فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی

شماره - - (بهار - - - -) صص. - - تا - -

اصل موضوع و تعریف در ریاضیات*

مرتضی منیری

چکیده. در اواخر قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم میلادی مباحثاتی در زمینهٔ ماهیت اصول و تعریف‌ها در ریاضیات درگرفت که مفهوم مدرن و امروزی مورد استفادهٔ ریاضیدانان از دستگاه اصل‌موضوعی را شکل داد. این مسیر چندان هموار نبود و حاصل تلاشها و تنازع آرایی بود که در خلال تلاش ریاضیدانها برای مستحکم کردن مبانی ریاضیات پدید آمد. حاصل‌کار شکل‌گیری رویکرد استاندارد امروزی به اصول و نحوهٔ بررسی استقلال و سازگاری آنها، و همچنین در نظر گرفتن تعریف به عنوان خلاصه‌نویسی زبانی بود. این مقاله اختصاص به بررسی روند یادشده و همچنین تشریح رویکرد امروزی به اصول و تعریفهای ریاضی دارد.

۱. مقدمه

تعریف برخی از مفاهیم ریاضی در گذر زمان تغییر کرده است و تغییرات بیشتر آنها در گذر زمان ممکن است. برای مثال، می‌توان به مفهوم تابع اشاره کرد. تا پیش از تثبیت مفهوم جدید تابع به کمک مجموعه‌ها، تابع به شکلهای مختلفی از قبیل نقاط روی یک منحنی (لایبنیتز[۱])، فرمول یا عبارتی تحلیلی بر حسب چند متغیر یا ثابت (اویلر[۲]) و هرگونه عبارتی که برای محاسبه مفید باشد و در آن متغیرها به هر روش وارد شوند (لاگرانژ[۳])، تعریف می‌شد ([۱]). تعریف امروزی تابع برحسب

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A30; 03A05.

عبارات و کلمات کلیدی. تعریف، اصل موضوع، خواص ساختاری .

[1]Leibniz
[2]Euler
[3]Lagrange

مجموعه‌ها در نیمهٔ اول قرن بیستم توسط بورباکی[1] تثبیت شده است. پرسشی که در اینجا به ذهن می‌رسد آن است که کدامیک از تعاریف تاریخی تابع درست است. آیا اصلاً این پرسش معتبر است؟

به شکلهای مختلف می‌توان به این موضوع نگریست. برای مثال می‌توان تابع را مفهومی در نظر گرفت که ریاضیدانها ابداع کرده‌اند و در برهه‌های مختلف و بسته به نیازهای زمان، تعریف آنرا تغییر داده‌اند. از این نظر، این مفهوم را می‌توان با مفهومی چون قطار مقایسه کرد که در زمانی مشخص بوجود آمد و تغییرات زیادی کرد بطوری که شاید شباهت چندانی بین قطارهای پیشرفته امروزی و قطارهای اولیه وجود نداشته باشد. در این تعبیر از تعاریف ریاضی، هرچند که مفهومی ساخته و پرداخته انسان در نظر گرفته می‌شود، درستی یا غلطیِ نسبی برای آن معنا دارد. تعریف درست فعلی تعریفی است که همهٔ موارد کاربرد امروزی آنرا بپوشاند. اما در پرتو پیشرفت ریاضیات، همین تعریف درست، ممکن است دیگر درست نباشد. در این دیدگاه، ریاضیات شبیه علوم تجربی درنظر گرفته می‌شود، همانطور که شواهد تجربی بیشتر ممکن است به تجدید نظر در یک نظریهٔ علمی منجر شود، پیشرفتهای یک شاخه از ریاضیات ممکن است نیاز به تغییر در مفاهیم اولیهٔ آنرا باعث شود. همانطور که نظریه‌های علمی را نمی‌توان نهایی دانست، تعاریف ریاضی هم مستعد تغییر دائمی هستند.

این جنبه‌ای از تعریف‌های ریاضی است که در دیدگاه لاکاتوش[2] به ریاضیات جایگاه مهمی دارد [۱۹]. او در این زمینه از نظر مشهور پوپر در مورد ملاک ابطال‌پذیری برای تشخیص نظریه‌های علمی تاثیر پذیرفته است. تعریف‌های ریاضی را می‌توان مانند نظریه‌های علمی و نتایج منطقی تعریف‌ها را مانند آزمایشها و مشاهدات مرتبط با نظریه‌های علمی دانست. در پرتو نتایج، ممکن است اصلاح تعریف‌ها ضروری به نظر برسد.

اما در اینجا پرسشی دیگر مطرح می‌شود: آیا همهٔ تعاریف تاریخی تابع، به یک مفهوم واحد اشاره می‌کنند، یا به مفاهیم مختلفی که با نام واحدی به آنها اشاره شده است؟ اگرجواب مثبت باشد، دیگر درستی یا غلط خواندن تعاریف مختلف چندان وجهی نخواهد داشت. ممکن است آن چیزی که سابق تابع نامیده می‌شده، به کلی با چیزی که امروزه تابع نامیده می‌شود متفاوت باشد. به نظر نمی رسد که چنین برداشتی مقبول خود ریاضیدانها باشد. این تلقی، سیر تاریخی شکل‌گیری مفاهیم ریاضی و تکامل آنها را نادیده می‌گیرد. اعتقاد استاندارد این است که تعریف کنونی تابع عامترین تعریفی است که تاکنون ارائه شده است و تعریفهای قبلی حالتهای خاصی از آن هستند. البته عکس

[1] Bourbaki
[2] Lakatos

این پدیده هم ممکن است. برای مثال، بر اساس تلقی کنونی از مجموعه، بر خلاف تصور پیشین، هر خاصیت یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. پس به نوعی مفهوم مجموعه محدودتر شده است.

وضعیت مشابهی در مورد اصول ریاضی وجود دارد. برای نمونه، به مفاهیم هندسهٔ مسطحه از قبیل نقطه و خط توجه کنید. این اعتقاد وجود دارد که یونانی‌های باستان برای نقطه و خط وجودی مستقل قائل بودند. آنها برخی از خواص پایه‌ای این‌دو که بدیهی به نظر می‌رسیدند را به عنوان اصل در نظر گرفتند و تلاش کردند بقیهٔ خواص آنها را به کمک اصول یاد شده و قواعد منطق استنتاج کنند. در این دیدگاه، غلط بودن اصول معنایی ندارد. در دیدگاه کانت[۱] به حساب و هندسه نیز وضعیت مشابهی وجود دارد. اگر مانند کانت معتقد باشیم که هندسهٔ اقلیدسی بازتاب ساختار ذهن ما و غیرقابل تردید است، اصول آن نیز لاجرم درست خواهند بود.

