگرا و برای $\beta\le 1$ واگرا هستند.

ضمیمه ۳ دنباله ها و سریهای توابع

۱- دنباله های توابع، همگرایی ساده و یکنواخت:

۱-۱- تعریف: هر کاربردی از مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) در یک مجموعه از توابع حقیقی (با متغیر حقیقی) را که روی بازه $\mathbb{I}$ (از $\mathbb{R}$) تعریف شده باشد، دنباله توابع گفته میشود. تابع وابسته به عدد n را با f_n نشان داده و جمله عمومی f_n را با (f_n) نشان میدهیم.

$$n \to f_n \quad \text{بطوریکه} \; \forall x \in I; \;\; x \xrightarrow{f_n} f_n(x)$$

۱-۲- همگرایی ساده و یکنواخت: دنباله (f_n) روی $\mathbb{I}$ همگراست، اگر بازای هر x از بازه $\mathbb{I}$، دنباله عددی $(f_n(x))$ همگرا باشد. تابع f که روی $\mathbb{I}$ بصورت $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ تعریف شده است، حد دنباله (f_n) نامیده میشود.

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{I}$ و همچنین هر $\varepsilon > 0$ میتوان عددی طبیعی مانند N را چنان تعیین نمود که برای $n \geq N$ داشته باشیم: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

در اینجا دو حالت وجود دارد:

<u>حالت اول:</u> اگر عدد طبیعی N، در عین حال به x و به ε وابسته باشد، در اینصورت گفته میشود که دنباله (f_n) بر روی بازه $\mathbb{I}$، همگرایی ساده به سوی تابع f دارد. (یا اینکه f حد ساده دنباله (f_n) است)

<u>حالت دوم:</u> اگر N تنها به ε وابسته باشد، گفته میشود که دنباله (f_n) بر بازه $\mathbb{I}$، همگرایی یکنواخت به سوی تابع f دارد. (یا f حد یکنواخت دنباله (f_n) است)

۲- سریهای توابع

۲-۱- تعریف همگرای ساده و یکنواخت: دنباله (f_n) از توابع تعریف شده روی بازه $\mathbb{I}$ (از $\mathbb{R}$) داده شده است. سری با جمله عمومی $f_n(x)$ را که بصورت $\sum f_n$ نوشته میشود، همگرا میگوییم اگر دنباله (S_n) از مجموعهای جزئی تعریف شده بصورت $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ بازای هر $x \in I$، همگرا باشد.

تابع تعریف شده روی بازه $\mathbb{I}$ بصورت $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x)$ را مجموع سری نامیده و مینویسیم $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. اگر دنباله (S_n) همگرای ساده بر $\mathbb{I}$، به سوی تابع f باشد، میگوییم که سری تابع $\sum f_n$ به جمله عمومی (f_n) همگرایی ساده به سوی f دارد.

چنانچه دنباله (S_n)، همگرایی یکنواخت روی $\mathbb{I}$، بسوی تابع f داشته باشد، میگوییم که سری توابع $\sum f_n$ با جمله عمومی (f_n) روی $\mathbb{I}$، به سوی تابع f همگرای یکنواخت است.

۲-۲ خواص سریهای یکنواخت:

قضیه ۱: اگر در سری توابع $\sum f_n$، همگی روی بازه $\mathbb{I}$ (از $\mathbb{R}$) پیوسته باشند و همچنین اگر سری مزبور روی $\mathbb{I}$ همگرای یکنواخت باشد، در اینصورت مجموع آن f، روی $\mathbb{I}$ تابعی پیوسته خواهد بود.

قضیه ۲: اگر در سری توابع $\sum f_n$ همگی روی بازه $[a,b]$ (از $\mathbb{R}$) پیوسته بوده و سری مزبور روی $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه جمله به جمله انتگرال پذیر است. یعنی در اینصورت بازای هر x متعلق به $[a,b]$ داریم:

$$\int_a^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right]dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^x f_n(t)\,dt\right)$$

یعنی در همگرایی یکنواخت میتوان جای علامتهای انتگرال و مجموع را با هم عوض نمود.

قضیه ۳: اگر سری توابع $\sum f_n$ که روی بازه $[a,b]$ (از $\mathbb{R}$) تعریف شده اند، روی همین بازه مشتق های پیوسته نیز داشته باشند و سری مشتق ها یعنی $\sum f_n'$ روی بازه $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد و همچنین عددی مانند x_0، ($x_0\in[a,b]$) چنان موجود باشد که سری عددی $\sum f_n(x_0)$ همگرا باشد، در اینصورت سری توابع $\sum f_n$ روی بازه $[a,b]$ همگرای یکنواخت به سوی یک تابع مشتق پذیر بوده و بعلاوه جمله به جمله مشتق پذیر خواهد بود. یعنی بازای هر x متعلق به $[a,b]$ داریم:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{d\,f_n(x)}{dx}\right)$$

در اینجال تعویض مشتقگیری با جمع بندی مجاز است.

