حل تمرین های سری سوم درس کنترل خطی :

**سوال اول :** ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می آوریم :

$$T=\frac{C}{R}=\frac{\frac{s+1}{(s+2)}}{1-\left(\frac{s+1}{s+2}\right)\times\frac{1}{(s+\alpha)}}=\frac{(s+1)(s+\alpha)}{(s+2)(s+\alpha)-(s+1)}=\frac{(s+1)(s+\alpha)}{(s+2)(s+\alpha)-(s+1)}$$

$$\rightsquigarrow\ T=\frac{C}{R}=\frac{(s+1)(s+\alpha)}{s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)}$$ تابع تبدیل حلقه بسته

$$S_\alpha^{T=\frac{C}{R}}=\frac{\partial T}{\partial\alpha}\times\frac{\alpha}{T}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\alpha}=\frac{(s+1)\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)-(s+2)(s+1)(s+\alpha)}{\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)^2}=\frac{(s+1)\overbrace{\left(s^2+\alpha s+s+2\alpha-1-s^2-\alpha s-2s-2\alpha\right)}^{-(s+1)}}{\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)^2}$$

$$\rightsquigarrow\ \frac{\partial T}{\partial\alpha}=\frac{-(s+1)^2}{\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)^2}$$

$$\rightsquigarrow\ S_\alpha^T=\frac{-(s+1)^2}{\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)^2}\times\frac{\alpha\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)}{(s+1)(s+\alpha)}$$

$$\rightsquigarrow\ S_\alpha^T=\frac{-\alpha(s+1)}{\left(s^2+(\alpha+1)s+(2\alpha-1)\right)}$$

$$S_{\alpha=1}^T=\frac{-(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+1)}$$ $\longleftarrow$ به ازای $\alpha=1$

در فرکانس های بالا یعنی $(s\to\infty)$ حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته به صفر میل می کند $\left(-\frac{1}{\infty}=0\right)$

**سوال دوم :** ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم :

$$T=\frac{C}{R}=\frac{0.4\times\frac{K}{s+0.1}}{1+\frac{0.02K}{(s+0.1)}}=\frac{0.4K}{s+0.1+0.02K}$$

$$S_K^T=\frac{\partial T}{\partial K}\times\frac{K}{T}=\frac{0.4(s+0.1+0.02K)-(0.02)(0.4K)}{(s+0.1+0.02K)^2}\times\frac{K(s+0.1+0.02K)}{0.4K}$$

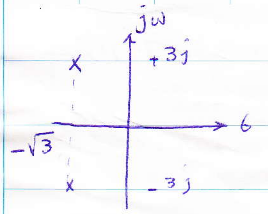
از 0.4 فاکتور می گیریم :

$$S_K^T=\frac{0.4(s+0.1+0.02K-0.02K)}{0.4\ (s+0.1+0.02K)}=\frac{s+0.1}{s+0.1+0.02K}$$

$$S_{K=5}^T=\frac{s+0.1}{s+0.2}$$ $\longleftarrow$ به ازای $K=5$

حساسیت در فرکانس های پایین $(s\to 0)$ : $S_{K=5}^{T(0)}=\frac{1}{2}=0.5$

حساسیت در فرکانس های بالا $(s\to\infty)$ : $S_{K=5}^{T(\infty)}=1$




سؤال سوم :

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ زمان فراجهش

$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$ (تولرانس 2٪)

$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$ (تولرانس 5٪)

پس :

برای محاسبه $t_p$ و $t_s$ باید $\zeta\omega_n$ و $\omega_d$ را بدانیم

ریشه ها مختلط است می دانیم :

$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$

$S_{1,2} = -\sqrt{3} \pm j3 \rightsquigarrow \zeta\omega_n = \sqrt{3}$ , $\omega_d = 3$

$\rightsquigarrow t_p = \frac{\pi}{3}$ sec

$t_s = \frac{3}{\sqrt{3}} = 3_{\text{sec}}$ ( 5٪ تولرانس) , $t_s = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.3_{\text{sec}}$ (تولرانس 2٪)

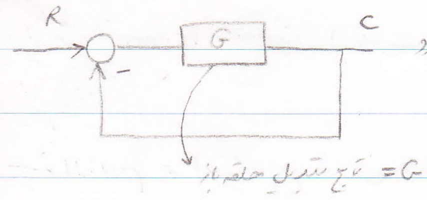
سؤال چهارم : ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را محاسبه می کنیم :

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{2}{(S+1)(S+2)}}{1+\frac{2}{(S+1)(S+2)}} = \frac{2}{S^2+3S+2+2} = \frac{2}{\underset{\substack{\downarrow \\ 2\zeta\omega_n}}{S^2+3S} + \underset{\substack{\downarrow \\ \omega_n^2}}{4}}$$

$\rightsquigarrow \omega_n = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , $2\zeta\omega_n = 3 \rightsquigarrow \zeta = \frac{3}{4} = 0.75$

$\rightsquigarrow M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.028 \rightsquigarrow M_p = 2.8\ \%$

سؤال پنجم : در سیستم کنترلی با فیدبک منفی واحد به صورت روبرو




$\frac{C}{R} = \frac{A}{B}$ می دانیم $\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G} \rightsquigarrow \frac{A}{B} = \frac{G}{1+G}$

$\rightsquigarrow \frac{B}{A} = \frac{1+G}{G} \rightsquigarrow \frac{B}{A} = \frac{1}{G} + 1 \rightsquigarrow \frac{B}{A} - 1 = \frac{1}{G} \rightsquigarrow \frac{B-A}{A} = \frac{1}{G}$

$\rightsquigarrow G = \frac{A}{B-A}$

این به این معنی است که اگر ما تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم را به صورت یک کسر که صورت آن مثلاً A و مخرج آن مثلاً B است داشته باشیم تابع تبدیل حلقه باز سیستم را که برای تشخیص نوع سیستم و ... لازم است را به صورت ↑ می توانیم بدست آوریم .