اما در گذر زمان برخی از این اصول بیشتر بدیهی به نظر رسیدند و بنابراین در طول تاریخ تلاشهای بسیاری صورت گرفت تا بقیه را به کمک آنها اثبات کنند. برای مثال، در این مسیر ثابت شد که اصل پنجم اقلیدس در خصوص توازی از بقیهٔ اصول چهارگانه او مستقل است. یعنی، با فرض پذیرش سازگاری هندسهٔ اقلیدسی، شامل هر پنج اصل، نقیض اصل پنجم به اضافهٔ چهار اصل دیگر هم سازگار خواهد بود. برای مثال در هندسهٔ لوباچفسکی[۲]، از هر نقطهٔ خارج از یک خط، بی‌نهایت خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. درواقع، سازگاری هندسهٔ اقلیدسی و لوباچفسکی با هم معادل هستند ([۳] و [۱۴]). این روند باعث شده که بداهت اصول یادشده زیر سوال برود. به نظر می‌رسد که حتی در مورد اصول ریاضی تردید مجاز باشد! در این مقاله به تاریخچهٔ رویکرد امروزی به تعریفها و اصول ریاضی می‌پردازیم و همچنین این رویکرد امروزی و استاندارد را توصیف می‌کنیم.

۲. جدال هیلبرت و فرگه بر سر اصول ریاضی

در ابتدای قرن بیستم، هیلبرت[۳] اصول موضوع هندسی خود را به‌عنوان جانشین اصول موضوع اقلیدس مطرح کرد تا خلاءهای منطقی آنها را پر کرده و از هرگونه سهل‌انگاری شهودی عاری کند. او در کتاب مبانی هندسه (۱۸۹۹) به بنیاد هندسه به شیوهٔ اصل موضوعی دقیق خود پرداخت ([۱۲]). هیلبرت ابتدا مفاهیمی چون نقطه و خط را ظاهراً تعریف می‌کند، هر چند که تعریف‌های او شبیه تعریف به معنای معمول نیستند و فقط انتخاب حدود اولیه و نام‌گذاری آنها به نظر می‌رسند. سپس

[1] Kant
[2] Lobachevsky
[3] Hilbert

با بیان اصولی، خواص آنها را ذکر می‌کند. به اعتقاد هیلبرت هر اصل موضوع در واقع جزئی از تعریف است. با اضافه کردن اصول، مفهوم مورد بحث تغییر می‌کند. دراین راستا هیلبرت از تعاریف سیاقی[1] دفاع می‌کند، یعنی اصطلاحات به طور صریح تعریف نمی‌شوند بلکه با ذکرشان در اصول موضوعه، معنی می‌یابند ([۸]).

هیلبرت هرگونه تلاش برای تعریف مفاهیم هندسی را دوری و ناامید کننده می‌دانست. از دید او، اصول هندسی تنها قراردادهایی هستند که روابط بین مفاهیم خط و نقطه را بیان می‌کنند و ماهیت این مفاهیم را مشخص نمی‌کنند. در واقع، به اعتقاد او تعریف ماهیت اشیا هندسی مذکور، ناممکن است. اما یک مشکل ظاهری در این مورد آن بود که اصول هیلبرتی تعابیر مختلفی از مفاهیم هندسی را مجاز می‌دانستند. برای مثال، نقطه و خط می‌توانند هر چیزی باشند، مادام که روابط موجود بین آنها را به نحو مناسب تعبیر کنیم. همانطور که خود هیلبرت متذکر می‌شود، کافی است با استفاده از یک تناظر یک به یک، ساختار یک مدل اصول را به یک مجموعهٔ هم‌عدد با آن منتقل کرد. هیلبرت در این مورد می نویسد:

> «... مسلماً بدیهی است که هر نظریه فقط داربست یا طرح‌واره‌ای از مفاهیم به همراه روابط ضروری آنها با یکدیگر است و عناصر پایه‌ای را می‌توان به هر شکلی که دوست داشت در نظر گرفت. اگر در صحبت از نکات خود، به برخی از دستگاه‌های اشیا فکر کنم، مثلاً به دستگاه عشق، قانون، دودکش ... و سپس همهٔ اصول خود را به عنوان روابط بین این چیزها فرض کنم، آنگاه گزاره‌های من، مانند قضیهٔ فیثاغورث، برای اینها هم معتبر هستند... [یک] هر نظریه‌ای را همیشه می توان برای بی‌نهایت دستگاه عناصر پایه‌ای به کار برد. فقط باید یک تبدیل یک–یک برگشت پذیر را اعمال کرد و آنگونه مقرر کرد که اصول باید به طور متناظر برای چیزهای تبدیل شده یکسان باشند. این شرایط در واقع مکرراً مورد استفاده قرار می گیرد، مثلاً در اصل دوگانگی ...[این] ... هرگز نمی‌تواند نقص یک نظریه باشد و در هر صورت اجتناب‌ناپذیر است» ([۱۱]).

هیلبرت این موضوع که اصول می‌توانند تعبیرهای مختلفی داشته باشند را امتیازی برای آنها می‌دانست، به این دلیل که به آنها کلیت می‌بخشید. به طور کلی، می‌توان گفت که اصول هیلبرتی

[1] contextual

تعریف یک ساختار هستند و نه تعریف اشیائی خاص. از این نظر، او مشابه ددکیند فکر می‌کرد. ددکیند اصول معمول حساب را تعریف ساختار مرتب اعداد طبیعی می‌دانست. این اصول هیچ چیزی در مورد ماهیت این اعداد نمی‌گویند و تعبیرهای متعددی برای انها متصور است. برای مثال می‌توان دنبالهٔ اعداد را از ۲ شروع کرد و عناصر را باز تعریف کرد. نکتهٔ مهم در مورد این اصول آن است که اصطلاحاً جازم[1] هستند، یعنی هر دو مدل آن با هم یکریختند. این خاصیتی است که اصول هندسهٔ اقلیدسی و لوباچفسکی هم دارند. البته باید توجه کرد که بخشهای اصطلاحاً مقدماتی، یا مرتبهٔ اول، مجموعه‌های یاد شده از اصول این ویژگی را ندارند ([۱۴]). اما به هرحال جازم بودن یک امتیاز بزرگ برای این دستگاه‌های اصل‌موضوعی پایه‌ای است.