ضمیمه ۴ سریهای صحیح

الف- تعریف و خواص

تعریف: سری با جمله عمومی $u_n = a_n z^n$ را که در آن a_n اعداد حقیقی یا مختلط داده شده ای بوده و z متغیری حقیقی یا مختلط باشد، سری صحیح مینامیم و آن را بصورت $\sum a_n z^n$ نشان میدهیم.

خواص:

۱- مجموع: بازای مقادیری از z ، سری $\sum a_n z^n$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد که در حالت همگرا بودن، مجموع آن را بصورت $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ نشان میدهیم. همه مطالبی که در ضمیمه ۳ در مورد همگرایی یکنواخت گفته شد، بشکلی مشابه در سریهای صحیح نیز صدق میکند.

۲- شعاع همگرایی: برای پی بردن به همگرایی یک سری صحیح، اغلب از قاعده دالامبر استفاده میشود. در اینجا لازم است حد $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ وجود داشته باشد. این حد را با ℓ نشان میدهیم. در اینصورت خواهیم داشت: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell|z|$. اگر $\ell = 0$ باشد، سری مزبور بازای جمیع مقادیر z از مجموعه $\mathbb{C}$، مطلقاً همگرا خواهد بود. اگر $\ell \neq 0$ باشد، آنگاه سری صحیح، برای z که دارای شرط $|z| < \frac{1}{\ell}$ هست، همگرای مطلق میگردد.

چنانچه $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ باشد، در اینصورت سری صحیح، تنها برای $z = 0$ همگرا خواهد بود.

قضیه: (آنچه که قاعده دالامبر در سریهای صحیح مشخص میسازد آگاهی از وضع کلی سریها است.) برای هر سری صحیح، عددی حقیقی مانند R ($R \geq 0$) وجود دارد، به قسمی که موارد زیر میتواند پیش آید:

$|z| < R \quad \rightarrow$ سری صحیح مطلقاً همگرا میگردد

و

$|z| > R \quad \rightarrow$ سری $\sum |a_n z^n|$ واگرا میگردد

R را شعاع همگرایی سری صحیح و فاصله $]-R,+R[$ را فاصله همگرایی مینامیم. در حالتیکه $R = +\infty$ شود، سری همواره همگرا خواهد بود. در حالتی هم که از قاعده دالامبر استفاده میکنیم، $R = 1/\ell$ است.

۳- خواص تابع مجموع (متغیر حقیقی فرض شده است): برای هر x متعلق به بازه $]-R,+R[$ (بازه همگرایی) در مورد تابع مجموع سری یعنی $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ داریم:

الف- تابع $f(x)$ بصورت نا محدود روی بازه $]-R,+R[$ مشتق پذیر است و میتوان از سری جمله به جمله مشتق گرفت. یعنی بازای هر $x \in]-R,+R[$ داریم:

$$\begin{cases} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \\ f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} \end{cases}$$

و به همین ترتیب برای سایر مشتقها عمل میگردد.

ب- اگر تابع f روی بازه ای بصورت $]-r,+r[$ ، (با $r<R$) بطور یکنواخت برابر با صفر شود، در اینصورت ضرایب a_n برابر با صفرند. (نظیر این خاصیت در کثیرالجمله ها نیز به همین صورت وجود دارد.)

ب- توابع قابل بسط به سریهای صحیح:

برای بعضی از سریهای صحیح، توابع مجموع آنها کاملاً شناخته شده است. در اینجا تنها به چند بسط لازم اشاره می‌کنیم: (α عددی است حقیقی و غیر مشخص)

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

در بسطهای فوق باید x به بازه $]-1,+1[$ متعلق باشد. ($|x|<1$). این بسطها بازای همه اندازه های حقیقی x، صحیح هستند:

$$\begin{cases} \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

ضمیمه ۵ بسط مفهوم انتگرال

۱- انتگرال یک تابع پیوسته قطعه ای:

اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ (متعلق به $\mathbb{R}$)، بجز در تعداد محدودی از نقاط این بازه مثل t_1، t_2، ... و t_n پیوسته بوده و در نقاط مزبور دارای حدهای راست و چپ باشد، بنا به تعریف انتگرال تابع f روی بازه $[a,b]$ برابرخواهد بود با مجموع انتگرالهای زیر، که میدانیم با شرایط ذکر شده در بالا همگی موجودند: ($a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$)

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{t_1} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt + \ldots + \int_{t_n}^{b} f(t)\,dt$$

۲- انتگرال تعمیم یافته روی بازه $[a,+\infty[$:

