باسمه تعالی

پاسخنامه میان‌ترم اول درس ریاضی ۱ — دانشگاه صنعتی امیرکبیر — ۶ آبان ۱۳۹۴ وقت ۱۲۰ دقیقه

۱-فرض کنید عدد مختلط z چنان است که $\mathrm{Re}(z)>1$. ثابت کنید $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

اثبات: داریم. $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-z}{2z}\right|=\frac{|z-2|}{2|z|}$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $|z-2|<|z|$. اما با توجه به شرط $\mathrm{Re}(z)>1$ نتیجه می شود فاصله z تا ۲ کمتر از فاصله z تا مبدا است و حکم به دست می‌آید.

۲- بدون محاسبه ریشه‌های معادله $(z-i)^5=(z+i)^5\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1394}$ ثابت کنید همه ریشه‌ها روی خط $y=0$ قرار دارند.

اثبات: طول دو طرف را حساب می کنیم و با توجه به اینکه $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|=1$ و لذا $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|^{1394}=1$. پس نتیجه می‌گیریم $|z-i|=|z+i|$.

بنابراین ریشه‌های معادله روی عمود منصف پاره خط واصل i به $-i$، یعنی خط $y=0$، قرار دارند

۳- فرض کنید $f:[0,1]\to I\!R$ پیوسته است. ثابت کنید به ازای هر $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$ وجود دارد $c\in[0,1]$ بطوریکه

$$f(c^3)=\frac{f(x_1^3)+f(x_2^3)+\cdots+f(x_n^3)}{n}.$$

اثبات: تابع $g:[0,1]\to[0,1]$ را با ضابطه $g(x)=x^3$ در نظر می‌گیریم. تابع g پیوسته است. حال تابع $h:[0,1]\to I\!R$ را به صورت $h:=f\circ g$ تعریف می‌کنیم. تابع h پیوسته است. بنا به یکی از تمرینات حل شده در کلاس، به ازای هر $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$ وجود دارد $c\in[0,1]$ بطوریکه

$$h(c)=\frac{h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n)}{n}.$$

بدین ترتیب حکم به دست می‌آید.

۴- نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & x=\frac{m}{n}\in Q\ ,(m,n)=1\\ 0 & x\in Q^c\end{cases}$ در هر نقطه گویا ناپیوسته است.

اثبات: به ازای عدد گویای $\frac{p}{q}$ که $(p,q)=1$، می‌دانیم که دنباله‌ای متشکل از اعداد گنگ مانند s_n وجود دارد بطوریکه به $\frac{p}{q}$ همگرا است. اگر f در $\frac{p}{q}$ پیوسته باشد، آنگاه باید داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(s_n)=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\neq 0$. اما بنا به تعریف f داریم $f(s_n)=0$ ولذا $\lim_{n\to\infty} f(s_n)=0$ که تناقض است. پس f در $\frac{p}{q}$ پیوسته نیست.

۵- فرض کنید دنباله s_n همگرا به صفر است. قرار دهید $a_n=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$. ثابت کنید دنباله a_n نیز همگرا به صفر است.

❋ تا فردا ظهر فرصت دارید تا پاسخ این سوال را برای من ایمیل کنید. چنانچه پاسخ تان صحیح باشد، بخشی از نمره این سوال را خواهید گرفت.

۶- گزاره‌های نادرست را مشخص کنید و برای آنها مثال نقض ارائه دهید.

الف) حد $f(x)=\dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\sin(\frac{1}{x})}$ در $x=0$ موجود و برابر یک است.

f در هیچ همسایگی محذوف $x=0$ تعریف شده نیست پس حد $f(x)=\dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\sin(\frac{1}{x})}$ در $x=0$ موجود نیست.

ب) هر دنباله همگرا، صعودی است.

دنباله $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ همگرا است ولی صعودی نیست.

ج) هر تابعی که در خاصیت مقدار میانی صدق کند، پیوسته است.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند ولی پیوست نیست.

د) هر تابع پیوسته‌ای، کراندار است.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=x$ پیوسته است ولی کراندار نیست.