وضعیتی مشابه به گمان برخی فیلسوفان علم در مورد علومی چون فیزیک نیز برقرار است. قوانین، نظریه‌ها و روش‌های اندازه‌گیری متفاوت فیزیکی در مورد مفهوم یا شیٔ‌ای از قبیل جاذبه، همزمان هم احکامی را در مورد آن بیان می‌کنند و هم سهمی در تعریف آن دارند. اینگونه نیست که در ابتدا مفهومی را تعریف کنیم و بعد به دنبال کشف خواص آن برویم. همهٔ این موارد در تکوین یک مفهوم نقش دارند. به همین ترتیب، به نظر می‌رسد که تغییر یا افزودن یک اصل، منجر به تغییر مفهومی اصول می‌شود ([۸]).

فرگه[2] با این دیدگاه در مورد ریاضیات مخالف بود. به خلاف هیلبرت، فرگه معتقد بود که اگر اشیای مورد اشاره در اصول از قبل فاقد معنی باشند، آن اصول نمی‌توانند هیچ اندیشه‌ای را بیان کنند (اندیشه از نظر فرگه حقیقتی ریاضی است مستقل از ذهنیت ریاضیدانان). در یک سری مکاتبات با هیلبرت، او این دیدگاه را که اصول هندسی جنبهٔ قراردادی دارند را زیر سؤال برد ([۱۱]). به نظر او، اصول هندسی، می‌بایست خواص مفاهیم نقطه و خط را بیان کنند. نقطه و خط اشیا یا مفاهیمی هستند که مستقل از ریاضیات نیز مطرح هستند و ریاضیدانها به کمک اصول آنها را مشخص می کنند. آنها قرارداد نیستند بلکه حاصل شهود هندسی مفاهیم مرتبط هستند. درواقع، اصول هندسی اقلیدس، در مورد جهان قابل مشاهده با چشم غیرمسلح، صادق هستند. بنابراین، به اعتقاد فرگه، اثبات معمول برای نشان دادن استقلال یک اصل هندسی A از بقیه اصول اعتبار نداشت. این اثبات متکی است بر ساختن دو تعبیر مختلف از آن اصول و سپس نشان دادن اینکه A در یکی از آن تعبیرها درست و در دیگری نادرست است. این اثباتی برای استقلال این اصل از آن اصول در نظر گرفته می‌شود. اما تعبیرهای مختلف یک اصل واحد منجر به احکام متفاوتی می‌شوند که

[1] categorical
[2] Frege

با یکدیگر بی‌ربط هستند. پس، به اعتقاد فرگه، درست بودن تعبیری از یک اصل و نادرست بودن تعبیری دیگر از آن، چیزی را اثبات نمی‌کند ([۵]، [۶]، [۷]، [۲۲]، [۲۵]).

در واقع فرگه اصول هیلبرت را شبه‌ـاصل می‌دانست که هیچ اندیشه‌ای را بیان نمی‌کنند، اندیشه‌ها آن چیزهایی هستند که به اعتقاد فرگه در ریاضیات اهمیت اساسی دارند. این اندیشه‌ها هستند که مابین ریاضیدانها مشترکند وگرنه بیانهای صوری قضیه‌های ریاضی می‌توانند مختلف باشند. بنابر نظر فرگه، اصول ممکن است که غلط باشند زیرا آن مفهومی را که باید معرفی کنند، به درستی مشخص نکنند. تحلیل دوبارهٔ مفاهیم درگذر زمان می‌تواند منجر به تغییر اصول شود. اما چنین چیزی را در مورد در مورد اصول هیلبرتی نمی‌توان گفت. آنها قراردادهایی هستند که با قراردادهای دیگر جایگزین می‌شوند، درستی و غلطی درمورد آنها معنایی ندارد. در رویکرد هیلبرت، مسائل فلسفی مرتبط با مفاهیم ریاضی، مانند منشاء اصول و دلیل پذیرش آنها، ناپدید می‌شوند. این بخصوص در مورد حساب حساستر بود، زیرا فرگه برای مفهومهای هندسی منشاء شهودی و حسی را می‌پذیرفت اما در مورد اعداد و خواص آنها، نه. به نظر فرگه حساب کاملا مستقل از حواس و یا تصورات انسان بود و کلی بودن خواص حسابی را در حد پایه‌ای‌ترین قواعد تفکر می‌دانست. هر چه قابل اندیشیدن باشد، قابل شمارش است.

البته هیلبرت هم نمی‌خواست به‌کلی دست از ادعای درست بودن اصول بکشد، اما برخلاف فرگه، سازگاری اصول را نشانه‌ای از درست بودن اصول می‌دانست و نه‌بعکس. تفاوت دیدگاه فرگه و هیلبرت در مورد موضوع سازگاری دستگاه‌های اصل‌موضوعی نیز قابل توجه است. با توجه به قراردادی بودن اصول در تلقی هیلبرت از انها، نیاز بود که سازگاری آنها بررسی شود. موضوع سازگاری اصول هندسی چیزی بود که ذهن پوانکاره[1] را نیز به خود مشغول کرده بود ([۲۱]). مدل هندسهٔ ناقلیدسی پوانکاره، با فرض سازگاری هندسه اقلیدسی ارائه شده بود. از نظر پوانکاره بررسی سازگاری اصول هندسهٔ اقلیدسی خود مسئله‌ای مهم بود. هیلبرت در تلاش برای اثبات سازگاری اصول هندسی خود، توانست اصطلاحا سازگاری نسبی آنها را نشان دهد. او نشان داد که با فرض سازگاری اصول اعداد حقیقی، اصول هندسی او نیز سازگار خواهند بود. برای این منظور، او تعبیری از اصول هندسی خود برحسب اعداد حقیقی ارائه کرد. سازگاری دستگاه اعداد حقیقی را به نوبه خود می‌توان به سازگاری دستگاه‌های اصل موضوعی حسابی تحویل کرد. فرگه چنین اثباتی را معتبر نمی‌دانست. اندیشهٔ مرتبط با اعداد حقیقی به‌تمامی با اندیشهٔ مرتبط با نقطه و خط متفاوت است.

[1] Poincaré

اگر آنطور که فرگه می‌خواست، اصول هندسه ماحصل تجزیه و تحلیل مفاهیم هندسی بوده و بنابراین درست باشند، آنگاه لزوماً سازگار نیز هستند. درستی اصول، سازگاری آنها را نتیجه می‌دهد نه به‌عکس.