۲-۱- تعریف: اگر تابع حقیقی یا مختلط f روی بازه $[a,+\infty[$ پیوسته یا پیوسته قطعه ای باشد، میگوییم انتگرال تعمیم یافته $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ همگراست اگر $\lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$ وجود داشته باشد. (البته $\int_a^b f(t)\,dt$ در صورتیکه $b > a$ باشد، تعریف شده است.) می‌نویسیم:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

۲-۲- تشخیص همگرایی وقتیکه f حقیقی و مثبت باشد:

الف- مقایسه بوسیله بزرگی: دو تابع f و g را که روی بازه $[a,+\infty[$ مثبت بوده، پیوسته یا پیوسته قطعه ای باشند، در نظر میگیریم بطوریکه برای $t \geq a$ یا برای t های بقدر کافی بزرگ داشته باشیم: $f(t) \leq g(t)$. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ همگرا میگردد } \longrightarrow \text{ اگر } \int_a^{+\infty} g(t)\,dt \text{ همگرا باشد}$$

و

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt \text{ واگرا میگردد } \longrightarrow \text{ اگر } \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ واگرا باشد}$$

ب- مقایسه بوسیله معادل بودن: خاطر نشان میسازیم که دو تابع f و g را که روی بازه $[a,+\infty[$ مثبت، پیوسته یا پیوسته قطعه ای باشند، در همسایگی بینهایت معادل گوییم، اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(t) = g(t)\left[1+\varepsilon(t)\right] \\ \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0 \end{cases}$$

در اینصورت مینویسیم: $f \underset{+\infty}{\sim} g$. چنانچه دو تابع f و g در همسایگی بینهایت معادل باشند، دارای طبیعت مشترکی (از حیث همگرایی) خواهند بود.

۲-۳- تشخیص همگرایی برای توابع غیر مشخص:

الف- همگرایی مطلق:

تعریف: میگوییم انتگرال $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ مطلقاً همگراست، اگر انتگرال $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ همگرا باشد. در اینصورت نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ همگرا میگردد } \to \text{ اگر } \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \text{ همگرا باشد}$$

بر عکس موضوع صحیح نیست.

ب- روش دیگر: برای توابع حقیقی که روی بازه $[a,+\infty[$ بینهایت مرتبه تغییر علامت میدهند، تشخیص هایی وجود دارد. اما در اغلب آنها با یک انتگرال گیری جزء به جزء و محاسبه حد، همگرایی بررسی میگردد.

۲-۴- مثالهای مهم:

اگر و تنها اگر $p > 0$ باشد، انتگرال $\int_0^{+\infty} \exp(-p\,t)\,dt$ همگرا میگردد.

اگر و تنها اگر $\alpha > 1$ باشد، انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ همگرا میگردد.

۳- انتگرال تعمیم یافته روی بازه $]-\infty,a]$:

از تشخیص همگرایی قبلی در این جا بهره میگیریم. با تغییر متغیر $t=-u$، به حالت انتگرال روی بازه $[-a,+\infty[$ میرسیم که همان بررسی قبلی است.

۴- انتگرال تعمیم یافته روی بازه $]a,b]$ یا روی بازه $[a,b[$

چنانچه تابع f در a یا b حد محدودی نداشته باشد، انتگرال $\int_a^b f(t)\,dt$ نمیتواند وجود داشته باشد (از طریق معمولی). از اینرو بسط تابع ضرورت پیدا میکند.

۴-۱- تعاریف:

حالت اول: تنها ماندن در b، بطور مثال اگر $\lim_{t\to b^-} f(t)$ نامحدود باشد.

اگر تابع f روی هر بازه $[a,c]$ از بازه $[a,b[$ پیوسته قطعه ای باشد و در حالیکه در نقطه b دارای حد نیست، میگوییم که انتگرال تعمیم یافته $\int_a^b f(t)\,dt$ همگراست، اگر وقتیکه c به b میل کند، انتگرال $\int_a^c f(t)\,dt$ در $\mathbb{R}$ یا در $\mathbb{C}$ دارای حد باشد.

<u>حالت دوم</u>: تنها ماندن در a (مثلاً وقتی $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)$ نامحدود باشد)

در اینصورت با همان توضیحات حالت اول، خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{c\to a}\int_c^b f(t)\,dt$$

در حالت اول هم داریم:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{c\to b}\int_a^c f(t)\,dt$$

۴-۲- تشخیص همگرایی:

تشخیص بزرگی و معادل بودن و همسایگی در a یا b، راه هایی است برای تشخیص همگرایی $\int_a^b f(t)\,dt$.

۴-۳- مثالهای مهم:

اگر و تنها اگر $\alpha < 1$ باشد، انتگرال $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ همگرا میگردد. (α حقیقی است)

اگر و تنها اگر $\alpha < 1$ باشد، انتگرال $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ همگرا خواهد بود. (α حقیقی است و $b > a$ است.)

انتگرال $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ همگرا است.