البته تفاوتی بین دستگاه‌های اصل‌موضوعی مختلف وجود دارد. اصول نظریه‌هایی چون مجموعه‌ها را می‌توان اصول بنیادی نامید، اصول گروه‌ها، حلقه‌ها و دیگر ساختارهای ریاضی امروزی را می‌توان اصول ساختاری دانست که انواع ساختارها را تعریف می‌کنند ([۲۵]). در دیدگاه بنیادی، اصول ZF خواص جهان V، سلسله‌مراتب تجمعی مجموعه‌ها[1]، را توصیف می‌کنند که شامل (نسخه‌ای) از همهٔ مفاهیم (اشیاء) ریاضی است. این سلسله‌مراتب مجموعه‌ها از $\varnothing$ آغاز می‌شود و در آن، هر مرحلهٔ تالی متشکل از مجموعهٔ توانی مرحلهٔ قبلی و هر مرحلهٔ حدی متشکل از اجتماع همهٔ مجموعه‌ها در مراتب قبلی است ([۱۶]). در دیدگاه ساختاری، اصول مجموعه‌ها مانند بقیهٔ اصول معمول ریاضی هستند که مدل‌های بی‌شماری دارند. البته گرایشی جدید در فلسفهٔ ریاضی وجود دارد که مابین این دو جنبهٔ مختلف اصول مجموعه‌ها آشتی برقرار می‌کند. بنابر دیدگاه چندجهانی به ریاضیات، مدلهای مختلف مجموعه‌ها، ریاضیاتهای ممکن مختلفی را نمایندگی می‌کنند. در این روایت، بحث استقلال اصلی چون CH مطرح نیست. جهانی وجود دارد که در آن CH درست است و جهانی دیگر که در ان CH غلط است ([۱۵]).

دیدگاه هیلبرت مبتنی بر در نظر گرفتن اصول ریاضی به عنوان قرارداد امروزه به دیدگاه مسلط در ریاضیات تبدیل شده است. وفور دستگاه‌های اصل موضوعی مختلف در ریاضیات گواهی از این توافق است. البته مقاومتهایی نیز در این زمینه وجود دارد. برخی از ریاضیدانان، افراط در این روش را باعث جدایی ریاضیات از علوم دیگر در مسیر شناخت جهان و جدا افتادن آن از هدف و ریشه‌های عمیق خود می‌دانند. اما باید توجه کرد که خطر اصلی برای یک علم، از جانب خود افراد مرتبط با آن علم است. همانطور که افراط در صورتگرایی خطری برای ریاضیات است، توجه صرف به موضوعات کاربردی و قطع توجه از جنبه‌های وسیعتر ریاضیات نیز می‌تواند به ابتذال منجر شود. در هر حال باید در نظر داشت که ارایهٔ یک دستگاه اصل موضوعی، پیش از معرفی مدلهای متنوع و قابل توجه برای آن، توجیهی ندارد.

[1] The Commulative Hierarchy of Sets

۳. تعریف ریاضی

در نگاه اول به نظر می‌رسد که حداقل دوگونه تعریف در ریاضیات وجود داشته باشد. گاهی ریاضیدانی حرفه‌ای می‌خواهد مفهوم یا نمادی کاملاً جدید را در حوزهٔ تخصصی خود معرفی و مطالعه کند. البته این مفهوم نمی‌تواند از هیچ به وجود آمده باشد و مبتنی بر مفاهیم قبلی است. برای این منظور او اصطلاح یا نمادی جدید را انتخاب می‌کند و تعریف آنرا برحسب مفاهیم و اصطلاحات از قبل آشنا، بیان می‌کند. برای مثال، می‌توان از تعریف عدد پی π کرد. ریاضیدانها در مرحله‌ای به ثابت بودن نسبت محیط هر دایره به قطر آن پی بردند و نماد π را برای نشان دادن این نسبت وضع کردند و آنرا وارد تحقیقات خود نمودند.

از طرف دیگر، ریاضیدان ممکن است بخواهد مفهومی را تعریف کند که تاریخچه‌ای دارد. برای مثال مفهوم عدم پارگی در نمودار یک تابع را در نظر بگیرید که از آن تصوری شهودی وجود داشته است. ریاضیدانان احتمالا به شیوهٔ زیر عمل کرده‌اند. ابتدا اصطلاحی جدید چون "پیوستگی" وضع کرده‌اند و با فرض برخی شرایط در مورد تابع مورد بحث، آنرا دقیقا تعریف کرده‌اند. هدف آنها آن بوده است که مفهوم تعریف شده همهٔ خواص مورد نظر را تاحد امکان داشته باشد. ممکن است در یک مرحله، تعریف ارایه شده همهٔ موارد مورد نظر و اصلی را نداشته باشد یا اینکه خواص ناخواسته‌ای هم داشته باشد. اما پس از چند مرحله اصلاح، تعریف مورد قبول قرار گرفته و به طور رسمی وارد ریاضیات شده است. در چنین حالتهایی می‌توان مفهوم قدیمی شهودی را فراموش کرده و با مفهوم جدید کار کرد. البته به مرور زمان و با توسعهٔ مفهوم تابع و یا فضای مورد بحث، این نیاز به وجود آمد که تعریف باز هم گسترش یابد. برای مثال، تعریف پیوستگی در یک فضای توپولوژی دلخواه، چندان ربطی با مفهوم شهودی پیوستگی تابعی تعریف شده بر خط حقیقی ندارد. حتی خود توابع حقیقی پیوسته خواصی دارند که عجیب و غیرشهودی به نظر می‌رسند ([۱۳]). در این مرحله، به نظر می‌رسد که مفهوم تعریف شده بیشتر جنبهٔ قراردادی دارد، ویژگی‌ای از توابع حقیقی یا کلی‌تر که بررسی‌اش مفید است. به این معنی، نوع دوم از تعریف ریاضی چندان تفاوتی با نوع اول ندارد. هر دو حاصل نوعی قرارداد هستند. اینگونه تعریفها را تعریف تصریحی[1] می‌نامند.

یک تعریف تصریحی اعلام آن است که نماد یا عبارتی جدید دقیقاً همان معنی را دارد که نماد یا عبارت بامعنی پیچیده‌تر از قبل داده شده، و بنابراین هر دو عبارت مصادیق یکسانی نیز دارند. تعریفهای مرحله به مرحله در نظریهٔ مجموعه مثالهای خوبی در این زمینه فراهم می‌کنند. به عنوان

[1] stipulative

مثالی مشخص، می‌توان تعریف ‘‘مجموعهٔ تهی’’ به کمک تساوی و تعلق (دو رابطهٔ اصلی نظریهٔ مجموعه) را درنظر گرفت. این نماد گرچه بسیار تسهیلگر است اما بدون آنکه هیچ نتیجه‌ای از دست برود قابل حذف است. البته توجه به نکته‌ای در اینجا مهم است. صرف تعریف چیزی در ریاضیات، وجود آنرا اثبات نمی‌کند. برای مثال، وجود مجوعهٔ تهی را می‌بایست به کمک اصول مجموعه‌ها اثبات کرد.

مشهور است که فرگه تنها یک نوع تعریف در ریاضیات را مجاز می‌دانست، تعریف تصریحی. این دیدگاه فرگه از تعریف ریاضی به دیدگاه استاندارد در این زمینه تعریف شده است:

> «من می خواهم کلیت گزاره های ریاضی را به دو دسته تقسیم کنم تعاریف و تمام گزاره های باقی مانده (اصول موضوع، قوانین بنیادی، قضایا). هر تعریفی حاوی یک نشانه (یک عبارت، یک کلمه) است که قبلاً معنایی نداشت و ابتدا با تعریف به آن معنا داده می شود. پس از انجام این کار، می توان تعریف را به یک گزارهٔ به‌خودی خود بدیهی تبدیل کرد، گزاره ای که می تواند مانند اصول موضوع استفاده شود. اما ما نباید این حقیقت را از نظر دور داریم که یک تعریف چیزی را ادعا نمی کند بلکه چیزی را بیان می‌کند. بنابراین ما هرگز نباید چیزی را که نیاز به اثبات دارد یا برای تایید نیاز به چیزی دیگری دارد به عنوان تعریف ارائه کنیم» ([۱۱]).

بر این اساس، خصوصیات مهم تعریف ریاضی در دیدگاه رسمی امروزی به قرار زیر است ([۸] و [۱۴]):

(۱) تعریف ریاضی بیان یک خواست است و بنابراین قابل صدق و کذب نیست.
(۲) تعریف ریاضی قابل حذف است، زیرا صرفاً نوعی خلاصه‌نویسی است.
(۳) تعریف ریاضی ناآفریننده است، هیچ قضیهٔ جدیدی را به کمک آن نمی‌توان اثبات کرد که بدون آن نتوان.
(۴) تعریف شیِ‌ای ریاضی، وجود آنرا نتیجه نمی‌دهد.

از دید فرگه، اصول ریاضی تنها می‌توانند شامل عبارتهایی باشند که معنای آنها از قبل مشخص شده باشند. پس شبه‌ـاصول هندسی هیلبرت، نمی‌توانند اصل موضوع باشند. البته در اینجا این ابهام مطرح می‌شود که تعریف مشهور خود فرگه از اعداد طبیعی تصریحی به نظر نمی‌رسد. یک دستگاه اصول‌موضوعی برای حساب در همان زمان توسط ددکیند و پئانو مطرح شده بود، اما اینکه

این اصول ماهیت اعداد طبیعی را مشخص کنند، سؤال‌برانگیز است ([۱۸]). تعریف فرگه ماحصل تحلیل مفهوم عدد بوده است و قراردادی نیست. در ضمن، فرگه از این تعریف برای اثبات خواص اعداد استفاده کرده است و قابل حذف نیستند. برای مثال، تعریف فرگه از عدد ۲ را ذکر می‌کنیم. فرض کنید $A(x)$ محمولی باشد که دامنه (حوزهٔ مصادیق) آن دو عضو دارد. توجه کنید که اینکه حوزهٔ مصادیق A دوعضوی است توسط یک فرمول منطقی ساده و بدون استفاده از عدد ۲ قابل بیان است. فرگه عدد ۲ را به صورت دامنهٔ محمول «هم‌عدد با $A(x)$» تعریف کرد. این یک محمول مرتبهٔ دوم است و دامنهٔ آن متشکل از محمولهایی مرتبهٔ اول است که دامنهٔ آنها دوعضوی است ([۲]).

اشکال فوق در مورد تعریف مفاهیمی چون پیوستگی تابع نیز ممکن است مطرح شود. پیوستگی تابع نیز مفهومی شهودی است که قبل از مطرح شدن تعریف استاندارد امروزی مورد توجه بوده است. البته تفاوتی بین مفهوم عدد وپیوستگی وجود دارد. عدد مفهومی است بنیادی که براساس مفاهیم منطقی و نه لزوما ریاضی، تعریف شده است. اما این مطلب در مورد تعریف استاندارد پیوستگی تابع، درست نیست. این تعریف بر اساس مفاهیم ریاضی‌ای که قبلا تثبیت شده‌اند صورت گرفته است و ریاضیدانان آنرا به عنوان تعریف قراردادی جدیدی به کار می‌برند. هیچکس نمی تواند مدعی شود که این مفهوم تعریف شده از هر نظر با نیای پیشاریاضیاتی آن هماهنگ است. حتی فیلسوفی چون کارنپ[1]، پرسشهایی از این نوع که آیا این مطابقت وجود دارد یا نه را پرسشی باطل یا پرسش‌نما می‌دانست ([۲۳]). در ادامه بر تعریف عدد متمرکز می‌شویم.

در مورد نوع تعریف فرگه از اعداد اختلاف نظر وجود دارد. آیا این تعریف هم تصریحی است؟ یا اینکه تعریف او تحلیلی است، به این معنی که حاصل تحلیل مفهوم عدد است و به‌ویژه به اندیشه‌های مرتبط با اعداد مرتبط است و ماهیت آنها را مشخص می‌کند و هیچ راه دیگری برای تعریف آنها وجود ندارد. در بین مفسران فرگه در این مورد اختلاف نظر وجود دارد ([۹] و [۲۳]). در هر حال، برای پاسخ باید توجه کرد که فرگه به‌طور خاص از این تعریف برای اثبات یا توجیه اصول ددکیند–پئانو اعداد طبیعی استفاده کرده است. به اعتقاد فرگه، اصول هندسه بر مبنای شهود تجربی توجیه‌پذیرند، اما اصول حساب دارای چنین مبنای شهودی نیستند. او به تفصیل به این موضوع پرداخته و امکان هرگونه توسل به شهود فیزیکی یا ذهنی را در توجیه اصول اعداد رد کرده است ([۱]). به این معنی، می‌توان کار فرگه در مورد اعداد طبیعی را تحلیل مفهوم عدد دانست که در

[1]Carnap

پیشاریاضیات و به عنوان توجیه اصول اعداد مطرح شده است. اعداد طبیعی در این رویکرد مفاهیم ریاضی بنیادی هستند و نمی‌توان آنرا برحسب مفاهیم ریاضی دیگر تعریف کرد. پس از تحیلی مفهوم عدد، در حوزهٔ ریاضی، می‌توان تنها به نتایج صوری_منطقی اصول توجه کرد. به این معنی، اصول یاد شده، خواص اعداد طبیعی را به‌درستی بیان می‌کنند. بقیهٔ ساختارهای عددی، از قبیل ساختار اعداد حقیقی را می‌توان برحسب ساختار اعداد طبیعی به روشهای متعددی به نحو قابل‌قبولی تعریف کرد. ملاک قابل‌قبول بودن این تعریفها عمل‌گرایانه است، آنها می‌بایست خواص مدنظر ریاضیدانان را تا حد ممکن برآورده کنند و خواص ناخواستهٔ کمتری را تحمیل کنند.

البته نظیر تعریف فرگه‌ای اعداد را می‌توان در نظریهٔ مجموعه نیز مطرح کرد: ۲ ردهٔ همهٔ مجموعه‌های دوعضوی است. با استفاده از ترفند اسکات[1]، می‌توان این تعریف را به شکلی اصلاح کرد که ردهٔ یادشده مجموعه هم باشد. برای این منظور، در ردهٔ فوق فقط مجموعه‌های با رتبهٔ کمینه در بین مجموعه‌های دوعضوی را در نظر گرفت. منظور از رتبه یک مجموعه، کوچکترین α است به طوری که آن مجموعه به V_α متعلق باشد ([۱۶]). این تعریف عدد را می‌توان تعریفی تصریحی بر حسب مفهوم بنیادی مجموعه دانست. پس نوع نگاه ما به جایگاه تعریف فرگه‌ای عدد، در از چه نوع دانستن آن تاثیر دارد. البته همانطور که مشهور است، اعداد را به شکلهای دیگری هم می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که اصول مذکور همچنان برقرار باشند. تعریف فون‌نویمان[2] از اعداد یک مثال است. این تعریف را می‌توان به سبک فرگه و برحسب مفاهیم منطقی بیان کرد. حداقل چیزی که در این مورد می‌توان گفت آن است که تعریف فرگه از تعریف فون‌نویمان طبیعی‌تر است، به این معنی که مثلا در تعریف عدد ۲ تمام محمولهایی که حوزه مصادیقشان دو عضوی است را گرد هم می‌آورد. این به ایدهٔ اصلی فرگه که عدد در درجهٔ اول به محمولها و مفاهیم مرتبط است، نزدیکتر است.

فرگه این امکان را که در گذر زمان تعریفهای یاد شده اصلاح شوند و تکامل پیدا کنند را رد نمی‌کند. خود او در کارهای اخیرتر اصلاح کوچکی در این مورد انجام می‌دهد ([۱۰]). اما این تکامل نمی‌تواند در حدی باشد که درستی خواص اصلی اعداد طبیعی که مثلا توسط اصول ددکیند_پئانو[3] بیان می‌شوند را خدشه‌دار کند. در مقابل، لاکاتوش این امکان را که درگذر زمان و در پرتو نیازهای جدید، حتی اصول حساب و به‌تبع مفهوم عدد دستخوش تغییر شود را رد نمی‌کند. از نظر او هیچ تعریفی، نهایی نیست. اما فرگه چنین چیزی را نمی‌پسندد:

---

[1] Scott's trick
[2] von Neumann
[3] Dedekind-Peano Axioms

«نگرش تاریخی که به شدن چیزها گوش می‌سپارد و از نحوهٔ شدن آنها در جستجوی ماهیت آنهاست، به‌یقین مزیتهای زیادی دارد، اما محدودیتهایی نیز دارد. اگر همه‌چیز پیوسته در تغییر می‌بود و هیچ چیزی نبود که برای همیشه ثابت باشد، آنگاه شناخت جهان ناممکن می‌بود و همه چیز در ابهام فرومی‌رفت. آنچه را تاریخ مفاهیم می‌خوانیم، یا تاریخ دانش ما از مفاهیم است یا تاریخ دانش ما ازدلالت واژه‌ها» ([۲]: ص. ۱۸).

در انتهای این بخش، شاید تذکر یک نکته مفید به نظر برسد. به نظر می‌رسد که با بحثهای اخیر نه تنها پرسشهای بنیادی موجود پاسخ قاطعی داده نشدند، بلکه پرسشهای جدیدی سربر آوردند. باید گفت که این خاصیت معمول بحثهای بنیادی و فلسفی است. دستاورد اصلی بحثهای این چنینی یافتن پاسخی که همه را قانع کند نیست، بلکه مطرح کردن پرسشهای جدید در جایی است که در نگاه ابتدایی، پرسش‌ناپذیر و یقینی هستند!

۴. خواص ساختاری

همانطور که دیدیم، اصول دستگاه‌های ریاضی که امروزه در جای‌جای ریاضیات حضور دارند، مانند اصول گروه‌ها، حلقه‌ها و دیگر ساختارهای ریاضی به معنایی اصول ساختاری هستند. آنها جملاتی هستند که ساختاری را تعریف می‌کنند، و نه اشیائی که در اصول به نامهای آنها اشاره می‌شود. به همین دلیل، هر دستگاه اصل موضوعی از نوع هیلبرتی، مستعد تعابیر مختلف است. مثلا به سادگی می‌توان با استفاده از تناظر یک به یک، ساختار بناشده بر یک مجموعه را به هر مجموعهٔ هم‌عدد با آن منتقل کرد. به همین دلیل گفته می‌شود که اصول به‌طور جزئی تعیین کننده هستند.

در این بخش می‌خواهیم که مفهوم ساختار و خواص ساختاری را از دید منطق ریاضی بررسی کنیم. منظور ما از یک ساختار ریاضی یک ساختار مرتبهٔ اول یا مرتبهٔ دوم و یا حتی از مراتب بالاتر در منطق ریاضی است. یک ساختار مرتبهٔ اول به زبان ساده عبارت است از یک مجموعه به عنوان مجموعهٔ زمینه به همراه دسته‌ای از روابط بین اعضای آن مجموعه. البته در حالت کلی می‌توان عناصر مشخص‌شده‌ای از آن مجموعه و همچنین توابعی روی آن مجموعه را هم در نظر گرفت. در ساختارهای مرتبهٔ دوم می‌توان از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ زمینه و رابطه‌های بین آنها هم سخن گفت. ساختارهای مراتب بالاتر به شیوه مشابهی تعریف می‌شوند. برای مثال، یک گروه یک

ساختار مرتبهٔ اول و یک فضای توپولوژی یک ساختار مرتبهٔ سوم است. در ساختار مرتبهٔ دوم اعداد طبیعی، براحتی می‌توان اصل استقرا را برای هر زیرمجموعهٔ از اعداد بیان کرد.

اما خواص ساختاری چه هستند؟ برای مثال، اگر ساختار اعداد طبیعی را تنها ساختار در حد یکریختی اصول موضوع مرتبهٔ دوم حساب بر مبنای تعریف فون‌نویمان از اعداد در نظر بگیریم، فرد بودن یک عدد خاصیتی ساختاری از آن نظر می‌رسد. درمقابل، خواصی که مرتبط با تعریف فون‌نویمان اعداد برحسب مجموعه‌های خاص هستند، چنین نیستند. در مورد ویژگی‌های ساختاری اشیاء ریاضی، دو دیدگاه وجود دارد. شاپیرو[1] در این زمینه می‌گوید:

> «یک ویژگی را به عنوان ''ساختاری'' تعریف کنید اگر بتوان آن را بر اساس روابط یک ساختار معین تعریف کرد» ([۲۵]: ص. ۲۸۶).

از طرف دیگر، لینبو[2] در همین مورد می‌گوید:

> «اکنون می توان یک ویژگی ساختاری را به عنوان خاصیتی توصیف کرد که می توان از طریق فرآیند انتزاع به آن دست یافت، یا به طور معادل، خاصیتی که توسط هر سیستمی که ساختار مورد نظر را عینیت می‌بخشد مشترک است» ([۲۰]: ص. ۶۴).

پس، به طور غیررسمی، ویژگی‌های ساختاری اشیاء در یک ساختار ریاضی را به یکی از دو روش می‌توان توصیف کرد: (۱) به عنوان ویژگی‌هایی که به کمک روابط اولیهٔ آن ساختار تعریف‌پذیر هستند، یا (۲) به عنوان ویژگی‌هایی که اشیاء نظیر در ساختارهای مشابه در آن مشترک هستند.

در ادامه این بخش می‌کوشیم تا با استفاده از مفاهیم نظریهٔ مدل به عنوان بخشی از منطق ریاضی، تعریفی ریاضی‌وار برای این پرسشها بیابیم و به‌ویژه، دو توصیف یاد شده را دقیق کنیم ([۱۷]).

فرض کنید L زبانی باشد که ساختاری چون T برحسب آن تعریف می‌شود. برای مثال می توان T را ساختار گروه‌ها و L را شامل دو پارامتر e و ۰ دانست که در آن e یک نماد ثابت و ۰ یک نمادتابعی ۲- موضعی است. یک گروه چیزی نیست جز ساختاری در زبان گروه‌ها که اصول گروه در آن صادقند. حال عضوی از یک گروه خاص G چون a را در نظر بگیرید. خواص ساختاری a را به دو روش می‌توان تعریف کرد. اول اینکه خاصیتی چون P از a را ساختاری گوییم هرگاه بتوان

[1] Shapiro

[2] Linnebo

P را برحسب نمادهای زبان نوشت. به عنوان مثال می‌توان این خاصیت که a با هر عنصر دیگر گروه جابه‌جا می‌شود را در نظر گرفت. به سادگی و به کمک نمادهای زبان و علائم منطقی می‌توان خاصیت یادشده را بیان کرد. از طرف دیگر، می توان خاصیتی از a را ساختاری گرفت که تحت همهٔ خودریختی‌های گروه G حفظ می‌شوند. خاصیت مذکور در بالا، با هر دو تعریف ساختاری است.

اما دو تعریف فوق هم‌ارز نیستند. برای مثال، این خاصیت که مرتبهٔ عنصری در یک گروه متناهی است در زبان گروه‌ها تعریف‌پذیر نیست اما مطمئنا تحت هر خودریختی حفظ می‌شود. البته قضیه‌ای در نظریهٔ مدلها بیان می‌کند که اگر زبان ساختار مورد نظر را نامتناهی در نظر بگیریم، یعنی ترکیبات فصلی و عطفی با طول بی‌نهایت مجاز باشند، آنگاه دو تعریف مذکور معادل خواهند بود ([۱۷]). اما اگر نخواهیم بهای گذر به زبان نامتناهی را بپذیریم، باید در مورد اینکه کدام تعریف را برگزینیم بیشتر تأمل کنیم.

تعریف مبتنی بر تعریف‌پذیری این ایراد را دارد که برخی خواص ممکن اعضای یک گروه مانند آنچه در بالا آمد را کنار می‌گذارد. تعریف مبتنی بر خودریختی این مشکل را دارد که برخی خواص که ساختاری به نظر نمی‌رسند را شامل می‌شود. برای این منظور توجه کنید که ساختار اعداد طبیعی به عنوان مدلی از اصول مرتبهٔ دوم حساب، جازم است، یعنی تنها یک خودریختی بدیهی دارد. به عبارت دیگر، با تعریف مبتنی بر خودریختی هر خاصیتی از اعداد طبیعی ساختاری خواهد بود! بنابراین هر دو تعریف مشکلاتی دارند.

یک راه‌حل میانه آن است که خواصی از یک عنصر درون یک ساختار را ساختاری بدانیم که تحت یکریختی‌های آن ساختار پایا می‌مانند. به عبارت دیگر، خواصی از عناصر یک ساختار، ساختاری هستند که مابین همهٔ تصاویر آنها تحت یکریختی مشترک باشند. البته با این تعریف هم مواردی هستند که ممکن است با شهود ما از خواص ساختاری هماهنگ نباشند. برای پی بردن به این نکته، توجه کنید که در مورد یکریختی‌ها هم قضیه‌ای از نوع یاد شده در بالا وجود دارد. یعنی خواصی که تحت یکریختی پایا هستند دقیقا خواصی هستند که در یک زبان نامتناهی خاص تعریف‌پذیرند ([۱۷]). اما آیا از دید شهودی این‌گونه خواص، ساختاری هستند؟ به نظر نمی‌رسد که چنین باشد.

از طرف دیگر، برخی خواص هستند که به نظر می‌رسد به یک ساختار خاص وابسته‌اند و به‌طور موضعی ساختاری هستند. مثلا فرض کنید $A(x)$ این خاصیت از عدد طبیعی x باشد که بیان می‌کند x کد یک جملهٔ معتبر در منطق مرتبهٔ دوم است. این فرمول در ساختار حسابی مرتبهٔ دوم تعریف‌پذیر نیست. آیا $A(x)$ واقعا خاصیتی ساختاری از اعداد است؟ به نظر چنین می‌رسد. یک

عدد طبیعی برای آنکه کد یک جملهٔ معتبر باشد باید در رابطهٔ خاصی با بقیهٔ اعداد قرار داشته باشد. آیا این خاصیت تحت یکریختی ساختارهای مرتبهٔ دوم پایا است؟ لزوما چنین نیست، این به انتخاب ما از نحوهٔ کد کردن جملات بستگی دارد. ممکن است در دو ساختار حسابی مختلف، دو روش مختلف کد کردن جملات را در نظر بگیریم.

بنابراین به نظر می‌رسد که به تعریف دقیق و منحصربفردی از خواص ساختاری که کاملا با احساس شهودی ریاضیدانها مطابقت داشته باشد نرسیده‌ایم. اما در هر حال، بسته به ساختار مورد بحث، می‌توان یکی از تعریفهای یاد شده را برگزید. از طرف دیگر، به نظر می‌رسد که ابهام فوق باعث شده که برخی فیلسوفان ریاضی چون شاپیرو از این عقیده دفاع می‌کنند که ساختارهای ریاضی یاد شده خود ساختار به معنای واقعی کلمه نیستند، بلکه تجسمی از آنها هستند. به اعتقاد آنها، که به نوع خاصی از ساختارگرایی در ریاضیات موسوم به ante rem یا اصالت کلی اعتقاد دارند، ساختارهای ریاضی مجرد هستند. در این ساختارهای مجرد، اشیاء خاص تنها به شکل جایگاه‌هایی در ساختارها حضور دارند و هیچ هویتی مستقل از آن ساختار ندارند ([۴]). به این ترتیب، از نظر فلسفی این مشکل که ممکن است بین خواص ساختاری با خواص ذاتی شی تداخل پیش بیاید مطرح نمی‌شود، چون این جایگاه‌ها هیچ ذات و بنابراین صفت ذاتی ندارند! این دیدگاه پاسخی برای پرسش اساسی از چگونگی وجود اشیاء ریاضی فراهم می‌کند، اما در عین حال به این پرسش دامن می‌زند که ساختارهای مجرد یادشده خود چگونه وجودی دارند.

مراجع

[۱] دری، ف. و رفیع‌پور، ا.، «تکوین تاریخی متغیرِ مؤثر ولی مغفولِ نگرش ریاضی»، *ریاضی و جامعه*، ۵ (۴)، ۱۴۰۰.

[۲] فرگه، گ.، *مبانی علم حساب*، ترجمهٔ طالب جباری، ققنوس، ۱۳۹۵.

[۳] گرینبرگ، م. جی.، *هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی*، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۱.

[۴] منیری، م.، «ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی معاصر»، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۳۷، شمارهٔ ۶۳، صص. ۳۷–۵۰، ۱۳۹۷.

[5] Blanchette, P., "Frege's Critique of 'Modern' Axioms". In: *Frege: Freund(e) und Feind(e), Proceedings of the International Conference*, Dieter Schott (ed), Berlin: Logos Verlag, pp. 105–120, 2015.

[6] Blanchette, P., "Frege on Mathematical Progress". In: *Early Analytic Philosophy: New Perspectives on the Tradition*, Sorin Costreie (ed.), Springer Verlag, pp. 3–19, 2016.

[7] Blanchette, P., "Models in Geometry and Logic: 1870-1920". In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science – Proceedings of the 15th International Congress*, Niiniluoto, Seppälä, Sober (ed.), College Publications, pp. 41–61, 2017.

[8] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, New York: Routledge, 2008.

[9] Boddy, R., "Frege on the Fruitfulness of Definitions", *Journal for the History of Analytical Philosophy*, **9** (11), 2021.

[10] Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 1, Pohle, Jena, partial English translation as Basic Laws, 1893.

[11] Frege, G., Philosophical and Mathematical Correspondence. Gabriel, Gottfried; Hermes, Hans; Kambartel, Friedrich; Thiel, Christian; Veraart, Albert; McGuinness, Brian Kaal, Hans (eds.), Blackwell, 1980.

[12] Hilbert, D., *The Foundations of Geometry*, L. Unger (trans,), Open Court, Peru, IL, 1988.

[13] Klymchuk, S., *Counterexamples in Calculus*, Mathematical Association of America, 2010.

[14] Greenberg, M. J., "Old and New Results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries", *The American Mathematical Monthly*, **117**, pp. 198 – 219, 2010.

[15] Hamkins, J. D., *Lectures on the philosophy of mathematics*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2020.

[16] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition*, Springer, 2003.

[17] Korbmacher, J. & Schiemer, G., "What Are Structural Properties?", *Philosophia Mathematica*, **26** (3), pp. 295–323, 2018.

[18] Maddy, P. & Väänänen, J., *Philosophical Uses of Categoricity Arguments*, Cambridge: Cambridge University Press, 2023.

[19] Musgrave, A. & Pigden, Ch., "Imre Lakatos", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2023 Edition)*, Edward N. Zalta Uri Nodelman (eds.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/lakatos/.

[20] Linnebo, O, "Structuralism and the notion of dependence", *Philoshopical Quarterly*, **58**, pp. 59–79, 2008.

[21] Poincaré, H., ”Non-Euclidean geometries”, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_non-Euclidean/.

[22] Rohr, T., ”The Frege–Hilbert controversy in context”, *Synthese*. **202** (12), 2023.

[23] Reck, E. H., ”Frege-Russell numbers: analysis or explication?”. In: *The Analytic Turn*, Michael Beaney (ed.), London: Routledge, pp. 33–50, 2007.

[24] Rivello, E., ”Frege and Peano on definitions”. In: *Frege: Freund(e) und Feind(e). Proceedings of the International Conference 2013*, D. Schott (ed.), Berlin: Logos, pp. 176–186, 2015.

[25] Shapiro, S., ”Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-mathematics”, *Philosophia Mathematica*, **13** (1), pp. 61–77, 2005.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی

تارنما: http://facultymembers.sbu.ac.ir/mortezamoniri/

رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir